T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARTMANN POTANSİYELİ İÇİN UYUMLU DURUMLAR

Nalan KANDIRMAZ

DOKTORA TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

2005

ÖNSÖZ

Fiziğin temel problemlerinden biri parçacığın değişik potansiyellerdeki dinamiğinin anlaşılmasıdır. Bu problemlerde merkezcil potansiyeller büyük öneme sahiptir. Bu tür potansiyellerde hareket denklemleri daha basittir ve korunum yasaları daha geniştir. Merkezcil olmayan potansiyellerde ise, hareket denklemleri daha karışıktır ve çözümlerinin bulunması daha zordur. Diğer taraftan bu tür potansiyeller birden fazla etkinin varolduğu daha gerçekçi durumları betimler. İncelediğimiz potansiyel Coulomb+Ahoronov-Bohm etkilerini ya da benzen molekülü için bir model olarak önerilen halka-şekilli (ring-shaped) Hartmann potansiyelini içermektedir.

Bu çalışmada Hartmann potansiyeli için uyumlu durumlar parametrik zamanda path integrali kullanılarak elde edilmiştir.

Bu çalışma, "Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi" tarafından desteklenmiştir. (Proje No: **2002.01.0105.002**)

Çalışmalarım boyunca yardımlarından dolayı değerli hocam, danışmanım Sayın Prof. Dr. Nuri Ünal'a teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

HARTMANN POTANSİYELİ İÇİN UYUMLU DURUMLAR

NALAN KANDIRMAZ

Doktora Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Ocak 2005

Bu çalışmada merkezcil olmayan, halka biçimli Hartmann potansiyeli için uyumlu durumlar elde edildi. Sistem parametrik zamanda aynı ω açısal frekansı ile hareket eden dört salınıcı problemine dönüştürülerek, path integrali kullanılarak kuantize edilmiştir. Elde edilen uyumlu durumlar küresel koordinatlardaki Hartmann potansiyeli dalga fonksiyonlarının süperpozisyonudur ve karmal özdeğerlidir.

ANAHTAR KELİMELER:

Merkezcil olmayan potansiyeller, Hartmann potansiyeli, Uyumlu durumlar, Path integrali, holomorfik koordinatlar

JÜRİ:

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Prof. Dr. Veli KURT

Yrd. Doç. Dr. Melike B. YÜCEL

Prof. Dr. Önal ERGENEKON

Yrd. Doç. Dr. Figen BİNBAY

ABSTRACT

COHERENT STATES FOR THE HARTMANN POTANTİALS

Nalan KANDIRMAZ

Ph. D. in Physics

Adviser : Prof. Dr. Nuri ÜNAL

January-2005

In this study, we obtained the coherent states for the particle in Hartmann potential by transforming the problem into the four oscillators in the parametric time at the classical level and quantizing these oscillators using the path integration over the holomorphic coordinates of them.

KEY WORDS:

Non-center potentials, Hartmann potentials, coherent states, path integral, holomorphic coordinates

COMMITTEE:

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Prof. Dr. Veli KURT

Asst. Prof. Dr. Melike B. YÜCEL

Prof. Dr. Önal ERGENEKON

Asst. Prof. Dr. Figen BİNBAY

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Fiziğin geniş bir bölgesini kaplayan temel problemlerden biri, parçacıkların değişik potansiyellerdeki dinamiğinin anlaşılmasıdır. Bu problemlerde merkezcil potansiyeller büyük öneme sahiptir. Bu tür potansiyellerde hareket denklemleri daha basittir ve korunum yasaları daha geniştir. Merkezcil olmayan potansiyellerde ise, hareket denklemleri daha karışıktır ve çözümlerinin bulunması daha zordur. Diğer taraftan bu tür potansiyeller birden fazla etkinin varolduğu daha gerçekçi durumları betimler. İncelemeyi amaçladığımız potansiyel

$$V(r,\theta) = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{B\hbar^2}{2Mr^2\sin^2\theta} + \frac{C\hbar^2\cos\theta}{2Mr^2\sin^2\theta} \tag{1.1}$$

biçimindedir. Bu potansiyel Coulomb+Ahoronov-Bohm etkilerini (Aharonov vd 1959) ya da benzen molekülü için bir model olarak önerilen halka-şekilli (ring-shaped) Hartmann potansiyelini (Hartmann 1972, Mandal 2000) içermektedir.

Kuantum mekaniksel sistemlerin path integral yöntemi ile incelenmesi genellikle diğer tekniklere göre daha zordur, fakat bu teknik diğer tekniklerin işlemediği kütle çekimi alanının kuantumlanması gibi bazı problemlerde, sistemin kuantum dinamiğini betimlemenin tek yoludur (Feynmann 1965). Bu yararlarından dolayı, bu yöntemdeki ilerlemeler bir çok alanı etkilemektedir.

Genel olarak, sistemlerin kuantum mekaniğine göre betimlenmesinde zamana bağlı olmayan olasılıkları temel alan, enerji özdurumları kullanılır ve bu durumlarla, aynı sistemin klasik mekaniğe göre betimlenmesinde ortaya çıkan zamana bağlı yörüngeler arasında ilişki kurup fiziği bütün olarak algılamak da zordur. Bu nedenle, Schrödinger (Schrödinger 1926) kendi adıyla anılan ve enerji özdeğerlerini veren denkleminin çözümlerinin hemen ardından, Hidrojen atomu için konum işlemcisinin ortalamalarının Kepler elipsleri olacağı çözümleri aramaya başladı. Her ne kadar bu problem o tarihte çözülemedi ise de, Schrödinger Coulomb problemi yerine, ancak harmonik osilatör problemi için konum işlemcisinin ortalamaları klasik harmonik salınıcı yörüngeleri olan ve minimum belirsizlik koşuluna uyan uyumlu durumları buldu. Bu uyumlu (coherent) durumlar, daha sonra 1950'lerde elektromanyetik alanın uyumlu durumları olan 'lazer'ın anlaşılmasında kullanıldı. Daha sonra ortalama yörüngeleri Kepler elipsleri olan Coulomb potansiyeli için uyumlu durumların türetilmesi amacıyla çok sayıda çalışma yapıldı. Bu çalışmaların temel problemi, uyumlu durumları fiziksel zamanda kurmaya çalışması ya da grup kuramına dayanan çalışmalarda durumların ve beklenen değerlerin zaman içindeki gelişimini içermemesi idi. Oysa Newton'un klasik hesabında Kepler elipslerinin gelişimi, fiziksel zaman cinsinden değil, eksentrik anomali açısı cinsinden verilmektedir (Goldstein 1950).

Bu incelikler dikkate alınarak Coulomb probleminin uyumlu durumları eksentrik anomali açısına karşılık gelen parametrik zaman cinsinden son yıllarda, path integralleri kullanılarak kurulmuştur (Ünal 2000, 2001). Daha sonra bu durumlar Morse potansiyeli için de elde edilmiştir (Ünal 2002).

Bu tezin amacı path integrallerini kullanarak parametrik zamanda merkezcil olmayan halka biçimli (1.1) potansiyeli için uyumlu durumları oluşturmaktır. Path integralleri durum fonksiyonları ve onların evrimini oluşturmada en uygun yoldur ve kernel dalga fonksiyonları cinsinden parçalandığında normalize olmuş öz durumları verir. Bu çalışmada uyumlu durumları oluşturmak için problem, parametrik zamanda holomorfik koordinatlarda dört tane harmonik salınıcıya dönüştürüldü. Holomorfik koordinatlar, salınıcının yaratma ve yok etme işlemcilerine karşılık olduğu için salınıcının eylemi holomorfik koordinatlar cinsinden yazıldı. Daha sonra holomorfik kooordinatlar kullanılarak uyumlu durum dalga fonksiyonları ve onların evrimi oluşturuldu.

2. METOT

2.1. Klasik Mekaniğin Temel İlkeleri

2.1.1. Lagrange Fonksiyonu

$V(x_i, t)$ potansiyelinde hareket eden m kütleli parçacık için Lagranjiyen

$$L(\overrightarrow{x}_i, \dot{\overrightarrow{x}}_i; t) = \frac{m}{2}\dot{\overrightarrow{x}}_i^2 - V(x_i, t) \qquad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanır. (2.1.1) Lagranjiyen ifadesinde $\overrightarrow{x}_i(t)$ dinamik değişkeni gerçel uzayda $t_1 \leq t \leq t_2$ aralığında t ile parametrize edilmiş parçacığın klasik yörüngesini gösterir.

2.1.2. Hamilton fonksiyonu

Gerçel uzayda x_i, p_i, t dinamik değişkenler olmak üzere Hamiltonyen

$$H(\overrightarrow{x}_i, \overrightarrow{p}_i; t) = \frac{\overrightarrow{p}_i^2}{2m} + V(x_i, t) \qquad (2.1.2)$$

biçiminde verilir. Hamiltonyenle Lagranjiyen arasındaki ilişki

$$L = \overrightarrow{p}_i \cdot \frac{d\overrightarrow{x}_i}{dt} - H(\overrightarrow{x}_i, \overrightarrow{p}_i; t) \qquad (2.1.3)$$

şeklinde yazılır.

2.1.3. Fonksiyonel Eylem

$L(\overrightarrow{x}_i, \dot{\overrightarrow{x}}_i; t)$ dinamik sistemin Lagranjiyeni, t_1 ve t_2 de sistemin evriminde iki an olmak üzere fonksiyonel eylem

$$A(\overrightarrow{x}_i, \dot{\overrightarrow{x}}_i; t) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\overrightarrow{x}_i, \dot{\overrightarrow{x}}_i; t) \qquad (2.1.4)$$

biçiminde tanımlanır.

2.1.4. En Küçük Eylem İlkesi

Bu ilke fonksiyonel eylemin Lagranjiyen gösteriminde

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\overrightarrow{x}_i, \dot{\overrightarrow{x}}_i; t) \qquad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanırken Hamiltonyen gösteriminde

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[p_i \cdot \frac{d\overrightarrow{x}_i}{dt} - H(\overrightarrow{x}_i, \overrightarrow{p}_i; t) \right] \qquad (2.1.6)$$

biçiminde tanımlanır. Eylemin en küçük olması demek konfigürasyon uzayında sistemin evriminin, yani t_1'den t_2'ye kadar değişmesinin, A'nın değişimini sıfır kılacak evrim yolu üzerinde oluşması demektir.

2.2. Kuantum Mekaniğinin Temel İlkeleri

2.2.1. Geçiş genliği

t_a anında x_a konumunda bulunan bir parçacığın t_b anında x_b konumuna geçebilmesi için genlik, $\widehat{U}(t_b - t_a)$ kuantum evrim işlemcisi ve $\widehat{H}$ Hamiltonyen olmak üzere

$$\langle x_b, t_b; x_a, t_a\rangle = \left\langle x_b \middle| \widehat{U}(t_b - t_a) \middle| x_a \right\rangle = \left\langle x_b \middle| \exp\left[-i\widehat{H}(t_b - t_a)\right] \middle| x_a \right\rangle \qquad (2.2.1)$$

şeklinde verilir. Ayrıca konum özdurumlarının üstüste gelmesi olarak $|\Psi\rangle$ durumları

$$\langle x_b | \Psi(t_b)\rangle = \left\langle x_b \middle| \exp\left[-i\widehat{H}(t_b - t_a)\right] \middle| \Psi(t_a) \right\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_a \left\langle x_b \middle| \exp\left[-i\widehat{H}(t_b - t_a)\right] \middle| x_a \right\rangle \langle x_a | \Psi(t_a)\rangle \qquad (2.2.2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx_a \langle x_b, t_b; x_a, t_a\rangle \langle x_a | \Psi(t_a)\rangle$$

biçiminde yazılabilir. $\langle x_b, t_b; x_a, t_a\rangle$ gösterimi Kernel olarak adlandırılır ve $U(x_b, t_b; x_a, t_a)$ şeklinde gösterilir.

2.2.2. Sonlu Bir Zaman Aralığı İçin Geçiş Genliği Hesabı

Zaman aralığı N eşit parçaya bölünür ve her bir aralık $\in$ ile gösterilirse geçiş genliği

$$\langle x_b, t_b; x_a, t_a\rangle = \left\langle x_b \middle| e^{-i\in\widehat{H}} \cdots e^{-i\in\widehat{H}} \middle| x_a \right\rangle \qquad (2.2.3)$$

şeklinde yazılır. Konum durumlarının tam kümesi için

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_i \, |x_i\rangle \langle x_i| = 1, \qquad i = 1, 2 \cdots N-1 \qquad (2.2.4)$$

bağıntısı kullanılarak (2.2.3) ifadesi

$$\langle x_b, t_b; x_a, t_a\rangle = \int dx_1 \cdots \int dx_{N-1} \left\langle x_b \left| e^{-i\in\hat{H}} \right| x_{N-1}\right\rangle \left\langle x_{N-1} \left| e^{-i\in\hat{H}} \right| x_{N-2}\right\rangle$$

$$\cdots \left\langle x_2 \left| e^{-i\in\hat{H}} \right| x_1\right\rangle \left\langle x_1 \left| e^{-i\in\hat{H}} \right| x_a\right\rangle \tag{2.2.5}$$

şeklini alır. Bu ifade t_a anında x_a konumundan başlayan t_b anında x_b konumuna ulaşan tüm yollar üzerinden integrali göstermektedir. (2.2.5) de Hamiltonyen yerine, kesikli Hamiltonyen biçimi yazılır ve N-1 tane konum integrali, N tane momentum integrali olmak üzere geçiş genliği

$$\langle x_b, t_b; x_a, t_a\rangle = \int dx_1 \cdots \int dx_{N-1} \int \frac{dp_1}{2\pi} \cdots \int \frac{dp_N}{2\pi}$$

$$\times \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{N} \left[p_j \frac{(x_j - x_{j-1})}{\in} - E(p_j, x_{j-1}) \right] \in \right\} \tag{2.2.6}$$

biçiminde ifade edilir. (2.2.6) genlik ifadesinde zaman aralığı sayısını sonsuza ($N \to \infty$) ve zaman aralığını sıfır ($\in \to 0$) limitine götürdüğümüzde üstel fonksiyon Riemann integralinin standart biçimine dönüşerek

$$\lim_{N\to\infty} i \in \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\in} \right)^2 - V(x_{j-1}) \right] = i \int_{t_a}^{t_b} dt L(x, \dot{x}) \tag{2.2.7}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer bütün yollar üzerinden integral daha kısa bir gösterimde yazılmak istenirse

$$\int_{x_a}^{x_b} D\left[x(t)\right] = \lim_{N\to\infty} \int dx_1 \cdots \int dx_{N-1} \left(\frac{m}{2\pi i \in} \right)^{N/2} \tag{2.2.8}$$

biçiminde ifade edilir. (2.2.7) ve (2.2.8) kullanılırsa (2.2.6) geçiş genliği

$$\langle x_b, t_b; x_a, t_a\rangle = \int_{x_a}^{x_b} D\left[x(t)\right] e^{iA[x(t)]} \tag{2.2.9}$$

ifadesine dönüşür.

2.3. Merkezcil Olmayan Potansiyeller

Merkezcil bir potansiyel içinde bir parçacığın hareketi klasik fizikte ve kuantum fiziğinde önemli bir problemdir. Merkezsel alanda bir parçacığın hareketini incelemek için, problemin küresel simetrisinden dolayı,Schrödinger denklemini ve çözümlerini küresel koordinatlarda ifade etmek uygun olur.

Küresel koordinatlarda zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{L^2}{\hbar^2 r^2}\right)+V(r)\right]\Psi(r,\theta,\varphi)=E\Psi(r,\theta,\varphi) \qquad (2.3.1)$$

biçimindedir. (2.3.1) denkleminde açıkça görüldüğü gibi θ ve φ açılarına bağlılık sadece L^2'li terimdedir.(2.3.1) Schrödinger denklemindeki L^2

$$L^2=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \qquad (2.3.2)$$

dir. Küresel simetrik potansiyelde hareket eden bir parçacık için dalga fonksiyonu

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=Y_{lm}(\theta,\varphi)R(r) \qquad (2.3.3)$$

olarak değişkenlerine ayrılabilir. Açısal koordinatlara bağlı $Y_{lm}(\theta,\varphi)$, açısal momentum öz fonksiyonlarıdır.

Hidrojen ve hidrojen benzeri atomlar pozitif yüklü bir çekirdek ve onun etrafında kapalı yörüngelerde bulunan elektronlar ve en dışta da bir elektrondan oluşurlar. Bu dıştaki elektron çekirdeğin ve kapalı yörüngelerde bulunan elektronların oluşturduğu merkezsel bir potansiyel içinde bulunurlar. Çekirdeğin yükü $+Ze$, dış elektron yükü $-e$ ile gösterilirse, Coulomb yasasına göre çekirdekle dış elektron arasındaki potansiyel

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{r}=\frac{k}{r}, \quad k=Ze^2\rangle 0 \qquad (2.3.4)$$

şeklinde verilir. N tane elektronu bulunan bir atom göz önüne alalım. Bu atomun çekirdeğinini atom numarası Z olsun. Çok elektronlu bir atomu tam olarak incelemek için aşağıdaki etkileşmeleri göz önüne almak gerekir:

1. Noktasal kabul edilen çekirdek ile elektronların elektrostatik etkileşmesi.
2. Elektronların kendi aralarında elektrostatik etkileşmesi
3. Elektronların spinlerinin yörüngesel hareketleri ile manyetik etkileşmesi (spin-yörünge etkileşmesi).
4. Elektronların spinlerinin arasında manyetik (spin-spin) etkileşme.
5. Elektronların spin ve yörüngesel manyetik momentlerinin çekirdeğin manyetik momenti ile etkileşmesi (e^--çekirdek manyetik etkileşmesi).

