T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ KAYMA OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU PARABOLİK POTANSİYELLER UZAYI

Sinem SEZER

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2005

GENELLEŞMİŞ KAYMA OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU PARABOLİK POTANSİYELLER UZAYI

Sinem SEZER

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez TÜBİTAK-BAYG Tarafından Desteklenmiştir

2005

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ KAYMA OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU PARABOLİK POTANSİYELLER UZAYI

Sinem SEZER

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 28/ 06/ 2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 95 not takdir edilerek oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İlham ALİYEV ....
(Danışman)

Prof. Dr. Veli KURT ....

Prof. Dr. A. Aziz ERGİN ....

Prof. Dr. Orhan GÖLBAŞI ....

Doç. Dr. Abdulkadir Ceylan ÇÖKEN ....

ÖZET

GENELLEŞMİŞ KAYMA OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU PARABOLİK POTANSİYELLER UZAYI

Sinem SEZER

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. İlham ALİYEV
Mayıs 2005, 53 Sayfa

Bu tez çalışmasının amacı; Genelleşmiş kayma operatörünün doğurduğu parabolik Bessel potansiyelleri uzayını nitelendiren özellikleri belirlemektir.

Bu amaca ulaşmak için ilkönce; B-parabolik potansiyel ve B-parabolik potansiyeller uzayı tanımlandı. Daha sonra da anizotropik ve ağırlıklı sonlu fark ve bu fark ile ilişkili özel bir operatörler ailesi tanımlandı. Son olarak da, bu operatörler ailesi kullanılarak, sözü edilen uzayın önemli bir karakterizasyonu elde edildi.

ANAHTAR KELİMELER: Laplace-Bessel diferansiyel operatörü, Genelleşmiş kayma operatörü, Fourier-Bessel dönüşümü, B-parabolik potansiyel, ağırlıklı L_p-uzayı, anizotropik ve ağırlıklı sonlu fark.

JÜRİ: Prof. Dr. İlham ALİYEV (Danışman)

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. A. Aziz ERGİN

Prof. Dr. Orhan GÖLBAŞI

Doç. Dr. Abdulkadir Ceylan ÇÖKEN

ABSTRACT

ON SPACE OF PARABOLIC POTENTIALS GENERATED BY THE GENERALIZED TRANSLATION OPERATOR

Sinem SEZER

Ph. D. Thesis in Mathematics
Adviser: Assoc. Prof. Dr. İlham ALİYEV
May 2005, 53 Pages

The work presented in this thesis is on the space of parabolic potentials The aim of this thesis is to characterize the space of parabolic potentials generated by the generalized translation operator. Therefore, firstly, definitions of B-parabolic potentials and the space of B-parabolic potentials are given Then anisotropic and weighted finite difference together with the suitable family of operators are constituted. Finally, the main result of this thesis is obtained by using concepts above mentioned.

KEY WORDS: Laplace-Bessel differential operator, Generalized translation operator, Fourier-Bessel transform, B-parabolic potential, weighted L_p-space, anisotropic and weighted finite difference.

COMMİTTEE: Prof. Dr. İlham ALİYEV (Adviser)

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. A. Aziz ERGİN

Prof. Dr. Orhan GÖLBAŞI

Doç. Dr. Abdulkadir Ceylan ÇÖKEN

ÖNSÖZ

Harmonik analiz; matematiğin, fiziğin ve teknik bilimlerin ortak dilidir ve singular integral operatörler, özellikle de potansiyeller, bu alanın en önemli teknik araçlarıdır.

Riesz ve Bessel potansiyelleri diye adlandırılan özel girişim tipli operatörler, Δ, Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere, sırasıyla, $(-\Delta)$ ve $(I-\Delta)$ diferansiyel operatörlerinin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanırlar. Yine benzer olarak, ısı geçirme operatörleri olarak bilinen $(-\Delta+\frac{\partial}{\partial t})$ ve $(I-\Delta+\frac{\partial}{\partial t})$ differansiyel operatörlerinin negatif kesir kuvvetleri de parabolik-Riesz ve parabolik-Bessel potansiyelleri(klasik parabolik potansiyeller) olarak adlandırılmaktadır. Bu konuda ilk çalışma B.F. Jones(1968) tarafından yapılmış ve daha sonraları C.H. Sampson, R. Bagby, S. Chanillo, V.R. Gopala-Rao, V.A. Nogin, B. Rubin ve daha başka matematikçiler tarafından bu alanda çok yönlü incelemeler ve uygulamalar yapılmıştır.

Daha sonraları "Potansiyel Uzayları" kavramı önem kazanmış ve yukarıda sözünü ettiğimiz tüm potansiyeller için bu kavram tanımlanarak, bir fonksiyonun sözü edilen potansiyel uzaya ait olması için çeşitli " gerek ve yeter " koşullar elde edilmiştir. Yukarıda söz ettiğimiz matematikçilerin yanısıra; N. Aronszajn, K.T. Smith, A.P. Calderon, E. Stein, F. Mulla, P. Szeptycki, R. Adams, P. Lizorkin, T. Flett, S.G. Samko gibi matematikçilerin de Klasik Riesz ve Bessel potansiyelleri ve uygun potansiyel uzayları konusunda çok yönlü araştırmaları vardır.

Fourier dönüşümü vasıtasıyla tanımlanan potansiyeller klasik kayma dediğimiz "Öklid kayması" vasıtasıyla oluşturulan girişim tipli integral operatörler olarak bilinirler. Benzer olarak, Fourier dönüşümü yerine Fourier-Bessel dönüşümü, Δ-Laplace operatörü yerine Δ_ν Laplace-Bessel diferansiyel operatörü alınarak oluşturulan potansiyeller de *Genelleşmiş kayma operatörünün* doğurduğu potansiyeller olarak bilinirler.

Genelleşmiş kayma operatörü $(T^{y,\tau})$ vasıtasıyla oluşturulan parabolik-Riesz ve parabolik-Bessel potansiyelleri ilk olarak I.A. Aliyev tarafından tanımlanmış ve " B-parabolik potansiyeller " olarak adlandırılmıştır. Ayrıca; yine I.A. Aliyev tarafından ağırlıklı L_p uzaylarında B-parabolik potansiyellerin tersleri belirlenmiştir.

Bu tez çalışmasının amacı, potansiyel uzayları kategorisinde yerini alacak olan, " B-parabolik potansiyeller uzayı " nı tanımlanmak ve bu potansiyeller uzayını nitelendiren özellikleri belirlemektir. Bu amaç doğrultusunda, ilkönce tezin önbilgiler kısmında klasik Fourier harmonik analizi ve Bessel harmonik analizinden bazı temel bilgiler hatırlatılmış, ayrıca, Genelleşmiş kayma operatörü ve Fourier-Bessel diferansiyel operatörü tanımlanarak bu operatörlerin temel özelliklerine yer verilmiştir. Daha sonraki üçüncü bölümde ise, Genelleşmiş kayma operatörü ($T^{y,\tau}$) vasıtasıyla oluşturulan parabolik Bessel potansiyelinin tanımı ile B-parabolik potansiyeller uzayının tanımı verilerek, uzayın karakterizasyonu için bazı ön hazırlıklar yapılmıştır.

Son olarak, dördüncü bölümde ise, esas sonuç olan B-parabolik potansiyeller uzayını nitelendiren bir özellik elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında çok emeği geçen, benden bilgi ve desteğini hiç esirgemeyen ve her zaman yardımcı-yolgösterici saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. İlham ALİYEV' e (Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi) sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu tezi TÜBİTAK-BAYG çerçevesinde destekleyen TÜBİTAK 'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Harmonik analizin esas amaçlarından birisi de, girişim tipli (integral) operatörleri incelemektir. Klasik parabolik potansiyeller (parabolik Riesz ve parabolik Bessel) bu tür operatörler arasında yer alırlar. Fourier çarpanları (multipliers) dilinde, sırasıyla

$$(H^\alpha\varphi)^\wedge(x) = (|x|^2 - it)^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi^\wedge(x) \quad (\alpha > 0)$$

$$(\mathcal{H}^\alpha\varphi)^\wedge(x) = (1 + |x|^2 - it)^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi^\wedge(x) \quad (\alpha > 0)$$

eşitlikleri ile tanımlanan parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyelleri; Δ-Laplace diferansiyel operatörü ve t-zaman parametresi olmak üzere, $\left(-\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right)$ ve $\left(I - \Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right)$ diferansiyel operatörlerinin negatif kesir kuvvetleri olarak yorumlanırlar. Genel olarak tüm potansiyeller için çalışılmış olan "bir potansiyelin çeşitli uzaylardaki etkilerini inceleme ve terslerini belirleyen formülleri elde etme" problemi parabolik potansiyeller için de incelenmiş olup, yine bu potansiyeller vasıtasıyla yeni türde uzaylar tanımlanmıştır. Bu uzaylar arasında yer alan "potansiyel uzayları" nın önemi büyüktür. Çünkü, bu tür uzaylar sayesinde ilgili Lebesque uzayların özellikleri incelenerek önemli sonuçlar elde edilmiştir.

İlk olarak B.F. Jones tarafından tanımlanmış olan $\mathcal{H}^\alpha$-parabolik Bessel potansiyelleri vasıtasıyla oluşturulan ve "parabolik Bessel potansiyelleri uzayı" olarak bilinen uzay;

$$\mathcal{H}^\alpha(L_p) = \{f : f = \mathcal{H}^\alpha\varphi \ , \ \varphi \in L_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})\} \ , \quad \alpha > 0 \ , \ 1 \leq p \leq \infty$$

olarak tanımlanıyor. Uygun bir T^α_ε- operatörler ailesi için

$$\mathcal{H}^\alpha(L_p) = \{f : f \in L_p \ , \ \sup_{\varepsilon>0} \|T^\alpha_\varepsilon f\|_p < \infty\} \ , \ 1 < p < \infty \ , \ \alpha > 0$$

eşitliği $\mathcal{H}^\alpha(L_p)$- parabolik Bessel potansiyelleri uzayı için çok önemli bir karakterizasyondur (Nogin, Rubin 1985). Klasik potansiyeller, Fourier donüşümü ve klasik kayma dedigimiz "Öklid kayması" vasıtasıyla tanımlanan girişim tipli integral operatörlerdir. Δ-Laplace diferansiyel operatörü yerine, benzer olarak, uygulamalı matematikte önemli bir diferansiyel operatör olarak bilinen $\Delta_B(\equiv \Delta_\nu)-$ Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + (\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}), (\nu > 0)$$

ile bağlantılı olan singular integral operatörler, potansiyeller v.b. gibi konular; Kipriyanov ve Klyuchantsev (1970), Stempak (1985), Mourou ve Trimeche (1998), Lyakhov (1984), Gadjiev ve Aliyev (1987,1988,1990,1994) gibi matematikçilerin ilgi alanı olmuştur. Özellikle, Gadjiev ve Aliyev (1987,1990), Δ_B- Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilerek Fourier-Bessel dönüşümü $(\mathcal{F}_\nu)$ vasıtasıyla tanımlanan ve sırasıyla, Δ_B ile $I-\Delta_B$ diferansiyel operatörlerinin negatif kesir kuvvetleri olarak yorumlanan Riesz ve Bessel tipli potansiyellerin ağırlıklı L_p uzaylarında $(L_{p,\nu})$ etkilerini inceleyerek, bu potansiyeller için ters belirleme formülleri bulmuşlardır. Bu tez çalışması, esas itibariyle, Δ_ν-Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen ve $\mathcal{H}_\nu^\alpha$ ile göstereceğimiz parabolik potansiyeller üzerine kuruludur. $\mathcal{H}_\nu^\alpha$ potansiyelleri, Fourier-Bessel dönüşümü $(\mathcal{F}_\nu)$

$$(\mathcal{F}_\nu f)(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times\mathbb{R}^1} f(y,\tau)e^{-i(x'y'+t\tau)}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_ny_n)d\mu(y)d\tau \quad , \quad (d\mu(y)=y_n^{2\nu}dy)$$

vasıtasıyla,

$$\mathcal{F}_\nu[(I-\Delta_\nu+\frac{\partial}{\partial t})\varphi](x,t)=(1+|x|^2+it)(\mathcal{F}_\nu\varphi)(x,t)$$

özdeşliği esas alınarak, tanımlanan potansiyeller olup, "Bessel tipli B-parabolik potansiyeller(B-parabolik potansiyeller)" olarak adlandırılmaktadır. Aslında, $\mathcal{H}_\nu^\alpha$ potansiyelleri; $\left(I-\Delta_\nu+\frac{\partial}{\partial t}\right)$ diferansiyel operatörünün negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanan ve Fourier-Bessel çarpanları terimlerinde

$$\mathcal{F}_\nu(\mathcal{H}_\nu^\alpha\varphi)(x,t)=(1+|x|^2+it)^{-\frac{\alpha}{2}}(\mathcal{F}_\nu\varphi)(x,t),(\alpha>0)$$

eşitliği ile tanımlanan potansiyellerdir. B-parabolik potansiyeller birer integral operatör olup, genelleşmiş kayma operatörünün doğurduğu genelleşmiş girişim tipli operatörler olarak ta yorumlanırlar. $\mathcal{H}_\nu^\alpha$ operatörleri ilk olarak Aliyev tarafından incelenmiştir ve ağırlıklı L_p uzaylarında bu potansiyellerin tersleri belirlenmiştir. Yine yakın bir geçmişte, Aliyev ve Rubin (2001), wavelet tipli dönüşümleri kullanarak, B-parabolik potansiyeller için yeni tipli "ters belirleme formülleri" elde etmişlerdir.

Adı, "Genelleşmiş kayma operatörünün doğurduğu parabolik potansiyeller uzayı" olan bu tez çalışmasında, yukarıda, klasik parabolik Bessel potansiyelleri için tanımlanmış olan $\mathcal{H}^\alpha(L_p)$- parabolik Bessel potansiyelleri uzayına paralel olarak, $\mathcal{H}_\nu^\alpha$ B-parabolik potansiyelleri için, adına "B-parabolik potansiyeller uzayı" diyeceğimiz bir fonksiyonel uzay tanımlanmış ve bu tür uzayların özellikleri incelenmiştir. B-parabolik potansiyeller uzayı karakterize edilirken, yine klasik parabolik uzayın karakterizasyonuna benzer bir mantık izlenecektir: ilkönce bir fonksiyonun *anizotropik* ve *ağırlıklı sonlu farkı* ($\Box^{l}_{\xi,t}(f)$) denilen bir sonlu fark tanımlanacak, daha sonra bu sonlu fark yardımıyla, $D^{\alpha}_{\epsilon}(f)$ ile gösterilen özel bir "operatörler ailesi" oluşturularak, bu aile vasıtasıyla "B-parabolik potansiyeller uzayı" karakterize edilecektir.

Bu tez çalışması ile elde edilen esas sonuçlar XV. Ulusal Matematik Sempozyumu'nda (Mersin 2002) ve Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü seminerlerinde sunulmuştur. Ayrıca, şimdiden, bu tür uzayların yeni karakterizasyonları (örneğin; ağırlıklı dalgacık dönüşümleri yardımıyla) belirlenmiş olup, bu sonuçların bazıları uluslararası dergilere gönderilmiştir.

2. ÖNBİLGİLER

2.1. L_p ve $L_{p,\nu}$ Uzayları Hakkında Gerekli Bilgiler

Bu tezin bütününde, $\mathbb{R}^n$, n boyutlu Öklid uzayı olup, $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}^1\}$ şeklinde tanımlıdır ve $\mathbb{R}^n$ 'de norm $|x| = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$ eşitliği ile verilir. Ayrıca; $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ biçiminde tanımlanacak ve dx ile $\mathbb{R}^n$ 'deki ($\mathbb{R}^n_+$ 'daki) hacim elemanı (Lebesque ölçümünü) gösterilecektir: $dx = dx_1 dx_1 \dots dx_n$.

Tanım 2.1.1 L_p uzayı, $1 \le p < \infty$ olmak üzere,

$$L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n) = \{f : \ f, \ \mathbb{R}^n \text{ 'de ölçülebilir ve } \|f\|_p = (\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

olarak tanımlanır. $p = \infty$ durumunda ise L_∞ uzayı

$$L_\infty \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \ f, \ \mathbb{R}^n \text{ 'de ölçülebilir ve } \|f\|_\infty \doteq ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) < \infty\}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 2.1.2 Ağırlıklı L_p- uzayı dediğimiz $L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1)(\equiv L_{p,\nu})$ uzayı, $1 \le p < \infty$ ve $\nu > 0$ sabit parametresi için

$$L_{p,\nu} = \{f : f, \ \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1 \text{ 'de ölçülebilir ve } \|f\|_{p,\nu} = (\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} |f(x,t)|^p x_n^{2\nu} dx dt)^{1/p} < \infty\}$$

olarak tanımlanır. $p = \infty$ halinde ise, $L_{\infty,\nu} \equiv L_{\infty,\nu}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1)$ ile $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1$ 'de sürekli ve $\lim\limits_{|x|+|t| \to \infty} f(x,t) = 0$ koşulunu sağlayan $f(x,t)$ fonksiyonları uzayını düşüneceğiz ve $\|f\|_{\infty,\nu} = \sup\limits_{(x,t) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} |f(x,t)|$ olarak alacağız.

Teorem 2.1.3 (Hölder Eşitsizliği; (Sadosky 1979 s.13 , Rubin 1996 s.1)) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ $\sigma-$sonlu ölçüm uzayı ve $\|f\|_{p,\mu} = \left(\int\limits_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$ olsun. Bu durumda, $f \in L_{p,\mu}$, $g \in L_{q,\mu}$, $1 \le p \le \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\int\limits_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \le \|f\|_{p,\mu} \cdot \|g\|_{q,\mu}$$

Özel halde; $d\mu(x) = dx$; $f \in L_p$, $g \in L_q$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

eşitsizliği ve benzer olarak; $d\mu(x) = x_n^{2\nu}dx$, $f \in L_{p,\nu}$ ve $g \in L_{q,\nu}$ için de,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)g(x)|x_n^{2\nu}dx \leq \|f\|_{p,\nu} \cdot \|g\|_{q,\nu}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.1.4 (Minkowski Eşitsizliği; (Folland 1984 s.175)) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ $\sigma-$sonlu ölçüm uzayı ve $\|f\|_{p,\mu} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$ olsun. Bu durumda, $f, g \in L_{p,\mu}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\|f + g\|_{p,\mu} \leq \|f\|_{p,\mu} + \|g\|_{p,\mu}$$

eşitsizliği sağlanır. Özel halde; $d\mu(x) = x_n^{2\nu}dx$ ve f , $g \in L_{p,\nu}$ için

$$\|f + g\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu} + \|g\|_{p,\nu}$$

olur.

