T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UMBRAL CEBİR ÜZERİNDE BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Rahime DERE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

UMBRAL CEBİR ÜZERİNDE BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Rahime DERE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UMBRAL CEBİR ÜZERİNDE BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Rahime DERE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ..../..../2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (   ) not takdir edilerek Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)...................
Prof. Dr. Veli KURT.....................................
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK............................

ÖZET

UMBRAL CEBİR ÜZERİNDE BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Rahime DERE

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Mayıs 2011, 42 Sayfa

Bu tezde, Umbral cebir ve Umbral analiz çalışılmıştır. Umbral cebirin tanımı ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca, Umbral cebir üzerinde bazı özel polinomların üreteç fonksiyonları ve uygulamaları araştırılmıştır. Umbral cebir metotlarıyla birer Appell dizisi olan Hermite, Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarının bazı temel özellikleri verilmiş ve bu polinomlara ait rekürans ve Raabe bağıntıları gibi temel özellikleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Umbral Cebir, Umbral Analiz, Sheffer Dizileri, Appell Dizileri, Hermite Polinomları, Bernoulli Polinomları, Euler Polinomları, Genocchi Polinomları

JÜRİ: Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)
Prof. Dr. Veli KURT
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

ABSTRACT

GENERATING FUNCTIONS OF SOME SPECIAL POLYNOMIALS AND THEIR APPLICATIONS ON UMBRAL ALGEBRA

Rahime DERE

M.Sc. Thesis in Mathematics

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

May 2011, 42 Pages

The main aim of this thesis is to investigate Umbral algebra and Umbral calculus. Firstly, it has been given the definition and fundamental properties of Umbral algebra. Secondly, the generating functions of some special polynomials and their applications on Umbral algebra are investigated. By using Umbral algebra methods, some recurrence and Raabe relations of Hermite, Bernoulli, Euler, and Genocchi polynomials are obtained.

KEY WORDS: Umbral Algebra, Umbral Calculus, Sheffer Sequences, Appell Sequences, Hermite Polynomials, Bernoulli Polynomials, Euler Polynomials, Genocchi Polynomials.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Adviser)
Prof. Dr. Veli KURT
Prof. Dr. Ahmet Sinan Çevik

ÖNSÖZ

Bu tezde Umbral cebir ve Umbral analiz çalışılmıştır. Ayrıca, Umbral cebir üzerindeki bazı özel polinomların üreteç fonksiyonları incelenmiş, bu polinomların rekürans ve Raabe bağıntıları gibi temel özellikleri verilmiştir.

Umbral analiz, modern cebirin basit tekniklerini kullanarak Sheffer diziler ailesini sistematik olarak çalışır. Bir çok kaynakta farklı şekillerde verilen bazı teoremlerin ispatları, Umbral analiz metodlarıyla farklı şekilde yapılır. Bu tezde, uygulamalı matematikte büyük rol oynayan polinom dizilerinden özellikle Sheffer dizileri ele alınmıştır. Sheffer dizilerinin bir alt sınıfı olan Appell dizileri incelenmiştir. Appell dizileriyle ilgili özellikler verilmiştir. Ayrıca Appell dizisi ile ilgili olan polinomlara dair uygulamalar yapılmıştır.

Bu tez, Giriş, Materyal ve Metot, Bulgular ve Sonuç olmak üzere dört ana bölümden oluşur.

Birinci bölümde, Umbral analizin tarihçesi verilmiştir. Bu tezde kullanılan bazı temel kavram ve tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, Umbral cebirin ve formal kuvvet serilerinin tanımı verilmiştir. Ayrıca, formal kuvvet serilerinin fonksiyonel ve operatörler ile ilişkileri ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Sheffer dizileri ve bu dizilerin bir alt sınıfı olan Appell dizileri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde birer Appell polinomu olan Hermite polinomları, Bernoulli polinomları, Euler polinomları ve Genocchi polinomlarının bazı özellikleri araştırılmıştır.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Doç.Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$	
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$	
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\delta_{n,k}$	Kronecker delta fonksiyonu
$\mathfrak{F}$	Formal kuvvet serilerinin kümesi
$der\,(p\,(x))$	$p\,(x)$ polinomunun derecesi
$H_n^{(a)}\,(x)$	Mertebesi a, derecesi n olan Hermite polinomları
$B_n^{(a)}\,(x)$	Mertebesi a, derecesi n olan Bernoulli polinomları
$E_n^{(a)}\,(x)$	Mertebesi a, derecesi n olan Euler polinomları
$G_n^{(a)}\,(x)$	Mertebesi a, derecesi n olan Genocchi polinomları
$s\,(n, m)$	Birinci tür Stirling sayıları
$S\,(n, m)$	İkinci tür Stirling sayıları
$S_n\,(x)$	Derecesi n olan Sheffer dizisi/polinomu
$o\,(f\,(t))$	$f\,(t)$ serisinin mertebesi
$\langle L \mid p\,(x)\rangle$	L fonksiyonelinin $p\,(x)$ polinomuna etkisi
$[.]$	Tam değer fonksiyonu

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Umbral analizin kökleri 17. yüzyıla dayanır. Fakat yükselişi 19. yüzyılda başlamıştır. Bu dönemde Sylvester, Cayley, Blissard gibi bazı matematikçilerin çalışmaları olmuştur.