6. Elektronların hareketlerindeki relativistik etkiler.

Bütün bu etkileşmeleri dikkate alarak çok elektronlu bir atomun incelenmesi oldukça karmaşık bir problemdir. Onun için bazı yaklaşımlar yapmak zorunluluğu vardır. 5. etkileşme çekirdekten ileri gelen etkileşmedir ve atomun enerji düzeylerinde küçük bir kaymaya neden olur. Genel olarak, 4 nolu spin -spin etkileşmesi, 3 nolu spin-yörünge etkileşmesine göre daha küçüktür. Çok elektronlu atomlarda 6 nolu göreli etkilerde çok küçük kabul edilebilirler (H atomu gibi az elektronlu atomlarda bu etki daha büyüktür). Bu etkileşmeler ihmal edilip, koordinat başlangıcı çekirdeğin kütle merkezi alınırsa çok elektronlu bir atomun Hamiltonyeni

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \sum_{i=1}^{N} \frac{Ze^2}{r_i} + \sum_{i} \sum_{j} \frac{e^2}{r_{ij}} + \sum_{i} f_i(r_i) \vec{l}_i . \vec{s_i} \tag{2.3.5}$$

şeklinde yazılabilir. (2.3.5) Hamiltonyeninde $\vec{l}$ yörüngesel açısal momentum, $\vec{s}_i$ spin açısal momentumlarını ve $f_i(r_i)$ spin-yörünge etkileşmelerinin büyüklüğünü belirten bir fonksiyondur.

Çok elektronlu bir atomun Schrödinger denklemini çözmek zordur. Onun için merkezsel alan yaklaşımı denen bir yaklaşım yapılabilir. Bunun için elektronların birbirlerinden bağımsız bir $U(r_i)$ ortalama merkezsel potansiyel içinde bulundukları kabul edilir. Bu potansiyel ile Hamiltonyen

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \tag{2.3.6}$$

biçiminde yazılır. (2.3.6) Hamiltonyenindeki $\hat{H}_0, \hat{H}_1, \hat{H}_2$ sırasıyla

$$\hat{H}_0 = \sum_{i} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(r_i) \right], \tag{2.3.7}$$

$$\hat{H}_1 = \sum_{i} \left[\frac{Ze^2}{r_i} + \sum_{i \prec j} \frac{e^2}{r_{ij}} - U(r_i) \right], \tag{2.3.8}$$

$$\hat{H}_2 = \sum_{i} f_i(r_i) \vec{l}_i \, \vec{s_i}, \tag{2.3.9}$$

biçimlerinde ifade edilir. (2.3.9)'daki $\hat{H}_2$ spin yörünge etkileşme terimindeki $f_i(r_i)$ fonksiyonu $U(r)$ ortalama potansiyeline bağlıdır. Bu fonksiyon

$$f_i(r_i) = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2}\frac{1}{r_i}\frac{dU}{dr_i} \tag{2.3.10}$$

şeklindedir. Burada $U(r)$ fonksiyonu merkezsel olmadığı zaman $\frac{dU}{dr_i}$ yerine $\frac{\partial U}{\partial r_i}$ kısmi türevi alınır. Böylece spin-yörünge etkileşmesinin büyüklüğünün ortalama potansiyelin değişimi ile orantılı olduğu anlaşılır. Burada c ışık hızıdır.

Moleküllerin elektron spektrumunu incelemek için spin yörünge etkileşmesini hesaba katmak gerekir. Spin yörünge etkileşmesini içeren Hamiltonyen

$$H_{LS} = \frac{1}{2\mu^2c^2}S(gradV \times \rho) = \frac{\hbar^2}{4\mu^2c^2i}\sigma(\nabla V \times \nabla) \tag{2.3.11}$$

biçiminde yazılır. Radyal simetrik potansiyel için Hamiltonyen

$$H_{LSR} = \frac{1}{2\mu^2c^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right)\vec{L}\cdot\vec{S} \tag{2.3.12}$$

şeklindedir.

2.3.1. Hartmann Potansiyeli

Hartmann'ın halka biçimli potansiyeli

$$V(r,\theta) = \gamma\sigma^2\left(\frac{2a}{r} - \frac{\gamma a^2}{r^2\sin^2\theta}\right)E_0 \tag{2.3.13}$$

biçimindedir. Burada a Bohr yarıçapı ve E_0 Hidrojen atomunun taban durum enerjisidir. γ ve σ pozitif parametrelerdir. Bu potansiyel benzen molekülüne bir model olarak Hartmann tarafından önerilmiştir. Bu potansiyel (1.1) potansiyelinde $C = 0$, $B = \gamma^2\sigma^2$ ve $Z = \gamma\sigma^2$ alınarak gösterilebilir. Bu sistemin enerji spektrumu

$$E = -\frac{m\gamma^2\sigma^2e^4}{2\hbar^2\left[n_2 + \widetilde{n}_2 + 1 + \sqrt{\nu^2 + \gamma^2\sigma^2}\right]^2} \tag{2.3.14}$$

olarak yazılır.

2.1.2. Aharonov-Bohm Potansiyeli

Aharonov-Bohm vektör potansiyeli küresel koordinatlarda

$$A_r = A_\theta = 0, \quad A_\phi = \frac{F}{2\pi r\sin\theta} \tag{2.3.15}$$

olarak verilir. Burada F sonsuz uzun ve çok ince bir selenoid boyunca yaratılan sabit akıdır, z ekseni boyunca yönelmiştir ve e yükü orjinde toplanmıştır. Bileşik sistemin Hamiltonyeni

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta^2 - \frac{Ze^2}{r} + \frac{1}{2m}\left[\frac{A_o}{r^2\sin^2\theta} + \frac{iB_o}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \tag{2.3.16}$$

dir. (2.3.16) Hamiltonyeninde $A_0 = \left(\frac{ZeF}{2\pi c}\right)^2$ ve $B_o = \frac{Ze\hbar F}{\pi c}$ dir. Eğer F akısı kesikli (kuantumlu) ise

$$F = \frac{2\pi\hbar c}{Ze}\left[\nu - |M|\right] \tag{2.3.17}$$

olarak yazılır. $|M|$ tamsayıdır.

Sistemin etkin potansiyeli

$$V = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{1}{2m}\frac{A_o}{r^2\sin^2\theta} - \frac{B_o\nu}{r^2\sin^2\theta} \tag{2.3.18}$$

şeklindedir. (2.3.18) potansiyeli merkezcil olmayan (1.1) potansiyelinin özel bir durumudur. (1.1) potansiyelinde $c = 0$, $b = \frac{1}{2m}(A_o - B_o\nu)$ olarak alınırsa (2.3.18) potansiyeli elde edilir. (2.3.18) potansiyeli için enerji spektrumu

$$E = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2\left[n_2 + \widetilde{n}_2 + 1 + |M|\right]^2} \tag{2.3.19}$$

dir.

2.4. Feynman Path İntegral Formülasyonu

Göreli olmayan kuantum mekaniğinin Lagranjiyen formülasyonunda temel nicelik propagatördür. Propagatör t_a anında x_a konumunda bulunan temel bir parçacığın t_b anında x_b konumunda bulunabilmesi için geçiş genliği olarak adlandırılır; aynı zamanda kernel denilmektedir. Feynman tarafından önerilen propagatör

$$A\left[x(t)\right] = \int L(x, \dot{x}, t)dt \tag{2.4.1}$$

parçacığın eylemi olmak üzere

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \exp\left\{iA\left[x(t)\right]\right\} D\left[x(t)\right] \tag{2.4.2}$$

şeklindedir. Burada $D\left[x(t)\right]$;$x(t_a) = x_a$'dan başlayıp $x(t_b) = x_b$'ye ulaşan olası tüm yollar üzerinden integrasyonu gösterir. Yollardan gelen katkıların birbirinden farklı olmasının nedeni bu yollar arasında oluşan faz farklarıdır. Propagatör kuantum mekaniğinin üst üste binme ilkesini içermektedir. Çünkü olası tüm yollardan gelen katkıların toplamı şeklinde ifade edilmektedir.

Path integralinin işlevsel anlamı şudur: $[t_a, t_b]$ zaman aralığını N eşit parçaya bölüp her bir aralık $\in$ ile gösterilirse

$$t = (t_0 = t_a, t_1, t_2, \cdots, t_{N-1}, t_N = t_b) \tag{2.4.3}$$

$$t_j - t_{j-1} = \epsilon, N\epsilon = t_b - t_a, j = 1, 2, \cdots N,\ x_j = x(t_j) \tag{2.4.4}$$

$$x_j = x(t_j),\ x_a = x(t_a),\ x_N = x(t_N) = x_b \tag{2.4.5}$$

yazılır. (2.4.3), (2.4.4) ve (2.4.5) ifadeleri kullanılarak fonksiyonel eylemin kesikli biçimi

$$A_N[x_j] = \epsilon \sum_{j=1}^{N} L\left[\frac{x_j + x_{j-1}}{2}, \frac{x_j - x_{j-1}}{\in}, j \in\right] \tag{2.4.6}$$

olarak ifade edilir ve path diferensiyel ölçüsü de

$$D[x(t)] \to C_N \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \tag{2.4.7}$$

şeklinde tanımlanır. Sabit m kütleli bir parçacık için $C_N = \left(\frac{m}{2\pi i \in}\right)^{3N/2}$'dir. (2.4.6) ve (2.4.7) kullanılarak Propagatör

$$K_N(x_b, t_b; x_a, t_a) = C_N \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ i A_N[x_j] \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \right\} \tag{2.4.8}$$

biçiminde ifade edilir. (2.4.8) propagatör ifadesinin limit biçimi

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \in\to 0}} U_N(x_b, t_b; x_a, t_a) \tag{2.4.9}$$

şeklinde yazılır. Path diferensiyel ölçüsünde C_N'in seçimi Path integralinin istenen limiti olmalıdır, bu $N \to \infty$ durumunda serbest parçacık normalizasyonunu verir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x_b, t_b; x_a, t_a) dx_b = 1 \tag{2.4.10}$$

biçiminde yazılır. Propagatör, iki konum arasında alınan zaman evrim işlemcisinin matris elemanlarıdır ve

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \left\langle x_b \middle| \exp\left[-i(t_b - t_a)\widehat{H}\right] x_a \right\rangle \tag{2.4.11}$$

olarak ifade edilir. Schrödinger denklemini sağlayan dalga fonksiyonu Kernel kullanılarak

$$\Psi(x_b, t_b) = \int U(x_b, t_b; x_a, t_a) \Psi(x_a, t_a) \qquad (t_b \geqslant t_a) \tag{2.4.12}$$

biçiminde türetilebilir. (2.4.12)'deki ilişkiden

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \delta(x_b - x_a) \tag{2.4.13}$$

bağıntısı yazılabilir. Ayrıca $(t_b - t_a) = \in$ olan çok küçük zaman aralıkları için Ψ'nin Schrödinger denklemini sağladığı gösterilebilir. Schrödinger denklemi

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi = H\Psi \tag{2.4.14}$$

biçimindedir. Schrödinger'in Green fonksiyonu ve Feynman'ın yaklaşımı bir bütündür ve

$$\widetilde{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \Theta(t_b - t_a)K(x_b, t_b; x_a, t_a) \tag{2.4.15}$$

ifadesi yazılabilir. (2.4.15)'deki $\Theta(t_b - t_a)$; $t \geqslant 0$ olan bir basamak fonksiyonudur. $\widetilde{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ propagatörü

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t_b}\right) - H_b\right]\widetilde{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \delta(t_b - t_a)\delta(x_b - x_a) \tag{2.4.16}$$

denklemini sağlar. Böylece propagatörün Schrödinger denkleminin Green fonksiyonu olduğu görülür. Üst üste binme ilkesinin sonucu olarak da

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int K(x_b, t_b; x, t)K(x, t; x_a, t_a)dx \tag{2.4.17}$$

bağıntısı yazılabilir. Açık olarak zamana bağlı olmayan Lagranjiyen varsa propagatör

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sum \exp\left[iE_N(t_b - t_a)\right]\Psi_n^*(x_a)\Psi_n(x_b) \tag{2.4.18}$$

biçiminde Hamiltonyen işlemcisinin enerji özfonksiyonlarının bir tam kümesi cinsinden yazılabilir. Spektrum sürekli olduğu zaman toplam, integrale dönüşür. $T = t_b - t_a$ olmak üzere T'ye göre Fourier dönüşümü alınırsa

$$\widetilde{K}_E(x_b, x_a) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty} dT \exp\left(iET\right)K(x_b, t_b; x_a, t_a)$$

$$= \sum_n \frac{\Psi_n(x_b)\Psi_n^*(x_a)}{E - E_n} \tag{2.4.19}$$

Burada $\mathrm{Im}\, E_N > 0$'dır. Bu bağıntılar yardımıyla sistemi temsil eden dalga fonksiyonları ve enerji spektrumu elde edilebilir.

2.5. Harmonik Salınıcının Uyumlu Durumları

Konum zaman uzayında Lagranjiyen

$$L = p\dot{x} - H \tag{2.5.1}$$

olarak yazılır. (2.5.1)'de H Hamiltonyendir ve

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 x^2) = \frac{\omega}{2}(\frac{p^2}{m\omega} + m\omega x^2) \tag{2.5.2}$$

olarak verilir.

$$q^2 = m\omega x^2 \tag{2.5.3}$$

$$p_q^2 = \frac{p^2}{m\omega} \tag{2.5.4}$$

boyutsuz değişkenleri tanımlanırsa Lagranjiyen

$$L = \frac{1}{2}\left(p_q\frac{dq}{dt} - q\frac{dp_q}{dt}\right) - \frac{\omega}{2}\left(p_q^2 + +q^2\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(p_q q) \tag{2.5.5}$$

olarak yazılır. (2.5.5)'deki son terim olan tam türev terimi ihmal edilirse

$$L = \frac{1}{2}\left(p_q\frac{dq}{dt} - q\frac{dp_q}{dt}\right) - \frac{\omega}{2}\left(p_q^2 + +q^2\right) \tag{2.5.6}$$

olur. (2.5.6) kullanılarak

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(ip_q + q\right)$$

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-ip_q + q\right) \tag{2.5.7}$$

holomorfik koordinatları tanımlanırsa holomorfik koordinatlar cinsinden Lagranjiyen

$$L = \frac{1}{2i}\left(\frac{da^*}{dt}a - a^*\frac{da}{dt}\right) - \omega a^* a \tag{2.5.8}$$

olarak yazılır. Lagranjiyenin varyasyonundan

$$\dot{a} = -i\omega a$$

$$\dot{a}^* = i\omega a^* \tag{2.5.9}$$

biçiminde klasik hareket denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri

$$a(t) = e^{-i\omega(t-t_1)}a(t_1)$$

$$a^*(t) = a^*(t_2)e^{i\omega(t-t_2)} \tag{2.5.10}$$

biçimindedir. Bu sistemin enerjisi de

$$E = \omega a^* a = \omega a^*(t_2)e^{i\omega(t_1-t_2)}a(t_1) = sabit \tag{2.5.11}$$

dir.

2.5.1. Kuantizasyon

Schrödinger denklemi

$$H\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{2.5.12}$$

şeklindedir. Konfigürasyon uzayında $a^* \in C$'dir. Ψ,dalga fonksiyonu a^* ve t'nin fonksiyonu olarak $\Psi = \Psi(a^*, t)$ biçiminde gösterilir. Kuantum Hamiltonyen

$$H = \frac{\omega}{2}(\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + \widehat{a}\widehat{a}^\dagger) \tag{2.5.13}$$

biçimindedir. a ve $\widehat{a}^\dagger$ işlemcileri arasındaki komütasyon ilişkisi

$$\left[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger\right] = \hbar \tag{2.5.14}$$

dir. (2.5.14) komütasyon ilişkisi kullanılarak (2.5.13) Hamiltonyeni

$$H = \frac{\omega}{2}(\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + \frac{\hbar}{2}) \tag{2.5.15}$$

olarak yazılır. Yine komütasyon ilişkisi kullanılarak

$$a = \hbar\frac{\partial}{\partial a^*} \tag{2.5.16}$$

olduğu gösterilebilir. (2.5.15) ve (2.5.16) kullanılarak (2.5.1) Schrödinger denklemi

$$\hbar\omega\left(a^*\frac{\partial}{\partial a^*} + \frac{1}{2}\right)\Psi(a^*, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(a^*, t) \tag{2.5.17}$$

biçiminde yazılır. Değişkenlere ayırma metodu kullanılarak $\Psi(a^*, t)$ dalga fonksiyonunun zamana bağlı kısmı ve a* koordinatlarına bağlı kısmı ayrılırsa

$$\Psi(a^*, t) = e^{-i\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\omega t}U_\lambda(a^*) \tag{2.5.18}$$

olur. (2.5.18)'in (2.5.17)'de yerine yazılması ile elde edilen konuma bağlı diferensiyel denklem çözülürse

$$U_\lambda(a^*) = a^{*\lambda} \tag{2.5.19}$$

elde edilir. (2.5.19)'daki U_λ'ya a işlemcisi uygulanırsa

$$\widehat{a}U_\lambda(a^*) = \hbar\frac{d}{da^*}a^{*\lambda} = \hbar\lambda a^{*\lambda-1} \tag{2.5.20}$$

olur. a'nın $U_\lambda(a^*)$ üzerindeki ardışık etkisi bir adımdan sonra kesilmelidir, yani sıfırlanmalıdır. $\Psi(a^*)$ analitik bir fonksiyon olduğundan dolayı λ, n'dir. Yani λ pozitif tam sayı değerler almalıdır. (2.5.19)

$$U_\lambda(a^*) = U_n(a^*) = a^{*n} \tag{2.5.21}$$

olur. (2.5.21), (2.5.18)'de yerine yazılırsa

$$\Psi_n(a^*, t) = C_n e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} a^{*n} \tag{2.5.22}$$

olur.

$$\int \frac{da^* da}{2\pi i} e^{-a^* a} \left(\Psi_n(a^*)\right)^* \Psi_m(a^*) = \delta_{nm} \tag{2.5.23}$$

normalizasyon koşulundan

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \tag{2.5.24}$$

elde edilir. Böylece dalga fonksiyonu

$$\Psi(a^*, t) = \frac{a^{*n}}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \tag{2.5.25}$$

olarak bulunur.