Teorem 2.1.5 (İntegraller için Minkowski Eşitsizliği; (Sadosky 1979 s.14, Folland 1984 s.186)) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ve $(Y, \mathcal{N}, \gamma)$ $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayları ve $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da $\mu \times \gamma$ - ölçülebilir olsun. Eğer, hemen hemen her y için $f(\cdot, y) \in L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, ve $\int_Y \|f(\cdot, y)\|_{p,\mu} d\gamma(y) < \infty$ ise $\int_Y f(x, y)d\gamma(y)$ integrali de hemen hemen her x için sonludur ve

$$\left\| \int_Y f(x, y)d\gamma(y) \right\|_{p,\mu} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{p,\mu} d\gamma(y)$$

eşitliği sağlanır. Özel halde; $d\gamma(y) = y_n^{2\nu}dy$, $d\mu(x) = x_n^{2\nu}dx$ ve $f(x, y)$, $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$'de ölçülebilir bir fonksiyon ise

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+^m} f(x, y)y_n^{2\nu}dy \right\|_{p,\nu} \leq \int_{\mathbb{R}_+^m} \|f(x, y)\|_{p,\nu}\, y_n^{2\nu}dy$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.1.6 (Young Eşitsizliği; (Stein-Weiss 1971 s.178 , Rubin 1996 s.1)) $p,q,r \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$ olsun. Eğer $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ ise

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \right\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Not: Klasik Young eşitsizliğinin genelleşmiş girişim için benzerini Kesim 2.7 'de Teorem 2.7.2 ile ifade edip ispatlayacağız

Teorem 2.1.7 (Fubini Teoremi; (Folland 1984 s.65)) $(X,\mathcal{M},\mu)$ ve $(Y,\mathcal{N},\nu)$ $\sigma-$sonlu ölçüm uzayları, $\mu \times \nu$ ise $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ üzerinde μ ve ν nün çarpımı olsun. Eğer $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu \times \nu$ ölçümüne göre integrallenebilir ise hemen hemen her $x \in X$ için $\int_Y f(x,y)d\nu(y)$ ve hemen hemen her $y \in Y$ için $\int_X f(x,y)d\mu(x)$ integralleri sonludur ve

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.8 (Lebesque Majorant Yakınsama Teoremi; (Folland 1984 s.53)) $\{f_m\}$, Lebesque anlamında integrallenebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer hemen hemen her x için $f_m(x) \longrightarrow f(x)$ $(m \to \infty)$ ve her m için $|f_m| \leq g$ olacak biçimde negatif olmayan, integrallenebilir g fonksiyonu varsa, bu durumda f fonksiyonu da Lebesque anlamında integrallenebilirdir ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x)dx$$

Teorem 2.1.9 (Riesz - Thorin İnterpolasyon Teoremi; (Folland 1984 s.193)) $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, $i=0,1$ ve $T : L_{p_i} \longrightarrow L_{q_i}$ dönüşümü (p_i,q_i) tipli, yani,

$$\|Tf\|_{q_i} \leq M_i \|f\|_{p_i} \; , \quad i=0,1$$

olsun. Bu durumda, $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$ ve $\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$, $(0 < t < 1)$ olmak üzere, T dönüşümü (p_t, q_t) tipli, yani,

$$\|Tf\|_{q_t} \leq M_t \|f\|_{p_t}$$

dır ve M_t operatör normu, $M_t \leq M_0^{1-t} M_1^t$ eşitsizliğini sağlar.

Teorem 2.1.10 (Banach - Alaoğlu Teoremi) μ bir Borel ölçümü olmak üzere $L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, $(1 < p < \infty)$ uzayını gözönüne alalım. Eğer, $\{f_m\}$ dizisi $L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$' de sınırlı bir fonksiyon dizisi ise, bu durumda $\{f_m\}$ 'nin öyle bir $\{f_{m_k}\}$ altdizisi ve öyle bir $f \in L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ elemanı vardır ki, her $g \in L_q(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ için

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\Omega} f_{m_k}(x) g(x) d\mu(x) = \int_{\Omega} f(x) g(x) d\mu(x)$$

sağlanır.

Not: Biz 4. bölümde bu teoremi $\Omega = \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1$ ve $d\mu(x) = x_n^{2\nu} dx$ varsayarak kullanacağız.

2.2. Fourier Harmonik Analizinden Bazı Gerekli Bilgiler

Tanım 2.2.1 $f \in L_1 = L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$(\mathcal{F}f)(x) \equiv f^{\wedge}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-ix \cdot t} dt \tag{2.2.1}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $x \cdot t = x_1 t_1 + x_2 t_2 + \cdots + x_n t_n$ dir.

Örnek 2.2.2 $f(x) = e^{-4\pi^2 \alpha |x|^2}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü hesaplayalım. Bunun için $e^{-4\pi^2 |x|^2}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü hesaplamak yeterlidir. Çünkü; böylece, $f^{\wedge}$ ya bir değişken değiştirmesi yaparak ulaşırız

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 x_j^2} e^{-ix_j t_j} dx_j = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t_j^2}{4}}$$

olduğunu gözönüne alırsak (Strichartz, 1994, s 38),

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|x|^2} e^{-ix\cdot t} dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 x_j^2} e^{-ix_j t_j} dx_j = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t_j^2}{4}} = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|t|^2}{4}}$$

olur. Şimdi, $(e^{-4\pi^2\alpha|x|^2})^\wedge(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2\alpha|x|^2} e^{-ix\cdot t} dx$ ifadesinde $\sqrt{\alpha}x = y$ değişken değiştirmesi yapar ve yukarıdaki sonucu kullanırsak

$$(e^{-4\pi^2\alpha|x|^2})^\wedge(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2\alpha|x|^2} e^{-ix\cdot t} dx = \alpha^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|y|^2} e^{-iy\cdot\frac{t}{\alpha}} dy = (4\pi\alpha)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|t|^2}{4\alpha}}$$

olur. Yani;

$$(e^{-4\pi^2\alpha|x|^2})^\wedge(t) = (4\pi\alpha)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|t|^2}{4\alpha}}.$$

Not: Yukarıdaki formül, Kesim 2.9 'da genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği tanımlanırken kullanılacaktır.

Teorem 2.2.3 (Stein-Weiss 1971) $f \in L_1$ ve $x_k f(x) \in L_1$ olsun. Bu durumda, $f^\wedge$, x_k 'ya göre türevlenebilirdir ve

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f^\wedge(x) = (-it_k f(t))^\wedge(x)$$

dir.

Teorem 2.2.4 (Stein-Weiss 1971) $f \in L_1$ ve g, f fonksiyonunun x_k ya göre L_1 normunda kısmi türevi olsun. Bu durumda $g^\wedge(x) = (ix_k) f^\wedge(x)$ olur.

Teorem 2.2.3 ve Teorem 2.2.4 , yüksek mertebeden türevlere şöyle genişletilebilir:

Teorem 2.2.5 (Stein-Weiss 1971) $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ olmak üzere P, $x_1, \ldots, x_n$ değişkenlerine göre m-inci dereceden polinom ve $P(D)$ de $P(x)$ polinomuna karşılık gelen diferansiyel operatör ise, her $f \in L_1$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $P(D) f^\wedge(x) = (P(-it) f(t))^\wedge(x)$ **(ii)** $(P(D) f)^\wedge(x) = P(ix) f^\wedge(x)$

Tanım 2.2.6 $f, g \in L_1$ olmak üzere, f ile g 'nin girişimi (convolution)

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tau^y f(x) g(y) dy$$

biçiminde tanımlanır. Burada τ^y ; $\tau^y f(x) = f(x - y)$ ile tanımlı olan ve çok iyi bilinen Öklid kaymasıdır.

Teorem 2.2.7 (Stein-Weiss 1971, Folland 1984) $f, g, h \in L_1$ olsun. Bu durumda;
(i) $f * g = g * f$ (değişme özelliği),
(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (birleşme özelliği),
(iii) $\tau^y(f * g) = (\tau^y f) * g = f * (\tau^y g)$,
(iv) $(f * g)^\wedge = f^\wedge . g^\wedge$
özellikleri sağlanır.

Tanım 2.2.8 $\alpha > 0$ olmak üzere, $f(x) = e^{-4\pi^2 \alpha |x|^2}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olan $(4\pi\alpha)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|t|^2}{4\alpha}}$ (bakınız: örnek 2.2.2) fonksiyonu (klasik) Gauss-Weierstrass Çekirdeği olarak adlandırılır ve $W(t, \alpha)$ ile gösterilir.

(Klasik) Gauss-Weierstrass Çekirdeğinin $\int_{\mathbb{R}^n} W(t, \alpha) dt = 1$ ($\forall \alpha > 0$ için) özelliği iyi bilinmektedir. (Klasik) Gauss-Weierstrass çekirdeği hakkında daha ayrıntılı bilgi için Stein-Weiss (1971) kaynağına bakılabilir.

Bu kesimin kalan kısmında da analizin ve uygulamalarının önemli diferansiyel operatörlerinden biri olarak bilinen Bessel diferansiyel operatörü hakkında bazı bilgileri hatırlatalım.

Tanım 2.2.9 $J_\lambda(x)$, birinci tip Bessel fonksiyonu $\big(x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2) y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü$\big)$ ve $\lambda > -\frac{1}{2}$ olmak üzere,

$$j_\lambda(x) = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}$$

ile tanımlanan $j_\lambda(x)$ fonksiyonu *Normalleştirilmiş Bessel Fonksiyonu* olarak adlandırılır. Özel olarak; $x = 0$ ve $\forall \nu > 0$ için $j_{\nu - \frac{1}{2}}(0) = 1$ ve $j'_{\nu - \frac{1}{2}}(0) = 0$ olduğu iyi bilinmektedir (Levitan 1951).

Tanım 2.2.10 $t > 0$ ve $\nu > 0$ olmak üzere, $B_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\nu}{t}\frac{d}{dt}$ diferansiyel operatörü Bessel Diferansiyel Operatörü olarak adlandırılır. Özel olarak; $j_{\nu-\frac{1}{2}}(st)$ fonksiyonu için

$$-B_t j_{\nu-\frac{1}{2}}(st) = s^2 j_{\nu-\frac{1}{2}}(st)$$

özdeşliğinin her $t > 0$, $\nu > 0$ ve $s > 0$ için sağlandığı bilinmektedir (Levitan 1951).

Tanım 2.2.11 Laplace-Bessel Diferansiyel operatörü

$$\Delta_\nu = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada, dikkat edilirse, Δ_ν operatörü; $(n-1)$ değişkene göre Laplace operatörünün, n değişkene göre de Bessel operatörünün uygulanması demektir. Yani; Δ_ν operatörü kısaca,

$$\Delta_\nu = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + B_{x_n}$$

olarak da ifade edilebilir.

2.3. Liouville Kesir İntegrali ve Marchaud Kesir Türevi

Tanım 2.3.1 Bir $g(\tau), (\tau \in \mathbb{R}^1)$ fonksiyonunun $\alpha > 0$ mertebeden Liouville kesir integrali, $I^\alpha g$,

$$(I^\alpha g)(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} g(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} g(t-\tau)\tau^{\alpha-1} d\tau \tag{2.3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Samko, Kilbas and Marichev 1993 s.94)

Tanım 2.3.2 Bir $h(\tau)$ fonksiyonunun *l mertebeli ve t-adımlı sonlu farkı* ; $\Delta_t^l h(\tau)$ ile gösterilmek üzere,

$$\Delta_t^l h(\tau) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} h(\tau - kt) \tag{2.3.2}$$

biçiminde tanımlıdır. Burada : $\binom{l}{k} = \frac{l!}{k!(l-k)!}$ 'dir.

Tanım 2.3.3 Bir $h(\tau), (\tau \in \mathbb{R}^1)$ fonksiyonunun $\alpha > 0$ mertebeden Marchaud kesir türevi, $D^\alpha h$,

$$(D^\alpha h)(t) \equiv \frac{1}{\mathcal{H}(\alpha, l)} \int_0^\infty \frac{\Delta_t^l h(\tau)}{t^{\alpha+1}} dt \tag{2.3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada l, $l > \alpha$ koşulunu sağlayan herhangibir doğal sayı, *normalleştirici katsayı* dediğimiz $\mathcal{H}(\alpha, l)$,

$$\mathcal{H}(\alpha, l) = \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-t})^l}{t^{\alpha+1}} dt \tag{2.3.4}$$

ifadesi ile tanımlı ve $\Delta_t^l h(\tau)$ 'da (2.3.2) formülü ile tanımlanan sonlu farktır (Samko, Kilbas and Marichev 1993 s.118).

Normalleştirici katsayı $\mathcal{H}(\alpha, l)$ 'nin (2.3.4) 'deki seçiminden dolayı (2.3.3) eşitliğinin sağ tarafı $l > \alpha$ tamsayısından bağımsız olur. Ayrıca, Liouville kesir integralinin belli bir anlamda tersi Marchaud kesir türevidir $(D^\alpha I^\alpha \varphi = \varphi)$(Samko, Kilbas and Marichev 1993, s 125).

Bu kısımda kısaca bahsettiğimiz kesirsel türev ve integrallerle ilgili daha ayrıntılı bilgi; Samko,Kilbas and Marichev (1993) ve Rubin (1996) kaynaklarından elde edilebilir.

2.4. Bessel Kayma Operatörü ve Özellikleri

Bilindiği gibi, klasik kayma operatörünü doğuran operatör $\frac{d}{dx}$-türev operatörüdür. Yani;

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x} u & = & \frac{\partial}{\partial t} u \\ u\,|_{t=0} & = & f(x) \end{array} \right\}$$

Cauchy probleminin tek çözümü $u(x, t) = f(x + t) \equiv \tau^{-x} f(t)$ dir. Benzer olarak, $\frac{\partial}{\partial x}$ yerine $B_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ alınarak oluşturulan

$$\left\{ \begin{array}{rcl} B_x u & = & B_t u \\ u\,|_{t=0} & = & f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}\,|_{t=0} & = & 0 \end{array} \right\}$$

probleminin $x, t > 0$ için tek çözümü olarak bilinen

$$u(x, t) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 - 2xt\cos\theta + t^2}) \sin^{2\nu-1}\theta d\theta$$

fonksiyonu f fonksiyonunun Bessel kayması olarak bilinir. Aslında, Bessel kayma operatörü, Bessel diferansiyel operatörü tarafından doğrulan ve yukarıdaki integral ile verilen operatördür. Bunu bir tanımla ifade edelim:

Tanım 2.4.1 S_r^ρ ile gösterilen Bessel kayma operatörünün bir $f(r)$ fonksiyonuna etkisi

$$S_r^\rho f(r) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\alpha + \rho^2}) \sin^{2\nu-1}\alpha \, d\alpha$$

biçiminde tanımlanır.

Bessel kayma operatörünün bazı önemli özelliklerini bir teorem olarak ifade edebiliriz:

Teorem 2.4.2 (Levitan 1951)

1) $S_r^\rho f(r) = S_\rho^r f(\rho)$,

2) $S_r^\rho S_r^\tau f(r) = S_r^\tau S_r^\rho f(r)$,

3) $S_r^\rho S_r^\tau = S_r^\rho S_r^\tau$,

4) $S_r^\rho = S_r^{-\rho}, S_r^0 = I$ (birim operatör),

5) $S_r^\rho(af(r) + bg(r)) = aS_r^\rho f(r) + bS_r^\rho g(r)$, $(a, b \in \mathbb{R})$,

6) $S_r^\rho 1 = 1$, ($\forall\rho$ için),

7) $f(r) \geq 0 \Rightarrow S_r^\rho f(r) \geq 0$,

8) $\int_0^\infty S_r^\rho f(r) g(r) r^{2\nu} dr = \int_0^\infty f(r) S_r^\rho g(r) r^{2\nu} dr$;

(Özel halde $g \equiv 1$ için $\int_0^\infty S_r^\rho f(r) r^{2\nu} dr = \int_0^\infty f(r) r^{2\nu} dr$ olur.)

9) Özel olarak; $j_{\nu-\frac{1}{2}}(sx)$ (Tanım 2.2.9 'daki Normalleştirilmiş Bessel fonksiyonu) fonksiyonu için $S_r^\rho j_{\nu-\frac{1}{2}}(sr) = j_{\nu-\frac{1}{2}}(sr) j_{\nu-\frac{1}{2}}(s\rho)$ 'dur.

2.5. Genelleşmiş Kayma Operatörü ve Özellikleri

Tanım 2.5.1 $T^{y,\tau}$ ile göstereceğimiz genelleşmiş kayma operatörünün $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1$ üzerinde tanımlı bir $f(x,t)$ fonksiyonuna etkisi, $\nu > 0$ sabit tutulmuş bir parametre olmak üzere,

$$T^{y,\tau} f(x,t) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(x' - y'; \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}; t - \tau) \sin^{2\nu-1}\alpha \, d\alpha$$

biçiminde tanımlanır. Burada: $x = (x', x_n), x', y' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ve $t, \tau \in \mathbb{R}^1$ dir. Aslında, genelleşmiş kayma, x' ve t değişkenlerine göre Öklid kayması ile x_n değişkenine göre Bessel kaymasının uygulanması ile oluşturulmaktadır.

Yukarıdaki 2.4 kesiminde tanımladığımız ve temel özelliklerini verdiğimiz S_τ^ρ-Bessel kayma operatörü, Genelleşmiş kayma operatörünün bir değişkenli durumdaki karşılığıdır. Matematik literatürde, bazı kaynaklarda, Bessel kayma operatörüne de Genelleşmiş kayma operatörü deniliyor.

Teorem 2.5.2 Genelleşmiş kayma operatörünün aşağıdaki özellikleri iyi bilinmektedir.