Geniş kullanımına rağmen, bu dönemde Umbral analiz sadece "sihirli kurallar" olarak bahsedilen ispatsız kurallara sahipti. 1890'lı yıllarda Pincherle'nin lineer operatörlerle ilgili çalışmaları oldu. Ayrıca 1880'li yıllarda Appell de polinomlar üzerinde bazı çalışmalar yaptı. Fakat 1939 yılına kadar Sheffer dizileri ile Umbral analizin bağlantısı kurulamadı.

1940 yılında Eric Temple Bell'in girişimlerine ek olarak, 1970'li yıllarda Gian-Carlo Rota günümüzde kullanılan *Modern Klasik Umbral Analiz*in temel yapısını ortaya koydu.

Umbral analizin fizik, istatistik, olasılık teorisi, kombinatorik, topoloji, graph teorisi gibi bir çok alanda uygulaması vardır. Bu tezde ise Umbral cebir tanımlanacak, Umbral cebirin Sheffer ve Appell dizilerine uygulanışı gösterilecektir. Bu tezde Umbral cebirin Sheffer ve Appell dizilerine uygulama olarak Euler, Bernoulli ve Genocchi polinomları alınmıştır. Bu polinomlar ile ilişkili bir çok teoremler, özdeşlikler ve bağıntılar verilmiştir. Genocchi polinomları bu tezde yoğun bir şekilde ele alınmıştır. Bu polinomlar son yıllarda bir çok matematikçi tarafından farklı alanlarda çalışılmıştır. Örnek olarak Srivastava, Kim, Dattoli, Şimşek, Kurt, Cenkci, Can, Cangül, Ozden ve Choi gibi matematikçiler gösterilebilir.

1.2. Temel Kavram ve Gösterimler

Tanım 1.1 *F cismi üzerinde iki vektör uzayı V ve W olsun. Her r, $s \in F$ ve u, $v \in V$ için*

$$\tau(ru + sv) = r\tau(u) + s\tau(v)$$

özelliğini sağlayan $\tau : V \to W$ fonksiyonuna lineer dönüşüm denir (Roman 1992).

Tanım 1.2 *F cisim ve $\mathfrak{A}$ boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki üç özellik sağlanıyorsa $\mathfrak{A}$'ya toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemlerine göre F cismi üzerinde bir cebirdir denir.*

1) $\mathfrak{A}$, toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında bir vektör uzayıdır.

2) $\mathfrak{A}$, toplama ve çarpma işlemleri altında bir halkadır.

3) $r \in F$ ve $a, b \in \mathfrak{A}$ için

$$r(ab) = (ra)b = a(rb)$$

eşitliği sağlanır (Roman 1992).

Tanım 1.3 *F cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. $f : V \to F$ lineer dönüşümüne V üzerinde bir lineer fonksiyonel denir (Roman 1992).*

Tanım 1.4 *V üzerindeki bütün lineer fonksiyonellerin kümesi V^* ile gösterilir ve buna V'nin cebirsel dual uzayı denir (Roman 1992).*

Tanım 1.5 *$z \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x karmaşık sayısı için $H_n(x)$ Hermite polinomları,*

$$\exp^{\left(2xz-z^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Erdelyi 1953, Roman 2005).

Tanım 1.6 *$z \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x karmaşık sayısı için mertebesi a olan $B_n^{(a)}(x)$ Bernoulli polinomları,*

$$\left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^a e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(a)}(x) \frac{z^n}{n!}, |z| < 2\pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Carlitz 1960, Erdelyi 1953, Roman 2005).

Tanım 1.7 *$z \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x karmaşık sayısı için mertebesi a olan $E_n^{(a)}(x)$ Euler polinomları,*

$$\left(\frac{2}{e^z + 1}\right)^a e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(a)}(x) \frac{z^n}{n!}, |z| < \pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Erdelyi 1953, Roman 2005).

Tanım 1.8 *$z \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x karmaşık sayısı için mertebesi a olan $G_n^{(a)}(x)$ Genocchi polinomları,*

$$\left(\frac{2z}{e^z+1}\right)^a e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(a)}(x) \frac{z^n}{n!}, |z| < \pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Roman 2005, Dere ve Şimşek 2011).

Tanım 1.9 *$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ olmak üzere, birinci tür Stirling sayıları*

$$(x)_n = \sum_{m=0}^{n} s(n,m) x^m \tag{1.1}$$

ve

$$\{\ln(1+x)\}^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} s(n,m) \frac{x^n}{n!}, |x| < 1$$

şeklinde tanımlanır (Abramowitz ve Stegun 1972).

Tanım 1.10 *İkinci tür Stirling sayıları*

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m)(x)^m,$$

$$(e^x-1)^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} S(n,m) \frac{x^n}{n!}$$

ve

$$(1-x)^{-1}(1-2x)^{-1}\cdots(1-mx)^{-1} = \sum_{n=m}^{\infty} S(n,m) x^{n-m}, |x| < m^{-1}$$

olarak tanımlanır (Abramowitz ve Stegun 1972).

Polinom dizileri uygulamalı matematikte büyük rol oynar. Bu polinom dizilerinin en önemlilerinden birisi $S_n(x)$ ile gösterilen Sheffer dizileridir.