2.5.2. Uyumlu Durumlar

Uyumlu durumlar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \Psi_n(a^*, t) = \Psi_\alpha(a^*, t) \tag{2.5.26}$$

olarak tanımlanır (2.5.25) kullanılarak (2.5.26)

$$\Psi_\alpha(a^*, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^{*n})}{n!} e^{-in\omega t} e^{-i\omega t/2} \tag{2.5.27}$$

biçiminde yazılır. (2.5.27)'deki n üzerinden toplam, üstel fonksiyonun serisel açılım ifadesi olduğundan (2.5.27)

$$\Psi_\alpha(a^*, t) = e^{-i\omega t/2} e^{a^*\left[\alpha e^{-i\omega t}\right]} \tag{2.5.28}$$

şeklinde yazılabilir. $t = 0$ durumunda (2.5.28)

$$\Psi_\alpha(o) = e^{a^*\alpha} \tag{2.5.29}$$

olur. Zamana bağlı a ifadesi

$$\alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t} \tag{2.5.30}$$

alınırsa dalga fonksiyonu

$$\Psi_\alpha(t) = e^{a^*\alpha(t)} e^{-i\omega t/2} \tag{2.5.31}$$

yazılabilir.

Uyumlu durumlar üç farklı yolla tanımlanır: **a.** Minimum belirsiz uyumlu durumlar (MUCS), **b.** Azaltma İşlemcisi Uyumlu Durumları (AOCS), **c.** Yer Değiştirme İşlemcisi Uyumlu Durumları (DOCS).

a. Minimum belirsiz uyumlu durumlar (MUCS)

x konum ve p momentum arasındaki komütasyon ilişkisi

$$[x, p] = i\hbar \tag{2.5.32}$$

ve belirsizlik ilişkisi

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geq \frac{1}{4}\hbar^2 \tag{2.5.33}$$

dir. Eğer komütasyon ilişkisi

$$[x, p] = iG \tag{2.5.34}$$

alınırsa belirsizlik ilişkisi

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geq \frac{1}{4}\langle G\rangle^2 \tag{2.5.35}$$

olur. Özdeğer denklemi de

$$\left(A + \frac{i\langle G\rangle}{2(\Delta B)^2}B\right)\Psi = \left(\langle A\rangle + \frac{i\langle G\rangle}{2(\Delta B)^2}\langle B\rangle\right)\Psi \tag{2.5.36}$$

şeklinde yazılır. x ve p için (2.5.36) özdeğer denklemini sağlayan dalga fonksiyonları da

$$\Psi_{CS}(x) = \left[2\pi (\Delta x)^2\right]^{-1/2} \exp\left\{-\left[\frac{x-\langle x\rangle}{2(\Delta x)}\right]^2 + \frac{i}{\hbar}\langle p\rangle x\right\} \tag{2.5.37}$$

yazılır. $n = 0$ taban durum dalga fonksiyonları $\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0$ için özel bir durumdur ve

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta p}\right)^2 = \frac{1}{(m\omega)^2}$$

$$(\Delta x)^2 = \left(2a_o^2\right)^{-1} = x_o^2 \tag{2.5.38}$$

dir. (2.5.38) koşulları durgun klasik parçacığa karşılık gelir. Bu şartlarla uyumlu durum dalga paketleri klasik parçacığın yörüngesini izleyecektir ve şeklini koruyacaktır. Eğer $\left(\frac{\Delta x}{\Delta p}\right)$'nin farklı değerleri seçilirse dalga paketleri şeklini koruyamaz.

b. Azaltma İşlemcisi Uyumlu Durumları (AOCS)

Bu durumlar α kompleks özdeğerli azaltma işlemcisinin özdeğerleri olarak

$$a^- |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \tag{2.5.39}$$

tanımlanır. $|\alpha\rangle$ durumları

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}|n\rangle \tag{2.5.40}$$

şeklindedir. Ayrıca Gausyen küme olarak

$$|\alpha\rangle = \left[2\pi(\Delta x)^2\right]^{1/2}\exp\left[-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2} + \frac{x\alpha}{\Delta x} - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + |\alpha|^2\right)\right] \tag{2.5.41}$$

biçiminde de ifade edilebilir. x ve p için yazılan sınır şartları ile

$$|\alpha\rangle = \frac{\langle x\rangle}{2\Delta x} + \frac{i}{\hbar}\langle p\rangle \Delta x = \frac{1}{2}\left[\frac{\langle x\rangle}{\Delta x} + i\frac{\langle p\rangle}{\Delta p}\right] \tag{2.5.42}$$

olur. Böylece

$$|\alpha\rangle = \exp\left[-i\langle p\rangle\langle x\rangle/2\hbar\right]\Psi_{CS} \tag{2.5.43}$$

olur.

c. Yer Değiştirme İşlemcisi Uyumlu Durumları (DOCS)

Bu durumlar taban durumunda hareket eden

$$D(\alpha) = \exp\left(\alpha a^{+} - \alpha^{*} a^{-}\right) \tag{2.5.44}$$

yerdeğiştirme işlemcisi kullanılarak tanımlanır. Baker-Campbell-Mausdorff özdeşliği yardımıyla

$$\begin{aligned} D(\alpha)\left|0\right\rangle &= \exp(-\frac{1}{2}\left|\alpha\right|^{2})\exp\left(\alpha a^{+}\right)\exp(-\alpha a)\left|0\right\rangle \\ &= \exp(-\frac{1}{2}\left|\alpha\right|^{2})\exp\left(\alpha a^{+}\right)\left|0\right\rangle \\ &= \exp(-\frac{1}{2}\left|\alpha\right|^{2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n}}{(n!)^{1/2}}\left|0\right\rangle \\ &= \left|\alpha\right\rangle \end{aligned} \tag{2.5.45}$$

elde edilir. Bu sonuç AOCS ile eşdeğerdir.

2.6. Hartmann Potansiyeli için Schrödinger Denklemi Çözümleri

Küresel koordinatlarda Hartmann potansiyeli için Schrödinger denklemi

$$\left[-\frac{1}{2}\nabla^{2} - \frac{\eta\sigma^{2}}{r} + \frac{q\eta^{2}\sigma^{2}}{2r^{2}\sin^{2}\theta}\right]\Psi(r,\theta,\varphi) = E\Psi(r,\theta,\varphi) \tag{2.6.1}$$

biçimindedir. $\Psi(r,\theta,\varphi)$ dalga fonksiyonu değişkenlere ayırma metodu kullanılarak

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = \frac{U(r)}{r}H(\theta)\Phi(\varphi) \tag{2.6.2}$$

biçiminde ifade edilir. (2.6.2)' nin (2.6.1)' de yerine yazılması ile

$$\frac{d^{2}U(r)}{dr^{2}} + (2E + \frac{2\eta\sigma^{2}}{r} - \frac{\lambda}{r^{2}})U(r) = 0 \tag{2.6.3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dH(\theta)}{d\theta}) + (\lambda - \frac{q\eta^{2}\sigma^{2} + m^{2}}{\sin^{2}\theta})H(\theta) = 0 \tag{2.6.4}$$

$$\frac{d^{2}\Phi(\varphi)}{d\varphi^{2}} + m^{2}\Phi(\varphi) = 0 \tag{2.6.5}$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. (2.6.3), (2.6.4) ve (2.6.5)'deki m ve λ değişkenlere ayırma sabitleridir. $\Psi(r,\theta,\varphi)$ bütün uzayda sonlu olmalıdır. (2.6.3)'deki $U(r)$ için sınır şartları $U(0) = 0$ ve $U(\infty) = 0$, (2.6.4)'deki $H(\theta)$ için $H(0)$ ve $H(\pi)$ sonlu değer ve (2.6.5)'deki $\Phi(\varphi)$ için de $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ olmalıdır. (2.6.5) denkleminin çözümü

$$\Phi_{m}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi} \tag{2.6.6}$$

?

elde edilir. $m = 0, \pm1, \pm2 \cdots$ olmalıdır. $m' = \sqrt{q\eta'\sigma' + m}$, $\lambda = l2(l' + 1)$ alınıp $x = \cos\theta$ biçiminde yeni bir değişken tanımlanarak (2.6.4) denklemi

$$(1 - x^2)\frac{d^2H(x)}{dx^2} - 2x\frac{dH(x)}{dx} + \left[l'(l' + 1) - \frac{(m')^2}{1 - x^2}\right] H(x) = 0 \qquad (2.6.7)$$

biçimine dönüştürülür. (2.6.7)'deki $H(x)$ için bağlı durumlar $H\,|_{x=\pm1} = sonlu\,değer$ almalıdır. $H(x)$ bağlı Legendre denklemidir. l' ve m' pozitif tamsayı veya sıfırdır. θ'ya bağlı çözüm

$$H_{l'm'}(\cos\theta) = N_{l'm'}(\sin\theta)^{m'} \sum_{\nu=0}^{\left(\frac{l'-m'}{2}\right)} \frac{(-1)^{\nu}\Gamma(2l'-2\nu+1)}{2^{l}\nu!(l'-m'-2\nu)!(l'-\nu+1)!}(\cos\theta)^{l'-m'-2} \qquad (2.6.8)$$

olur. (2.6.8)'deki $N_{l'm'}$

$$N_{l'm'} = \sqrt{\frac{(2l' + 1)(l' - m')!}{2\Gamma(l' + m' + 1)}} \qquad (2.6.9)$$

biçiminde normalizasyon sabitidir. ve $l' = k' + m'$ k=0,1,2$\cdots$dir. r'ye bağlı denklem

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2} + \left(2E + \frac{2\eta\sigma^2}{r} - \frac{l'(l' + 1)}{r^2}\right) U(r) = 0 \qquad (2.6.10)$$

olarak yazılır ve l'

$$l' = m' + k = \sqrt{q\eta^2\sigma^2} + k \qquad (2.6.11)$$

biçiminde ifade edilir. $E < 0$ bağlı durumlar için

$$\alpha = (-8E)^{1/2} \qquad \beta = \frac{2\eta\sigma^2}{\alpha} = \eta\sigma^2\left(-\frac{1}{2E}\right)^{1/2}, \qquad \rho = \alpha r \qquad (2.6.12)$$

alınırsa (2.6.10)

$$\frac{d^2U(\rho)}{d\rho^2} + \left(\frac{\beta}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l'(l' + 1)}{\rho^2}\right) U(\rho) = 0 \qquad (2.6.13)$$

olur. (2.6.13) diferensiyel denklemi için $U(0) = 0$ ve $U(\infty) = 0$ olmalıdır. $r \longrightarrow 0$ ve $r \longrightarrow \infty$ daki radyal dalga fonksiyonunun asimptotik davranışına bakılarak $U(\rho)$ için uygun çözüm

$$U(\rho) = \rho^{l'+1}e^{-\frac{1}{2}\rho}f(\rho) \qquad (2.6.14)$$

alınır. (2.6.14), (2.6.13)'de yerine yazılarak

$$\rho\frac{d^2f(\rho)}{d\rho^2} + [2\,(l' + 1) - \rho]\,\frac{df}{d\rho} + [\beta - (l' + 1)]\,f(\rho) = 0 \qquad (2.6.15)$$

elde edilir. (2.6.15) denklemi $\alpha = (l'+1) - \beta$ ve $\gamma = 2(l'+1)$ parametreleri için confluent hipergeometrik denklemdir. $f(\rho)$ için analitik çözüm confluent hipergeometrik fonksiyonlar olarak ifade edilir. (2.6.15)'deki

$$(l'+1) - \beta = -n_r \ , \quad n_r = 0, 1, 2 \cdots \tag{2.6.16}$$

dir. n_r radyal dalga fonksiyonun düğüm sayısıdır. Böylece enerji özdeğeri

$$E = -\frac{(\eta\sigma^2)^2}{2\left(n_r + l' + 1\right)} = -\frac{(\eta\sigma^2)^2}{2\left(n'\right)^2}, \quad n' = (n_r + l' + 1) \tag{2.6.17}$$

ve radyal dalga fonksiyonu

$$U_{n'l'}(r) = N_{n'l'} \left(\frac{2\eta\sigma^2 r}{n'}\right)^{l'+1} e^{-\frac{\eta\sigma^2 r}{n'}} L_{n_r}^{2l'+1}\left(\frac{2\eta\sigma^2 r}{n'}\right) \tag{2.6.18}$$

dir. (2.6.18)'deki $N_{n'l'}$, radyal dalga fonksiyonu için normalizasyon sabitidir. (2.6.18)'deki Assosiye Laguerre polinomları için

$$(n+1)L_{n+1}^{\mu}(z) + (z - \mu - 2n - 1)L_n^{\mu}(z) + (\mu + n)L_{n-1}^{\mu}(z) = 0 \tag{2.6.19}$$

indirgeme bağıntısı ve

$$\int_0^{\infty} z^{\mu} e^{-z} L_n^{\mu}(z) L_{n'}^{\mu}(z) dz = \frac{\Gamma(\mu + n + 1)}{n!}\delta_{nn'} \tag{2.6.20}$$

diklik bağıntısı kullanılarak normalizasyon sabiti

$$N_{n'l'} = \left(\frac{2\eta\sigma^2 r}{n'}\right)^{1/2} \left[\frac{(n' - l - 1)!}{2n'\Gamma(n' + l' + 1)}\right]^{1/2} \tag{2.6.21}$$

elde edilir. Normalize dalga fonksiyonu da

$$U_{n'l'}(r) = \left(\frac{2\eta\sigma^2 r}{n'}\right)^{1/2} \left[\frac{(n' - l - 1)!}{2n'\Gamma(n' + l' + 1)}\right]^{1/2} \left(\frac{2\eta\sigma^2 r}{n'}\right)^{l'+1}$$

$$e^{-\frac{\eta\sigma^2 r}{n'}} L_{n_r}^{2l'+1}\left(\frac{2\eta\sigma^2 r}{n'}\right) \tag{2.6.22}$$

olur. Böylece Hartmann potansiyeli için elde edilen dalga fonksiyonu

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r}\left(\frac{2\eta\sigma^2 r}{n'}\right)^{1/2} \left[\frac{(n' - l - 1)!}{2n'\Gamma(n' + l' + 1)}\right]^{1/2} \left(\frac{2\eta\sigma^2 r}{n'}\right)^{l'+1}$$

$$e^{-\frac{\eta\sigma^2 r}{n'}} L_{n_r}^{2l'+1}\left(\frac{2\eta\sigma^2 r}{n'}\right) \sqrt{\frac{(2l'+1)(l'-m')!}{2\Gamma(l'+m'+1)}}(\sin\theta)^{m'} \tag{2.6.23}$$

$$(\sin\theta)^{m'} \sum_{\nu=0}^{\left(\frac{l'-m'}{2}\right)} \frac{(-1)^{\nu}\Gamma(2l'-2\nu+1)}{2^{l}\nu!(l'-m'-2\nu)!(l'-\nu+1)!}(\cos\theta)^{l'-m'-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$$

dir. (2.6.23) küresel koordinatlarda Hartmann potansiyeli için Schrödinger denklemi çözümleridir.

3. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

3.1. Hidrojen Atomu İçin Uyumlu Durumlar

Hidrojen atomu için eylem

$$A = \int_a^b dt \left[\vec{p} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} - \left(\frac{1}{2m} \vec{p}^{\,2} - \frac{k}{r} \right) \right] \tag{3.1.1}$$

biçimindedir. Burada k, e elektronun yükü cinsinden Ze^2'dir. $Z = 1$ hali H atomudur. $\vec{x}$ kanonik koordinat, $\vec{p}$ kanonik momentum ve $r = |\vec{x}|$ dir. Kepler probleminin $SO(4)$ dinamik simetrisini kullanmak için (3.1.1) ifadesine ekstra bir x_4 koordinatıyla serbest parçacık eylemi eklenir. Böylece eylem,

$$A = \int_a^b dt \left\{ \vec{p} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + p_4 \cdot \frac{dx_4}{dt} - \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p}^{\,2} + p_4^2 \right) - \frac{k}{r} \right] \right\} \tag{3.1.2}$$

biçimindedir ve problem 4-boyutlu probleme dönüşür. x_A ve p_A dörtlü vektör bileşenleri $x_A = (\vec{x}, x_4)$ ve $p_A = (\vec{p}, p_4)$ cinsinden eylem

$$A = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[p_A \cdot \frac{dx_A}{dt} - \left(\frac{1}{2m} p_A \cdot p_A - \frac{k}{r} \right) \right] \tag{3.1.3}$$

olarak yazılır. Serbest parçacık Lagranjiyeni elektronun dinamiğini (hareket denklemlerini) değiştirmemesine rağmen klasik yörünge ve geçiş genliklerini değiştirir. Bu nedenle serbest parçacığın x_4 serbestlik derecesi kuantizasyondan sonra yok edilecektir.

$$dt = r(\lambda) d\lambda \tag{3.1.4}$$

biçiminde yeni bir parametrik zaman seçilerek (3.1.3) eylemi

$$A = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \left[p_A \frac{dx_A}{d\lambda} - \left(\frac{1}{2m} p_A . p_A r - k \right) + (-p_o) \left(\frac{dt}{d\lambda} - r \right) \right] \tag{3.1.5}$$

şekline dönüştürülür. (3.1.5)'deki p_o, $-\infty < p_o < +\infty$ bölgesinde tanımlı Lagrange çarpanıdır. Böylece (3.1.5) ifadesi $[(-p_o)r - k]$ potansiyeli altında hareket eden, dik olmayan koordinatlarda, $(4+1)$ boyutlu sistemin eylemidir. Kustaanheimo-Stiefel dönüşümü kullanılarak

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (m\,|p_o|)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \xi_B & \xi_A^* \\ \xi_A & -\xi_B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi_A^* \\ d\xi_B^* \end{pmatrix} \tag{3.1.6}$$

karmal boyutlu ξ_A ve ξ_B koordinatları ve ξ_A^* ve ξ_B^* karmal eşlenikleri türetilir. Burada

$$x = (x_1 + ix_2)/\sqrt{2}$$

$$y = (x_3 + ix_4)/\sqrt{2} \qquad (3.1.7)$$

ve

$$r = (2m|p_o|)^{-\frac{1}{2}}(\xi_A^*\xi_A + \xi_B^*\xi_B) \qquad (3.1.8)$$

dir. (3.1.7)'nin momentum dönüşümleri

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \frac{(m|p_o|)^{\frac{1}{2}}}{\left(|\xi_A|^2 + |\xi_B|^2\right)} \begin{pmatrix} \xi_B^* & \xi_A \\ \xi_A^* & \xi_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{\xi_A^*} \\ p_{\xi_B^*} \end{pmatrix} \qquad (3.1.9)$$

olur ve

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{x_1} - ip_{x_2})$$

$$p_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{x_3} - ip_{x_4}) \qquad (3.1.10)$$

olarak yazılabilir. (3.1.6) dönüşümü çift değerlidir. Yani $x(a)$'dan $x(b)$'ye giden yollar ξ uzayında $\xi(a)$'dan $\xi(b)$ ve $[-\xi(b)]$'ye olan iki farklı yola karşılıktır. ξ ve $\xi^\dagger$ karmal spinörleri

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_A \\ \xi_B \end{pmatrix}, \quad \xi^\dagger = \begin{pmatrix} \xi_A^* & \xi_B^* \end{pmatrix} \qquad (3.1.11)$$

olarak tanımlanır. (3.1.5) eylemi yeniden yazılırsa

$$A = (\xi_b^\dagger, t_b; \xi_a, t_a) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \left[p_\xi \frac{d\xi}{d\lambda} + p_\xi^\dagger \frac{d\xi^\dagger}{d\lambda} + (-p_o)\frac{dt}{d\lambda} - H\right] \qquad (3.1.12)$$

olur. ξ ve $\xi^\dagger$ karmal spinörler ve H, ξ ve $\xi^\dagger$ karmal spinörleri ile ifade edilen 4-salınıcının Hamiltonyenidir ve

$$H = \omega\left[p_\xi p_{\xi^\dagger} + \xi^\dagger\xi\right] - k \qquad (3.1.13)$$

yazılır. (3.1.13) de $\omega = \sqrt{-(p_o)/2m}$ salınıcının frekansıdır. Hamiltonyen parametrik zaman λ'ya açıkça bağlı değildir, bu nedenle $\widehat{H}$ sabittir. Böylece

$$-p_0 = sabit \qquad (3.1.14)$$

ve

$$\widehat{H} = \sqrt{\frac{-p_0}{2m}}\left[p_\xi p_{\xi^\dagger} + \xi^\dagger \xi\right] - k = sabit \tag{3.1.15}$$

yazılabilir. $\widehat{H}$ parametrik zamanda parçacığın enerjisidir, değeri sabittir ve bu sabitin değeri $\widehat{H} = 0$'dır. $\widehat{H}$,

$$\widehat{H} = H\tau + (-p_0)\tau = (H - p_0)\tau \tag{3.1.16}$$

olarak tanımlanır. Burada H laboratuvar çerçevesindeki enerjidir. Laboratuvarda enerji t fiziksel zamanında ölçülür.

$$\widehat{H} = 0 \tag{3.1.17}$$

olduğu zaman

$$p_0 = H \tag{3.1.18}$$

dir.

a ve $a^\dagger$ holomorfik koordinatları

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \xi^\dagger + ip_\xi \\ \xi + ip_{\xi^\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \\ a_- \\ b_- \end{pmatrix} \tag{3.1.19}$$

ve

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - ip_{\xi^\dagger}\,,\ \xi^\dagger - ip_\xi\right) = \begin{pmatrix} a_+^* & b_+^* & a_-^* & b_-^* \end{pmatrix} \tag{3.1.20}$$

olarak tanımlanır. (3.1.11) ifadesi holomorfik koordinatlar cinsinden

$$A\left(a_b^\dagger, t_b; a_a, t_a\right) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \left[\frac{1}{2i}\left(\frac{da^\dagger}{d\lambda}a - a^\dagger\frac{da}{d\lambda}\right) + (-p_o)\frac{dt}{d\lambda} - \left(\omega a^\dagger a - k\right)\right] \tag{3.1.21}$$

olur. (3.1.21) deki $H = \left(\omega a^\dagger a - k\right)$, parametrik zamanda Hamiltonyendir. Hidrojen atomunun uyumlu durumlarını türetmek için (3.1.21) ifadesi kullanılacaktır.

Kuantizasyon

Feymann path integral formülasyonu, evrim işlemcisi U'nun $\overrightarrow{x}$ konum işlemcisinin özdurumları arasındaki geçiş genliklerinin matris elemanlarını verir. Yani konum özdurumlarının evrimini verir. Burada harmonik salınıcının azaltma işlemcisinin özdurumlarının evrimi ile ilgilenilmektedir; bunlar sistemin zamana bağlı uyumlu durumlarına karşılık gelmektedir. Bu nedenle 4-boyutlu harmonik salınıcının kerneli 4-boyutlu $a_b^\dagger$ ve a_a holomorfik koordinatların terimleriyle tanımlanacaktır.

Holomorfik koordinatlarda hidrojen atomunun kerneli

$$K(a_b^\dagger, t_b; a_a, t_a) = \int_{\lambda_a}^{\infty} d\lambda_b \int \frac{DtD(-p_o)}{[2\pi]} e^{i\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda(-p_0)\frac{dt}{d\lambda}} K_\omega(a_b^\dagger, a_a) \tag{3.1.22}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\hbar = 1$ ve $K_\omega(a_b^\dagger, a_a)$, λ parametrik zamanda 4-salınıcının kernelidir. (3.1.22) ifadesindeki $K_\omega(a_b^\dagger, a_a)$,

$$K_\omega(a_b^\dagger, a_a) = \int \frac{Da^\dagger Da}{[2\pi i]^4} \exp\left\{ i\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda \left[\frac{1}{2i}\left(\frac{da^\dagger}{d\lambda}a - a^\dagger \frac{da}{d\lambda} \right) - \omega\left(a^\dagger a + 2\right) + k \right] \right\} \tag{3.1.23}$$

olarak yazılır. (3.1.23) denklemindeki (2ω) terimi $a^\dagger$ ve a işlemcilerinin $a^\dagger a$ şeklinde sıralanmasından gelir. $a^\dagger$ ve a işlemcileri

$$\left[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger\right] = 1 \tag{3.1.24}$$

komütasyon ilişkisini sağlar. t ve p_o üzerinden olan integrasyon

$$\int \frac{DtD(-p_0)}{[2\pi]} \exp\left[i\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} d\lambda(-p_o)\frac{dt}{d\lambda} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(-p_o)}{[2\pi]} \exp\left[-ip_o\left(t_b - t_a\right)\right] \tag{3.1.25}$$

biçiminde düzenlenir. ω zamana bağlı olmadığından integrale katkı getirmez. (3.1.23)'deki $a^\dagger$ ve a integrasyonu da Path integral yöntemi kullanılarak

$$K_\omega(a_b^\dagger, a_a) = e^{-i(2\omega-k)(\lambda_b-\lambda_a)+a_b^\dagger \exp[-i\omega(\lambda_b-\lambda_a)]a_a} \tag{3.1.26}$$

şeklinde yazılır. Hidrojen atomu problemi için Kustaanheimo-Stiefel dönüşümü çift değerlidir ve x uzayında x_a'dan x_b'ye olan bütün yollar a uzayında a_a' dan $a_b^\dagger$ ve a_a' dan $-a_b^\dagger$ olarak iki farklı biçime ayrılır. Spinsiz Hidrojen atomu için fiziksel geçiş genliği $K_\omega(a_b^\dagger, a_a)$ ve $K_\omega(-a_b^\dagger, a_a)$ genliklerinin simetrik toplamıdır ve

$$K_\omega^{fiziksel}(a_b^\dagger, a_a) = \left[K_\omega(a_b^\dagger, a_a) + K_\omega(-a_b^\dagger, a_a)\right]$$

$$= e^{-i(2\omega-k)\lambda_b-\lambda_a)} \left[e^{a_b^\dagger \exp[-i\omega(\lambda_b-\lambda_a)]a_a} + e^{-a_b^\dagger \exp[-i\omega(\lambda_b-\lambda_a)]a_a} \right] \tag{3.1.27}$$

biçiminde yazılır. Böylece (3.1.23) kerneli

$$K^{fiziksel}(a_b^\dagger, t_b; a_a, t_a) = \int_{\lambda_a}^{\infty} d\lambda_b \int_0^{\infty} \frac{d(-p_o)}{[2\pi]} e^{-i(2\omega-k)\lambda_b-\lambda_a)+(-p_o)(t_b-t_a)}$$

$$\times e^{a_b^\dagger \exp[-i\omega(\lambda_b-\lambda_a)]a_a - a_b^\dagger \exp[-i\omega(\lambda_b-\lambda_a)]a_a} \tag{3.1.28}$$

elde edilir. (3.1.19) ve (3.1.20) denklemlerindeki spinörler

$$a_a = \begin{pmatrix} a_{+a} \\ b_{+a} \\ a_{-a} \\ b_{-a} \end{pmatrix} \tag{3.1.29}$$

ve

$$a_b^\dagger = \begin{pmatrix} a_{+b}^\star & b_{+b}^\star & a_{-b}^\star & b_{-b}^\star \end{pmatrix} \tag{3.1.30}$$

biçiminde parametrize edilir ve (3.1.29) ve (3.1.30), (3.1.28) deki üstel ifadede yerine yazılarak, üstel ifade kuvvet serisine açılırsa

$$K^{phys}(a_b^\dagger, t_b; a_a, t_a) = \int_0^{\infty} \frac{d(-p_o)}{[2\pi]} e^{-ip_o(t_b-t_a)} \sum_{n_1,n_2,n_3,n_4=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4}\right]$$

$$\times \int_{\lambda_a}^{\infty} d\lambda_b e^{i(\lambda_b-\lambda_a)[k-\omega(n_1+n_2+n_3+n_4+2)]} \tag{3.1.31}$$

$$\times \frac{\left(a_{+b}^\circ a_{+a}\right)^{n_1}}{n_1!} \frac{\left(b_{+b}^\circ b_{+a}\right)^{n_2}}{n_2!} \frac{\left(a_{-b}^\circ a_{-a}\right)^{n_3}}{n_3!} \frac{\left(b_{-b}^\circ b_{-a}\right)^{n_4}}{n_4!}$$

olur. Parametrik enerjinin değeri sıfır olduğu için (3.1.31) de yer alan λ_b integrasyonu düzenlenirse

$$\omega = \frac{k}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2} \tag{3.1.32}$$

olur. Hamiltonyenin özdeğeri k'dır. k,

$$k = \sqrt{\frac{(-p_0)}{2m}}(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2) \tag{3.1.33}$$

olarak yazılır.

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2n \tag{3.1.34}$$

tanımlanırsa fiziksel enerji

$$p_o = -\frac{m}{2}\frac{k^2}{(n+1)^2} \tag{3.1.35}$$

elde edilir.

x_4 koordinatını kaldırmak için iki yöntem vardır: Ya (Duru vd 1982)'deki gibi kuantum mekaniğinin global formülasyonunda x_{4b}'nin bütün değerleri üzerinden integral alınır ya da lokal formülasyonda (Bhaumik vd 1986, Gerry 1988, Toyoda vd 1999)'deki gibi $p_4(\lambda_b)$ işlemcisi için özdeğerleri sıfır olan veya x_{4b}'den bağımsız olan özfonksiyonlar seçilir. Bu bölümde $p_4(\lambda_b) = 0$ olan yöntem kullanılmıştır. $a_b^\dagger$ ve a_b'terimleriyle başlangıç koşulları $p_4(\lambda_b) = 0$ olan

$$|a_{+b}|^2 + |b_{+b}|^2 - |a_{-b}|^2 + |b_{-b}|^2 = 0 \tag{3.1.36}$$

seçilmiştir. Aynı koşullardan $n_1 + n_2 - n_3 - n_4 = 0$yazılır. Fiziksel kernel

$$K^{fiziksel}(a_b^\dagger, t_b; a_a, t_a) = \int_0^\infty \frac{d(-p_o)}{[2\pi]} e^{-ip_o(t_b-t_a)} \int_{\lambda_a}^\infty d\lambda_b e^{i(\lambda_b-\lambda_a)[k-2(n_1'+n_2'+1)\omega]}$$

$$\frac{(\rho_b^\circ \rho_a)^{n_1'+n_2'} (\sigma_b^\circ \sigma_a)^{n_1'-n_2'} (\delta_b^\circ \delta_a)^{2m}}{\left[\sum_{i=1}^{4} \Gamma(1+n_i)\right]} \tag{3.1.38}$$

olur. n_1', n_2' ve m yeni kuantum sayılarıdır ve $n_1 = n_1'+m$, $n_2 = n_2'-m$, $n_3 = n_2'+m$, $n_4 = n_1'-m$ olarak tanımlanır. Bunlar parabolik koordinatlarda Hidrojen atomunun kuantum sayılarıdır. ρ, σ ve δ üç yeni karmal parametredir ve

$$\rho = (a_+ b_+ a_- b_-)^{1/2}$$

$$\sigma = \left(\frac{a_+ b_-}{a_- b_+}\right)^{1/2} \tag{3.1.39}$$

$$\delta = \left(\frac{a_+ a_-}{b_+ b_-}\right)^{1/2}$$

olarak tanımlanır. (3.1.38) kerneli

$$K^{fiziksel}(a_b^\dagger, t_b; a_a, t_a) = \int_0^\infty \frac{d(-p_o)}{[2\pi]} \sum_{n_1', n_2'=0}^{\infty} \sum_{m=-(n_1'+n_2')}^{n_1'+n_2'} \int_{\lambda_a}^\infty d\lambda_b e^{-ip_o(t_b-t_a)}$$

$$\langle n_1', n_2', m\,|a_b\rangle \langle n_1', n_2', m\,|U(\lambda_b - \lambda_a)|\, a_a\rangle \tag{3.1.40}$$

olur. $\langle n_1', n_2', m\,|a_b\rangle$ enerji özdurumları ile son nokta uyumlu durumlarının gösterimidir. $\langle n_1', n_2', m\,|U(\lambda_b - \lambda_a)|\, a_a\rangle$ enerji özdurumlarıyla gösterilen başlangıç uyumlu durumlarının zaman evrimi gösterimidir.

$$\langle n_1', n_2', m\,|a_b\rangle = \frac{(\rho_b)^{n_1'+n_2'}(\sigma_b)^{n_1'-n_2'}(\delta_b)^{2m}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{4}\Gamma(1+n_i)\right]^{1/2}} \tag{3.1.41}$$

ve

$$\langle n_1', n_2', m\,|U(\lambda_b - \lambda_a)|\, a_a\rangle = e^{i[k-2(n_1+n_2+n_3+n_4+1)\omega](\lambda_B-\lambda_A)}$$

$$\times \frac{(\rho_a)^{n_1'+n_2'}(\sigma_a)^{n_1'-n_2'}(\delta_a)^{2m}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{4}\Gamma(1+n_i)\right]^{1/2}} \tag{3.1.42}$$

biçimindedir. Uyumlu durumlar,

$$|a(\lambda)\rangle = \sum_{n_1',n_2'=0}^{\infty} \sum_{m=-(n_1'+n_2')=0}^{n_1'+n_2'} \frac{(\rho)^{n_1'+n_2'}(\sigma)^{n_1'-n_2'}(\delta)^{2m}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{4}\Gamma(n_i+1)\right]^{1/2}}$$

$$\times e^{i[k-2(n_1+n_2+n_3+n_4+1)\omega]}\,|n_1 n_2 n_3 n_4\rangle \tag{3.1.43}$$

dir. (3.1.43)'deki $|n_1 n_2 n_3 n_4\rangle$ dört salınıcının durumlarıdır ve a, $\lambda = 0$'da azaltma işlemcisinin özdeğeridir. a özdeğerinin parametrik zamandaki evrimi

$$a(\lambda) = ae^{-i\omega\lambda} \tag{3.1.44}$$

biçimindedir. Böylece uyumlu durumlar (3.1.43)'deki gibi verilir ve başlangıç durumu ρ, σ ve λ olan üç karmal parametre ile tanımlanır.