1) $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1)$, $1 \le p \le \infty$ olsun. O halde, $\forall (y,t) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1$ için

$$\|T^{y,t} f\|_{p,\nu} \le \|f\|_{p,\nu} \tag{2.5.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Yani, $T^{y,\tau}$ operatörü $L_{p,\nu}$ 'den $L_{p,\nu}$ 'ye sınırlı (sürekli) bir dönüşümdür.

2) (Löfstrom and Peetre, 1969) $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1)$, $1 \le p \le \infty$ olsun. Hemen hemen her $(x,t) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1$ ve $\forall (y,\tau) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1$ için

$$\lim_{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2 \to 0} \|T^{\varepsilon_1 y, \varepsilon_2 \tau} f(x,t) - f(x,t)\|_{p,\nu} = 0 \tag{2.5.2}$$

dır. Klasik kayma için bu özellik, $L_{p,\nu}$ 'ye ait olan fonksiyonların $L_{p,\nu}$*-sürekliliği* olarak bilinir.

İspat. 1) $T^{y,t}$ operatörü, $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ ve $t \in \mathbb{R}^1$ değişkenlerine göre normal (Öklid) kayması ile $x_n \in \mathbb{R}_+^1$ değişkenine göre genelleşmiş (Bessel) kaymanın kompozisyonu olduğundan ve Öklid kayması için de yukarıdaki eşitsizlik iyi bilindiğinden, söz konusu eşitsizliği Bessel kayması için göstermek yeterlidir. Yani, S^τ Bessel kayması olmak üzere, $\forall \tau \ge 0$ için

$$\left(\int_0^\infty |S^\tau \varphi(r)|^p r^{2\nu} dr \right)^{1/p} \le \left(\int_0^\infty |\varphi(r)|^p r^{2\nu} dr \right)^{1/p} \quad , \quad 1 \le p \le \infty$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. $p = \infty$ için eşitsizlik açık olduğundan, $1 \le p < \infty$ varsayacağız.

Öncelikle, $|S^{\tau}\varphi(r)|^p \leq S^{\tau}(|\varphi(r)|^p)$, $1 \leq p < \infty$ olduğunu görelim. $p = 1$ için sonuncu eşitsizlik aşikar olduğundan, $1 < p < \infty$ varsayalım. q sayısını $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ sağlanacak biçimde alarak, Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|S^{\tau}\varphi(r)|^p &\leq \left(c_{\nu}\int_0^{\pi}\left|\varphi(\sqrt{r^2 - 2r\tau\cos\theta + \tau^2})\right|\sin^{2\nu-1}\theta d\theta\right)^p \\
&= \left(\int_0^{\pi}\left|\varphi(\sqrt{r^2 - 2r\tau\cos\theta + \tau^2})\right|(c_{\nu}\sin^{2\nu-1}\theta)^{\frac{1}{p}}(c_{\nu}\sin^{2\nu-1}\theta)^{\frac{1}{q}}d\theta\right)^p \\
&\leq \left(\int_0^{\pi}\left|\varphi(\sqrt{r^2 - 2r\tau\cos\theta + \tau^2})\right|^p c_{\nu}\sin^{2\nu-1}\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}c_{\nu}\sin^{2\nu-1}\theta d\theta\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= \cdots \left(\int_0^{\pi}c_{\nu}\sin^{2\nu-1}\theta d\theta = c_{\nu}\cdot\frac{1}{c_{\nu}} = 1 \text{ olduğunu gözönüne alıyoruz}\right) \\
&= S^{\tau}(|\varphi(r)|^p)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi, yukarıda elde ettiğimiz eşitsizliği ve S^{τ} operatörünün Teorem 2.4.2-8) 'deki özelliğini kullanırsak,

$$\int_0^{\infty}|S^{\tau}\varphi(r)|^p r^{2\nu}dr \leq \int_0^{\infty}S^{\tau}(|\varphi(r)|^p)r^{2\nu}dr = \int_0^{\infty}|\varphi(r)|^p r^{2\nu}dr$$

olur ki, bu da ispatlamak istediğimiz eşitsizliktir. ■

Bu kesimi kapatmadan önce, (tez boyunca) T_x^y notasyonunun, sadece, $x \in \mathbb{R}_+^n$ değişkenine göre uygulanan Genelleşmiş kayma için kullanılacağını belirtelim. Böylece;

$$T_x^y f(x,t) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}f(x'-y';\ \sqrt{x_n^2 - 2x_ny_n\cos\alpha + y_n^2};\ t)\sin^{2\nu-1}\alpha d\alpha$$

olacaktır.

2.6. Schwartz Test Fonksiyonları Uzayının bir Altuzayı ve Uygun Genelleşmiş Fonksiyonlar (Distributions)

Tanım 2.6.1 f, $\mathbb{R}^{n+1}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{n+1}}|x|^k|f(x)| \leq C_k$$

olacak şekilde C_k sabiti varsa, f fonksiyonuna *hızla sıfıra yaklaşan fonksiyondur* denir

Tanım 2.6.2 Sonsuz diferansiyellenebilen, kendisi ve tüm kısmi türevleri hızla sıfıra yaklaşan fonksiyonlar sınıfına *Schwartz test fonksiyonları uzayı* denir. Başka bir ifade ile, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$-Schwartz uzayı

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}) = \left\{ f : \ \|f\|_{(\alpha,\beta)} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^{n+1}} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \ , \ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^{n+1} \right\}$$

biçiminde tanımlıdır. Burada, Teorem 2.2.5 'deki notasyon gereği, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ ve $D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_{n+1}}}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_{n+1}^{\beta_{n+1}}}$ dir.

Sonsuz diferansiyellenen ve kompakt dayanağa(support) sahip fonksiyonlar uzayına $C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ dersek, tanımdan, $C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ olduğu hemen görülür. Ayrıca Schwartz fonksiyonlar sınıfının en belirgin örneği $f(x) = e^{-|x|^2}$ fonksiyonudur. Schwartz uzayının temel özelliklerini bir teorem olarak ifade edelim.

Teorem 2.6.3 (Strichartz, 1994) 1) $\mathcal{S}$, bir vektör uzayıdır;

2) $\mathcal{S}$, bir cebirdir;

3) $\mathcal{S}$−Schwartz uzayı, $\|f\|_{(\alpha,\beta)}$ yarınormuna göre bir Frechet uzayıdır;

4) $f(x)\in\mathcal{S} \Rightarrow p(x)f(x) \in \mathcal{S}$ ($p(x)$-polinom),

5) $f\in\mathcal{S} \Rightarrow \tau^h f(x) = f(x-h) \in \mathcal{S}$,

6) $f,g\in\mathcal{S} \Rightarrow f * g \in \mathcal{S}$,

7) $f\in\mathcal{S} \Rightarrow f^\wedge \in \mathcal{S}$,

8) $f\in\mathcal{S} \Rightarrow f \in L_1$; dahası, her $p(x)$ polinomu için $p(x).f(x) \in L_1$.

9) $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ bir izomorfizmdir,

10) $\mathcal{S}$−Schwartz uzayı $1 \le p < \infty$ için $L_{p,\nu}(\mathbb{R}^{n+1})$ uzayında yoğundur.

Bilindiği gibi, Schwartz uzayı, Fourier dönüşümünün, daha doğrusu, Harmonik analizin bütün önemli operatörlerinin (Türev, kayma, Fourier dönüşümü, polinomla çarpma v.s.) çok rahat uygulanabileceği bir uzay olduğundan, oldukça önemlidir. Ayrıca, $\mathcal{S}$−Schwartz uzayının $L_{p,\nu}$ uzayında yoğun olması önemli bir sonuçtur. Çünkü; genel olarak, yoğun bir altkümede geçerli olan sonuçlar büyük kümeye genişletilebildiğinden, yoğun altkümelerle çalışmak yeterlidir. Bu tezin seyrinden de anlaşılacağı üzere, biz de, göstermek istediğimiz sonuçların, ilkönce; $\mathcal{S}$ nin bir altkümesi ve aynı zamanda $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1)$ uzayında yoğun olan

$$\mathcal{S}^+ \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1) = \left\{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}) : f \;\; x_n \text{ değişkenine göre çift fonksiyon}\right\}$$

kümesinde sağlandığını göstereceğiz. Daha sonra da, bu sonuçları $L_{p,\nu}$ uzaylarına (ve daha başka uzaylara) genişleteceğiz. Bu anlamda $\mathcal{S}^+$ uzayı önem taşıdığından, $\mathcal{S}^+$ üzerinde tanımlı lineer fonksiyoneller de önemlidir. Bu nedenle, bu kesimin geri kalan kısmında "genelleşmiş fonksiyon (distribution)" olarak adlandırılan bu lineer fonksiyonellerden bahsedeceğiz.

Not: $\mathcal{S}^+$ uzayının $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1)$ uzayında yoğunluğunu şu prosedürle gösterebiliriz: $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1)$ olsun. Bu durumda, f 'i tüm $L_{p,\nu}(\mathbb{R}^{n+1})$ 'e $d\mu(x) = |x_n|^{2\nu}dx$ alarak çift devam ettirebiliriz. Yeni fonksiyona $\tilde{f}$ diyelim. Böylece; $\mathcal{S}$ uzayı $L_{p,\nu}$ $(\mathbb{R}^{n+1})$ 'de yoğun olduğundan, $\tilde{f}$ 'ya $\mathcal{S}$ 'nin (aslında $\mathcal{S}^+$ 'nın) elemanları ile yaklaşabiliriz. Dolayısıyla da, f 'e $\mathcal{S}^+$ uzayının elemanları ile yaklaşabiliriz.

Tanım 2.6.4 $\mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesini göstermek üzere, $f : \mathcal{S}^+ \to \mathbb{C}$ bir lineer fonksiyonel ise, f 'e genelleşmiş fonksiyon diyeceğiz ve $\varphi \in \mathcal{S}^+$olmak üzere, f 'in φ 'ye etkisini (φ 'deki değerini) $\langle f, \varphi\rangle$ ile göstereceğiz.

Ayrıca, $\mathcal{S}^+$ üzerinde tanımlı olan tüm sınırlı genelleşmiş fonksiyonlar sınıfını da $(\mathcal{S}^+)'$ ile göstereceğiz. Şimdi, birkaç genelleşmiş fonksiyon örneği verelim.

Örnek 2.6.5 Dirac $\delta-$ fonksiyonu olarak bilinen δ için $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$ eşitliği bir genelleşmiş fonksiyon belirler.

Örnek 2.6.6 Her integrallenebilir (hatta lokal integrallenebilir) fonksiyon bir genelleşmiş fonksiyon belirler.

Gerçekten, eğer f, $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1$ üzerinde tanımlı bir lokal integrallenebilir fonksiyon ise, $\varphi \in \mathcal{S}^+$ için

$$\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} f(x,t)\varphi(x,t)x_n^{2\nu}dxdt \qquad (2.6.1)$$

eşitliği bir genelleşmiş fonksiyon belirler ve bu genelleşmiş fonksiyon *regular genelleşmiş fonksiyon* olarak adlandırılır.

Örnek 2.6.7 Her $f \in S^+$ fonksiyonu aynı zamanda bir genelleşmiş fonksiyondur ($\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} f(x,t)\varphi(x,t)x_n^{2\nu}dxdt$ - doğal tanımlaması ile).

Tanım 2.6.8 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir genelleşmiş fonksiyon dizisi ve f de bir genelleşmiş fonksiyon olsun. Eğer, her $\varphi \in S^+$ fonksiyonu için $\langle f_n, \varphi \rangle$ sayı dizisi $\langle f, \varphi \rangle$ sayısına yakınsıyor ise ($\lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ ise) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ genelleşmiş fonksiyon dizisi f genelleşmiş fonksiyonuna *yakınsar* denir ve $f_n \xrightarrow{(S^+)'} f$ ile veya kısaca $f_n \to f$ ile gösterilir.

Her genelleşmiş fonksiyona, S^+ nın elemanları ile yaklaşılabilir yani; verilen her f genelleşmiş fonksiyonu için öyle $(\varphi_n) \in S^+$ dizisi bulunabilir ki, genelleşmiş fonksiyon anlamında $\varphi_n \to f$ sağlanır.
Bu sonuç kullanılarak, herhangi $T : S^+ \to S^+$ doğrusal dönüşümü

$$Tf = \lim_{n\to\infty} T\varphi_n$$

tanımlaması ile $(S^+)'$ uzayına genişletilir. Böylece de, genelleşmiş fonksiyonlar üzerinde işlemler tanımlanabilir: bir genelleşmiş fonksiyonun kayması, türevi, Fourier dönüşümü v.b. Örneğin, $T = \tau^y$ (öklid kayması) olarak alalım ve $f-$genelleşmiş fonksiyonu için $\tau^y f$ in nasıl tanımlandığını görelim.

$$\begin{aligned}
\langle \tau^y f, \varphi \rangle &\stackrel{\text{tan}}{=} \lim_{n\to\infty} \langle \tau^y \varphi_n, \varphi \rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x-y)\varphi(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle \varphi_n, \tau^{-y}\varphi \rangle \\
&\stackrel{\text{tan}}{=} \langle f, \tau^{-y}\varphi \rangle
\end{aligned}$$

Böylece, $\langle \tau^y f, \varphi \rangle = \langle f, \tau^{-y}\varphi \rangle$ olarak tanımlanır. Benzer şekilde;

$T = \frac{d^n}{dx^n}$ için $\langle \frac{d^n}{dx^n} f, \varphi \rangle = (-1)^n \langle f, \frac{d^n}{dx^n}\varphi \rangle$ ve $T = \mathcal{F}$(Fourier dönüşümü) için de $\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle$ olarak tanımlanır.

2.7. Genelleşmiş Girişim Operatörü ve Özellikleri

Tanım 2.7.1 $f\ ,\ g \in \mathcal{S}^{+}$ fonksiyonlarının genelleşmiş girişimi

$$(f \circledast g)(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} g(y,\tau) T^{y,\tau} f(x,t) d\mu(y) d\tau$$

biçiminde tanımlanır. Burada, yukarıda da belirttiğimiz gibi, $d\mu(y) = y_n^{2\nu} dy$ 'dir.

Normal girişimin sağladığı $f * g = g * f$ özelliği ve Genelleşmiş Young eşitsizliği, genelleşmiş girişim için de geçerlidir:

Teorem 2.7.2 (i) $f\ ,\ g \in \mathcal{S}^{+}$ olmak üzere, $f \circledast g = g \circledast f$ dir. (Levitan, 1951)

(ii) *(Genelleşmiş Young Eşitsizliği)* $f \in L_{p,\nu}\ ,\ g \in L_{q,\nu}\ ,\ 1 \leq p,\ q,\ r \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ olsun. Bu durumda $f \circledast g \in L_{r,\nu}$ ve

$$\|f \circledast g\|_{r,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}\ \|g\|_{q,\nu} \tag{2.7.1}$$

dir.

İspat. q yu sabit tutalım $r = q$ ve $p = 1$ için $\|f \circledast g\|_{q(=r),\nu} \leq \|f\|_{1,\nu}\ \|g\|_{q,\nu}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\|f \circledast g\|_{q,\nu} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} |f \circledast g(x,t)|^q\ x_n^{2\nu} dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} f(y,\tau)\ T^{y,\tau} g(x,t)\ y_n^{2\nu} dy d\tau \Big|^q\ x_n^{2\nu} dx dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Şimdi burada, Teorem 2.1.5 (İntegraller için Minkowski Eşitsizliği) 'i kullanırsak;

$$\begin{aligned}
\|f \circledast g\|_{q,\nu} &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} |f(y,\tau)|^q\ |T^{y,\tau} g(x,t)|^q\ x_n^{2\nu} dx dt \right)^{\frac{1}{q}} y_n^{2\nu} dy d\tau \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} |f(y,\tau)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} |T^{y,\tau} g(x,t)|^q\ x_n^{2\nu} dx dt \right)^{\frac{1}{q}} y_n^{2\nu} dy d\tau \\
&\leq \cdots \text{ ((2.5.1) 'i kullanıyoruz) } \cdots \leq \|f\|_{1,\nu}\ \|g\|_{q,\nu}
\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde, genelleşmiş girişim $(1, q)$ tiplidir. Şimdi de $r = \infty$ ve $p = \frac{q}{q-1}$ için $\|f \circledast g\|_{\infty,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}\|g\|_{q,\nu}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\|f \circledast g\|_{\infty,\nu} &= \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} |f \circledast g(x,t)| = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} \Big| \int_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} f(y,\tau)T^{y,\tau}g(x,t)y_n^{2\nu}dyd\tau\Big| \\ &\leq \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} |f(y,\tau)T^{y,\tau}g(x,t)|y_n^{2\nu}dyd\tau\end{aligned}$$

Son ifade için önce Hölder Eşitsizliğini (Teorem 2.1.3) ve daha sonra da (2.5.1) 'i kullanırsak;

$$\begin{aligned}\|f \circledast g\|_{\infty,\nu} &\leq \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} |f(y,\tau)|^p y_n^{2\nu}dyd\tau\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} |T^{y,\tau}g(x,t)|^q y_n^{2\nu}dyd\tau\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{p,\nu}\|g\|_{q,\nu}\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde, genelleşmiş girişim $(\frac{q}{q-1}, \infty)$ tiplidir. Son olarak, Teorem 2.1.9 (Riesz-Thorin İnterpolasyon Teoremi) kullanılırsa,

$$\|f \circledast g\|_{r,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}\|g\|_{q,\nu}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Bu kesimi kapatmadan önce, regular genelleşmiş fonksiyonların önemli bir özelliğini veren aşağıdaki teoremi ispatlayalım:

Teorem 2.7.3 $\varphi_-(x,t) = \varphi(-x,-t)$ ve $u \in (\mathcal{S}^+)'$ - regular genelleşmiş fonksiyon olmak üzere;

$$\langle u \circledast \varphi\,,\, w\rangle = \langle u\,,\, \varphi_- \circledast w\rangle$$

eşitliği her $\varphi, w \in \mathcal{S}^+$ için sağlanır.