Bir $S_n(x)$ dizisinin Sheffer dizisi olması için gerek ve yeter koşul $A(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots, (A_0 \neq 0)$ ve $B(t) = B_1 t + B_2 t^2 + \ldots, (B_1 \neq 0)$ iken

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(x)}{k!} t^k = A(t) e^{xB(t)}$$

olmasıdır (Roman 2005).

Umbral analiz, modern cebirin tekniklerini kullanarak Sheffer diziler ailesini sistematik olarak çalışır.

$\mathcal{P}$ tek değişkenli polinomların bir cebiri olsun. $\mathcal{P}^*$ ise $\mathcal{P}$ üzerinde tanımlı bütün lineer fonksiyonellerden oluşan bir vektör uzayı olsun. $\mathcal{P}$ üzerindeki bir lineer fonksiyonel bir formal kuvvet serisi ile temsil edilebilir. Yani, $\mathcal{P}$ üzerindeki bir lineer fonksiyonel ile bir formal kuvvet serisi arasında bire bir ilişki vardır.

$\mathfrak{F}$, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı formal kuvvet serilerinin kümesi olsun. $\mathfrak{F}$'nin elemanları aşağıdaki şekilde yazılır. $a_k \in \mathbb{C}$ olsun.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \tag{1.2}$$

dir.

İki formal kuvvvet serisinin eşit olabilmesi için gerek ve yeter koşul katsayılarının eşit olmasıdır. Formal kuvvet serilerinin toplamı ve çarpımı işlemleri aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) t^k,$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) t^k$$

Bu iki işlemle birlikte $\mathfrak{F}$, bir cebirdir (Roman 2005).

Tanım 1.11 *Katsayısı sıfır olmayan t^k terimleri içindeki en küçük k tamsayısına $f(t)$'nin mertebesi denir ve $o(f(t))$ ile gösterilir (Roman 2005).*

Not 1 $o(f(t)) = 0$ *ise* $f(t)$ *tersinirdir,* $o(f(t)) = 1$ *ise* $f(t)$ *delta serisidir denir.*

$f(t) = 0$ alınırsa $o(f(t)) = +\infty$ olur. Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$o(f(t)\,g(t)) = o(f(t)) + o(g(t)),$$

$$o(f(t) + g(t)) \geq \min\{o(f(t)), o(g(t))\}.$$

Bir $f(t)$ serisinin çarpmaya göre tersinin olabilmesi için gerek ve yeter koşul $o(f(t)) = 0$ olmasıdır. Bu şekildeki $f(t)$ serisine tersinirdir denir.

Eğer $o(f(t)) = 1$ ise, $f(t)$ serisi $f\left(\overline{f}(t)\right) = \overline{f}(f(t)) = t$ olacak şekilde $\overline{f}(t)$ bileşke tersine sahiptir. Delta serilerinin kuvveti olan $f(t)^k$ terimleri $\mathfrak{F}$ için bir pseudobaz oluştururlar. Yani a_k sabitleri için,

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f(t)^k$$

olacak şekilde $g(t) \in \mathfrak{F}$ vardır.

(1.2) bağıntısında verilen $f(t)$ serisinin türevi aşağıdaki şekilde verilir:

$$f'(t) = \partial_t f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k-1},$$

(Roman 2005).

$\delta_{n,k}$ Kronecker delta fonksiyonudur ve

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, \; n = k \\ 0, \; n \neq k \end{cases}$$

dir.

2. MATERYAL ve METOT

Bu bölümde Umbral cebirin bazı önemli kavramları ve örnekleri verilecektir. Burada verilen kavramların büyük kısmı Roman'ın kitabından (2005) alıntılanmıştır.

2.1. Umbral Cebir

$\mathbb{C}$ cismi üzerindeki tek değişkenli polinomlar cebiri $\mathcal{P}$ olsun. $\mathcal{P}$ üzerindeki bütün lineer fonksiyonellerin vektör uzayı da $\mathcal{P}^*$ olsun. $\langle L \mid p(x) \rangle$, L lineer fonksiyonelinin $p(x)$ polinomu üzerindeki etkisi olarak tanımlanır. Burada

$$\langle L + M \mid p(x) \rangle = \langle L \mid p(x) \rangle + \langle M \mid p(x) \rangle$$

ve $c \in \mathbb{C}$ için

$$\langle cL \mid p(x) \rangle = c \langle L \mid p(x) \rangle$$

olur.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$$

bir formal kuvvet serisi olsun. yani $f(t) \in \mathfrak{F}$ olsun. $n \geq 0$ için

$$\langle f(t) \mid x^n \rangle = a_n \tag{2.3}$$

şeklinde $\mathcal{P}$ üzerinde bir lineer fonksiyonel tanımlar (Roman 2005). Özel olarak, $f(t) = t^k$ alındığında,

$$\left\langle t^k \mid x^n \right\rangle = n! \delta_{n,k}$$

dir.

Formal kuvvet serilerinin toplama ve çarpma işlemleri altında, formal kuvvet serileri kümesi genellikle bir cebir oluştururlar. Bu şekilde elde edilen cebire *Umbral cebir denir.* Bu cebir yöntemleri ile oluşturulan analize de *Umbral analiz* denir.