Bu çalışmada uyumlu durumlar arasındaki kernel de türetilmiştir. Uyumlu durumlar arasındaki kernelle karmal konfigürasyon uzayının ilk ve son noktaları arasında tanımlanan kernel arasındaki ilişki

$$K_\omega^{fiziksel}(\xi_b^\dagger, \xi_b; \xi_a^\dagger, \xi_a) = \int \frac{da_b^\dagger da_b}{[2\pi i]^4} \int \frac{da_a^\dagger da_a}{[2\pi i]^4} e^{-a_b^\dagger a_b - a_a^\dagger a_a} \left\langle \xi_b^\dagger, \xi_b\,|a_b\right\rangle$$

$$\times K_\omega^{fiziksel}(a_b^\dagger, a_a)\left\langle a_a\,|\xi_a^\dagger, \xi_a\right\rangle \tag{3.1.45}$$

dir. (3.1.45)'deki $\langle a \,|\xi^\dagger,\xi\rangle$ ve $\langle \xi^\dagger,\xi\,|a\rangle$ matris elemanları $\xi^\dagger$, ξ ve $p_{\xi^\dagger}$, p_ξ terimleriyle $a_b^\dagger$ ve a_a gösterimi kullanılarak tanımlanır.

$$\langle \xi^\dagger,\xi\,|a\rangle = \exp\Big[-(\xi_A^\star\xi_A+\xi_B^\star\xi_B)+\sqrt{2}(a_+\xi_A+b_+\xi_B+a_-\xi_A^\star+b_-\xi_B^\star)$$

$$-\frac{1}{2}(a_+a_-+b_+b_-)\Big] \tag{3.1.46}$$

dir ve (3.1.46)'nın karmal eşleniği

$$\langle a\,|\xi^\dagger,\xi\rangle^\circ = \langle \xi^\dagger,\xi\,|a\rangle \tag{3.1.47}$$

dir. a_+, b_+, a_- ve b_-, $|a\rangle$ uyumlu durumlarının özdeğerleridir. $\langle \xi^\dagger,\xi\,|a\rangle$ (3.1.46)'da yerine yazılarak $a_b^\dagger, a_b$ ve $a_a^\dagger, a_a$ üzerinden integral alınırsa

$$K_\omega^{fiziksel}(\xi_b^\dagger,\xi_b;\xi_a^\dagger,\xi_a) = \left(\frac{1}{2i\sin\omega\Lambda}\right)^2 \cos\left[\frac{1}{i\sin\omega\Lambda}(\xi_b^\dagger\xi_a+\xi_a^\dagger\xi_b)\right]$$

$$\exp\left[\frac{\cos\omega\Lambda}{i\sin\omega\Lambda}(\xi_b^\dagger\xi_b+\xi_a^\dagger\xi_a)\right] \tag{3.1.48}$$

olur. Burada $\Lambda=\lambda_b-\lambda_a$'dır. ξ, gerçel ve sanal kısmı ayrılarak oluşturulursa

$$\xi = \begin{pmatrix} u_1+iu_4 \\ u_3+iu_2 \end{pmatrix} \tag{3.1.49}$$

yazılır. Bu (3.1.48)'de yerine yazılırsa

$$K_\omega^{fiziksel}(u_b,,u_a) = \left(\frac{1}{2i\sin\omega\Lambda}\right)^2 \cos\left[\frac{1}{i\sin\omega\Lambda}(u_b^\dagger u_a+\xi_a^\dagger\xi_b)\right]$$

$$\exp\left[\frac{\cos\omega\Lambda}{i\sin\omega\Lambda}(u_b^\dagger u_b+u_a^\dagger u_a)\right] \tag{3.1.50}$$

elde edilir. Böylece (Duru vd 1982)'deki kernel ifadesi elde edilmiştir. (3.1.8)'deki dönüşüm kullanılarak $K_\omega^{fiziksel}$ $\vec{r_b}$ ve $\vec{r_a}$ terimleriyle yazılır ve (Duru vd 1982)'de tartışılan Hidrojen atomunun konfigürasyon uzay ifadesi gösterilebilir. x_{4b} ve λ_b parametrik zaman üzerinden integral alınırsa $K(\vec{r_b},t_b;\vec{r_a},t_a)$'nın p_0 üzerinden integralini verir.

Küresel koordinatlarda uyumlu durumları türetmek için ξ_A ve ξ_B,

$$\xi_A = |\xi|\cos\frac{\theta}{2}e^{(i/2)(\varphi-\gamma)}$$

$$\xi_B = |\xi| \sin\frac{\theta}{2} e^{-(i/2)(\varphi+\gamma)} \tag{3.1.51}$$

biçiminde tanımlanarak, (3.1.46)'da yerine yazılır, $e^{(i/2)\gamma}$ ve $e^{-(i/2)\gamma}$ 'nın kuvvet serisine açılıp γ açısı üzerinden integral alınırsa (γ açısı x_4 koordinatına karşılık gelmektedir.) uyumlu durumlar

$$\langle |\xi|, \theta, \varphi | a\rangle = 4\pi \exp\left[-|\xi|^2 - a^\dagger a\right] I_o \left[2\sqrt{2a^\dagger a |\xi|^2 (1-\cos\Theta)}\right] \tag{3.1.52}$$

biçiminde elde edilir. (3.1.52)'deki $I_o\left[2\sqrt{2a^\dagger a |\xi|^2 (1-\cos\Theta)}\right]$ ifadesi sıfırıncı dereceden modife Bessel fonksiyonudur. Burada $cos\Theta$,

$$\cos\Theta = \widehat{a}\cdot\widehat{n} = \left(\frac{a_+a_- - b_+b_-}{2}, -\frac{a_+b_-}{\sqrt{2}}, -\frac{a_-b_+}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\cos\theta, \frac{\sin\theta e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}, \frac{\sin\theta e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\right) \tag{3.1.53}$$

ve $a^\dagger a$,

$$a^\dagger a = \frac{a_+a_- + b_+b_-}{2} \tag{3.1.54}$$

dir. Daha sonra $I_o\left[2\sqrt{2a^\dagger a |\xi|^2 (1-\cos\Theta)}\right]$ sıfırıncı dereceden modife Bessel ifadesi $I_k\left[2\sqrt{2a^\dagger a |\xi|^2}\right] x \cos^k\Theta$ cinsinden yazılır. $I_k\left[2\sqrt{2a^\dagger a |\xi|^2}\right]$, k. dereceden modife Bessel fonksiyonudur. Elde edilen ifade L_n^k bağlı Laguerre fonksiyonları ve $P_l(\cos\Theta)$' bağlı Legendre fonksiyonlarının sonsuz serisi olarak yazılırsa küresel koordinatlarda Hidrojen atomu için uyumlu durumlar

$$\langle |\xi|, \theta, \varphi | a\rangle = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-a^\dagger a\right)^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)} e^{-|\xi|^2} |\xi|^{2k} L_n^k(2|\xi|^2)$$

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{\left[1+(-1)^{k+l}\right](2l+1)2^l\Gamma\left[\frac{l+k}{2}+1\right]}{\Gamma(l+k+2)\Gamma\left[\frac{(k-l)}{2}+1\right]} P_l(\cos\Theta) \tag{3.1.55}$$

olarak elde edilir.

4. BULGULAR

4.1. Hartmann Potansiyeli İçin Uyumlu Durumların Elde Edilmesi

Merkezcil olmayan küresel koordinatlardaki

$$V(r,\theta) = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{B\hbar^2}{2mr^2\sin^2\theta} + \frac{C\hbar^2\cos\theta}{2mr^2\sin^2\theta} \qquad (4.1.1)$$

potansiyeli

$$f = Ze^2, \quad b = \frac{B\hbar^2}{2m}, \quad c = \frac{C\hbar^2}{2m}, \qquad (4.1.2)$$

alınarak

$$V(r,\theta) = -\frac{f}{r} + \frac{b}{r^2\sin^2\theta} + \frac{c}{r^2\sin^2\theta} \qquad (4.1.3)$$

potansiyeline dönüştürülür. (4.1.3) potansiyeli için

$$\zeta = \frac{1}{2}(r-z)$$

$$\eta = \frac{1}{2}(r+z) \qquad (4.1.4)$$

$$\phi = \phi$$

koordinat dönüşümleri yapılarak parabolik koordinatlarda

$$V(\zeta,\eta) = -\frac{f}{\zeta+\eta} + \frac{b}{4\zeta\eta} + \frac{c(\zeta-\eta)}{4\zeta\eta(\zeta+\eta)} \qquad (4.1.5)$$

şeklinde yazılabilir. Parabolik koordinatlarda Hamiltonyen

$$H(\zeta,\eta,\phi) = \frac{1}{2m(\zeta+\eta)}\left[\zeta p_\zeta^2 + \eta p_\eta^2\right] + \frac{1}{8m\eta\zeta}p_\phi^2 + V(\zeta,\eta) \qquad (4.1.6)$$

biçimindedir. (4.1.6) Hamiltonyenini kullanarak eylem

$$A = \int dt\left[p_\xi\dot{\xi} + p_\eta\dot{\eta} + p_\phi\dot{\phi} - \frac{1}{2M(\xi+\eta)}\left(p_\xi^2\xi + p_\eta^2\eta\right) - \frac{1}{8M\eta\zeta}p_\phi^2\right.$$

$$\left. + \frac{f}{\zeta+\eta} + \frac{b}{4\zeta\eta} + \frac{c(\zeta-\eta)}{4\zeta\eta(\zeta+\eta)}\right] \qquad (4.1.7)$$

olarak yazılır. (4.1.7) eğri uzayda tanımlanmış bir eyleme karşılıktır.

$$\zeta = \frac{1}{4}u^2, \quad 0 \le u < \infty$$

$$\eta = \frac{1}{4}v^2, \quad 0 \leq v < \infty \tag{4.1.8}$$

koordinat ve

$$\widehat{p}_u = \sqrt{\zeta} p_\zeta$$

$$\widehat{p}_v = \sqrt{\eta} p_\eta \tag{4.1.9}$$

momentum dönüşümleri yapılarak (4.1.7) eylemi

$$A = \int dt \left[p_u \dot{u} + p_v \dot{v} + p_\phi \dot{\phi} \right.$$

$$\left. - \frac{4}{u^2+v^2} \frac{1}{2m} \left(p_u^2 + p_v^2 + \frac{p_\phi^2}{u^2} + \frac{p_\phi^2}{v^2} \right) - f + \frac{b+c}{u^2} + \frac{b-c}{v^2} \right], \tag{4.1.10}$$

olarak yazılır. (4.1.10) eyleminde

$$p_{\phi_1}^2 = p_\phi^2 + 2M(b+c)$$

$$p_{\phi_2}^2 = p_\phi^2 + 2M(b-c) \tag{4.1.11}$$

dönüşümü yapılarak

$$A = \int dt \left\{ p_u \dot{u} + p_v \dot{v} + p_\phi \dot{\phi} \right.$$

$$- \frac{4}{u^2+v^2} \left[\frac{1}{2m} \left(p_u^2 + p_v^2 + \frac{p_{\phi_1}^2}{u^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{v^2} \right) - f \right] \tag{4.1.12}$$

$$\left. + \frac{d\phi_1}{dt} \left[p_{\phi_1} - \sqrt{p_\phi^2 + 2M(b+c)} \right] + \frac{d\phi_2}{dt} \left[p_{\phi_2} - \sqrt{p_\phi^2 + 2M(b-c)} \right] \right\}$$

yazılır ve kinetik enerji terimindeki $\frac{4}{u^2+v^2}$ terimini yok etmek için

$$\frac{dt}{ds} = \frac{u^2+v^2}{4} \tag{4.1.13}$$

şeklinde yeni bir zaman parametresi tanımlanırsa (4.1.12) eylemi

$$A = \int ds \left\{ p_u \frac{du}{ds} + p_v \frac{dv}{ds} + p_\phi \frac{d\phi}{ds} + \frac{d\phi_1}{ds} \left[p_{\phi_1} - \sqrt{p_\phi^2 + 2M(b+c)} \right] \right.$$

$$+\frac{d\phi_2}{ds}\left[p_{\phi_2}-\sqrt{p_\phi^2+2M(b-c)}\right]+(-p_o)\left(\frac{dt}{ds}-\frac{u^2+v^2}{4}\right) \tag{4.1.14}$$

$$-\left[\frac{1}{2m}\left(p_u^2+p_v^2+\frac{p_{\phi_1}^2}{u^2}+\frac{p_{\phi_2}^2}{v^2}\right)-f\right]\Bigg\},$$

biçimine dönüşür. (4.1.14)'deki p_o Lagrange çarpanıdır. Kutupsal koordinatlarda parçacığın konumu

$$(u_1,u_2)=u(\cos\phi_1,\sin\phi_1)$$

$$(v_1,v_2)=v(\cos\phi_2,\sin\phi_2) \tag{4.1.15}$$

olarak gösterilecektir. (4.1.15)' deki ϕ_1 ve ϕ_2 fiziksel koordinatlar değildir. Bu sistemin Hidrojen atomundan farkı $\phi_1$ve ϕ_2 açılarının $[0,2\pi]$ aralığında tanımlanmamış olmasıdır. $\phi_1$ve ϕ_2 için tanım aralığı $-\infty<\phi_1<\infty$, $-\infty<\phi_2<\infty$ biçimindedir. (4.1.15) dönüşümü kullanılırak (4.1.14) eylemi

$$A=\int ds\left\{p_{u_1}\tfrac{du_1}{ds}+p_{u_2}\tfrac{du_2}{ds}+p_{v_1}\tfrac{dv_1}{ds}+p_{v_2}\tfrac{dv_2}{ds}+p_\phi\tfrac{d\phi}{ds}\right.$$

$$-\tfrac{d\phi_1}{ds}\left[p_{\phi_1}-\sqrt{p_\phi^2+2M(b+c)}\right]-\tfrac{d\phi_2}{ds}\left[p_{\phi_2}-\sqrt{p_\phi^2+2M(b-c)}\right]-H, \tag{4.1.16}$$

şeklinde yazılır. (4.1.16)'daki H parçaçığın Hamiltonyenidir ve

$$H=\tfrac{1}{2m}\left(p_{u_1}^2+p_{u_2}^2+p_{v_1}^2+p_{v_2}^2\right)+\tfrac{1}{2}m\omega^2\left(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2\right)-f \tag{4.1.17}$$

ile verilir. A eylemindeki salınıcı kısmı ayrılarak

$$A_\omega=\int ds\left\{p_{u_1}\tfrac{du_1}{ds}+p_{u_2}\tfrac{du_2}{ds}+p_{v_1}\tfrac{dv_1}{ds}+p_{v_2}\tfrac{dv_2}{ds}\right.$$

$$\left.-\omega\left[\tfrac{p_{u_1}^2+p_{u_2}^2+p_{v_1}^2+p_{v_2}^2}{2M\omega}+\tfrac{1}{2}m\omega\left(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2\right)+\frac{f}{\omega}\right]\right\} \tag{4.1.18}$$

şeklinde yazılır. (4.1.18) M kütleli, $\omega=\frac{\sqrt{-2Mp_o}}{2M}$ frekanslı dört harmonik salınıcının eylemidir.

$$\xi=\sqrt{\frac{M\omega}{2}}(u_1+iu_2),\qquad \eta=\sqrt{\frac{M\omega}{2}}(v_1+iv_2) \tag{4.1.19}$$

ve

$$\xi^* = \sqrt{\frac{M\omega}{2}}(u_1 - iu_2), \qquad \eta^* = \sqrt{\frac{M\omega}{2}}(v_1 - iv_2) \tag{4.1.20}$$

karmal koordinatları

$$p_\xi = \sqrt{\frac{M\omega}{2}}(p_{u_1} + ip_{u_2}), \qquad p_\eta = \sqrt{\frac{M\omega}{2}}(p_{v_1} + ip_{v_2}) \tag{4.1.21}$$

ve

$$p_{\xi^*} = \sqrt{\frac{M\omega}{2}}(p_{u_1} - ip_{u_2}), \qquad p_{\eta^*} = \sqrt{\frac{M\omega}{2}}(p_{v_1} - ip_{v_2}) \tag{4.1.22}$$

momentum dönüşümleri kullanılarak (4.1.18) eylemi

$$A_\omega = \int ds \left\{ p_\xi \frac{d\xi}{ds} + p_{\xi^*}\frac{d\xi^*}{ds} + p_\eta \frac{d\eta}{ds} + p_{\eta^*}\frac{d\eta^*}{ds} \right.$$

$$-\frac{dp_\xi}{ds}\xi - \frac{dp_{\xi^*}}{ds}\xi^* - \frac{dp_\eta}{ds}\eta - \frac{dp_{\eta^*}}{ds}\eta^* \tag{4.1.23}$$

$$-\omega(p_\xi p_{\xi^*} + p_\eta p_{\eta^*} + \xi\xi^* + \eta\eta^*)$$

$$\left. +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(p_\xi \xi + p_\eta \eta + p_{\xi^*}\xi^* + p_{\eta^*}\eta^*\right) - f \right\}$$

biçiminde yazılır. $\xi, \xi^\dagger$ ve $\eta, \eta^\dagger$ kompleks spinörleri

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_A \\ \xi_B \end{pmatrix}, \qquad \xi^\dagger = (\xi_A^*, \, \xi_b^*) \, ,$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_A \\ \eta_B \end{pmatrix}, \qquad \eta^\dagger = (\eta_A^*, \, \eta_b^*) \tag{4.1.24}$$

olarak tanımlanır. (4.1.24) spinörleri cinsinden holomorfik koordinatlar

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2M\omega}} \begin{pmatrix} \xi^\dagger + ip_\xi \\ \xi^\dagger - ip_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{+1} \\ a_{-1} \end{pmatrix},$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2M\omega}} \begin{pmatrix} \eta^\dagger + ip_\eta \\ \eta^\dagger - ip_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{+2} \\ a_{-2} \end{pmatrix}, \tag{4.1.25}$$

ve karmal eşlenikleri

$$a_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2M\omega}} \begin{pmatrix} \xi^\dagger - ip_\xi & \xi^\dagger + ip_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{+1}^* & a_{-1}^* \end{pmatrix}$$

$$a_2^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2M\omega}}\left(\ \eta^{\dagger}-ip_{\eta}\quad \eta^{\dagger}+ip_{\eta}\ \right)=\left(\ a_{+2}^{*}\quad a_{-2}^{*}\ \right) \tag{4.1.26}$$

olarak tanımlanır. (4.1.23) A_{ω} eylemi holomorfik koordinatlar cinsinden

$$A_{\omega}\left(a_b^{\dagger},s_b,a_a,s_a\right)=\int_{s_a}^{s_b}ds\left[\frac{1}{2i}\left(\frac{da_1^{\dagger}}{ds}a_1-a_1^{\dagger}\frac{da_1}{ds}+\frac{da_2^{\dagger}}{ds}a_2-a_2^{\dagger}\frac{da_2}{ds}\right)-\omega\left(a_1^{\dagger}a_1+a_2^{\dagger}a_2\right)-f\right] \tag{4.1.27}$$

biçiminde yazılır. Burada $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=2}\left(p_{u_i}u_i+p_{v_i}v_i\right)|_a^b$ terimi ihmal edilmiştir. 4-salınıcılı sistemin kerneli (4.1.27) eylemi kullanılarak

$$K_{\omega}(a_{b1,2}^{\dagger},s_b;a_{a1,2},s_a)=\int\frac{Da_{1,2}^{\dagger}Da_{1,2}}{[2\pi i]^2}$$

$$\times\exp\left\{i\int ds\left[\frac{1}{2i}\left(\frac{da_1^{\dagger}}{ds}a_1-a_1^{\dagger}\frac{da_1}{ds}+\frac{da_2^{\dagger}}{ds}a_2-a_2^{\dagger}\frac{da_2}{ds}\right)-\omega\left(a_1^{\dagger}a_1+a_2^{\dagger}a_2\right)-f\right]\right\} \tag{4.1.28}$$

şeklinde ifade edilir. (4.1.28)'de $\hbar=1$ alınmıştır. Harmonik salınıcı için Path integral yöntemi kullanılarak (EK-1) (4.1.28) kerneli

$$K_{\omega}(a_{b1,2}^{\dagger},s_b;a_{a1,2},s_a)=\exp\left[\left(a_{b_{1,2}}^{\dagger}e^{-i\omega(s_b-s_a)}a_{a_{1,2}}\right)-i\left(f+2\omega\right)\left(s_b-s_a\right)\right] \tag{4.1.29}$$

olarak elde edilir.