İspat. İlkönce (4.0.2) ile tanımlanmış olan $\langle u\,,\, w\rangle = \int_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} u(x,\tau)w(x,\tau)d\mu(x)d\tau$ eşitliğini gözönüne alarak, $\langle u \circledast \varphi\,,\, w\rangle$ ifadesini yazalım ve daha sonra da, Fubini teoremi ile Genelleşmiş kayma operatörü $T^{y,\tau}$ 'nun Teorem 2.5.2 'de verilen özelliklerini kullanalım. Aşağıda $S^{\xi_n}_{x_n}$ ve $S^{x_n}_{\xi_n}$ simgeleri, sırasıyla x_n ve ξ_n değişkenlerine uygulanan Bessel kaymasıdır (bakınız: Tanım 2.4.1).

$$\langle u \circledast \varphi\,,\, w\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} (u \circledast \varphi)(x,\tau)w(x,\tau)d\mu(x)d\tau$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} u(\xi,t)T^{\xi,t}\varphi(x,\tau)d\mu(\xi)dt \right) w(x,\tau)d\mu(x)d\tau$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} u(\xi,t) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} w(x,\tau)T^{\xi,t}\varphi(x,\tau)d\mu(x)d\tau \right) d\mu(\xi)dt$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} u(\xi,t) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} w(x,\tau)S^{\xi_n}\varphi(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, \ldots, x_n, \tau-t)d\mu(x)d\tau \right) d\mu(\xi)dt$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} u(\xi,t) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} w(x,\tau)S^{x_n}\varphi_-(-x_1+\xi_1, -x_2+\xi_2, \ldots, \xi_n, t-\tau)d\mu(x)d\tau \right) d\mu(\xi)dt$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} u(\xi,t) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} w(x,\tau)T^{x,\tau}\varphi_-(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)d\mu(x)d\tau \right) d\mu(\xi)dt$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} u(\xi,t)(w \circledast \varphi_-)(\xi,t)d\mu(\xi)dt = \langle u\,,\, \varphi_- \circledast w\rangle.$$

Böylece, $\langle u \circledast \varphi\,,\, w\rangle = \langle u\,,\, \varphi_- \circledast w\rangle$ olduğunu göstermiş olduk. ■

2.8. Düz ve Ters Fourier-Bessel Dönüşümü ve Özellikleri

Tanım 2.8.1 $f \in \mathcal{S}^+$ fonksiyonunun (düz) Fourier-Bessel dönüşümü

$$(\mathcal{F}_\nu f)(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1} f(y,\tau)e^{-i(x'\cdot y'+t\tau)}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)d\mu(y)d\tau \qquad (2.8.1)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada: $x'\cdot y' = x_1y_1 + \cdots + x_{n-1}y_{n-1}$ ve $d\mu(y) = y_n^{2\nu}dy$ 'dir. (Kipriyanov 1968) Görüldüğü gibi, $\mathcal{F}_\nu$ dönüşümü, x' ve t değişkenlerine göre klasik Fourier ve x_n değişkenine göre de Bessel (bazı kaynaklarda Hankel) dönüşümlerinin kompozisyonudur.

Tanım 2.8.2 Ters Fourier-Bessel dönüşümü de alışılagelmiş gösterim olan $\mathcal{F}_\nu^{-1}$ ile gösterilir ve

$$(\mathcal{F}_\nu^{-1} f)(x,t) = c_\nu(n)(\mathcal{F}_\nu f)(-x_1, \ldots, -x_{n-1}, x_n, -t) \qquad (2.8.2)$$

eşitliği ile tanımlanır. Formülde gözüken ve daha sonra da kullanacağımız $c_\nu(n)$ katsayısı

$$c_\nu(n) = \left[(2\pi)^n 2^{2\nu-1} \Gamma^2(\nu + \frac{1}{2})\right]^{-1} \qquad (2.8.3)$$

biçimindedir.

Fourier dönüşümünün sağladığı özelliklerin hemen-hemen tümünün benzerleri $\mathcal{F}_\nu$–Fourier-Bessel dönüşümü için de geçerlidir:

Teorem 2.8.3 $f\ ,\ g \in S^+$ olmak üzere, $\mathcal{F}_\nu$–Fourier-Bessel dönüşümü için aşağıdakiler sağlanır.

a) $\mathcal{F}_\nu(f \circledast g) = \mathcal{F}_\nu(f)\, \mathcal{F}_\nu(g)$;

b) $\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left[\mathcal{F}_\nu f(\xi,t)\right] = \mathcal{F}_\nu\left[(-ix_k) f(x,\tau)\right](\xi,t)$

Daha genel olarak; $P(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1})$ – $(n+1)$ değişkenli bir polinom ve $B_{\xi_n} = \frac{d^2}{d\xi_n^2} + \frac{2\nu}{\xi_n}\frac{d}{d\xi_n}$ Bessel diferansiyel operatörü için

$$P\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \ldots, B_{\xi_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathcal{F}_\nu f(\xi,t) = \mathcal{F}_\nu\left[P(-iy_1, -iy_2, \ldots, -y_n^2, -i\tau) f(y,\tau)\right](\xi,t)$$

eşitliği vardır.

c) $\mathcal{F}_\nu\left[\frac{\partial}{\partial \xi_k} f(\xi,t)\right](x,\tau) = (ix_k)\mathcal{F}_\nu f(x,\tau)$ ve b) 'ye benzer olarak;

$$\mathcal{F}_\nu\left[P\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \ldots, B_{\xi_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right) f(\xi,t)\right](x,\tau) = P(ix_1, ix_2, \ldots, -x_n^2, i\tau)\mathcal{F}_\nu f(x,\tau)$$

eşitliği sağlanır.

d) Özel olarak; $\Delta_\nu = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + B_{x_n}$ Laplace-Bessel diferansiyel operatörü için

$$\mathcal{F}_\nu[(-\Delta_\nu + \frac{\partial}{\partial t}) f(x,t)](y,\tau) = (|y|^2 + i\tau)(\mathcal{F}_\nu f)(y,\tau). \qquad (2.8.4)$$

e) Yine özel olarak, I– birim operatör olmak üzere, $(I - \Delta_\nu + \frac{\partial}{\partial t})$ operatörü için

$$\mathcal{F}_\nu[(I - \Delta_\nu + \frac{\partial}{\partial t}) f(x,t)](y,\tau) = (1 + |y|^2 + i\tau)(\mathcal{F}_\nu f)(y,\tau)$$

olur Bu formül çoğu zaman kısaca;

$$[(I - \Delta_\nu(x) + \frac{\partial}{\partial t})f]^\wedge = (1 + |y|^2 + i\tau)f^\wedge \qquad (2.8.5)$$

biçiminde de ifade edilir.

Bu kesimi kapatmadan önce, (tez boyunca) $\mathcal{F}_{\nu,x}$ notasyonunun sadece $x \in \mathbb{R}^n_+$ değişkenine göre uygulanan Fourier-Bessel dönüşümü için kullanılacağını belirtelim. Böylece;

$$(\mathcal{F}_{\nu,x}f)(y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x,t)e^{-ix'y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)d\mu(x) \ , \ d\mu(x) = x_n^{2\nu}dx.$$

2.9. Genelleşmiş Gauss-Weierstrass Çekirdeği ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.9.1 Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği, klasik Gauss-Weierstrass çekirdeğinin tanımına benzer olarak, Fourier-Bessel dönüşümü yardımıyla

$$W_\nu(y,\tau) = \sqrt{c_\nu(n-1)}(2\tau)^{-\frac{n+2\nu}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} \qquad (2.9.1)$$

olarak tanımlanır. Burada: $\sqrt{c_\nu(n-1)}$ katsayısı (2.8.3) formülüne uygun olarak

$$\sqrt{c_\nu(n-1)} = \left[(2\pi)^{n-1}2^{2\nu-1}\Gamma^2(\nu+\frac{1}{2})\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.9.2)$$

şeklindedir ($n = 1$ için Stempak(1985), $n > 1$ halinde de Aliyev(1992))

Lemma 2.9.2 a) $\mathcal{F}_{\nu,y}[W_\nu(y,\tau)](x) = e^{-\tau|x|^2} \quad , \quad \tau > 0$;

b) $\|W_\nu(\cdot,\tau)\|_{1,\nu} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} W_\nu(y,\tau)d\mu(y) = 1 \quad , \quad \tau > 0$;

c) $(W_\nu(\cdot,\tau) \circledast W_\nu(\cdot,t))(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} W_\nu(y,\tau)T_x^y W_\nu(x,t)d\mu(y) = W_\nu(x,t+\tau)$;

d) Her $\varepsilon > 0$, $t > 0$ ve $y \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$W_\nu(\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon t) = \varepsilon^{-\frac{n+2\nu}{2}}W_\nu(y,t).$$

(Bu sonuncu özelliğe $W_\nu(\cdot,\cdot)$ çekirdeğinin anizotropik homojenliği diyeceğiz).

İspat. a) İspat için kullanılacak olan iki özdeşliği hatırlatalım:

I. (Strichartz, 1994, s.38) $a > 0$, x' , $t' \in \mathbb{R}^{n-1}$ için

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-a|x'|^2} e^{-ix' t'} dx' = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{|t'|^2}{4a}}$$

II. (Gradshtayn and Ryzhik 1994, s.738, n:6.631-4) $\lambda > -1$, $a > 0$, $b > 0$ ve $J_\lambda(r)$ I.tip Bessel fonksiyonu olmak üzere,

$$\int\limits_0^\infty e^{-ar^2} J_\lambda(br) r^{\lambda+1} dr = \frac{b^\lambda}{(2a)^{\lambda+1}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Şimdi, II özdeşliğini, λ yerine $\nu - \frac{1}{2}$ alarak ve $J_\lambda(r) = \frac{r^\lambda}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)} j_\lambda(r)$ olduğunu kullanılarak yeniden yazarsak;

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty e^{-ar^2} J_\lambda(br) r^{\lambda+1} dr &= \int\limits_0^\infty e^{-ar^2} \frac{1}{2^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} (br)^{\nu-\frac{1}{2}} j_{\nu-\frac{1}{2}}(br) r^{\nu+\frac{1}{2}} dr \\
&= \int\limits_0^\infty e^{-ar^2} \frac{b^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} j_{\nu-\frac{1}{2}}(br) r^{2\nu} dr \\
&= \frac{b^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int\limits_0^\infty e^{-ar^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}(br) r^{2\nu} dr
\end{aligned}$$

olur ve II eşitliğinin ikinci tarafı da $\frac{b^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\nu+\frac{1}{2}} a^{\nu+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$ şekline dönüşür. Böylece;

$$\frac{b^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\nu+\frac{1}{2}} a^{\nu+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{b^2}{4a}} = \frac{b^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int\limits_0^\infty e^{-ar^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}(br) r^{2\nu} dr$$

ve sonuç olarak da

$$\int\limits_0^\infty e^{-ar^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}(br) r^{2\nu} dr = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{a^{\nu+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \qquad (2.9.3)$$

eşitliğini elde ederiz. a) 'nın ispatı için I ve (2.9.3) 'ü birleştirmek yeterlidir. Gerçekten, $x = (x', x_n), y = (y', y_n)$ ve $|x|^2 = |x'|^2 + x_n^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\nu(e^{-a|x|^2})(y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_0^\infty e^{-a|x|^2} e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) d\mu(x) \\
&= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-a|x'|^2} e^{-ix'y'} dx' \right) \left(\int\limits_0^\infty e^{-ax_n^2} e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) x_n^{2\nu} dx_n \right) \\
&= \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{|y'|^2}{4a}} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{a^{\nu+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y_n^2}{4a}} = \frac{1}{2}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\pi^{\frac{n-1}{2}} a^{-\frac{n+2\nu}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4a}}
\end{aligned}$$

ifadesinden yararlanırsak

$$\mathcal{F}_{\nu,y}(W_\nu(y,\tau))(x) = \sqrt{c_\nu(n-1)}(2\tau)^{-\frac{n+2\nu}{2}} \mathcal{F}_{\nu,y}(e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}})(x)$$

elde ederiz ki, buradan da

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\nu,y}(W_\nu(y,\tau))(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{2\nu-1}{2}} \Gamma(\nu+\frac{1}{2})} (2\tau)^{-\frac{n+2\nu}{2}} \frac{1}{2}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(4\pi)^{-\frac{n+2\nu}{2}}} e^{-\tau|x|^2} \\
&= e^{-\tau|x|^2}
\end{aligned}$$

olur.

b) a) özdeşliğinde $x = 0$ olarak alırsak;

$$\begin{aligned}
1 = e^{-\tau.0} = \mathcal{F}_{\nu,y}(W_\nu(y,\tau))(0) &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} W_\nu(y,\tau) e^{-i.0} j_{\nu-\frac{1}{2}}(0) d\mu(y) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} W_\nu(y,\tau) d\mu(y) \\
&= \|W_\nu(\cdot,\tau)\|_{1,\nu}
\end{aligned}$$

eşitliğinden $\|W_\nu(\cdot,\tau)\|_{1,\nu} = 1$ olduğu görülür.

c) $W_\nu(\cdot,\tau) \circledast W_\nu(\cdot,t)$ ifadesine önce Fourier-Bessel dönüşümü uygulayıp daha sonra da sırasıyla Teorem 2.8.3 'ü ve bu Lemmanın a) şıkkını dikkate alırsak,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\nu \left[W_\nu(\cdot,\tau) \circledast W_\nu(\cdot,t)\right](x) &= \mathcal{F}_\nu[W_\nu(\cdot,\tau)](x)\ \mathcal{F}_\nu[W_\nu(\cdot,t)](x) = e^{-\tau|x|^2} e^{-t|x|^2} \\
&= e^{-(\tau+t)|x|^2} = \mathcal{F}_\nu[W_\nu(\cdot,\tau+t)](x)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Fourier-Bessel dönüşümleri eşit olan fonksiyonların kendileri eşit olacağından,

$$W_\nu(\cdot,\tau) \circledast W_\nu(\cdot,t) = W_\nu(\cdot,\tau+t)$$

olur.

d) $W_\nu(y,\tau) = \sqrt{c_\nu(n-1)}(2\tau)^{-\frac{n+2\nu}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}}$ ifadesinden yararlanarak $W_\nu(\sqrt{k}\xi, k\tau)$ yu yazarsak istenen eşitlik çıkar:

$$W_\nu(\sqrt{k}\xi, k\tau) = \sqrt{c_\nu(n-1)}(2\tau)^{-\frac{n+2\nu}{2}}k^{-\frac{n+2\nu}{2}}e^{-\frac{(\sqrt{k})^2|\xi|^2}{4k\tau}} = W_\nu(\xi,\tau)k^{-\frac{n+2\nu}{2}}$$

■

Lemma 2.9.3 (Jones 1968, s. 400) **1)** $\tau > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\mathcal{F}_{\nu,x}^{-1}(e^{-\tau|x|^2})(y) = W_\nu(y,\tau)$$

dir.

2) (Jones 1968, s. 400; Gradshtayn and Ryzhik 1994, s. 365, n:3.382-6) Her $\alpha > 0$, $b > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}(b+i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}e^{it\tau}d\tau = \left\{\begin{array}{ll} \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}e^{-bt}t^{\frac{\alpha}{2}-1} & , \ t>0 \\ 0 & , \ t<0 \end{array}\right\}$$

Aşağıdaki lemmada $W_\nu(x,t)$ fonksiyonunun, $t \leq 0$ için herhangi bir şekilde, örneğin, sıfır olarak tanımlandığını varsayacağız.

Lemma 2.9.4 (Rubin 1996, s. 158) $\mathcal{H}\left(\frac{\alpha}{2}, l\right)$ - normalleştirici katsayısı (2.3.4) formülüyle tanımlansın. O halde $t_+^{\frac{\alpha}{2}} = \left\{\begin{array}{ll} t^{\frac{\alpha}{2}} & , \ t>0 \\ 0 & , \ t\leq 0 \end{array}\right.$ ve $l > \frac{\alpha}{2}$ olmak üzere,

$$\kappa_{l,\frac{\alpha}{2}}(t) = \left[\frac{\alpha}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathcal{H}\left(\frac{\alpha}{2},l\right)t\right]^{-1}\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}(t-k)_+^{\frac{\alpha}{2}} \tag{2.9.4}$$

ve

$$\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(x,t) = \kappa_{l,\frac{\alpha}{2}}(t)W_\nu(x,t) \quad , \quad (x \in \mathbb{R}_+^n \ , \ t \in \mathbb{R}^1) \tag{2.9.5}$$

fonksiyonları için;

a) $\kappa_{l,\frac{\alpha}{2}}(t) = \left\{\begin{array}{ll} O(t^{\frac{\alpha}{2}-1}) & , \ t\to 0 \\ O(t^{\frac{\alpha}{2}-l-1}) & , \ t\to\infty \end{array}\right.$

b) $\kappa_{l,\frac{\alpha}{2}}(t) \in L_1(\mathbb{R}^1)$ ve $\int_{-\infty}^{\infty}\kappa_{l,\frac{\alpha}{2}}(t)dt = \int_{0}^{\infty}\kappa_{l,\frac{\alpha}{2}}(t)dt = 1$

c) $\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(x,t) \in L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1)$

d) $\int\limits_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} \mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(x,t)d\mu(x)dt = 1$

bağıntıları her $\alpha > 0$ ve her $l > \alpha$ için sağlanır.

Ayrıca, $\kappa_{l,\frac{\alpha}{2}}(t)$ ve $\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(x,t)$ fonksiyonları hakkında daha ayrıntılı bilgi için yine Rubin (1996) kaynağına bakılabilir.

3. B-PARABOLİK POTANSİYELLER UZAYI VE B-PARABOLİK POTANSİYELLERİN TERSLERİNİN BELİRLENMESİ

3.1. Laplace-Bessel Diferansiyel Operatörünün Doğurduğu Parabolik Bessel Potansiyeli ve Özellikleri

Bu kesimde Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu parabolik Bessel potansiyeli tanımlanacak ve bu potansiyelin özellikleri incelenecektir.