Örneğin; $y \in \mathbb{C}$ için e^{yt} fonksiyoneli incelenir:

$$\left\langle e^{yt} \mid x^n \right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yt)^k}{k!} \mid x^n \right\rangle = y^n.$$

Buradan; her $p(x) \in \mathcal{P}$ için

$$\left\langle e^{yt} \mid p(x) \right\rangle = p(y)$$

dir (Roman 2005). Ayrıca, her $p(x) \in \mathcal{P}$ ve $f(t) \in \mathfrak{F}$ için aşağıdaki sonuçlar verilir:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\langle f(t) \mid x^k \right\rangle}{k!} t^k, \tag{2.4}$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\langle t^k \mid p(x) \right\rangle}{k!} x^k \tag{2.5}$$

(Roman 2005).

Önerme 2.12 *$f(t)$, $g(t) \in \mathfrak{F}$ olsun. Aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$\langle f(t) g(t) \mid x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\langle f(t) \mid x^k \right\rangle \left\langle g(t) \mid x^{n-k} \right\rangle.$$

İspat. $f(t)$, $g(t) \in \mathfrak{F}$ olsun. (2.4) bağıntısından

$$\begin{aligned} f(t) g(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle f(t) \mid x^m \rangle}{m!} t^m \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle g(t) \mid x^m \rangle}{m!} t^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left\langle f(t) \mid x^k \right\rangle \left\langle g(t) \mid x^{m-k} \right\rangle \frac{t^m}{m!} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte her iki taraf da x^n 'e uygulanıp (2.3) eşitliği kullanıldığında ispat tamamlanmış olur (Roman 2005). ■

Önerme 2.13 *$o(f(t)) > der(p(x))$ ise $\langle f(t) \mid p(x) \rangle = 0$ olur.*

İspat. (2.3)'de $o(f(t)) > n$ iken $\langle f(t) \mid x^n \rangle = 0$ olduğu açıktır (Roman 2005). ■

Önerme 2.14 *Her $k \geq 0$ için $o(f_k(t)) = k$ olsun. Her $p(x) \in \mathcal{P}$ için*

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t) \mid p(x) \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle f_k(t) \mid p(x) \rangle$$

olur.

İspat. Varsayalım ki $der\,(p\,(x)) = d$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k\,(t) \mid p\,(x) \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{d} a_k f_k\,(t) + \sum_{k=d+1}^{\infty} a_k f_k\,(t) \mid p\,(x) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{d} a_k f_k\,(t) \mid p\,(x) \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k \langle f_k\,(t) \mid p\,(x) \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle f_k\,(t) \mid p\,(x) \rangle
\end{aligned}$$

bulunur (Roman 2005). ■

Önerme 2.15 *Her $k \geq 0$ için $o\,(f_k\,(t)) = k$ olsun. Eğer bütün k değerleri için*

$$\langle f_k\,(t) \mid p\,(x) \rangle = \langle f_k\,(t) \mid q\,(x) \rangle$$

oluyorsa, $p\,(x) = q\,(x)$ olur.

İspat. $f_k\,(t)$ formundaki diziler $\mathfrak{F}$ için bir pseudobaz olduğundan, $n \geq 0$ için

$$t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} f_k\,(t)$$

olacak şekilde $a_{n,k}$ değerleri vardır. Buradan;

$$\begin{aligned}
\langle t^n \mid p\,(x) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \langle f_k\,(t) \mid p\,(x) \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \langle f_k\,(t) \mid q\,(x) \rangle \\
&= \langle t^n \mid q\,(x) \rangle
\end{aligned}$$

olur ve (2.5) eşitliği kullanılarak $p\,(x) = q\,(x)$ olduğu görülür (Roman 2005). ■

Önerme 2.16 *Her $k \geq 0$ için $der\,(p_k\,(x)) = k$ olsun. Eğer bütün k değerleri için*

$$\langle f\,(t) \mid p_k\,(x) \rangle = \langle g\,(t) \mid p_k\,(x) \rangle$$

oluyorsa, $f\,(t) = g\,(t)$ olur.

İspat. Her $n \geq 0$ için öyle $a_{n,k}$ değerleri vardır ki, $x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} p_k(x)$ olur. Buradan;

$$\begin{aligned} \langle f(t) \mid x^n \rangle &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \langle f(t) \mid p_k(x) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \langle g(t) \mid p_k(x) \rangle \\ &= \langle g(t) \mid x^n \rangle \end{aligned}$$

elde edilir ve (2.4) kullanılarak $f(t) = g(t)$ olduğu görülür (Roman 2005). ■

Not 2 *Lineer fonksiyonel t^k'nın bir $p(x)$ polinomuna etkisi polinomun k. türevinin sıfırdaki değerine eşittir. Yani;*

$$\left\langle t^k \mid p(x) \right\rangle = p^{(k)}(0)$$

ve

$$\left\langle t^0 \mid p(x) \right\rangle = p(0)$$

olur.