(4.1.29) da $a_{b1,2}^{\dagger}a_{a1,2}$ yerine

$$a_{b1,2}^{\dagger}a_{a1,2}=a_{+1,2}^{*}\lambda_{+1,2}+a_{-1,2}^{*}\lambda_{-1,2}$$

$$a_{\pm1,2}^{*}=\frac{\left(a_{b1,2}^{(1)}\pm ia_{b1,2}^{(2)}\right)^{*}}{\sqrt{2}} \tag{4.1.30}$$

$$\lambda_{\pm1,2}=\frac{\left(a_{a1,2}^{(1)}\pm ia_{a1,2}^{(2)}\right)}{\sqrt{2}}$$

yazılarak (4.1.29) $K_{\omega}(a_{b1,2}^{\dagger},s_b;a_{a1,2},s_a)$ kerneli $a_{\pm1,2}^{*}\lambda_{\pm1,2}$ nin kuvvet serisine açılırsa

$$K_{\omega}(a_{b1,2}^{\dagger},s_b;a_{a1,2},s_a)=\sum_{n_{r_{1,2}}=0}^{\infty}\ \sum_{m_{1,2}=-\infty}^{\infty}e^{-i\left[\left(2n_{r_1}+2|m_1|+2\right)\omega+f\right](s_b-s_a)}$$

$$\times\frac{\left(a_{+1}^{*}\lambda_{+1}\right)^{n_{r_1}+|m_1|+m_1}}{\Gamma\left(n_{r_1}+|m_1|+m_1+1\right)}\frac{\left(a_{-1}^{*}\lambda_{-1}\right)^{n_{r_1}+|m_1|-m_1}}{\Gamma\left(n_{r_1}+|m_1|-m_1+1\right)} \tag{4.1.31}$$

$$\times e^{-i\left[\left(2n_{r_2}+2|m_2|+2\right)\omega+f\right](s_b-s_a)}\frac{\left(a^*_{+2}\lambda_{+2}\right)^{n_{r_2}+|m_2|+m_2}}{\Gamma\left(n_{r_2}+|m_2|+m_2+1\right)}$$

$$\times\frac{\left(a^*_{-2}\lambda_{-2}\right)^{n_{r_2}+|m_2|-m_2}}{\Gamma\left(n_{r_2}+|m_2|-m_2+1\right)}$$

olur. a^* ve λ karmal değişkenlerdir. (4.1.31)'de n_r radyal kuantum sayısına, m açısal kuantum sayısına karşılık gelmektedir. $\phi_1 \longrightarrow \frac{2L}{2\pi}\phi_1$, $\phi_2 \longrightarrow \frac{2L}{2\pi}\phi_2$ biçiminde ölçeklendirilip $L \longrightarrow \infty$ limiti alınırsa m üzerinden toplam integrale dönüşür.

$$K_1(a^\dagger_{b1,2}, s_b; a_{a1,2}, s_a) = \sum_{n_{r_{1,2}}=0}^{\infty} \int dm_1 \int dm_2 \; e^{-i\left[\left(2n_{r_{1,2}}+2|m_{1,2}|+2\right)\omega+f\right](s_b-s_a)}$$

$$\times\frac{\left(a^*_{+1,2}\lambda_{+1,2}\right)^{n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|+m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|+m_{1,2}\right)}\frac{\left(a^*_{-1,2}\lambda_{-1,2}\right)^{n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|-m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|-m_{1,2}\right)} \quad (4.1.32)$$

$K_1(a^\dagger_{b1,2}, s_b; a_{a1,2}, s_a)$, s_a anındaki $a_{a1,2}$ özdurumlu bir durumdan s_b anındaki $a_{b1,2}$ özdurumlu bir duruma geçiş olasılık genliğidir ve

$$K_1(a^\dagger_{b1,2}, s_b; a_{a1,2}, s_a) = \langle a_{b1,2}\left|U(s_b, s_a)\right| a_{a1,2}\rangle \quad (4.1.33)$$

olarak ifade edilir. $U(s_b, s_a)\left|a_{a1,2}\right\rangle$, s anındaki azaltma işlemcilerinin özdurumlarıdır ve

$$a\left|s\right\rangle = U\left(s, s_a\right)\left|a_a\right\rangle \quad (4.1.34)$$

biçiminde gösterilir. $\langle a\left|a_a, s\right\rangle$, a^*'ın bir fonksiyonu olarak bu durumların bir gösterimidir. a_a başlangıç özdeğerli harmonik salınıcının uyumlu durumlarına karşılık gelir. Ele aldığımız potansiyel için parametrik zaman uyumlu durumları

$$\left|\lambda_{+1,2}, \lambda_{-1,2}\right\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} dm_1 \int_{-\infty}^{\infty} dm_2 \sum_{n_{r_{1,2}}=0}^{\infty} e^{-i\left[\left(2n_{r_{1,2}}+2|m_{1,2}|+2\right)\omega+f\right]s}$$

$$\times\frac{\lambda_{+1,2}^{n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|+m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|+m_{1,2}+1\right)} \quad (4.1.35)$$

$$\times\frac{\lambda_{-1,2}^{n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|-m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|-m_{1,2}+1\right)}\left|n_{r_{1,2}}, m_{1,2}\right\rangle$$

biçimindedir. (4.1.35)'deki $\left|n_{r_{1,2}}, m_{1,2}\right\rangle$,

$$\left|n_{r_{1,2}}, m_{1,2}\right\rangle = \frac{a_{+1,2}^{\dagger n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|+m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|+m_{1,2}+1\right)}$$

$$\times \frac{a_{-1,2}^{\dagger n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|-m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|-m_{1,2}+1\right)}|0\rangle \qquad (4.1.36)$$

dir. s_b üzerinden integral alınırsa (4.1.34) $K_1(a_{b1,2}^{\dagger}, s_b; a_{a1,2}, s_a)$ kerneli,

$$G_1(a_{b1,2}^{\dagger}; a_{a1,2}) = \sum_{n_{r_{1,2}}=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dm_1 \int_{-\infty}^{\infty} dm_2 \frac{-i}{\left[\left(2n_{r_{1,2}}+2|m_{1,2}|+2\right)\omega+f\right]}$$

$$\times \frac{\left(a_{+1,2}^{*}\lambda_{+1,2}\right)^{n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|+m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|+m_{1,2}+1\right)} \frac{\left(a_{-1,2}^{*}\lambda_{-1,2}\right)^{n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|-m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|-m_{1,2}+1\right)} \qquad (4.1.37)$$

biçiminde ifade edilen Green fonksiyonuna dönüşür. u, v fiziksel koordinatlarına dönüş yapmak için

$$G_2(u_b, v_b, \phi_{b1,2}; u_a, v_a, \phi_{a1,2}) = \int \frac{da_{b1,2}^{\dagger} da_{b1,2}}{[2\pi i]^2} e^{-a_{b1}^{\dagger}a_{b1} - -a_{b2}^{\dagger}a_{b2}}$$

$$\left\langle u_b, \phi_{1b} \left| a_{1b} \right.\right\rangle \left\langle v_b, \phi_{2b} \left| a_{2b} \right.\right\rangle G_1\left(a_{b1,2}^{\dagger}, a_{b1,2}\right) \qquad (4.1.38)$$

alınır ve (4.1.38)'deki matrisler hesaplanırsa

$$\left\langle u_b, \phi_{1b} \left| a_{1b} \right.\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}M\omega u_b^2} \exp\left[\sqrt{2M\omega} u_b \left(a_{1+} e^{i\phi_{1b}} + a_{1-} e^{-i\phi_{1b}}\right)\right] \qquad (4.1.39)$$

ve

$$\left\langle v_b, \phi_{2b} \left| a_{2b} \right.\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}M\omega v_b^2} \exp\left[\sqrt{2M\omega} v_b \left(a_{2+} e^{i\phi_{2b}} + a_{2-} e^{-i\phi_{2b}}\right)\right] \qquad (4.1.40)$$

elde edilir. (4.1.39) ve (4.1.40) ifadeleri kuvvet serisine açılırsa

$$\left\langle u_b, \phi_{1b} \left| a_{1b} \right.\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}M\omega u_b^2} \sum_{k_1,q_1=0}^{\infty} (2M\omega u_b)^{\frac{q_1+k_1}{2}} \frac{a_{1+}^{k_1} e^{ik_1\phi_{1b}}}{k_1!} \frac{a_{1-}^{q_1} e^{-iq_1\phi_{1b}}}{q_1!} \qquad (4.1.41)$$

ve

$$\left\langle v_b, \phi_{2b} \left| a_{2b} \right.\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}M\omega v_b^2} \sum_{k_2,q_2=0} (2M\omega v_b)^{\frac{q_2+k_2}{2}} \frac{a_{2+}^{k_2} e^{ik_2\phi_{2b}}}{k_2!} \frac{a_{2-}^{q_2} e^{-iq_2\phi_{2b}}}{q_2!} \qquad (4.1.42)$$

olur. (4.1.41) ve (4.1.42) seri açılımları (4.1.38)'de yerine yazılırsa

$$G_2(u_b, v_b, \phi_{b1,2}; u_a, v_a, \phi_{a1,2}) = \int \frac{da^*_{+1,2} da_{+1,2}}{(2\pi i)^2} \int \frac{da^*_{-1,2} da_{-1,2}}{(2\pi i)^2} e^{-a^*_{+1,2} a_{+1,2} - a^*_{-1,2} a_{-1,2}}$$

$$\times \sum_{k_{1,2}, q_{1,2}=0}^{\infty} \sum_{n_{r_{1,2}}=0}^{\infty} \frac{a^{k_1}_{1+} a^{q_1}_{1-}}{k_1! q_1!} \frac{a^{k_2}_{2+} a^{q_2}_{2-}}{k_2! q_2!} e^{-\frac{1}{2} M\omega (u_b^2 + v_b^2)}$$

$$\times (2M\omega u_b)^{\frac{k_1+q_1}{2}} (2M\omega v_b)^{\frac{k_2+q_2}{2}} e^{ik_1\phi_{1b}/2} e^{-iq_1\phi_{1b}/2} e^{ik_2\phi_{2b}/2} e^{-iq_2\phi_{2b}/2} \tag{4.1.43}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dm_1 \int_{-\infty}^{\infty} dm_2 \frac{-i}{\left[(2n_{r_{1,2}} + 2|m_{1,2}| + 2)\omega + f\right]} \frac{\left(a^*_{+1,2} \lambda_{+1,2}\right)^{n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| + m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| + m_{1,2} + 1\right)}$$

$$\times \frac{\left(a^*_{-1,2} \lambda_{-1,2}\right)^{n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| - m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| - m_{1,2} + 1\right)}$$

olur. (4.1.43)'de yer alan a ve a^* integralleri hesaplanırsa

$$\int \frac{da^*_{+1,2} da_{+1,2}}{(2\pi i)^2} \int \frac{da^*_{-1,2} da_{-1,2}}{(2\pi i)^2} e^{-a^*_{+1,2} a_{+1,2} - a^*_{-1,2} a_{-1,2}}$$

$$\times \sum_{k_{1,2}, q_{1,2}=0}^{\infty} \sum_{n_{r_{1,2}}=0}^{\infty} \frac{\left(a^*_{+1,2}\right)^{n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| + m_{1,2}} a^{q_{1,2}}_{+1,2}}{\sqrt{\Gamma\left(n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| + m_{1,2} + 1\right)} \sqrt{q_{1,2}!}} \tag{4.1.44}$$

$$\times \frac{\left(a^*_{-1,2}\right)^{n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| - m_{1,2}} a^{k_{1,2}}_{-1,2}}{\sqrt{\Gamma\left(n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| - m_{1,2} + 1\right)} \sqrt{k_{1,2}!}}$$

$$= \delta_{n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| + m_{1,2}, q_{1,2}} \delta_{n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| - m_{1,2}, k_{1,2}}$$

elde edilir. (4.1.44)'deki integral sonucundan

$$n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| + m_{1,2} = q_{1,2} \tag{4.1.45}$$

ve

$$n_{r_{1,2}} + |m_{1,2}| - m_{1,2} = k_{1,2} \tag{4.1.46}$$

eşitlikleri yazılır. (4.1.45) ve (4.1.46) eşitlikleri kullanılarak

$$|m_1| = \frac{q_1 - k_1}{2}, \qquad |m_2| = \frac{q_2 - k_2}{2} \tag{4.1.47}$$

elde edilir. Böylece (4.1.43)

$$G_2(u_b, v_b, \phi_{b1,2}; u_a, v_a, \phi_{a1,2}) = \int_{-\infty}^{\infty} dm_1 \int_{-\infty}^{\infty} dm_2 \sum_{n_{r_{1,2}}=0}^{\infty} \frac{-i}{\left[\left(2n_{r_{1,2}}+2|m_{1,2}|+2\right)\omega+f\right]}$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}M\omega(u_b^2+v_b^2)} \left(2M\omega u_b\right)^{n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|} \left(2M\omega v_b\right)^{n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|} \tag{4.1.48}$$

$$\times e^{i|m_1|\phi_{1b}} e^{i|m_2|\phi_{2b}} \frac{\lambda_{+1,2}^{n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|+m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|+m_{1,2}+1\right)}$$

$$\times \frac{\lambda_{-1,2}^{n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|-m_{1,2}}}{\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+|m_{1,2}|-m_{1,2}+1\right)}$$

olur. m_1, m_2 rezidü integralinden elde edilen

$$2n_{r_{1,2}} + 2\,|m_{1,2}| + 2 = -\frac{f}{\omega}$$

$$|m_{1,2}| = -n_{r_{1,2}} - \frac{f}{2\omega} - 1 \tag{4.1.49}$$

eşitlikleri yerine yazılırsa (4.1.48)

$$G_2(u_b, v_b, \phi_{b1,2}; u_a, v_a, \phi_{a1,2}) = \sum_{n_{r_{1,2}}=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}M\omega(u_b^2+v_b^2)} \left(2M\omega u_b^2 v_b^2\right)^{-\frac{f}{2\omega}-1}$$

$$\times e^{-i\left(n_{r_1}+\frac{f}{2\omega}+1\right)\phi_{1b}} e^{-i\left(n_{r_2}+\frac{f}{2\omega}+1\right)\phi_{2b}} \frac{\lambda_{+1,2}^{-n_{r_{1,2}}-\frac{f}{\omega}-2} \lambda_{+1,2}^{n_{r_{1,2}}}}{\Gamma\left(-n_{r_{1,2}}-\frac{f}{\omega}-1\right)\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+1\right)} \tag{4.1.50}$$

$$\times \frac{\lambda_{-1,2}^{-n_{r_{1,2}}-\frac{f}{\omega}-2} \lambda_{-1,2}^{n_{r_{1,2}}}}{\Gamma\left(-n_{r_{1,2}}-\frac{f}{\omega}-1\right)\Gamma\left(n_{r_{1,2}}+1\right)}$$

olur. ϕ_1, ϕ_2 koordinatlarını yok etmek için

$$G_3(u_b, v_b; u_a, v_a) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_{1b} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_{2b} e^{-i\sqrt{p_\phi^2+2M(b+c)}(\phi_{1b}-\phi_{1a})}$$

$$\times e^{-i\sqrt{p_\phi^2+2M(b+c)}(\phi_{2b}-\phi_{2a})} G_2(u_b, v_b, \phi_{b1,2}; u_a, v_a, \phi_{a1,2}) \tag{4.1.51}$$

integrali alınırsa elde edilen Dirac delta fonksiyonları

$$2\pi\delta\left[\left(\frac{f}{2\omega}+n_{r1}+1\right)-\sqrt{p_\phi^2+2M(b+c)}\right] \tag{4.1.52}$$

ve

$$2\pi\delta\left[\left(\frac{f}{2\omega}+n_{r2}+1\right)-\sqrt{p_\phi^2+2M(b+c)}\right] \tag{4.1.53}$$

olur. ϕ fiziksel koordinatı (4.1.51)'deki $G_3(u_b,v_b;u_a,v_a)$ ifadesine eklenirse

$$G_4(u_b,v_b,\phi_b;u_a,v_a,\phi_a)=\int\frac{D\phi Dp_\phi}{2\pi}e^{i\int dsp_\phi\frac{d\phi}{ds}}G_3(u_b,v_b;u_a,v_a) \tag{4.1.54}$$

olur. ϕ için Path integral hesabı yapılırak (EK-3)

$$\int\frac{D\phi Dp_\phi}{2\pi}e^{i\int dsp_\phi\frac{d\phi}{ds}}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int\frac{dp_\phi}{2\pi}e^{ip_\phi(\phi_b+2\pi m-\phi_a)} \tag{4.1.55}$$

elde edilir. Böylece (4.1.55) kullanılarak (4.1.54)

$$G_4(u_b,v_b,\phi_b;u_a,v_a,\phi_a)=\sum_{n_{r_{1,2}}=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}M\omega(u_b^2+v_b^2)}\left(2M\omega u_b^2v_b^2\right)^{-\frac{f}{2\omega}-1}$$

$$\times e^{i\sqrt{p_\phi^2+2M(b+c)}\phi_{1a}+i\sqrt{p_\phi^2+2M(b-c)}\phi_{2a}}e^{ip_\phi(\phi_b+2\pi m-\phi_a)}$$

$$\times\frac{(\lambda_{+1}\lambda_{-1})^{-\frac{f}{2\omega}-1}\left(\frac{\lambda_{+1}}{\lambda_{-1}}\right)^{-\frac{f}{2\omega}-(n_{r_1}+1)}}{\Gamma(-n_{r_1}-\frac{f}{\omega}-1)\Gamma(-n_{r_1}+1)} \tag{4.1.56}$$

$$\times\frac{(\lambda_{+2}\lambda_{-2})^{-\frac{f}{2\omega}-1}\left(\frac{\lambda_{+2}}{\lambda_{-2}}\right)^{-\frac{f}{2\omega}-(n_{r_2}+1)}}{\Gamma(-n_{r_2}-\frac{f}{\omega}-1)\Gamma(-n_{r_2}+1)}$$