Bilindiği gibi Teorem 2.8.3 'ün e) şıkkı;

$$\mathcal{F}_\nu[(I-\Delta_\nu(x)+\frac{\partial}{\partial t})\varphi](x,t)=(1+|x|^2+it)\mathcal{F}_\nu[\varphi](x,t)$$

olduğunu söylemektedir. Bu eşitlik, bize $A=I-\Delta_\nu(x)+\frac{\partial}{\partial t}$ operatörünün negatif "kesir" kuvvetlerini tanımlamanın doğal yolunu gösterir:

$$(A^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi)^\wedge(x,t)=(1+|x|^2+it)^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi^\wedge(x,t). \tag{3.1.1}$$

Tanım 3.1.1 (3.1.1) eşitliği ile tanımlanan operatöre Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu *Parabolik Bessel Potansiyeli* (kısaca *B-parabolik potansiyel*) denir ve $\mathcal{H}_\nu^\alpha\varphi$ ile gösterilir.

Böylece, $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}_+^n$, $t\in\mathbb{R}^1$ ve $\varphi\in\mathcal{S}^+(\mathbb{R}_+^n\times\mathbb{R}^1)$ için

$$(\mathcal{H}_\nu^\alpha\varphi)^\wedge(x,t)=(1+|x|^2+it)^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi^\wedge(x,t) \tag{3.1.2}$$

dir. Harmonik analizden iyi bilindiği gibi, (3.1.2) bağıntısı ile verilen "multiplier" tipli operatör, aslında, genelleşmiş fonksiyonlar(distributions) dilinde yorumlanan girişim tipli bir operatördür. Bu girişim tipli operatörün çekirdeği, $(1+|x|^2+it)^{-\frac{\alpha}{2}}$ fonksiyonunun, genelleşmiş fonksiyonlar(distribution) teorisi anlamında "ters Fourier-Bessel dönüşümü" dür. Bunu bir lemma olarak ifade edelim.

Lemma 3.1.2 Genelleşmiş fonksiyonlar(Distributions) anlamında

$$\mathcal{F}_\nu^{-1}[(1+|x|^2+i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}](y,t)=\left\{\begin{array}{cl}\sqrt{c_\nu(n-1)}2^{-\frac{n+2\nu}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}t^{\frac{(\alpha-n-2-2\nu)}{2}}e^{-t-\frac{|y|^2}{4t}} & ,\ t>0\\ 0 & ,\ t<0\end{array}\right\}$$

dir.

İspat. Lemma 2.9.3-2) 'de b 'yi $1+|x|^2$ olarak alırsak;

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^2+i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}e^{it\tau}d\tau \equiv \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}(1+|x|^2+i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}e^{it\tau}d\tau$$
$$= \left\{\begin{array}{ll} \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}e^{-t}e^{-|x|^2t}t^{\frac{\alpha}{2}-1} & , \ t>0 \\ 0 & , \ t<0 \end{array}\right\}$$

olur. Şimdi, $x=(x',x_n)$, $y=(y',y_n)$ olmak üzere Lemma 2.9.3 1) ve 2) yi gözönüne alarak; $y\in\mathbb{R}^n_+$ ve $t>0$ için aşağıdaki formal işlemleri yaparsak,

$$\mathcal{F}_\nu^{-1}[(1+|x|^2+i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}](y,t)=c_\nu(n)\mathcal{F}_\nu[(1+|x|^2+i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}](-y_1,\ldots,-y_{n-1},y_n,-t)$$

$$=c_\nu(n)\int_{\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^1}(1+|x|^2+i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}e^{it\tau}e^{iy'\cdot x'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_ny_n)d\mu(x)d\tau$$

$$=c_\nu(n)\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{iy'\cdot x'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_ny_n)\left(\int_{\mathbb{R}^1}(1+|x|^2+i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}e^{it\tau}d\tau\right)d\mu(x)$$

$$=c_\nu(n)\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{iy'\cdot x'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_ny_n)\frac{2\pi}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}e^{-t}e^{-|x|^2t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}d\mu(x)$$

$$=\frac{2\pi c_\nu(n)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-|x|^2t}e^{iy'\cdot x'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_ny_n)d\mu(x)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}\mathcal{F}_{\nu,x}^{-1}(e^{-|x|^2t})(y)=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}W_\nu(y,t)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}\sqrt{c_\nu(n-1)}(2t)^{-\frac{n+2\nu}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$$

$$=\sqrt{c_\nu(n-1)}2^{-\frac{n+2\nu}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}t^{\frac{\alpha}{2}-1-\frac{n+2\nu}{2}}e^{-t-\frac{|y|^2}{4t}}$$

$$=\sqrt{c_\nu(n-1)}2^{-\frac{n+2\nu}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}t^{\frac{\alpha-2-n-2\nu}{2}}e^{-t-\frac{|y|^2}{4t}}$$

eşitliğini ve sonuç olarak da

$$\mathcal{F}_\nu^{-1}[(1+|x|^2+i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}](y,t)=\left\{\begin{array}{ll}\sqrt{c_\nu(n-1)}2^{-\frac{n+2\nu}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}t^{\frac{(\alpha-n-2-2\nu)}{2}}e^{-t-\frac{|y|^2}{4t}} & , \ t>0 \\ 0 & , \ t<0\end{array}\right\}$$

elde ederiz. Burada, $\sqrt{c_\nu(n-1)}$ katsayısı (2.9.2) ile verildiği gibidir. Şimdi, sağ taraftaki fonksiyonun (ki, $L_{1,\nu}$ 'dendir!) Fourier-Bessel dönüşümü alınırsa, sonucun $(1+|x|^2+i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}$ 'ye eşit olacağı kontrol edilebilir. ■

Böylece,

$$\tau_+ = \begin{cases} \tau & , \quad \tau > 0 \\ 0 & , \quad \tau \leq 0 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

notasyonunu kabul edersek ve Gauss-Weierstrass çekirdeğinin (2.9.1) ile tanımlanan ifadesini gözönüne alırsak, Fourier-Bessel dönüşümü dilinde, (3.1.2) ile tanımlanan $\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi-$ B-parabolik potansiyelin integral şeklini elde ederiz:

Sonuç 3.1.3 Her $\varphi \in \mathcal{S}^+$ ve her $\alpha > 0$ için

$$(\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} \tau_+^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} W_\nu(y,\tau) T^{y,\tau} \varphi(x,t) d\mu(y) d\tau \tag{3.1.4}$$

dir. Burada, yukarıda tanımladığımız gibi, $d\mu(y) = y_n^{2\nu} dy$ 'dir.

İspat. (3.1.2) eşitliğinin her iki tarafına $\mathcal{F}_\nu^{-1}-$ ters Fourier-Bessel dönüşümünü uygularsak ve genelleşmiş girişimin Teorem 2.8.3 a) 'daki özelliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu^{-1}(\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi)^\wedge(x,t) &= \mathcal{F}_\nu^{-1}\mathcal{F}_\nu[\mathcal{F}_\nu^{-1}(1+|x|^2+it)^{-\frac{\alpha}{2}} \circledast \varphi](x,t) \\ &= [\mathcal{F}_\nu^{-1}(1+|x|^2+it)^{-\frac{\alpha}{2}} \circledast \varphi](x,t) \end{aligned}$$

olur. Şimdi burada, Lemma 3.1.2 'yi ve Gauss-Weierstrass çekirdeğinin (2.9.1) ile verilen tanımını kullanırsak (3.1.4) formülünü elde ederiz:

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi)(x,t) &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} \sqrt{c_\nu(n-1)}\, 2^{-\frac{n+2\nu}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \tau_+^{\frac{(\alpha-n-2-2\nu)}{2}} e^{-\tau-\frac{|y|^2}{4\tau}} T^{y,\tau} \varphi(x,t) d\mu(y) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} \tau_+^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\tau} W_\nu(y,\tau) T^{y,\tau} \varphi(x,t) d\mu(y) d\tau \end{aligned}$$

■

Lemma 3.1.4 a) *(Yarıgrup özelliği)* Her $\varphi \in \mathcal{S}^+$ ve her $\alpha, \beta > 0$ için

$$\mathcal{H}_\nu^\alpha \mathcal{H}_\nu^\beta \varphi = \mathcal{H}_\nu^{\alpha+\beta} \varphi \tag{3.1.5}$$

eşitliği sağlanır.

b) *($L_{p,\nu}-L_{p,\nu}$ sınırlılık özelliği)* Her $\varphi \in \mathcal{S}^{+}$, $\alpha > 0$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\|\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}\varphi\|_{p,\nu} \leq \|\varphi\|_{p,\nu} \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği sağlanır ($p=\infty$ için $\|\varphi\|_{\infty,\nu} = ess \sup\limits_{(x,t)\in\mathbb{R}_{+}^{n}\times\mathbb{R}^{1}} |\varphi(x,t)|$ dir).

İspat. a) İspat için, (3.1.2) eşitliğini kullanmak yetecektir:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}\mathcal{H}_{\nu}^{\beta}\varphi)^{\wedge}(x,t) &= (1+|x|^2+it)^{-\frac{\alpha}{2}}(\mathcal{H}_{\nu}^{\beta}\varphi)^{\wedge}(x,t) \\
&= (1+|x|^2+it)^{-\frac{\alpha}{2}}(1+|x|^2+it)^{-\frac{\beta}{2}}\varphi^{\wedge}(x,t) \\
&= (1+|x|^2+it)^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\varphi^{\wedge}(x,t) \\
&= (\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha+\beta}\varphi)^{\wedge}(x,t)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}\mathcal{H}_{\nu}^{\beta}\varphi = \mathcal{H}_{\nu}^{\alpha+\beta}\varphi$

b) Bu kısmın ispatı için, (2.7.1) formülü ile verilen Young eşitsizliğinde: $g(x,\tau) \equiv \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\tau_{+}^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\tau}W_{\nu}(x,\tau)$, $f \equiv \varphi$ ve $q=1$ (dolayısıyla $r=p$) olarak alırsak,

$$\|f \circledast g\|_{p,\nu} \equiv \|\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}\varphi\|_{p,\nu} \leq \|\varphi\|_{p,\nu} \cdot \|g\|_{1,\nu}$$

olur. Şimdi; $\|g\|_{1,\nu}$ 'yü hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\|g\|_{1,\nu} &= \int_{0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}_{+}^{n}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\tau_{+}^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\tau}W_{\nu}(x,\tau)x_n^{2\nu}dxd\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_{0}^{\infty}\tau^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\tau}\left(\int_{\mathbb{R}_{+}^{n}} W_{\nu}(x,\tau)x_n^{2\nu}dx\right)d\tau.
\end{aligned}$$

Son olarak, Lemma 2.9.2 b) 'yi kullanırsak,

$$\|g\|_{1,\nu} = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_{0}^{\infty}\tau^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\tau}d\tau = 1$$

olur ve böylece de $\|\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}\varphi\|_{p,\nu} \leq \|\varphi\|_{p,\nu}$ elde edilir. ■

Sonuç 3.1.5 (3.1.6) eşitsizliği kullanılarak, $\mathcal{S}^{+}$ uzayında, (3.1.2) bağıntısı ile tanımlanmış olan $\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}\varphi$, $(\alpha > 0)$ operatörleri (3.1.4) formülü yardımıyla $L_{p,\nu}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ uzaylarına sürekli devam ettirilebilir.

İspat. $f \in L_{p,\nu}$ olsun $\mathcal{S}^+$ uzayı, $L_{p,\nu}$ 'de yoğun olduğundan öyle $\varphi_m \in \mathcal{S}^+$ dizisi vardır ki, $\varphi_m \to f$ 'dir. Ayrıca bu φ_m dizisi bir Cauchy dizisidir. φ_m 'nin Cauchy dizisi olmasından ve (3.1.6) 'dan yararlanarak $\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi_m$ 'nin Cauchy dizisi olduğunu söyleyebiliriz: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m_\varepsilon\ \ \forall\, m, l \geq m_\varepsilon$ için

$$\|\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi_l - \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi_m\|_{p,\nu} = \|\mathcal{H}_\nu^\alpha(\varphi_l - \varphi_m)\|_{p,\nu} \leq \|\varphi_l - \varphi_m\|_{p,\nu} < \varepsilon.$$

O halde, $\lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi_m$ vardır ($L_{p,\nu}$ tam uzaydır). $\mathcal{H}_\nu^\alpha f \equiv \lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi_m$ olarak tanımlanırsa; $\mathcal{H}_\nu^\alpha : L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ 'ye genişletilmiş olur.
Şimdi de, $\|\mathcal{H}_\nu^\alpha f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}$ olduğunu görelim. $\|\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi_m\|_{p,\nu} \leq \|\varphi_m\|_{p,\nu}$ ($\forall m$ için) olduğundan, $m \to \infty$ için limite geçersek, $\|\mathcal{H}_\nu^\alpha f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}$ elde ederiz. ∎

3.2. B-Parabolik Potansiyeller Uzayı ve B-Parabolik Potansiyellerin Terslerinin Belirlenmesi

Bu kesimde, adına B-parabolik potansiyeller uzayı diyeceğimiz ve $L_{p,\nu}^\alpha$ ile göstereceğimiz fonksiyonel uzayı tanımlayacağız. Esas amacımız, $L_{p,\nu}$ 'nün bir alt uzayı olan $L_{p,\nu}^\alpha$ 'yı nitelendiren özelliği belirlemektir. Daha açık ifade etmek gerekirse, "$L_{p,\nu}$ den alınan bir f fonksiyonu hangi gerek ve yeter koşullar altında $L_{p,\nu}^\alpha$ uzayına ait olur" sorusuna bir cevap arıyoruz. Bu soruyu cevaplamak için ilkönce B-parabolik potansiyel operatörün ($\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi$) tersini bulacağız.

Klasik parabolik potansiyeller için ters belirleme problemi $0 < \alpha < 2$ için Chanillo(1981), en genel halde ise Nogin ve Rubin (1985) tarafından çözülmüştür.

Genelleşmiş kaymanın doğurduğu parabolik Riesz potansiyelinin tersini belirleme formülünün ispatı Aliyev (1992) tarafından yapılmıştır. Biz de, Aliyev (1992)'in kullandığı yönteme benzer bir yöntem kullanarak Bessel tipli B-parabolik potansiyeller için ters belirleme formülünü bulacağız. Bu amaç doğrultusunda öncelikle, $\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi$ 'nin tersini belirleyen konstruksiyonu formal olarak kuracağız ve daha sonra da bu konstruksiyonun, gerçekten, $L_{p,\nu}$ ve noktasal yakınsama anlamında $\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi$ operatörü için bir ters belirleme konstruksiyonu olduğunu göstereceğiz.

Tanım 3.2.1 $L^{\alpha}_{p,\nu}$ ile gösterilen *B-parabolik potansiyeller uzayı* ,

$$L^{\alpha}_{p,\nu} \equiv \mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}(L_{p,\nu}) = \{ \ f : f = \mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi \ , \ \varphi \in L_{p,\nu}\} \ , \ 1 \leq p \leq \infty \qquad (3.2.1)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Aslında, $L^{\alpha}_{p,\nu}$ uzayı, $L_{p,\nu}$ uzayının $\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}$ operatörü altındaki görüntü kümesi olup, $f = \mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi$, $\varphi \in L_{p,\nu}$ olmak üzere, $\|f\|_{L^{\alpha}_{p,\nu}} \equiv \|\varphi\|_{p,\nu}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.2 $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1$ üzerinde tanımlı bir $f(x,\tau)$ fonksiyonunun *anizotropik ve ağırlıklı sonlu farkı*;

$$\square^{l}_{\xi,t}(f)(x,\tau) = \sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}e^{-kt}T^{\sqrt{k}\xi,kt}f(x,\tau) \qquad (3.2.2)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Burada tanımlamış olduğumuz $\square^{l}_{\xi,t}$ operatörünü, $\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi$ verildiğinde, φ 'yi bulmak için kullanacağız. Aşağıdaki lemma $\varphi \in \mathcal{S}^{+}$ için $\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi$ verildiğinde, φ 'nin nasıl elde edileceği konusunda bir ipucu vermektedir.

Lemma 3.2.3 $I^{\frac{\alpha}{2}}$, (2.3.1) eşitliği ile tanımlanan Liuoville kesir integrali olmak üzere,

$$e^{(1+|\xi|^2)t}\mathcal{F}_{\nu,x}[\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi](\xi,t) = I^{\frac{\alpha}{2}}[e^{(1+|\xi|^2)\tau}\mathcal{F}_{\nu,x}(\varphi)(\xi,\tau)](t) \qquad (3.2.3)$$

dir.