Not 3 *$f(t) \in \mathfrak{F}$ delta serisini lineer fonksiyonel olarak ele aldığımızda, buna delta fonksiyoneli denir. Benzer şekilde, tersinir seri de tersinir fonksiyonel olarak ifade edilir.*

Önerme 2.17 *$f(t)$ serisinin delta fonksiyoneli olması için gerek ve yeter koşul $\langle f(t) \mid 1 \rangle = 0$ ve $\langle f(t) \mid x \rangle \neq 0$ olmasıdır (Roman 2005).*

Önerme 2.18 *$f(t)$ serisinin tersinir fonksiyonel olması için gerek ve yeter koşul $\langle f(t) \mid 1 \rangle \neq 0$ olmasıdır (Roman 2005).*

Teorem 2.19 *$f(t) \in \mathfrak{F}$ olsun. $\forall\, p(x) \in \mathcal{P}$ polinomu için aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$\langle f(t) \mid xp(x) \rangle = \langle \partial_t f(t) \mid p(x) \rangle .$$

İspat. Özel olarak $p(x) = x^n$ alınır.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\left\langle \partial_t f(t) \mid x^n \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1} \mid x^n \right\rangle = a_{n+1} \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \mid x^{n+1} \right\rangle = \left\langle f(t) \mid x x^n \right\rangle\end{aligned}$$

bulunur (Roman 2005). ■

Önerme 2.20 *$p(x) \in \mathcal{P}$ ve $a \in \mathbb{C}$ olsun.Her bir $f(t) \in \mathfrak{F}$ için*

$$\left\langle f(t) \mid p(ax) \right\rangle = \left\langle f(at) \mid p(x) \right\rangle$$

dir (Roman 2005).

Önerme 2.21 *k ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \left\langle \left(e^t - 1\right)^k \mid x^n \right\rangle \tag{2.6}$$

dir. Burada $S(n,k)$ ikinci tür Stirling sayısıdır. (Roman 2005).

Yukarıdaki önermeleri kapsayan bazı özel örnekler aşağıda verilmiştir:

Örnek 2.22 *e^{yt} tersinir fonksiyonelinin $p(x)$ polinomuna etkisi*

$$\left\langle e^{yt} \mid p(x) \right\rangle = p(y)$$

dir.

Örnek 2.23 *$e^{yt} - 1$ delta fonksiyonelinin $p(x)$ polinomuna etkisi*

$$\left\langle e^{yt} - 1 \mid p(x) \right\rangle = p(y) - p(0) \tag{2.7}$$

dir.

Örnek 2.24 *te^{yt} delta fonsiyonelinin $p(x) = x^n$ polinomuna etkisi*

$$\left\langle te^{yt} \mid x^n \right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^{k+1} \mid x^n \right\rangle = ny^{n-1}$$

dir. Lineerlik özelliğinden dolayı,

$$\left\langle te^{yt} \mid p(x) \right\rangle = p'(y)$$

bulunur.

Örnek 2.25 $(1-t)^{-1}$ *tersinir fonksiyonelinin* $p(x)=x^n$ *polinomuna etkisi*

$$\left\langle (1-t)^{-1} \mid x^n \right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mid x^n \right\rangle = n!$$

dir. Ayrıca

$$n! = \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du$$

olduğundan,

$$\left\langle (1-t)^{-1} \mid p(x) \right\rangle = \int_0^{\infty} p(u)\, e^{-u} du.$$

elde edilir.

Örnek 2.26 $\frac{e^{yt}-1}{t}$ *fonksiyonelinin* $p(x)$ *polinomuna etkisi*

$$\left\langle \frac{e^{yt}-1}{t} \mid p(x) \right\rangle = \int_0^{y} p(u)\, du \tag{2.8}$$

dir. Bu fonksiyonele integral fonksiyoneli denir.

2.2. Lineer Operatörler

Bu bölümde, $\mathfrak{F}$' nin elemanları birer lineer operatör olarak ele alınacaktır.

Örneğin; $\mathcal{P}$ üzerinde k. türev operatörü t^k ile gösterilir. Yani

$$t^k x^n = \begin{cases} (n)_k\, x^{n-k}, & k \le n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Burada

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

dir.

Herhangi bir $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$ formal kuvvet serisi verilsin. $f(t)$ operatörünün $p(x)=x^n$ polinomuna etkisi

$$f(t)\, x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \left(t^k x^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}$$

dir. O halde $f(t)$, $\mathcal{P}$ üzerinde bir lineer operatördür.f 'nin lineerliğinden dolayı,

$$f(t)\,p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}\left(t^k p(x)\right)=\sum_{k\geq 0}\frac{a_k}{k!}p^{(k)}(x)$$

elde edilir (Roman 2005).

Not 4 *$f(t)\,p(x)$ çarpımı; $f(t)$ operatörünün $p(x)$ polinomuna etkisi olarak alınmıştır.*

Not 5 *$f(t)$ bir fonksiyonel olsun. $f(t)$ fonksiyonelinin $p(x)$ polinomuna etkisi*

$$\langle f(t) \mid p(x)\rangle$$

notasyonu ile gösterilir.
$f(t)$ bir operatör olsun. $f(t)$ operatörünün $p(x)$ polinomuna etkisi

$$f(t)\,p(x)$$

notasyonu ile gösterilir.

Not 6 *Her $f(t)$, $g(t)\in\mathfrak{F}$ için*

$$(f(t)\,g(t))\,p(x)=f(t)\,(g(t)\,p(x))$$

ve

$$f(t)\,g(t)\,p(x)=g(t)\,f(t)\,p(x)$$

dir.