şeklinde elde edilir. Green fonksiyonu kernele dönüştürülürek, t zamanı eklenirse

$$K(u_b,v_b,t_b;u_a,v_a,t_a)=\int\frac{DtD(-p_o)}{2\pi}e^{-i\int p_o\frac{dt}{ds}}$$

$$\times K(u_b,v_b,\phi_b,s_b;u_a,v_a,\phi_a,s_a) \tag{4.1.57}$$

kerneli yazılır. Path integral hesabıyla (EK-2)

$$\int\frac{DtD(-p_o)}{2\pi}e^{-i\int p_o\frac{dt}{ds}}=\int\frac{dp_o}{2\pi}e^{-ip_o(t_b-t_a)} \tag{4.1.58}$$

elde edilir. Böylece Hartmann potansiyeli için Kernel ifadesi

$$K(u_b,v_b,t_b;u_a,v_a,t_a) = \int \frac{d(-p_o)}{2\pi} \int \frac{dp_\phi}{2\pi} \int ds_b \sum_{n_{r_{1,2}}=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}M\omega(u_b^2+v_b^2)}$$

$$\times \left(2M\omega u_b^2 v_b^2\right)^{-\frac{f}{2\omega}-1} e^{i\sqrt{p_\phi^2+2M(b+c)}\phi_{1a}+i\sqrt{p_\phi^2+2M(b-c)}\phi_{2a}} e^{ip_\phi(\phi_b+2\pi m-\phi_a)}$$

$$\times \frac{(\lambda_{+1}\lambda_{-1})^{-\frac{f}{2\omega}-1}\left(\frac{\lambda_{+1}}{\lambda_{-1}}\right)^{-\frac{f}{2\omega}-(n_{r_1}+1)}}{\Gamma(-n_{r_1}-\frac{f}{\omega}-1)\Gamma(-n_{r_1}+1)} \tag{4.1.59}$$

$$\times \frac{(\lambda_{+2}\lambda_{-2})^{-\frac{f}{2\omega}-1}\left(\frac{\lambda_{+2}}{\lambda_{-2}}\right)^{-\frac{f}{2\omega}-(n_{r_2}+1)}}{\Gamma(-n_{r_2}-\frac{f}{\omega}-1)\Gamma(-n_{r_2}+1)}$$

biçiminde elde elde edilir.

4.2. Konfigürasyon Uzayında Kernel ve Uyumlu Durumların Türetilmesi

Kernelle uyumlu durumlar arasındaki ilişki karmal konfigürasyon uzayında

$$K_\omega^{phys}(\xi_b^\dagger,\eta_b^\dagger,\xi_b;\eta_b,\xi_a^\dagger,\eta_a^\dagger,\xi_a,\eta_a) = \int \frac{da_{b1,2}^\dagger da_{b1,2}}{[2\pi i]^4} \int \frac{da_{a1,2}^\dagger da_{a1,2}}{[2\pi i]^4} e^{-a_{b1,2}^\dagger a_{b1,2}-a_{a1,2}^\dagger a_{a1,2}}$$

$$\times \left\langle \xi_b^\dagger,\xi_b\,|a_b\right\rangle \left\langle \eta_b^\dagger,\eta_b\,|a_b\right\rangle K_\omega^{phys}(a_{b1,2}^\dagger,a_{a1,2}) \left\langle a_{a1,2}\,|\xi_a^\dagger,\xi_a,\eta_a^\dagger,\eta_a\right\rangle \tag{4.2.1}$$

biçimindedir. Burada ξ ve η karmal koordinatlarda (r,θ,ϕ)'ye bağlı değişkenlerdir. (4.1.23) ve (4.1.24) bağıntıları kullanılarak $\langle \xi^\dagger,\eta^\dagger,\xi,\eta\,|a_{1,2}\rangle$ ve $\left\langle a_{1,2}\,|\xi^\dagger\eta^\dagger,\xi,\eta\right\rangle$ ifadeleri

$$\langle \xi^\dagger\eta^\dagger,\xi,\eta\,|a_{\pm1,2}\rangle = \exp\left[-(\xi^\dagger\xi+\eta^\dagger\eta)\right.$$

$$+\sqrt{2}(a_{+1}\xi+a_{-1}\xi^\dagger+a_{+2}\eta+a_{-2}\eta^\dagger) \tag{4.2.2}$$

$$\left.-\frac{1}{2}(a_{+1}a_{-1}+a_{+2}a_{-2})\right]$$

şeklinde hesaplanır. (4.2.2)'nin karmal eşleniği

$$\left\langle a_{\pm1,2}\,|\xi^\dagger\eta^\dagger,\xi,\eta\right\rangle = \langle \xi^\dagger\eta^\dagger,\xi,\eta\,|a_{\pm1,2}\rangle^* \tag{4.2.3}$$

biçimindedir. $a_{+1,2}$ ve $a_{-1,2}$, $|a_{\pm 1,2}\rangle$ uyumlu durumlarının özdeğerleridir. $\langle \xi^\dagger \eta^\dagger, \xi, \eta \,|a_{\pm 1,2}\rangle$ ve $\langle a_{\pm 1,2} \,|\xi^\dagger \eta^\dagger, \xi, \eta\rangle$ ifadeleri (4.2.1)'de yerine yazılarak $a^\dagger_{b1,2}$, $a_{b1,2}$ ve $a^\dagger_{a1,2}$, $a_{a1,2}$ üzerinden integral alınırsa

$$K^{phys}_\omega(\xi^\dagger_b, \xi_b, \eta^\dagger_b; \eta_b, \xi^\dagger_a, \xi_a, \eta^\dagger_a, \eta_a) = \left(\frac{1}{2i\sin\omega\Lambda}\right)^2 \cos\left[\frac{1}{i\sin\omega\Lambda}(\xi^\dagger_b\xi_a + \xi^\dagger_a\xi_b\right.$$

$$\left. +\eta^\dagger_b\eta_a + \eta^\dagger_a\eta_b)\right] \exp\left[\frac{\cos\omega\Lambda}{i\sin\omega\Lambda}(\xi^\dagger_b\xi_b + \xi^\dagger_a\xi_a + \eta^\dagger_b\eta_b + \eta^\dagger_a\eta_a)\right] \tag{4.2.4}$$

elde edilir. (4.2.4)'de $\Lambda = \lambda_b - \lambda_a$'dır. ξ ve η gerçel ve sanal kısımlarına

$$\xi = \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_1 - iu_2 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} v_1 + iv_2 \\ v_1 - iv_2 \end{pmatrix} \tag{4.2.5}$$

biçiminde ayrılarak (4.2.4)'de yerine yazılırsa (4.2.5)

$$K^{phys}_\omega(u_b, u_a, v_b, v_a) = \left(\frac{1}{2i\sin\omega\Lambda}\right)^2 \cos\left[\frac{1}{i\sin\omega\Lambda}(u^\dagger_b u_a + v^\dagger_b v_a\right.$$

$$\left. +\xi^\dagger_a\xi_b + \eta^\dagger_a\eta_b)\right] \exp\left[\frac{\cos\omega\Lambda}{i\sin\omega\Lambda}(u^\dagger_b u_b + u^\dagger_a u_a + v^\dagger_b v_b + v^\dagger_a v_a)\right] \tag{4.2.6}$$

olarak elde edilir. Bu (Duru vd 1982)'de verilen kernel ifadesidir. Küresel koordinatlarda uyumlu durumları türetmek için

$$\xi = |\xi|\, e^{i\varphi_1/2}$$

$$\xi^\dagger = |\xi|\, e^{-i\varphi_1/2} \tag{4.2.7}$$

$$\eta = |\eta|\, e^{i\varphi_2/2}$$

$$\eta^\dagger = |\eta|\, e^{-i\varphi_2/2}$$

koordinatları tanımlanır ve $\xi, \xi^\dagger$ ve $\eta, \eta^\dagger$ (4.2.3)'de yerine yazılırsa

$$\langle |\xi|, |\eta|, \varphi_1, \varphi_2 \,|a_{\pm 1,2}\rangle = \exp\left[-|\xi|^2 - |\eta|^2\right.$$

$$\left. +\sqrt{2}(a_{+1}\,|\xi|\, e^{i\varphi_1/2} + a_{-1}\,|\xi|\, e^{-i\varphi_1/2} + a_{+2}\,|\eta|\, e^{i\varphi_2/2} + a_{-2}\,|\eta|\, e^{-i\varphi_2/2})\right. \tag{4.2.8}$$

$$-\frac{1}{2}(a_{+1}a_{-1}+a_{+2}a_{-2})\Big]$$

ve üstel ifade φ_1 ve φ_2'nin kuvvet serisine açılırsa

$$\langle |\xi|, |\eta|, \varphi_1, \varphi_2 \, |a_{\pm 1,2}\rangle = \exp\left[-|\xi|^2 - |\eta|^2 - \frac{1}{2}(a_{+1}a_{-1}+a_{+2}a_{-2})\right]$$

$$\sum_{n_{1,2}=0}^{\infty} \frac{1}{n_1! n_2!} 2^{(n_1+n_2)/2} e^{i(n_1-n_2)\varphi_1/2} \, |\eta|^{n_1+n_2} \, a_{+1}^{n_1} a_{-1}^{n_2} \tag{4.2.9}$$

$$\sum_{l_{1,2}=0}^{\infty} \frac{1}{l_1! l_2!} 2^{(l_1+l_2)/2} e^{i(l_1-l_2)\varphi_2/2} \, |\eta|^{l_1+l_2} \, a_{+2}^{l_1} a_{-2}^{l_2}$$

elde edilir. (4.2.9)'daki $a_{\mp 1,2}$ için

$$a_1^{\dagger} a_1 = \frac{a_{+1}a_{-1}}{2}$$

$$a_2^{\dagger} a_2 = \frac{a_{+2}a_{-2}}{2} \tag{4.2.10}$$

ifadeleri tanımlanıp yerlerine yazılır ve

$$\int d\varphi_1 e^{i(n_1-n_2)\varphi_1} = 2\pi \delta_{n_1,n_2} \tag{4.2.11}$$

eşitliği kullanılarak (4.2.9) $\varphi_{1,2}$ integralleri alınırsa

$$\left\langle |\xi|, |\eta| \left| a_{1,2}^{\dagger}, a_{1,2} \right. \right\rangle = 4\pi^2 \exp\left[-|\xi|^2 - |\eta|^2 - a_1^{\dagger}a_1 - a_2^{\dagger}a_2\right]$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} 2^n \left(|\xi|^2\right)^n \left(2a_1^{\dagger}a_1\right)^n \tag{4.2.12}$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l!)^2} 2^l \left(|\eta|^2\right)^l \left(2a_2^{\dagger}a_2\right)^l$$

yazılır. Sıfırıncı dereceden modife Bessel fonksiyonları için

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \tag{4.2.13}$$

bağıntısını kullanarak (4.2.13) ifadesi

$$\left\langle |\xi|, |\eta| \left| a_{1,2}^{\dagger}, a_{1,2} \right. \right\rangle = 4\pi^2 \exp\left[-|\xi|^2 - |\eta|^2 - a_1^{\dagger}a_1 - a_2^{\dagger}a_2\right]$$

$$\times I_0\left(\sqrt{2a_1^\dagger a_1\,|\xi|^2}\right) I_0\left(\sqrt{2a_2^\dagger a_2\,|\eta|^2}\right) \tag{4.2.14}$$

biçiminde elde edilir. Küresel koordinatlarda

$$\begin{aligned} |\xi| &= r\sin\frac{\theta}{2} \\ |\eta| &= r\cos\frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

koordinatları tanımlanarak (4.2.14) de yerine yazılırsa

$$\left\langle r,\theta \left| a_{1,2}^\dagger, a_{1,2} \right.\right\rangle = 4\pi^2 \exp\left[-r^2 - a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2\right]$$

$$\times I_0\left(\sqrt{2a_1^\dagger a_1 r^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}\right) I_0\left(\sqrt{2a_2^\dagger a_2 r^2 \cos^2\frac{\theta}{2}}\right) \tag{4.2.16}$$

Genel Bessel fonksiyonlarının

$$Z_\nu(\lambda z) = \lambda^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Z_{\nu+k}(z) \left[\frac{1-\lambda^2}{2} z\right]^k \tag{4.2.17}$$

bağıntısı kullanılarak

$$I_o\left[\sqrt{2a_1^\dagger a_1 r^2 (\frac{1+\cos\theta}{2})}\right] = \sum_{l_1=0}^{\infty} \frac{1}{l_1! 2^{l_1}} I_{l_l}\left(\sqrt{a_1^\dagger a_1 r^2}\right)$$

$$\times (\cos\theta)^{l_1} \left(\sqrt{a_1^\dagger a_1 r^2}\right)^{l_1} \tag{4.2.18}$$

ve

$$I_o\left[\sqrt{2a_2^\dagger a_2 r^2 \frac{(1-\cos\theta)}{2}}\right] = \sum_{l_2=0}^{\infty} \frac{1}{l_2! 2^{l_2}} I_{l_2}\left(\sqrt{a_2^\dagger a_2 r^2}\right)$$

$$\times (-\cos\theta)^{l_2} \left(\sqrt{a_2^\dagger a_2 r^2}\right)^{l_2} \tag{4.2.19}$$

yazılır. (4.2.17) ve (4.2.18), (4.2.15)'de yerine yazılırsa

$$\left\langle r,\theta \left| a_{1,2}^\dagger, a_{1,2} \right.\right\rangle = 4\pi^2 \exp\left[r^2 - a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2\right]$$

$$\times \sum_{l_1=0}^{\infty} \frac{1}{l_1! 2^{l_1}} I_{l_1}\left(\sqrt{a_1^\dagger a_1 r^2}\right) (\cos\theta)^{l_1} \left(\sqrt{a_1^\dagger a_1 r^2}\right)^{l_1} \tag{4.2.20}$$

$$\times\sum_{l_2=0}^{\infty}\frac{1}{l_2!2^{l_2}}I_{l_2}\left(\sqrt{a_2^{\dagger}a_2r^2}\right)(-\cos\theta)^{l_2}\left(\sqrt{a_2^{\dagger}a_2r^2}\right)^{l_2}$$

elde edilir. Böylece sıfırıncı dereceden modife bessel fonksiyonları l_1 ve l_2 dereceden modife Bessel fonksiyonlarına dönüştü. Modife Bessel fonksiyonu ile Bessel fonksiyonu arasındaki ilişkiyi veren

$$I_\nu(z)=e^{-\frac{\pi}{2}\nu i}J_\nu(e^{\frac{\pi}{2}i}z) \tag{4.2.21}$$

ve

$$J_\nu(e^{m\pi i}z)=e^{mv\pi i}J_\nu(z) \tag{4.2.22}$$

bağıntıları kullanılarak modife Bessel fonksiyonları Bessel fonksiyonuna dönüştürülür ve Bessel fonksiyonları ile bağlı Laguerre fonksiyonu arasındaki ilişkiyi veren

$$J_\alpha(2\sqrt{xz})e^z(xz)^{-\frac{1}{2}\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^\alpha(x) \qquad \alpha>-1 \tag{4.2.23}$$