İspat. İlkönce (3.1.4) formülünde τ yerine $t-\tau$ yazarak her iki tarafa $\mathcal{F}_{\nu,x}$ dönüşümü uygulanır ve daha sonra da sırasıyla, Fubini Teoremi ile Fourier-Bessel dönüşümünün Teorem 2.8.3 a) 'daki özelliği kullanılırsa,

$$\mathcal{F}_{\nu,x}[\mathcal{H}_\nu^\alpha\varphi](\xi,t)=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\times$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(t-\tau)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-t+\tau}W_\nu(y,t-\tau)T^{y,t-\tau}\varphi(x,t)d\mu(y)\right)d\tau\right)e^{-ix'\xi'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n\xi_n)d\mu(x)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}(t-\tau)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-t+\tau}W_\nu(y,t-\tau)T_x^y\varphi(x,\tau)d\mu(y)\right)d\mu(x)e^{-ix'\xi'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n\xi_n)d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left[\frac{e^{-t+\tau}}{(t-\tau)_+^{1-\frac{\alpha}{2}}}W_\nu(\cdot,t-\tau)\circledast\varphi\right]e^{-ix'\xi'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n\xi_n)d\mu(x)\right)d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\mathcal{F}_{\nu,x}\left[\frac{e^{-t+\tau}}{(t-\tau)_+^{1-\frac{\alpha}{2}}}W_\nu(\cdot,t-\tau)\circledast\varphi\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\mathcal{F}_{\nu,x}\left[\frac{e^{-t+\tau}}{(t-\tau)_+^{1-\frac{\alpha}{2}}}W_\nu(\cdot,t-\tau)\right]\mathcal{F}_{\nu,x}[\varphi]\,d\tau=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\frac{e^{-t+\tau}}{(t-\tau)_+^{1-\frac{\alpha}{2}}}e^{-(t-\tau)|\xi|^2}\mathcal{F}_{\nu,x}[\varphi]\,d\tau$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, (3.1.3) vasıtasıyla,

$$(t-\tau)_+^{1-\frac{\alpha}{2}}=\begin{cases}(t-\tau)^{1-\frac{\alpha}{2}} & , \ \tau<t\\ 0 & , \ \tau\geq t\end{cases}$$

olacağından,

$$\mathcal{F}_{\nu,x}[\mathcal{H}_\nu^\alpha\varphi](\xi,t)=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{e^{-t(1+|\xi|^2)}e^{\tau(1+|\xi|^2)}}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha}{2}}}\mathcal{F}_{\nu,x}[\varphi](\xi,\tau)d\tau$$

olur. Son olarak, (2.3.1) ile tanımlanan Liouville kesir integrali gözönüne alınırsa;

$$e^{(1+|\xi|^2)t}\mathcal{F}_{\nu,x}[\mathcal{H}_\nu^\alpha\varphi](\xi,t)=I^{\frac{\alpha}{2}}[e^{(1+|\xi|^2)\tau}\mathcal{F}_{\nu,x}[\varphi](\xi,\tau)](t)$$

eşitliği elde edilir. ■

Böylece, şimdi ifade edeceğimiz lemma ile, (3.2.3) eşitliği vasıtasıyla, $\varphi\in\mathcal{S}^+$ için, $\mathcal{H}_\nu^\alpha\varphi$ operatörünün tersini belirlemiş olacağız

Lemma 3.2.4 $\varphi\in\mathcal{S}^+$ olmak üzere, $\mathcal{H}_\nu^\alpha\varphi$ verilmiş olsun. Bu takdirde;

$$\varphi(x,\tau)=\frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\int\limits_0^\infty\frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}W_\nu(\xi,t)\Box_{\xi,t}^l(\mathcal{H}_\nu^\alpha\varphi)(x,\tau)\xi_n^{2\nu}d\xi\right\}dt \qquad (3.2.4)$$

olarak elde edilir. Burada: $\Box^{l}_{\xi,t}$- (3.2.2) ile tanımlanan anizotropik ve ağırlıklı sonlu fark operatörü ve $\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)$ de (2.3.4) formülüyle tanımlanan normalleştirici katsayıdır.

İspat. $\varphi(x,\tau)$ fonksiyonunu $\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi$ vasıtasıyla ifade etmek için ilkönce, (3.2.3) eşitliğinin her iki yanına t değişkenine göre $D^{\frac{\alpha}{2}}-$ Marchaud türevi uygulayalım ((2.3.3) 'e bakınız):

$$D^{\frac{\alpha}{2}}\left[e^{(1+|\xi|^2)t}\mathcal{F}_{\nu,x}[\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi](\xi,t)\right]=D^{\frac{\alpha}{2}}\left\{I^{\frac{\alpha}{2}}\left[e^{(1+|\xi|^2)\tau}\mathcal{F}_{\nu,x}[\varphi](\xi,\tau)\right](t)\right\}.$$

Eşitliğin ikinci tarafındaki $D^{\frac{\alpha}{2}}-$ Marchaud türevi, $I^{\frac{\alpha}{2}}-$ Liouville integralini götüreceğinden (çünkü; Liouville integralinin belli bir anlamda tersi Marchaud türevidir),

$$D^{\frac{\alpha}{2}}\left[e^{(1+|\xi|^2)t}\mathcal{F}_{\nu,x}[\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi](\xi,t)\right]=e^{(1+|\xi|^2)\tau}\mathcal{F}_{\nu,x}(\varphi)(\xi,\tau)$$

olur. Buradan da,

$$e^{(1+|\xi|^2)\tau}\mathcal{F}_{\nu,x}(\varphi)(\xi,\tau)=\frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\int\limits_0^{\infty}\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}e^{(1+|\xi|^2)(\tau-kt)}\mathcal{F}_{\nu,x}[\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi](\xi,\tau-kt)\frac{dt}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}$$

yazılabilir. Bu son eşitliğin her iki yanı , ilkönce, $e^{(1+|\xi|^2)\tau}$ ifadesine bölünüp daha sonra da, $\mathcal{F}^{-1}_{\nu,x}$ dönüşümü uygulanırsa;

$$\varphi(x,\tau)=\frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}\left\{\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}e^{-kt}\mathcal{F}^{-1}_{\nu,\xi\to x}[e^{-kt|\xi|^2}\mathcal{F}_{\nu,x\to\xi}(\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi)(\xi,\tau-kt)]\right\}dt \tag{3.2.5}$$

olur. Şimdi, eşitliğin sağ tarafındaki;

$$\mathcal{F}^{-1}_{\nu,\xi\to x}[e^{-kt|\xi|^2}\mathcal{F}_{\nu,x\to\xi}(\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi)(\xi,\tau-kt)]$$

ifadesini hesaplamak için Teorem 2.8.3-a) 'daki $\mathcal{F}^{-1}_{\nu}[\mathcal{F}_{\nu}\varphi.\mathcal{F}_{\nu}\psi]=\varphi\circledast\psi$ eşitliği ile Lemma 2.9.2 'nin a) şıkkı kullanılırsa;

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}_{\nu,\xi\to x}[e^{-kt|\xi|^2}\mathcal{F}_{\nu,x\to\xi}(\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi)(\xi,\tau-kt)] &= \mathcal{F}^{-1}_{\nu,\xi\to x}[\mathcal{F}_{\nu,\xi}(W_{\nu}(\xi,kt)).\mathcal{F}_{\nu,x\to\xi}(\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi)(\xi,\tau-kt)]\\ &= W_{\nu}(\xi,kt)\circledast\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi(x,\tau)\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}W_{\nu}(\xi,kt)\left[T^{\xi}_{x}(\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi)(x,\tau-kt)\right]\xi_n^{2\nu}d\xi\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik (3.2.5) 'deki yerine yazılırsa;

$$\varphi(x,\tau) = \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)} \int_0^\infty \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^n} \left[\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} e^{-kt} W_\nu(\xi, kt) T_x^\xi (\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi)(x, \tau - kt) \right] \xi_n^{2\nu} d\xi \right\} dt$$

olur. Şimdi de, $\xi \to \sqrt{k}\xi$ şeklinde bir değişken değiştirmesi yapılıp, Lemma 2.9.2'nin d) şıkkı olan

$$W_\nu(\sqrt{k}\xi, k\tau) = k^{-\frac{n+2\nu}{2}} W_\nu(\xi,\tau)$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\varphi(x,\tau) = \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)} \int_0^\infty \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^n} \left[\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} e^{-kt} W_\nu(\xi, t) T^{\sqrt{k}\xi, kt} (\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi)(x, \tau) \right] \xi_n^{2\nu} d\xi \right\} dt$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte (3.2.2) formülü ile tanımlanan anizotropik ve ağırlıklı sonlu fark gözönüne alınırsa, $\varphi \in \mathcal{S}^+$ fonksiyonunu, $\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi$ vasıtasıyla ifade eden formül elde edilmiş olur:

$$\varphi(x,\tau) = \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)} \int_0^\infty \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^n} W_\nu(\xi,t) \square_{\xi,t}^l (\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi)(x,\tau) \xi_n^{2\nu} d\xi \right\} dt$$

■

Şimdi ispatlamış olduğumuz (3.2.4) eşitliğinin sağ tarafından yararlanarak, $\varepsilon > 0$ parametresine bağımlı olan ve $D_\varepsilon^\alpha f$ ile göstereceğimiz bir operatörler ailesi tanımlayacağız ve bu operatörler ailesini B-parabolik potansiyeller uzayını nitelendirmek için kullanacağız.

Tanım 3.2.5 $f \in \mathcal{S}^+$, $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $D_\varepsilon^\alpha f$ 'yi

$$D_\varepsilon^\alpha(f)(x,\tau) = \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_\varepsilon^\infty W_\nu(\xi,t) \square_{\xi,t}^l (f)(x,\tau) \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} \xi_n^{2\nu} d\xi dt \qquad (3.2.6)$$

olarak tanımlayalım ve bu $D_\varepsilon^\alpha f$, $(\varepsilon > 0)$ operatörüne özel olarak; B-parabolik potansiyel operatörünün $\varepsilon-$*yaklaşık tersi* diyelim.

3.3. $D_\varepsilon^\alpha \mathcal{H}_\nu^\alpha$ Kompozisyonunun "Yaklaşık Birim Operatör" Biçiminde Gösterilmesi

(3.2.4) formülü ile biz, $\varphi \in \mathcal{S}^+$ için $\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi$ operatörünün tersini belirledik. Ama asıl amacımız, $\varphi \in L_{p,\nu}(1 \leq p < \infty)$ için de (3.2.4) formülüne benzer formülü elde etmektir. Bunun için, öncelikle $f = \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi, (\varphi \in \mathcal{S}^+)$ olmak üzere, $D_\varepsilon^\alpha f, (\varepsilon > 0)$ operatörünü yaklaşık birim operatör şeklinde göstermeliyiz. Bunu bir lemma olarak ifade edip ispatlayacağız. Ancak, esas lemmaya geçmeden, bize lemmanın ispatında gerekecek olan, aşağıdaki (3.3.1) eşitliğinin doğruluğunu gösterelim:

Lemma 3.3.1

$$I_{\varepsilon,k}(r) = \int_\varepsilon^\infty \frac{(\varepsilon r - kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} dt = \frac{2}{\varepsilon r \alpha}(r-k)_+^{\frac{\alpha}{2}} \quad , (k = 0, 1, 2, \ldots, l) \qquad (3.3.1)$$

İspat. İlkönce, $k \geq 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $r \leq k$ ise, $\varepsilon \leq t < \infty$ olduğundan $kt \geq r\varepsilon$ ve buradan $(\varepsilon r - kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1} = 0$ olur. Böylece, $r \leq k$ için $I_{\varepsilon,k}(r) = 0$ dır. Eğer, $r > k$ ise de

$$I_{\varepsilon,k}(r) = \int_\varepsilon^{\frac{\varepsilon r}{k}} \frac{(\varepsilon r - kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} dt + \int_{\frac{\varepsilon r}{k}}^\infty \frac{(\varepsilon r - kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} dt$$

yazabiliriz. Şimdi burada;

$$\varepsilon < t < \frac{\varepsilon r}{k} \Rightarrow (\varepsilon r - kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1} = (\varepsilon r - kt)^{\frac{\alpha}{2}-1}$$

ve

$$\frac{\varepsilon r}{k} < t < \infty \Rightarrow \varepsilon r < kt \Rightarrow (\varepsilon r - kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1} = 0$$

olacağından, $I_{\varepsilon,k}(r)$ 'nin ifadesindeki ikinci integral 0 olur. Yani; $r > k$ için

$$I_{\varepsilon,k}(r) = \int_\varepsilon^{\frac{\varepsilon r}{k}} \frac{(\varepsilon r - kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} dt$$

dir. Burada, $t = \frac{\varepsilon r}{k} \cdot \frac{1}{t+1}$ değişken değiştirmesi yaparsak, $dt = \frac{\varepsilon r}{k} \cdot \frac{-1}{(t+1)^2} dt$ ve dolayısıyla da

$$I_{\varepsilon,k}(r) = -\int_0^{\frac{r}{k}-1} (\varepsilon r)^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{(\varepsilon r)}{k} (1 - \frac{1}{t+1})^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{\frac{-1}{(t+1)^2}}{(\frac{\varepsilon r}{k})^{1+\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{(1+t)^{1+\frac{\alpha}{2}}}} dt$$

olur. Gerekli kısaltmalar yapılırsa, basit hesaplamalar sonucunda

$$I_{\varepsilon,k}(r) = \frac{k^{\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon r} \int\limits_{0}^{\frac{r}{k}-1} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt = \frac{2}{\varepsilon r \alpha}(r-k)^{\frac{\alpha}{2}}$$

elde edilir. Böylece; $k \geq 1$ durumunda,

$$I_{\varepsilon,k}(r) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{\varepsilon r \alpha}(r-k)^{\frac{\alpha}{2}} & , \ r > k \\ 0 & , \ r \leq k \end{array} \right\} = \frac{2}{\varepsilon r \alpha}(r-k)_{+}^{\frac{\alpha}{2}}$$

ile istenen eşitlik elde edilir. Son olarak, $k = 0$ ve $r > 0$ durumunda da yine yukarıdaki eşitliğin sağlandığını görelim:

$$I_{\varepsilon,0}(r) = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(\varepsilon r)_{+}^{\frac{\alpha}{2}-1}}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} dt = \frac{2}{\varepsilon r \alpha} r^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\varepsilon r \alpha} r_{+}^{\frac{\alpha}{2}}$$

O halde, her $k = 0, 1, \ldots, l$ için $I_{\varepsilon,k}(r) = \frac{2}{\varepsilon r \alpha}(r-k)_{+}^{\frac{\alpha}{2}}$ 'dir. ∎

Lemma 3.3.2 $\alpha > 0$ verilmiş bir sayı olmak üzere, $D_{\varepsilon}^{\alpha}, (\varepsilon > 0)$ operatörler ailesi (3.2.6) ile tanımlandığı gibi olsun. Bu takdirde her $\varphi \in L_{p,\nu}\,(1 \leq p < \infty)$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$D_{\varepsilon}^{\alpha}(\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}\varphi)(x,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n} \times (0,\infty)} \mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r) e^{-\varepsilon r}\, T^{\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon r} \varphi(x,\tau) d\mu(y) dr \qquad (3.3.2)$$

Burada: $y \in \mathbb{R}_{+}^{n}$, $r \in (0,\infty)$, $d\mu(y) = y_n^{2\nu} dy$ ve $\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r)$ fonksiyonu da (2.9.5) ile tanımlanmış olan fonksiyondur.

İspat. İşe, $f = \mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}\varphi$ olmak üzere $\Box_{\xi,t}^{l}(f)(x,\tau)$-anizotropik ve ağırlıklı sonlu farkı hesaplayarak başlayalım.

(3.1.4) formülü gözönüne alınırsa, aşağıdakiler yazılabilir.

$$\Box_{\xi,t}^{l}(f)(x,\tau) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} e^{-kt} T^{\sqrt{k}\xi,kt} (\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}\varphi)(x,\tau)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} e^{-kt} T_{x,\tau}^{\sqrt{k}\xi,kt} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^{1}} W_{\nu}(y,r) r_{+}^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-r} \left(T^{y,r}\varphi(x,\tau)\right) d\mu(y) dr \right\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} e^{-kt} \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} \int\limits_{\mathbb{R}^{1}} T^{\sqrt{k}\xi,kt} (W_{\nu}(y,r) r_{+}^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-r}) T^{y,r} \varphi(x,\tau) d\mu(y) dr$$

$\square^{l}_{\xi,t}(f)$ 'nin bu ifadesi (3.2.6) 'da yerine yerleştirilip, integrallerin sırası değiştirilirse;

$$D^{\alpha}_{\varepsilon}(f)(x,\tau)=\frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}W_\nu(\xi,t)t^{-1-\frac{\alpha}{2}}\times$$

$$\left\{\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}e^{-kt}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^1}T^{\sqrt{k}\xi,kt}[W_\nu(y,\tau)\tau_+^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\tau}]T^{y,\tau}\varphi(x,\tau)d\mu(y)d\tau\right\}d\mu(\xi)dt$$

$$=\left(T^{\sqrt{k}\xi,kt}[W_\nu(y,\tau)\tau_+^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\tau}]\equiv T_y^{\sqrt{k}\xi}[W_\nu(y,\tau-kt)(\tau-kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\tau+kt}]\right)$$

$$=\frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{-\tau}\left\{\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}e^{-kt}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}t^{-1-\frac{\alpha}{2}}(\tau-kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}\times\right.$$

$$\left.\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}W_\nu(\xi,t)T_y^{\sqrt{k}\xi}W_\nu(y,\tau-kt)d\mu(\xi)\right)dt\right\}T^{y,\tau}\varphi(x,\tau)d\mu(y)d\tau$$

elde edilir. Şimdi, ξ yerine $\frac{\xi}{\sqrt{k}}$, $(k\neq 0)$ koyarak değişken değiştirelim ve $W_\nu(\xi,t)-$ genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeğinin Lemma 2.9.2 ile verilen c), d) özelliklerini gözönüne alarak ifadeyi tekrar yazalım:

$$D^{\alpha}_{\varepsilon}(f)(x,\tau)=\frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{-\tau}\left\{\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{(\tau-kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}W_\nu(\frac{\xi}{\sqrt{k}},t)(\sqrt{k})^{-2\nu-n}T_y^{\xi}W_\nu(y,\tau-kt)d\mu(\xi)\right)dt\right\}T^{y,\tau}\varphi(x,\tau)d\mu(y)d\tau=$$

$$\left(W_\nu(\frac{\xi}{\sqrt{k}},t)(\sqrt{k})^{-2\nu-n}\equiv W_\nu(\xi,kt)\ ,\ \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}W_\nu(\xi,kt)T_y^{\xi}W_\nu(y,\tau-kt)d\mu(\xi)=W_\nu(y,\tau)\right)$$

$$=\frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{-\tau}\left\{\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{(\tau-kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}dt\right\}W_\nu(y,\tau)T^{y,\tau}\varphi(x,\tau)d\mu(y)d\tau$$

Tekrar, y yerine $\sqrt{\varepsilon}y$ ve r yerine de εr koyarak değişken değiştirelim ve Lemma 2.9.2 'nin d) şıkkını uygulayalım. Bu durumda,

$$D_\varepsilon^\alpha(f)(x,\tau) = \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-\varepsilon r}\left\{\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{(r-kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}dt\right\}\times$$

$$W_\nu(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon r)(\sqrt{\varepsilon})^{n+2\nu}\varepsilon T^{\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon r}\varphi(x,\tau)d\mu(y)dr =$$

$$\cdots\left(W_\nu(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon r)(\sqrt{\varepsilon})^{n+2\nu}\equiv W_\nu(y,r) \text{ uyguluyoruz}\right)\cdots$$

$$= \frac{\varepsilon}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-\varepsilon r}\left\{\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{(\varepsilon r-kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}dt\right\}\times$$

$$W_\nu(y,r)T^{\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon r}\varphi(x,\tau)d\mu(y)dr$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi, bu son eşitlikte yer alan ve Lemma 3.3.1 ile hesapladığımız

$$I_{\varepsilon,k}(r) = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{(\varepsilon r-kt)_+^{\frac{\alpha}{2}-1}}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}dt$$

integralinin değerini yerine yazarsak; $D_\varepsilon^\alpha(f)$ 'nin ifadesi

$$\begin{aligned} D_\varepsilon^\alpha(f)(x,\tau) &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\frac{\alpha}{2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)r}\left\{\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}(r-k)_+^{\frac{\alpha}{2}}\right\} \\ &\quad\times W_\nu(y,r)e^{-\varepsilon r}\,T^{\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon r}\varphi(x,\tau)d\mu(y)dr \end{aligned}$$

halini alır. Burada, $\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r)$ fonksiyonunun (2.9.5) formülü ile verilen tanımı gözönüne alınırsa, sonuç olarak, $f=\mathcal{H}_\nu^\alpha\varphi$ için

$$D_\varepsilon^\alpha(f)(x,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r)e^{-\varepsilon r}\,T^{\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon r}\varphi(x,\tau)d\mu(y)dr \tag{3.3.3}$$

formülü elde edilir.