Not 7 *t^0 operatörüne birim operatör denir. Ayrıca, bir delta serisi operatör olarak düşünüldüğünde buna delta operatörü, bir tersinir seri operatör olarak düşünüldüğünde buna da tersinir operatör denir.*

Önerme 2.27 *$o(f(t))>der\,(p(x))$ ise, $f(t)\,p(x)=0$ olur (Roman 2005).*

Önerme 2.28 *Her $k\geq 0$ için $o(f_k(t))=k$ ve her $p(x)\in\mathcal{P}$ için*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k f_k(t)\right)p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,(f_k(t)\,p(x))$$

olur (Roman 2005).

Önerme 2.29 *Her* $k \geq 0$ *için* $o(f_k(t)) = k$ *ve her* k *için*

$$f_k(t)\,p(x) = f_k(t)\,q(x)$$

ise $p(x) = q(x)$ *olur (Roman 2005).*

Önerme 2.30 *Her* $k \geq 0$ *için* $der(p_k(x)) = k$ *ve her* k *için*

$$f(t)\,p_k(x) = g(t)\,p_k(x)$$

ise $f(t) = g(t)$ *olur (Roman 2005).*

Aşağıdaki teoremde, fonksiyonel olan $f(t)$ ile operatör olan $f(t)$ arasındaki ilişki açık bir şekilde verilmiştir.

Teorem 2.31 $f(t)\,,\, g(t) \in \mathfrak{F}$ *olsun.Her* $p(x) \in \mathcal{P}$ *için,*

$$\langle f(t)\,g(t) \mid p(x)\rangle = \langle g(t) \mid f(t)\,p(x)\rangle \tag{2.9}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $f(t)$ (2.4) formunda yazılsın ve $p(x) = x^n$ alınsın:

$$\begin{aligned}
\langle g(t) \mid f(t)\,x^n\rangle &= \left\langle g(t) \mid \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left\langle f(t) \mid x^k\right\rangle x^{n-k} \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left\langle f(t) \mid x^k\right\rangle \left\langle g(t) \mid x^{n-k}\right\rangle \\
&= \langle f(t)\,g(t) \mid x^n\rangle
\end{aligned}$$

dir. Bu sonuç bütün $p(x) \in \mathcal{P}$ polinomları için doğru olduğundan dolayı ispat tamamlanmış olur (Roman 2005). ■

Not 8

$$\langle f(t) \mid p(x)\rangle = \left\langle t^0 \mid f(t)\,p(x)\right\rangle$$

dir.

Yukarıda verilen önermeler ve teoremler için bazı özel örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.32 e^{yt} *operatörünün* $p(x) = x^n$*'e etkisi aşağıdaki bağıntı ile verilir:*

$$e^{yt}x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^k x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} y^k x^{n-k} = (x+y)^n .$$

Yukarıdaki bağıntının genelleştirilmiş hali her $p(x) \in \mathcal{P}$ *için*

$$e^{yt} p(x) = p(x+y) \tag{2.10}$$

bağıntısı ile verilir.

Örnek 2.33 $e^{yt} - 1$ *operatörünün* $p(x)$ *polinomuna etkisi*

$$\left(e^{yt} - 1\right) p(x) = p(x+y) - p(x)$$

dir.

Örnek 2.34 te^{yt} *operatörünün* $p(x)$ *polinomuna etkisi*

$$te^{yt} p(x) = tp(x+y) = p'(x+y)$$

dir. Burada $p'(x+y) = \frac{d}{dx} p(x+y)$ *dir.*

Örnek 2.35 $(1-t)^{-1}$ *operatörünün* $p(x) = x^n$ *polinomuna etkisi*

$$(1-t)^{-1} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} (n)_k \, x^{n-k}$$

dir.

2.3. Sheffer Dizileri

Bu bölümde matematiğin bir çok alanında kullanılan Sheffer dizileri tanımlanacaktır. Bu dizilerin temel özellikleri verilecektir.

Bazı kaynaklarda Sheffer dizileri yerine Sheffer polinomları da denmektedir.

Teorem 2.36 $f(t)$ *bir delta serisi ve* $g(t)$ *bir tersinir seri olsun.* $n, k \geq 0$ *olmak üzere,*

$$\left\langle g(t) f(t)^k \mid S_n(x) \right\rangle = n! \delta_{n,k}$$

ortogonallik koşulunu sağlayan tek bir $S_n(x)$ *polinomu vardır (Roman 2005).*

Teorem 2.36'dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Bu şekildeki $S_n(x)$ polinomuna $(g(t), f(t))$ ikilisi için Sheffer dizisidir denir. Bazı kaynaklarda kısaca, $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ için Sheffer'dir denmektedir.

Özel olarak $f(t) = t$ alınırsa, $g(t)$ için Appell dizisi elde edilir.

Sheffer polinomlarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 2.37 *$y \in \mathbb{C}$ olsun. $S_n(x)$ polinomunun $(g(t), f(t))$ için Sheffer olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{1}{g\left(\overline{f}(t)\right)} e^{y\overline{f}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{k!} t^k \tag{2.11}$$

olmasıdır. Burada $\overline{f}$, f 'in ters fonksiyonudur (Roman 2005).

Teorem 2.38 *$S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ ikilisi için Sheffer olsun. Bu durumda,*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\langle g\left(\overline{f}(t)\right)^{-1} f(t)^k \mid x^n \right\rangle x^k$$

dır (Roman 2005).