bağıntısı kullanılırak (4.2.19) ifadesi

$$\left\langle r,\theta\left|a_{1,2}^{\dagger},a_{1,2}\right.\right\rangle=4\pi^2\exp\left[r^2-a_1^{\dagger}a_1-a_2^{\dagger}a_2\right]$$

$$\times\sum_{l_1=0}^{\infty}\frac{1}{l_1!2^{l_1}}e^{-\frac{\pi}{2}l_1 i}e^{\frac{\pi}{2}i}e^{-r^2}(\cos\theta)^{l_1}\left(a_1^{\dagger}a_1r^2\right)^{l_1}$$

$$\times\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{\left(a_1^{\dagger}a_1\right)^{n_1}}{\Gamma(n_1+l_1+1)}L_{n_1}^{l_1}(r^2) \tag{4.2.24}$$

$$\times\sum_{l_2=0}^{\infty}\frac{1}{l_2!2^{l_2}}e^{-\frac{\pi}{2}l_1 i}e^{\frac{\pi}{2}i}e^{-r^2}(-\cos\theta)^{l_2}\left(a_2^{\dagger}a_2r^2\right)^{l_2}$$

$$\times\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{\left(a_2^{\dagger}a_2\right)^{n_2}}{\Gamma(n_2+l_2+1)}L_{n_2}^{l_2}(r^2)$$

biçimine dönüştürülür. $\cos^{k_1}\theta$ ve $\cos^{k_2}\theta$ için

$$x^{2m}=\sum_{n=0}^{m}\frac{2^{2n}(4n+1)(2m)!(m+n)!}{(2m+2n+1)!(m-n)!}P_{2n}(x) \tag{4.2.25}$$

bağıntısı yardımıyla bağlı Legendre fonksiyonları elde edilir ve (4.2.22)'de yerine yazılırsa

$$\langle r,\theta,\varphi_{1,2}\,|a_{1,2}\rangle = 4\pi^2 \sum_{l_{1,2}=0}^{\infty} \frac{\left(a_1^{\dagger}a_1\right)^{n_1+l_1}\left(a_2^{\dagger}a_2\right)^{n_2+l_2}}{\Gamma(n_1+l_1+1)\Gamma(n_2+l_2+1)}$$

$$\times e^{-r^2} r^{(l_1+l_2)} L_{n_1}^{l_1}(r^2) L_{n_2}^{l_2}(r^2) e^{im\phi} \tag{4.2.26}$$

$$\times \sum_{l_{1,2}=0}^{k_{1,2}} \frac{\left[1+(-1)^{k_{1,2}+l_{1,2}}\left(2l_{1,2}+1\right)2^{l_1+l_2}\Gamma\left[\frac{(l_{1,2}+k_{1,2})}{2}+1\right]\right]}{\Gamma\left(l_{1,2}+k_{1,2}+2\right)\Gamma\left[\frac{(k_{1,2}-l_{1,2})}{2}+1\right]} P_{l_1}(\cos\theta)\, P_{l_2}(\cos\theta)$$

elde edilir. Bu ifade Hartmann potansiyelinin uyumlu durumlarıdır.

5. SONUÇ

Bu çalışmada merkezcil olmayan, halka biçimli Hartmann potansiyeli için uyumlu durumlar elde edildi. Bu sistemin kuantizasyonu ve uyumlu durumlarının oluşturulması daha önce H-atomu için kurulan yöntemle oluşturuldu. H-atomu ile bu sistemin temel farkı ϕ_1 ve ϕ_2 açılarının $[0, 2\pi]$ aralığında tanımlanmamış olmasıdır. Bu nedenle $p_{\phi_1}^2$ ve $p_{\phi_2}^2$ de $(tamsayı)^2$ değildir. Sistem (u, v, ϕ_1, ϕ_2) ile tanımlanan dört boyutlu uzayda hareket eden, dört tane aynı ω açısal frekanslı harmonik salınıcı problemine dönüştürüldü ve path integrali kullanılarak kuantize edildi. Elde edilen uyumlu durumlar kompleks özdeğerli olup, küresel koordinatlardaki Hartmann potansiyeli dalga fonksiyonlarının süperpozisyonudur.

Benzen için bir model olarak önerilen Hartmann potansiyeli aynı zamanda Coulomb+Aharonov-Bohm etkilerini de içermektedir. Kullandığımız yaklaşım kuantum kimyası, kozmoloji ve katıhal fiziği alanında, kristal yapıların aydınlatılması, molekül modellerinin oluşturulması ve bunun gibi bir çok sistemde uygulama alanı bulabilir. Ayrıca daha karmaşık kuantum kimyasal sistemlerin uyumlu durumlarının elde edilmesinde yararlı olabilir.

6. KAYNAKLAR

AHARANOV,Y.and BOHM, D. 1959. Significance of elektromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys.Rev*, 115,485-491.

BHAUMİC D., DUTTA-ROY B.and GLOSH G. 1986 *J. Phys. A*, 9,1355.

DURU İ.H. and KLEİNERT H. 1979. Solution of the path integral for the H-atom. *Phys. Lett.*,84B,185.

DURU İ.H. and KLEİNERT H. 1982. Quantum mechanics of H-atom from path integrals. *Fortschr.Phys.*,30,401.,84B,185.

ERBİL H. 1989. Kuantum Fiziği. Cilt 2,261,İzmir.

FEYNMANN R.P. and HİBBS A.R. 1965. Quantum Mechanics and Path İntegral,McGraw Hill,New York.

FUJİKAWA K. Path integral of the Hydrogen atom, the Jacobi's principle of least action and one dimensional quantum gravity. *arXiv:hep-th*/9602080,v2.

GERRY C.C. 1986. Coherent states and the Kepler-Coulomb problem. *Phys. Rev.A*,33,6-11.

GLAUBER R.J. 1963. Photon correlations. *Phys. Rev. Lett.*,10,84-86.

GLAUBER R.J. 1963. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*,130,2529.

GOLDSTEİN H. 1950. Classical Mechanics. Addison-Wesley,Reading Mass.

HARTMANN H. 1972. Motion of a body in a ring-shaped potential. *Theor. Chim. Acta*,24,201.

KANDIRMAZ N. 1998 Hidrojen Atomu için spinör mekaniği. 24-27,Mersin.

MANDAL B.P. 2000. Path integral solution of noncentral potential. *Int. J. Mod. Phys. A*,15(8),1225-1234.

SCHRÖDİNGER E. 1926. *Naturwissenchaften*,14,664.

TOYODA T. and WAKAYAMA S. 1999. Coherent states for the Kepler motion. *Phys. Rev. A*,59,1021-1024.

ÜNAL N. 2000. Coherent states for the Hydrogen atom. *Tr. J. Phys.*,24,463.

ÜNAL N. 2001. Parametric time coherent states for the hydrogen atom. *Phys. Rev. A*,63(5),052105,1.

ÜNAL N. 2001. Path integration and coherent states for 5-D Hydrogen atom. in "Fluctuating Paths and Fields", ed. By Janke W., Pelster A., Schmidt H. J. and Bachmann M., World Scientific, Singapore.

ÜNAL N. 2002. Parametric time coherent states for Morse potential. *Can. J. Phys.*,80,875-881.

EKLER

EK-1

Bir fiziksel sistemin karmal koordinatlarda propagatörü

$$K(a^{\star},a;\in)=\left\langle a^{\star}\left|e^{-i\in H}\right|a\right\rangle \tag{1}$$

olarak tanımlanır. Tek bir harmonik salınıcı için Hamiltonyen $H=\omega a^{\star}a$ alınarak, $\in=(s_b-s_a)/N$ olmak üzere $N\in$ sonlu zaman aralığı için kernel

$$K(a_b^{\star},s_b;a_a,s_a)=\int\prod_{j=1}^{N-1}\frac{da_j^{\star}da_j}{2\pi i}\left\langle a_N^{\star}=a_b^{\star},s_N=s_b\left|e^{-i\in\omega a^{\star}a}\right|a_{N-1},s_{N-1}\right\rangle$$

$$\times e^{-a_{N-1}^{\star}a_{N-1}}\left\langle a_{N-1}^{\star},s_{N-1}\left|e^{-i\in\omega a^{\star}a}\right|a_{N-2},s_{N-2}\right\rangle e^{-a_{N-2}^{\star}a_{N-2}}\ldots \tag{2}$$

$$\vdots$$

$$e^{-a_{-1}^{\star}a_{-1}}\left\langle a_1^{\star},s_1\left|e^{-i\in\omega a^{\star}a}\right|a_0=a_a,s_0=s_a\right\rangle$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\langle a^{\star}|a\rangle=e^{a^{\star}a}$ olarak seçilmiştir. (Ek1.2)'de Dirac gösteriminde yazılan terimler integral gösteriminde

$$K(a_b^{\star},s_b;a_a,s_a)=\int\prod_{j=1}^{N-1}\frac{da_j^{\star}da_j}{2\pi i}e^{i\sum\limits_{j=1}^{N}\frac{1}{2i}\left[\left(a_j^{\star}-a_{j-1}^{\star}\right)a_{j-1}-a_j^{\star}(a_j-a_{j-1})\right]-\in\omega a_j^{\star}a_{j-1}}e^{\frac{1}{2}\left(a_N^{\star}a_N+a_0^{\star}a_0\right)} \tag{3}$$

olarak yazılır. (Ek1.3)'deki üstel ifade $N\to\infty$, $\in\to 0$ limit durumunda

$$K(a_b^{\star},s_b;a_a,s_a)=\int\frac{Da_j^{\star}Da_j}{2\pi i}e^{i\int\limits_{s_b}^{s_a}ds\left[\frac{1}{2i}\left(\dot{a}^{\star}a-a^{\star}\dot{a}\right)-\omega a^{\star}a\right]}e^{\frac{1}{2}\left(a_N^{\star}a_N+a_0^{\star}a_0\right)} \tag{4}$$

olarak elde edilir. (3) denklemi

$$K(a_b^{\star},s_b;a_a,s_a)=\int\prod_{j=1}^{N-1}\frac{da_j^{\star}da_j}{2\pi i}e^{\sum\limits_{j=1}^{N}a_j^{\star}a_{j-1}-\sum\limits_{j=1}^{N}a_j^{\star}a_j-i\in\omega\sum\limits_{j=1}^{N}a_j^{\star}a_{j-1}} \tag{5}$$

biçiminde düzenlenip üstel ifadedeki 1. ve 3. terim m_j'nin kuvvet serisine açılırsa

$$K(a_b^{\star},s_b;a_a,s_a)=\int\prod_{j=1}^{N-1}\frac{da_j^{\star}da_j}{2\pi i}e^{-a_j^{\star}a_j}\prod_{j=1}^{N}\sum_{m_j=0}^{\infty}\frac{1}{m_j!}\left[a_j^{\star}aj_{j-1}-i\in\omega a_j^{\star}a_{j-1}\right]^{m_j} \tag{6}$$

olur. j üzerinden olan terimler tek tek yazılırsa

$$K(a_b^\star, s_b; a_a, s_a) = \int \frac{da_{N-1}^\star da_{N-1}}{2\pi i} e^{-a_{N-1}^\star a_{N-1}} \sum_{m_N=0}^{\infty} \frac{1}{m_N!} \left[a_N^\star (1 - i \in \omega)\, a_{N-1}\right]^{m_N}$$

$$\times \sum_{m_{N-1}=0}^{\infty} \frac{1}{m_{N-1}!} \left[a_{N-1}^\star (1 - i \in \omega)\, a_{N-2}\right]^{m_{N-1}} \dots \tag{7}$$

$$\vdots$$

$$\times \int \frac{da_1^\star da_1}{2\pi i} e^{-a_1^\star a_1} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{1}{m_2!} \left[a_2^\star (1 - i \in \omega)\, a_1\right]^{m_2} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{1}{m_1!} \left[a_1^\star (1 - i \in \omega)\, a_0\right]^{m_1}$$

elde edilir.

$$\int \frac{da^\star da}{2\pi i} e^{-a^\star a} \frac{a^{\star m} a^n}{\sqrt{m! n!}} = \delta_{mn} \tag{8}$$

diklik bağıntısı kullanılırsa denk (7)

$$K(a_b^\star, s_b; a_a, s_a) = \delta_{a_b^\star a_N^\star} \delta_{a_a a_0} \sum_{m_N=0}^{\infty} \frac{1}{m_N!} \left[a_N^\star (1 - i \in \omega)\,(1 - i \in \omega)\, a_{N-2}\right]^{m_N} \dots$$

$$\vdots \tag{9}$$

$$\sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{1}{m_2!} \left[a_2^\star (1 - i \in \omega)\,(1 - i \in \omega)\, a_0\right]^{m_2}$$

şeklini alır. (9) ifadesi

$$K(a_b^\star, s_b; a_a, s_a) = \delta_{a_b^\star a_N^\star} \delta_{a_a a_0} \sum_{m_N=0}^{\infty} \frac{1}{m_N!} \left[a_N^\star (1 - i \in \omega)^N a_0\right]^{m_N} \tag{10}$$

olarak yazılabilir. Üstel ifadenin serisel açılımı kullanılarak

$$K(a_b^\star, s_b; a_a, s_a) = \delta_{a_b^\star a_N^\star} \delta_{a_a a_0} \left[a_N^\star e^{-i \in N \omega} a_0\right] \tag{11}$$

elde edilir. $a_N^\star = a_b$, $a_0 = a_a$ ve $N \in = s_b - s_a$ olduğundan tek salınıcı için (11) kernel ifadesi

$$K(a_b^\star, s_b; a_a, s_a) = \left[a_b^\star e^{-i\omega(s_b - s_a)} a_a\right] \tag{12}$$

olarak elde edilir. Birden fazla salınıcı için kernel hesaplanırken, kuantum mekaniksel düzeltme terimi olarak her bir salınıcı için ω'ya $1/2$ çarpanı gelmektedir.

EK-2

$$\int \frac{DtD(-p_0)}{[2\pi]} e^{i\int ds(-p_0)\frac{dt}{ds}}$$

integral sonucu path integrali kullanılarak elde edilebilir.

$$\int \frac{DtD(-p_0)}{[2\pi]} e^{i\int ds(-p_0)\frac{dt}{ds}} = \int dt_{N-1}\cdots dt_1 \frac{dp_{0N}}{2\pi}\cdots\frac{dp_{01}}{2\pi} e^{i\sum_{j=1}^{N} p_{oj}(t_j-t_{j-1})}$$

$$= \int dt_{N-1}\cdots dt_1 \frac{dp_{0N}}{2\pi}\cdots\frac{dp_{01}}{2\pi} e^{ip_{0N}(t_N-t_{N-1})+ip_{0N-1}(t_{N-1}-t_{N-2})\cdots ip_{01}(t_1-t_0)}$$

$$= \int dt_{N-1}\cdots dt_1 \frac{dp_{0N}}{2\pi}\cdots\frac{dp_{01}}{2\pi} e^{ip_{0N}t_N-it_{N-1}(p_{0N}-p_{0N-1})\cdots it_1(p_2-p_1)-ip_{o1}t_0}$$

$$= \int \frac{dp_{0N}}{2\pi} e^{ip_{oN}t_b}\delta(p_{oN}-p_{0N-1})\delta(p_{oN-1}-p_{0N-2})\cdots\delta(p_2-p_1)e^{ip_{01}t_0}$$

$t_N = t_b$ ve $p_{0N} = p_0$ alınırsa

$$\int \frac{DtD(-p_0)}{[2\pi]} e^{i\int ds(-p_0)\frac{dt}{ds}} = \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0(t_b-t_a)}$$

EK-3

$$\int \frac{D\phi Dp_\phi}{[2\pi]} e^{i\int ds p_\phi \frac{d\phi}{ds}}$$

integrali için path intagrali kullanılarak

$$\int \frac{D\phi Dp_\phi}{[2\pi]} e^{i\int ds p_\phi \frac{d\phi}{ds}} = \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\phi_N$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_{\phi_1}}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_{\phi_{N+1}}}{2\pi} e^{i\sum_{j=1}^{N} p_{oj}(t_j - t_{j-1})}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\phi_N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_{\phi_1}}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_{\phi_{N+1}}}{2\pi}$$

$$e^{i(p_{\phi_2} - p_{\phi_1})\phi_1 - p_{\phi_1}\phi_a \cdots - (p_{\phi_{N+1}} - p_{\phi_N})\phi_N + p_{\phi_{N+1}}\phi_b}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\phi_N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_{\phi_1}}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_{\phi_{N+1}}}{2\pi}$$

$$e^{ip_{\phi_{N+1}}\phi_b - (p_{\phi_{N+1}} - p_{\phi_N})\phi_N - \cdots - (p_{\phi_2} - p_{\phi_1})\phi_1 - p_{\phi_1}\phi_a}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_\phi}{2\pi} \cdots \int d\phi e^{i\left[p_{\phi_{N+1}}(\phi_b + 2\pi m) - \left(p_{\phi_{N+1}} - p_{\phi_N}\right)\phi_N \cdots - (p_{\phi_2} - p_{\phi_1})\phi_1 - p_{\phi_1}\phi_a\right]}$$

$d\phi$ integrallerinden N tane δ fonksiyonu elde edilir.

$$\int \frac{D\phi Dp_\phi}{[2\pi]} e^{i\int ds p_\phi \frac{d\phi}{ds}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ip_\phi(\phi_b + 2\pi m - \phi_a)}$$

ÖZGEÇMİŞ

Nalan Kandırmaz 1973' de Gölbaşı'nda doğdu. 1995' de Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Fizik Eğitimi bölümünden mezun oldu. 1995 'de başladığı Yüksek Lisans öğrenimini Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim dalında 1998' de tamamladı. 2000 yılında Akdeniz üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde doktora öğrenimine başladı. Görev yaptığı Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat fakültesi araştırma görevlisi kadrosu 35. madde ile Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri enstitüsüne aktarıldı. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.