(3.3.3) ile elde ettiğimiz formül her $\varphi\in S^+$ için geçerlidir. Son olarak, (3.3.3) formülünün her $\varphi\in L_{p,\nu}\,(1\le p<\infty)$ için de geçerli olacağını gösterirsek, ispat tamamlanır. Böylece, bu son kısmın ispatı için,

$$(A\varphi)(x,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r)e^{-\varepsilon r}\,T^{\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon r}\varphi(x,\tau)d\mu(y)dr$$

ve

$$(B\varphi)(x,\tau) = D_\varepsilon^\alpha(\mathcal{H}_\nu^\alpha\varphi)(x,\tau)$$

operatörlerinin $L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$, $(1 \leq p < \infty)$ sınırlı olduklarını göstermek yetecektir. Bu amaç doğrultusunda $f \in L_{p,\nu}$ alalım ve $\|Af\|_{p,\nu}$ 'yü hesaplayalım:

$$\|Af\|_{p,\nu} = \left\| \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_0^\infty \mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r) e^{-\varepsilon r}\, T^{\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon r}\varphi(x,\tau) d\mu(y) dr \right\|_{p,\nu}$$

(İntegraller için Minkowski eşitsizliğini (Teorem 2.1.5) uyguluyoruz)

$$\leq \int_{\mathbb{R}_+^n \times (0,\infty)} |\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r)|\, |e^{-\varepsilon r}|\, \|T^{\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon r}\varphi(x,\tau)\|_{p,\nu}\, d\mu(y) dr$$

Bu adımda, (2.5.1) 'i ve $\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r)$ fonksiyonunun Lemma 2.9.4-c) 'de verilen özelliğini kullanırsak;

$$\|Af\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu} \int_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} |\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r)| d\mu(y) dr \equiv C\, \|f\|_{p,\nu}$$

olur. Böylece, $A : L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ sınırlıdır. Benzer olarak, B operatörünün $L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ sınırlı olduğunu göstermek için

$$\mathcal{H}_\nu^\alpha : L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}\ (1 \leq p \leq \infty) \qquad \text{ve} \qquad D_\varepsilon^\alpha : L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}\ (1 \leq p < \infty)$$

olduğu gösterilmelidir. $\mathcal{H}_\nu^\alpha : L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ olduğu Sonuç 3.1.5 'ten bilinmektedir. O halde, $f \in L_{p,\nu}$ alalım ve $\|D_\varepsilon^\alpha f\|_{p,\nu}$ 'yü hesaplayalım:

$$
\begin{aligned}
\|D_\varepsilon^\alpha f\|_{p,\nu} &= \left\| \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W_\nu(\xi,t) \square_{\xi,t}^l (f)(x,\tau) \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} d\mu(\xi) dt \right\|_{p,\nu} \\
&\cdots \text{(Minkowski eşitsizliğini uyguluyoruz)} \cdots \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W_\nu(\xi,t) \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} \|\square_{\xi,t}^l (f)(x,\tau)\|_{p,\nu} d\mu(\xi) dt \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W_\nu(\xi,t) \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} e^{-kt} \|f\|_{p,\nu} d\mu(\xi) dt \\
&\cdots \text{(Fubini Teoremini uyguluyoruz)} \cdots \\
&\leq \|f\|_{p,\nu} \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} W_\nu(\xi,t) d\mu(\xi) \right\} \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} e^{-kt} dt \\
&\cdots \text{(Lemma 2.9 2-b) 'yi uyguluyoruz)} \cdots \\
&\leq \|f\|_{p,\nu} \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} e^{-kt} dt \equiv C_\varepsilon(\alpha,l) . \|f\|_{p,\nu}
\end{aligned}
$$

Burada: $C_\varepsilon(\alpha,l) = \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} \sum\limits_{k=0}^{l} \binom{l}{k} e^{-kt} dt < \infty$ olduğundan

$$
\|D_\varepsilon^\alpha f\|_{p,\nu} \leq C_\varepsilon(\alpha,l) . \|f\|_{p,\nu}
$$

ve dolayısıyla, $D_\varepsilon^\alpha : L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ sınırlıdır. Sonuç olarak; (3.3.3) ile elde edilen formül her $\varphi \in L_{p,\nu}$ $(1 \leq p < \infty)$ için de geçerlidir. Yani, her $\varphi \in L_{p,\nu}$ $(1 \leq p < \infty)$ için

$$
D_\varepsilon^\alpha(\mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi)(x,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \times (0,\infty)} \mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r) e^{-\varepsilon r} T^{\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon r} \varphi(x,\tau) d\mu(y) dr
$$

dir. ■

Not: (3.3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadeyi "Yaklaşık Birim operatör" olarak adlandırmamızın sebebi, aşağıda göreceğimiz gibi, her $\varphi \in L_{p,\nu}$, $(1 \leq p < \infty)$ için söz konusu ifadenin, $\varepsilon > 0$ parametresi sıfıra yaklaşırken limitinin φ 'ye eşit olmasıdır. Başka bir ifadeyle, $\varepsilon \to 0$ için $D_\varepsilon^\alpha \mathcal{H}_\nu^\alpha$ operatörler ailesi, belli bir anlamda, birim operatöre yaklaşıyor.

4. B-PARABOLİK POTANSİYELLER UZAYININ AĞIRLIKLI VE ANİZOTROPİK SONLU FARKLAR YARDIMIYLA NİTELENDİRİLMESİ

Bu bölümde, $L^{\alpha}_{p,\nu} = \{ f : f = \mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi \ , \ \varphi \in L_{p,\nu} \}$, $(1 < p < \infty)$– B-parabolik potansiyeller uzayını, D^{α}_{ε} , $(\varepsilon > 0)$ operatörler ailesini kullanarak karakterize edeceğiz. Diğer bir ifadeyle, bu tezin esas amacını ifade eden teoremi ispatlayacağız.

Teorem 4.0.1 $\alpha > 0$ verilsin ve D^{α}_{ε}, $(\varepsilon > 0)$ - operatörler ailesi (3.2.6) ile tanımlansın. Bu takdirde, $f \in L^{\alpha}_{p,\nu}$, $(1 < p < \infty)$ olması için

$$\text{a)}\ f \in L_{p,\nu} \qquad \text{ve} \qquad \text{b)}\ \sup_{\varepsilon>0} \|D^{\alpha}_{\varepsilon} f\|_{p,\nu} < \infty$$

koşullarının sağlanması gerekli ve yeterlidir.

İspat. (⇒): $f \in L^{\alpha}_{p,\nu}$, $(1 < p < \infty)$ olsun. $L^{\alpha}_{p,\nu}$ uzayının tanımından, $f = \mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi$ sağlanacak biçimde bir $\varphi \in L_{p,\nu}$, $(1 < p < \infty)$ vardır. $\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu} : L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ operatörü sınırlı olduğundan, $f \in L_{p,\nu}$ olacağı açıktır. Dolayısıyla, a) koşulu sağlanır. Şimdi b) 'nin sağlandığını yani, $\|D^{\alpha}_{\varepsilon} f\|_{p,\nu} \leq C < \infty$ olacak biçimde, ε 'dan bağımsız bir $C > 0$ sabitinin varlığını gösterelim. Bu amaç doğrultusunda, (3.3.2) formülünü gözönüne alalım ve sırasıyla: İntegraller için Minkowski eşitsizliğini (Teorem 2.1.5), (2.5.1) formülünü ve Lemma 2.9.4 'ü uygulayalım.

$$\|D^{\alpha}_{\varepsilon} f\|_{p,\nu} = \|D^{\alpha}_{\varepsilon}(\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}\varphi)\|_{p,\nu} = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)} \mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,\tau) e^{-\varepsilon\tau}\ T^{\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon\tau} \varphi(x,\tau) d\mu(y) d\tau \right\|_{p,\nu}$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)} |\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,\tau)|\ \|T^{\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon\tau}\varphi(x,\tau)\|_{p,\nu}\, d\mu(y) d\tau$$

$$\leq \|\varphi\|_{p,\nu} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)} |\kappa_{l,\frac{\alpha}{2}}(\tau)|\ |W_{\nu}(y,\tau)| d\mu(y) d\tau = \|\varphi\|_{p,\nu} \int\limits_0^{\infty} |\kappa_{l,\frac{\alpha}{2}}(\tau)| d\tau < \infty.$$

Demek ki, $\|D^{\alpha}_{\varepsilon} f\|_{p,\nu} \leq C < \infty$ koşulunu sağlayan ε 'dan bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır. Şimdi $\varepsilon > 0$ 'a göre supremum alırsak,

$$\sup_{\varepsilon>0} \|D^{\alpha}_{\varepsilon} f\|_{p,\nu} \leq C < \infty.$$

olur ki bu da b) koşulunun sağlandığını gösterir.

($\Leftarrow$): $f \in L_{p,\nu}$ ve $\sup\limits_{\varepsilon>0} \|D_\varepsilon^\alpha f\|_{p,\nu} < \infty$ $(1 < p < \infty)$ olsun. Bu koşullar altında $f = \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi$ olacak biçimde bir $\varphi \in L_{p,\nu}$ fonksiyonunun varlığını göstermeliyiz. Bunun için, Kesim 2.6 'da ayrıntılı olarak incelenen, genelleşmiş fonksiyonlardan yaralanacağız. Daha açık ifade etmek gerekirse: ispat için, genelleşmiş fonksiyon anlamında, her $w \in \mathcal{S}^+$ için

$$\langle f\,,\, w\rangle = \langle \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi\,,\, w\rangle \tag{4.0.1}$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $\varphi \in L_{p,\nu}$ fonksiyonu bulmak yetecektir. Burada ve bundan sonra heryerde, Örnek 2.6.6 'da da sözedildiği gibi, her lokal integrallenebilen f ve $w \in \mathcal{S}^+$ için, $\langle f, \varphi\rangle$ 'nin

$$\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1} f(x,t)\varphi(x,t) x_n^{2\nu} dx dt \tag{4.0.2}$$

ile tanımlanan ifadesi kullanılacaktır. $\sup\limits_{\varepsilon>0} \|D_\varepsilon^\alpha f\|_{p,\nu} < \infty$ olduğundan, Teorem 2.1.10 ile verilen Banach-Alaoğlu Teoremi gereğince öyle bir $\varphi \in L_{p,\nu}$ fonksiyonu ve $\varepsilon_k \to 0$ dizisi vardır ki,

$$\lim_{\varepsilon_k \to 0} \langle D_{\varepsilon_k}^\alpha f\,,\, w\rangle = \langle \varphi\,,\, w\rangle \tag{4.0.3}$$

eşitliği her $w \in L_{p',\nu}$, $\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1\right)$ için (ve özel halde, her $w \in \mathcal{S}^+$ için) sağlanır. İşte, bu φ fonksiyonu için (4.0.1) bağıntısının sağlandığını göstereceğiz. Bu amaç doğrultusunda ilkönce, ispatta kullanacağımız, aşağıdaki lemmanın doğruluğunu gösterelim:

Lemma 4.0.2 $w \in \mathcal{S}^+$ olmak üzere, $Uw(x,t) = w(-x,-t)$, $\tilde{D}_\varepsilon^\alpha w = U D_\varepsilon^\alpha U w$ ve $\tilde{\mathcal{H}}_\nu^\alpha w = U \mathcal{H}_\nu^\alpha U w$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\langle D_\varepsilon^\alpha \varphi\,,\, w\rangle = \langle \varphi\,,\, \tilde{D}_\varepsilon^\alpha w\rangle \qquad \text{ve} \qquad \langle \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi\,,\, w\rangle = \langle \varphi\,,\, \tilde{\mathcal{H}}_\nu^\alpha w\rangle \tag{4.0.4}$$

eşitlikleri her $\varphi \in L_{p,\nu}$, $(1 < p < \infty)$ ve $w \in \mathcal{S}^+$ için sağlanır.

İspat. (4.0.4) 'teki eşitliklerin doğruluğunu, ilkönce, $\varphi \in \mathcal{S}^+$ fonksiyonu için göstereceğiz. Daha sonra da $\mathcal{H}_\nu^\alpha$ ve D_ε^α operatörlerinin $L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ sınırlılığı ile

$\mathcal{S}^+$ uzayının $L_{p,\nu}$ 'de yoğun oluşunu kullanarak, $\varphi \in L_{p,\nu}$ fonksiyonları için de (4.0.4) 'ün sağlandığını göreceğiz.

O halde şimdi, (4.0.4) 'teki eşitliklerin $\varphi \in \mathcal{S}^+$ için sağlandığını gösterelim. Genelleşmiş kayma operatörü: S^τ için, $US^\tau U = S^\tau$ olacağından, (4.0.4) 'teki eşitliklerin klasik kayma (τ) için sağlandığını göstermek yetecektir. O halde, şimdi, $\langle D_\varepsilon^\alpha \varphi \,,\, w\rangle$ ifadesini oluşturarak Fubini Teoremini kullanırsak istediğimiz eşitliği elde ederiz:

$$\langle D_\varepsilon^\alpha \varphi \,,\, w\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times\mathbb{R}^1} w(x,\tau)\left[\frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W_\nu(\xi,t)\square_{\xi,t}^l(\varphi)(x,\tau)\frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}d\mu(\xi)dt\right]\times$$

$$d\mu(x)d\tau = \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times\mathbb{R}^1} w(x,\tau)d\mu(x)d\tau\times$$

$$\left[\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W_\nu(\xi,t)\left\{\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}e^{-kt}T^{\sqrt{k}\xi,kt}\varphi(x,\tau)\right\}\frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}d\mu(\xi)dt\right]$$

$$= \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W_\nu(\xi,t)\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}e^{kt}\frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}d\mu(\xi)dt\times$$

$$\left\{\int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times\mathbb{R}^1} w(x,\tau)\varphi(x-\sqrt{k}\xi,\tau-kt)d\mu(x)d\tau\right\}$$

$$= \cdots(x\to x+\sqrt{k}\xi\ ,\ \tau\to\tau+kt \text{ değişken değiştirmesi yapalım }) = \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\times$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W_\nu(\xi,t)\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}e^{kt}\frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}d\mu(\xi)dt\left\{\int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times\mathbb{R}^1} w(x+\sqrt{k}\xi,\tau+kt)\varphi(x,\tau)d\mu(x)d\tau\right\}$$

$$= \cdots\left(w(x+\sqrt{k}\xi,\tau+kt) = w_-(-x-\sqrt{k}\xi,-\tau-kt) \text{ eşitliğini kullanalım}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2},l)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W_\nu(\xi,t)\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}e^{kt}\frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}}d\mu(\xi)dt\times$$

$$\left\{\int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times\mathbb{R}^1} \varphi(x,\tau)w_-(-x-\sqrt{k}\xi,-\tau-kt)d\mu(x)d\tau\right\}$$

$$= \frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2}, l)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W_\nu(\xi, t) \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} e^{kt} \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} d\mu(\xi) dt \times$$

$$\left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} \varphi(x, \tau) T^{\sqrt{k}\xi, kt} w_-(-x, -\tau) d\mu(x) d\tau \right\} = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} \varphi(x, \tau) \times$$

$$\left[\frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2}, l)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W_\nu(\xi, t) \left\{ \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} e^{kt} T^{\sqrt{k}\xi, kt} w_-(-x, -\tau) \right\} \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} d\mu(\xi) dt \right] d\mu(x) d\tau$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} \varphi(x, \tau) \left[\frac{1}{\mathcal{H}(\frac{\alpha}{2}, l)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} W_\nu(\xi, t) \square^l_{\xi, t}(w_-)(-x, -\tau) \frac{1}{t^{1+\frac{\alpha}{2}}} d\mu(\xi) dt \right] d\mu(x) d\tau$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^1} \varphi(x, \tau) \left(U D^\alpha_\varepsilon w_- \right)(x, \tau) d\mu(x) d\tau = \langle \varphi \,, \tilde{D}^\alpha_\varepsilon w \rangle .$$

Son olarak, $\varphi \in L_{p,\nu}$ olması durumunda da (4.0.4) eşitliklerinin sağlandığını görelim: Öncelikle; D^α_ε ve $\mathcal{H}^\alpha_\nu$ operatörleri $L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ sınırlı olduklarından, $\tilde{D}^\alpha_\varepsilon$ ve $\tilde{\mathcal{H}}^\alpha_\nu$ operatörlerinin de $L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ sınırlı olacaklarını belirtelim. Şimdi, S^+ uzayı $L_{p,\nu}$ 'de yoğun olduğundan, $\varphi \in L_{p,\nu}$ için öyle $\varphi_m \in S^+$ dizisi vardır ki, $\varphi_m \xrightarrow{L_{p,\nu}} \varphi$ 'dir. D^α_ε operatörü $L_{p,\nu} \to L_{p,\nu}$ sınırlı olduğundan $D^\alpha_\varepsilon \varphi_m \xrightarrow{L_{p,\nu}} D^\alpha_\varepsilon \varphi$ olur. Böylece,

$$\langle D^\alpha_\varepsilon \varphi \,, w \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle D^\alpha_\varepsilon \varphi_m \,, w \rangle$$

eşitliğini yazabiliriz. Gerçekten,

$$\begin{aligned} |\langle D^\alpha_\varepsilon \varphi_m \,, w \rangle - \langle D^\alpha_\varepsilon \varphi \,, w \rangle| &= |\langle D^\alpha_\varepsilon \varphi_m - D^\alpha_\varepsilon \varphi \,, w \rangle| = |\langle D^\alpha_\varepsilon (\varphi_m - \varphi) \,, w \rangle| \\ &\quad \cdots \text{(Hölder eşitsizliğini uyguluyoruz)} \cdots \\ &\le \|D^\alpha_\varepsilon (\varphi_m - \varphi)\|_{p,\nu} \cdot \|w\|_{p',\nu} \\ &\le C_\varepsilon \cdot \|\varphi_m - \varphi\|_{p,\nu} \cdot \|w\|_{p',\nu} \to 0 \end{aligned}$$