İspat. (2.11) eşitliğinin her iki tarafı da ayrı ayrı x^n 'e uygulansın:

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{k!} t^k \mid x^n \right\rangle = S_n(y) \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \left\langle g\left(\overline{f}(t)\right)^{-1} e^{y\overline{f}(t)} \mid x^n \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k g\left(\overline{f}(t)\right)^{-1} f(t)^k \mid x^n \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\langle g\left(\overline{f}(t)\right)^{-1} f(t)^k \mid x^n \right\rangle y^k \end{aligned} \tag{2.13}$$

Bu sonuç, $\forall\, y \in \mathbb{C}$ için geçerlidir. (2.12) ve (2.13) birleştirilerek ispat tamamlanmış olur (Roman 2005). ■

Teorem 2.39 *$g(t)$ tersinir seri ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ ikilisi için Sheffer olması için gerek ve yeter koşul*

$$f(t) S_n(x) = n S_{n-1}(x)$$

olmasıdır (Roman 2005).

Teorem 2.40 *$S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ ikilisi için Sheffer olsun. O halde,*

$$S_{n+1}(x) = \left(x - \frac{g'(t)}{g(t)}\right) \frac{1}{f'(t)} S_n(x) \tag{2.14}$$

olur (Roman 2005).

2.4. Bazı Özel Sheffer Polinomu Örnekleri

Bu bölümde bazı özel Sheffer polinomlarına örnekler verilecektir. Verilen özel Sheffer polinomlarının temel özellikleri bu tezde ele alınmayacaktır. Bu temel özellikler Erdelyi 1953, Jordan 1965, Bateman 1940 kaynaklarında mevcuttur.

2.4.1. Laguerre polinomları

Mertebesi a olan Laguerre polinomları $L_n^{(a)}(x)$ ile gösterilir. *der* $\left(L_n^{(a)}(x)\right) = n$ 'dir. $L_n^{(a)}(x)$ polinomları $\left((1-t)^{-a-1}, \frac{t}{t-1}\right)$ için bir Sheffer dizisidir. $L_n^{(a)}(x)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_n^{(a)}(x)}{k!} t^k = (1-t)^{-a-1} e^{\frac{xt}{t-1}}$$

dir.

2.4.2. İkinci tür Bernoulli polinomları

İkinci tür Bernoulli polinomları $b_n(x)$ ile gösterilir. $b_n(x)$ polinomları, $\left(\frac{t}{e^t-1}, e^t - 1\right)$ için bir Sheffer dizisidir. $b_n(x)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_n(x)}{k!} t^k = \frac{1}{\log(1+t)} (1+t)^x$$

dir.

2.4.3. Poisson-Charlier polinomları

Poisson-Charlier polinomları $c_n(x;a)$ ile gösterilir. $c_n(x;a)$ polinomları, $\left(e^{a\left(e^t-1\right)}, a\left(e^t-1\right)\right)$ için bir Sheffer dizisidir. $c_n(x;a)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_n(x;a)}{k!} t^k = e^{-1} \left(1 + \frac{t}{a}\right)^x$$

dir.

2.4.4. Actuarial polinomları

Actuarial polinomları $a_n^{(\beta)}(x)$ ile gösterilir. $a_n^{(\beta)}(x)$ polinomları, $\left((1-t)^{-\beta}, \log(1-t)\right)$ için bir Sheffer dizisidir. $a_n^{(\beta)}(x)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n^{(\beta)}(x)}{k!} t^k = \exp\left(\beta t + x\left(1-e^t\right)\right)$$

dir.

2.4.5. Birinci tür Meixner polinomları

$c \neq 0$ olsun. Birinci tür Meixner polinomları $m_k(x;\beta,c)$ ile gösterilir. $m_k(x;\beta,c)$ polinomları, $\left(\left(\frac{1-c}{1-ce^t}\right)^{\beta}, \frac{1-e^t}{c^{-1}-e^t}\right)$ için bir Sheffer dizisidir. $m_k(x;\beta,c)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k(x;\beta,c)}{k!} t^k = \left(\frac{1-t}{c}\right)^x (1-t)^{-x-\beta}$$

dir.

2.4.6. İkinci tür Meixner polinomları

İkinci tür Meixner polinomları $M_k(x;\delta,\eta)$ ile gösterilir.
$M_k(x;\delta,\eta)$, $\left(\left((1+\delta f(t))^2 + f(t)^2\right)^{\frac{\eta}{2}}, \tan\frac{1}{1+\delta t}\right)$ için bir Sheffer dizisidir. $M_k(x;\delta,\eta)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k(x;\delta,\eta)}{k!} t^k = \left((1+\delta t)^2 + t^2\right)^{-\frac{\eta}{2}} \exp\left(x \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+\delta t}\right)\right)$$

dir.

2.4.7. Pidduck polinomları

Pidduck polinomları $P_k(x)$ ile gösterilir. $P_k(x)$, $\left(\frac{2}{e^t-1}, \frac{e^t-1}{e^t+1}\right)$ için Sheffer dizisidir. $P_k(x)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(x)}{k!} t^k = (1-t)^{-1}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^x$$

dir.

2.4.8. Narumi polinomları

Narumi polinomları $N_k(x)$ ile gösterilir. $N_k(x)$, $\left(\left(\frac{e^t-1}{t}\right)^a, e^t-1\right)$ için bir Sheffer dizisidir. $N_k(x)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_k(x)}{k!} t^k = \left(\frac{1}{\log(1+t)}\right)^a (1+t)^x$$

dir.