Ayrıca (4.0.4) eşitlikleri $\varphi \in S^+$ için doğru olduğundan

$$\langle D^\alpha_\varepsilon \varphi \,, w \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle D^\alpha_\varepsilon \varphi_m \,, w \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle \varphi_m \,, \tilde{D}^\alpha_\varepsilon w \rangle = \langle \varphi \,, \tilde{D}^\alpha_\varepsilon w \rangle$$

olur. Buradan, (4.0.4) 'ün birinci eşitliği olan

$$\langle D^\alpha_\varepsilon \varphi \,, w \rangle = \langle \varphi \,, \tilde{D}^\alpha_\varepsilon w \rangle$$

ifadesini elde ederiz. Benzer ifadeleri $\mathcal{H}_\nu^\alpha$ operatörü için yazarsak; (4.0.4) 'ün ikinci eşitliği olan

$$\langle \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi\,,\, w\rangle = \langle \varphi\,,\, \tilde{\mathcal{H}}_\nu^\alpha w\rangle$$

ifadesinin de sağlandığını görürüz. Böylece Lemma 4.0.2 'nin ispatı tamamlanmış olur. ∎

Şimdi, Teoremin ikinci kısmının ispatına devam edelim (4.0.4) 'ü gözönüne alarak, şunları yazabiliriz:

$$\langle \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi\,,\, w\rangle = \langle \varphi\,,\, \tilde{\mathcal{H}}_\nu^\alpha w\rangle \overset{(4.0.3)}{=} \lim_{\varepsilon_k\to 0}\langle D_{\varepsilon_k}^\alpha f\,,\, \tilde{\mathcal{H}}_\nu^\alpha w\rangle \overset{(4.0.4)}{=} \lim_{\varepsilon_k\to 0}\langle f\,,\, \tilde{D}_{\varepsilon_k}^\alpha \tilde{\mathcal{H}}_\nu^\alpha w\rangle \qquad (4.0.5)$$

$U^2 = I$ birim operatör olduğundan,

$$\langle f\,,\, \tilde{D}_{\varepsilon_k}^\alpha \tilde{\mathcal{H}}_\nu^\alpha w\rangle = \langle f\,,\, UD_{\varepsilon_k}^\alpha UU\mathcal{H}_\nu^\alpha U w\rangle = \langle f\,,\, UD_{\varepsilon_k}^\alpha \mathcal{H}_\nu^\alpha U w\rangle$$

olur ve dolayısıyla da (4.0.5) eşitliği

$$\langle \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi\,,\, w\rangle = \lim_{\varepsilon_k\to 0}\langle f\,,\, UD_{\varepsilon_k}^\alpha \mathcal{H}_\nu^\alpha U w\rangle \qquad (4.0.6)$$

şeklini alır. $Uw = v$ dersek, $w \in \mathcal{S}^+$ olduğundan $v \in \mathcal{S}^+$ olacağı açıktır.

Şimdi, her $q \in (1,\infty)$ için $L_{q,\nu}$ metriğinde

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0} D_{\varepsilon_k}^\alpha \mathcal{H}_\nu^\alpha v = v$$

eşitliğinin sağlandığını görelim. (3.3.2) eşitliğinden ve Lemma 2.9.4 'ün d) şıkkından

$$D_{\varepsilon_k}^\alpha \mathcal{H}_\nu^\alpha v(x,\tau) - v(x,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times(0,\infty)} \mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r) e^{-\varepsilon_k r} T^{\sqrt{\varepsilon_k}y,\varepsilon_k r} v(x,\tau)d\mu(y)dr$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times(0,\infty)} \mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r) T^{\sqrt{\varepsilon_k}y,\varepsilon_k r} v(x,\tau)d\mu(y)dr + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times(0,\infty)} \mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r) T^{\sqrt{\varepsilon_k}y,\varepsilon_k r} v(x,\tau)d\mu(y)dr$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times(0,\infty)} \mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r) v(x,\tau)d\mu(y)dr$$

eşitliğini ve dolayısıyla da,

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon_k}^\alpha \mathcal{H}_\nu^\alpha v(x,\tau) - v(x,\tau) \;=\; & \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times(0,\infty)} \mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r)(e^{-\varepsilon_k r} - 1) T^{\sqrt{\varepsilon_k}y,\varepsilon_k r} v(x,\tau)d\mu(y)dr + \\ & \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\times(0,\infty)} \mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,r)[T^{\sqrt{\varepsilon_k}y,\varepsilon_k r} v(x,\tau) - v(x,\tau)]d\mu(y)dr \end{aligned}$$

ifadesini yazabiliriz. Şimdi, Minkowski eşitsizliğini (Teorem 2.1.4) uygularsak;

$$\|D^{\alpha}_{\varepsilon_k}\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}v(x,\tau)-v(x,\tau)\|_{q,\nu}\leq \|v\|_{q,\nu}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times(0,\infty)}\left|\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,\tau)\right|(1-e^{-\varepsilon_k\tau})d\mu(y)d\tau$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times(0,\infty)}\left|\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,\tau)\right|\left\|T^{\sqrt{\varepsilon_k}y,\varepsilon_k\tau}v(x,\tau)-v(x,\tau)\right\|_{q,\nu}d\mu(y)d\tau\equiv I_1(\varepsilon_k)+I_2(\varepsilon_k)$$

olur. Son olarak, $\lim\limits_{\varepsilon_k\to 0}I_1(\varepsilon_k)=\lim\limits_{\varepsilon_k\to 0}I_2(\varepsilon_k)=0$ olduğunu gösterirsek, $\lim\limits_{\varepsilon_k\to 0}D^{\alpha}_{\varepsilon_k}\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}v=v$ eşitliğinin ispatı tamamlanmış olur.

$I_1(\varepsilon_k)$ ifadesi için, Lebesque Majorant Yakınsaklık Teoremini (Teorem 2.1.8) uygularsak;

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon_k\to 0}I_1(\varepsilon_k) &= \lim_{\varepsilon_k\to 0}\|v\|_{q,\nu}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times(0,\infty)}\left|\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,\tau)\right|(1-e^{-\varepsilon_k\tau})d\mu(y)d\tau\\ &= \|v\|_{q,\nu}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times(0,\infty)}\left|\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,\tau)\right|\lim_{\varepsilon_k\to 0}(1-e^{-\varepsilon_k\tau})d\mu(y)d\tau\end{aligned}$$

olur ve burada $\lim\limits_{\varepsilon_k\to 0}(1-e^{-\varepsilon_k\tau})=0$ olduğundan, $\lim\limits_{\varepsilon_k\to 0}I_1(\varepsilon_k)=0$ elde edilir.

$I_2(\varepsilon_k)$ ifadesi için de, benzer olarak, (2.5.2) formülünü ve Lebesque Majorant Yakınsaklık Teoremini (Teorem 2.1.8) uygularsak;

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0}I_2(\varepsilon_k)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\times(0,\infty)}\left|\mathcal{K}_{l,\frac{\alpha}{2}}(y,\tau)\right|\lim_{\varepsilon_k\to 0}\left\|T^{\sqrt{\varepsilon_k}y,\varepsilon_k\tau}v(x,\tau)-v(x,\tau)\right\|_{q,\nu}d\mu(y)d\tau=0$$

elde ederiz. O halde, $\lim\limits_{\varepsilon_k\to 0}D^{\alpha}_{\varepsilon_k}\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}v=v$ 'dir. Bu son eşitlikten

$$(L_{q,\nu})\lim_{\varepsilon_k\to 0}UD^{\alpha}_{\varepsilon_k}\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}Uw=UUw=w \tag{4.0.7}$$

yazabiliriz. Burada, $(L_{q,\nu})Lim-L_{q,\nu}$ anlamında limit demektir. Şimdi, $f\in L_{p,\nu}$ ve $w\in\mathcal{S}^+$ için

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0}\langle f\,,\,UD^{\alpha}_{\varepsilon_k}\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}Uw\rangle=\langle f\,,\,w\rangle \tag{4.0.8}$$

eşitliğinin sağlandığını görelim:

$$\begin{aligned}\left|\langle f\,,\,UD^{\alpha}_{\varepsilon_k}\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}Uw\rangle-\langle f\,,\,w\rangle\right| &= \left|\langle f\,,\,UD^{\alpha}_{\varepsilon_k}\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}Uw-w\rangle\right|\\ &\qquad\cdots\text{(Hölder eşitsizliğini uyguluyoruz)}\cdots\\ &\leq \|f\|_{p,\nu}\left\|UD^{\alpha}_{\varepsilon_k}\mathcal{H}^{\alpha}_{\nu}Uw-w\right\|_{p',\nu}\quad,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\end{aligned}$$

Burada (4.0.7) eşitliğini kullanırsak, ifadenin $\varepsilon_k \to 0$ için limiti 0 olur, yani, (4.0.8) sağlanır. Nihayet, teoremin ispatını tamamlamak için, (4.0.8) eşitliğinin (4.0.6) 'da gözönüne alınması yetecektir. Çünkü; bu durumda her $w \in \mathcal{S}^+$ için

$$\langle \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi \, , \, w \rangle = \lim_{\varepsilon_k \to 0} \langle f \, , \, U D_{\varepsilon_k}^\alpha \mathcal{H}_\nu^\alpha U w \rangle = \langle f \, , \, w \rangle$$

olur ve buradan da hemen hemen her $(x, \tau) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1$ için

$$f(x, \tau) = \mathcal{H}_\nu^\alpha \varphi(x, \tau)$$

bağıntısı elde edilerek Teorem 4.0.1 'in ispatı tamamlanmış olur. ∎

5. SONUÇ

İlk olarak B.F. Jones tarafından tanımlanmış olan $\mathcal{H}^{\alpha}$-parabolik Bessel potansiyelleri vasıtasıyla oluşturulan parabolik Bessel potansiyelleri uzayı $\mathcal{H}^{\alpha}(L_p)$; T_{ε}^{α}-uygun bir operatörler ailesi olmak üzere

$$\mathcal{H}^{\alpha}(L_p) = \{f : f \in L_p \ , \ \sup_{\varepsilon>0} \|T_{\varepsilon}^{\alpha} f\|_p < \infty\} \ , \ 1 < p < \infty \ , \ \alpha > 0$$

eşitliği ile karakterize edilmiştir. Klasik potansiyeller, Fourier dönüşümü ve klasik kayma vasıtasıyla tanımlanan girişim tipli integral operatörlerdir. $\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}$- ile gösterilen B-parabolik potansiyelleri de, Δ-Laplace diferansiyel operatörü yerine, Δ_B Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilerek Fourier-Bessel dönüşümü $(\mathcal{F}_{\nu})$ vasıtasıyla tanımlanan integral operatörlerdir. $\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}$ operatörleri ilk olarak Aliyev tarafından incelenmiştir ve ağırlıklı L_p uzaylarında bu potansiyellerin tersleri belirlenmiştir.

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen ve $\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}$ ile gösterilen parabolik potansiyeller üzerine kurulu olan bu tez çalışmasında, klasik parabolik Bessel potansiyelleri için tanımlanmış olan $\mathcal{H}^{\alpha}(L_p)$ uzayına paralel olarak, $\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}$ B-parabolik potansiyelleri için, "B-parabolik potansiyeller uzayı" olarak adlandırılan ve $L_{p,\nu}^{\alpha} = \{ f : f = \mathcal{H}_{\nu}^{\alpha}\varphi \ , \ \varphi \in L_{p,\nu} \}$, $(1 < p < \infty)$ ile ifade edilen bir fonksiyonel uzay tanımlandı ve bu uzayın, yukarıda sözü edilen karakterizasyona benzer bir karakterizasyonu elde edildi. Bu uzay nitelendirilirken, yine klasik parabolik uzayın karakterizasyonuna benzer bir mantık izlendi: ilkönce $\square_{\xi,t}^{l}(f)$ anizotropik ve ağırlıklı sonlu farkı tanımlandı, daha sonra bu sonlu fark yardımıyla, $D_{\varepsilon}^{\alpha}(f)$ operatörler ailesi oluşturuldu. Böylece, $D_{\varepsilon}^{\alpha}(f)$ operatörler ailesi kullanılarak B-parabolik potansiyeller uzayı $L_{p,\nu}^{\alpha}$ karakterize edildi. Bu karakterizasyona göre, bir f fonksiyonunun $L_{p,\nu}^{\alpha}$ uzayına ait olması için gerekli ve yeterli koşul f 'in $L_{p,\nu}$ 'den olması ve $\sup_{\varepsilon>0} \|D_{\varepsilon}^{\alpha} f\|_{p,\nu}$ 'nün sonlu olmasıdır.

Bu tez çalışması ile ilk olarak "B-parabolik potansiyeller uzayı" tanımlanmıştır ve yine ilk olarak, bu uzayın bir karakterizasyonu verilmiştir. Bu tür bir karakterizasyon, B-parabolik potansiyeller uzayının şimdiye kadar yapılmamış bir karakterizasyonu olduğu için ve bu uzayın potansiyel uzayları kategorisindeki yerini almasını sağladığı için oldukça önemlidir.

Bu doktora tezi, B-parabolik potansiyeller konusunda çalışmak isteyenler için önemli bir kaynak niteliğinde olup, bu konuda değişik çalışmalar yapma olanağı sağlamıştır. Ağırlıklı dalgacık(wavelet) dönüşümleri kullanılarak B-parabolik potansiyeller uzayının yeni bir karakterizasyonunun elde edilmiş olması buna bir örnektir.

Bundan sonraki çalışmalarda, potansiyeller ve potansiyel uzayları konusunda daha değişik çalışmalar yapılarak, potansiyellerin bu uzaylar üzerindeki etkileri incelenecek ve yeni türde karakterizasyonlar elde edilmeye çalışılacaktır.

6. KAYNAKLAR

ALIYEV, I.A. 1992. The properties and inversion of B-parabolic potentials *Special Problems of Math. and Mech.*, *"Bilik"*, 56-75 (in Russian), Baku

ALIYEV, I.A. and RUBIN, B. 2001. Parabolic potentials and wavelet transforms with the generalized translation *Studia Mathematica*, 145(1), 1-16

ARONSZAJN, N. and SMITH, K. 1961. Theory of Bessel potentials I. *Ann. Inst Fourier*, (11): 385-475

BAGBY, R. 1971. Lebesgue spaces of parabolic potentials. *Illinois J. Math.*, (15): 610-634.

BAGBY, R. 1984. Parabolic potentials with support on a half-space. *Illinois J. Math.*, (18): 213-222.

BAYRAKÇI(UYHAN), S. 2001. Genelleşmiş Poisson yarıgrubu vasıtasıyla B-Eliptik potansiyellerin terslerini belirleme. Doktora tezi. Antalya, 67 ss.

CALDERON, A.P. 1968. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions *Proc. Symp. Pure Math* (5): 33-49

CHANILLO, S. 1981. Hypersingular integrals and parabolic potentials. *Trans Amer. Math. Soc.* (267): 531-547.

DUOANDIKOETXEA, J. 2001. Fourier Analysis. American Mathematical Society, USA, 222 pp.

FOLLAND, G.B. 1984. Real Analysis, Modern Techniquies and Their Applications. John Wiley and Sons, New York, 350 pp

GOPALA-RAO, V.R. 1977. A characterization of parabolic function spaces. *Amer. J. Math.* (99): 985-993

GRADSHTEYN, I.S. and RYZHIK, I.M. 1994. Table of Integrals, Series, and Products (fifth edition). Academic Press, New York, 1204 pp

JONES, B.F. 1968. Lipschitz spaces and heat equation. *J.Math.Mech.*, (18), 379-410.

KIPRIYANOV, I.A. 1968. Fourier - Bessel transform and embeding theorems for weighted classes. *Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR*, 89(1967): 190-213, Eng.trans. in: *Proc. Steclov Inst. Mat.*, 149-246.

LEVITAN, B.M. 1951. Bessel function expansions in series and Fourier integrals. *Uspekhi Mat. Nauk*, 2(6): 102-143.

LÖFSTRÖM, J. and PEETRE, J. 1969. Approximation theorems connected with generallized translations. *Math. Ann.*, v.181, p.255-268.

NOGIN, V.A. and RUBIN, B.S. 1985. Inversion and description of parabolic potentials with L_p - densities. *Dokl.AN SSSR*, (284), No:3, 535-538.

RUBIN, B.S. 1996. Fractional Integrals and Potentials. Addison Wesley Longman, Essex, U.K, 409 pp.

SADOSKY, C. 1979. Interpolation of Operators and Singular Integrals. Marcel Dekker, Inc. New York, 375 pp.

SAMKO, S.G., KILBAS, A.A., MARICHEV, O.I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. Gordon and Breach, London, 976 pp.

SAMPSON, C.H. 1968. A characterization of parabolic Lebesgue space. *Dissertation*, Rice Univ.

STEIN, E.M. 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 287 pp.

STEIN, E.M. and WEISS, G. 1971. , Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton University Press, New Jersey, 297 pp.

STEMPAK, K. 1985. The Littlewood - Paley theory for the Fourier - Bessel transform. Preprint No:45, Univ. of Wroclaw.

STRICHARTZ, R.S. 1994. A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms. CRC Press, Boca Raton, Florida, 213 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Sinem SEZER, Bitlis 'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya 'da tamamladı. 1991 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 'den 1995 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 1995-Ocak 1998 yılları arasında, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı 'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Ocak 1999 tarihinde aynı enstitüde Doktora öğrenimine başladı. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.