2.4.9. Boole polinomları

Boole polinomları $\mathfrak{B}_k(x)$ ile gösterilir. $\mathfrak{B}_k(x)$, $\left(1+e^{\lambda t}, e^t-1\right)$ için bir Sheffer dizisidir. $\mathfrak{B}_k(x)$ polinomunun üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{B}_k(x)}{k!} t^k = \left(1+(1+t)^{\lambda}\right)^{-1} (1+t)^x$$

dir.

2.4.10. Peters polinomları

Peters polinomları $\mathfrak{P}_k(x)$ ile gösterilir. $\mathfrak{P}_k(x)$, $\left(\left(1-e^{\lambda t}\right)^{\mu}, e^t-1\right)$ için bir Sheffer dizisidir. $\mathfrak{P}_k(x)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}_k(x)}{k!} t^k = \left(1+(1+t)^{\lambda}\right)^{-\mu} (1+t)^x$$

tir.

2.5. Appell Polinomları

Bu bölümde, özellikle uygulamada Sheffer polinomları kadar önemli olan Appell polinomları verilecektir. Bilindiği gibi, Sheffer polinomlarında $f(t) = t$ alınırsa, $(g(t), t)$ ikilisi için Appell polinomu elde edilir. Buna kısaca $g(t)$ için Appell'dir denir.

Teorem 2.41 *$S_n(x)$, $g(t)$ için Appell dizisi olsun. O halde her $h(t) \in \mathfrak{F}$ için*

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) \mid S_k(x)\rangle}{k!} g(t) t^k$$

olur (Roman 2005).

Teorem 2.42 *$S_n(x)$, $g(t)$ için Appell dizisi olsun.*

$$p^{(k)}(x) = t^k p(x)$$

olmak üzere her $p(x)$ polinomu için

$$p(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\left\langle g(t) \mid p^{(k)}(x) \right\rangle}{k!} S_k(x)$$

dir. Burada $p^{(k)}(x)$, $p(x)$ polinomunun k. türevidir (Roman 2005).

Teorem 2.43 *$S_n(x)$'in $g(t)$ için Appell dizisi olması için gerek ve yeter koşul her $y \in \mathbb{C}$ için*

$$\frac{1}{g(t)} e^{yt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{k!} t^k$$

olmasıdır (Roman 2005).

Teorem 2.44 *$S_n(x)$'in $g(t)$ için Appell dizisi olması için gerek ve yeter koşul*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\langle g(t)^{-1} \mid x^{n-k} \right\rangle x^k$$

olmasıdır (Roman 2005).

Teorem 2.45 *$S_n(x)$'in $g(t)$ için Appell dizisi olması için gerek ve yeter koşul*

$$S_n(x) = g(t)^{-1} x^n$$

olmasıdır (Roman 2005).

Teorem 2.46 *$S_n(x)$'in $g(t)$ için Appell dizisi olması için gerek ve yeter koşul*

$$tS_n(x) = nS_{n-1}(x)$$

olmasıdır. Bu da,

$$S_n'(x) = nS_{n-1}(x)$$

dir (Roman 2005).

Not 9

$$\frac{1}{t} S_n(x) = \frac{1}{n+1} S_{n+1}(x) \tag{2.15}$$

dir.

Teorem 2.47 (Rekürans Formülü) *$S_n(x)$, $g(t)$ için Appell olsun. O halde,*

$$S_{n+1}(x) = \left(x - \frac{g'(t)}{g(t)}\right) S_n(x) \tag{2.16}$$

dir (Roman 2005).

Teorem 2.48 *$S_n(x)$, $g(t)$ için Appell olsun. Her $h(t) \in \mathfrak{F}$ için*

$$h(t)\, S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle h(t) \mid S_k(x) \rangle\, x^{n-k}$$

dir (Roman 2005).

Teorem 2.49 *$S_n(x)$ dizisinin Appell dizisi olması için gerek ve yeter koşul,*

$$S_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k(y)\, x^{n-k}$$

dir (Roman 2005).

Teorem 2.50 *$S_n(x)$, $g(t)$ için Appell ise*

$$xS_n(x) = S_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle g'(t) \mid S_{n-k}(x) \rangle\, S_k(x)$$

dir (Roman 2005).

Teorem 2.51 (Raabe Bağıntısı) *$n \in \mathbb{N}$ olsun. $S_n(x)$, $g(t)$ için Appell dizisi ise, o zaman*

$$S_n(\alpha x) = \alpha^n \frac{g(t)}{g\left(\frac{t}{\alpha}\right)} S_n(x)$$

dir. Burada $\alpha \neq 0$ dır.

İspat. Önerme 2.20'den dolayı, her $f(t)$ ve $p(x)$ için

$$\langle f(t) \mid p(x) \rangle = \left\langle f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \mid p(\alpha x) \right\rangle$$

yazılabilir. Daha sonra,

$$\begin{aligned} \left\langle t^k \mid g\left(\frac{t}{\alpha}\right) S_n(\alpha x) \right\rangle &= \left\langle \alpha^k t^k g(t) \mid S_n(x) \right\rangle \\ &= \alpha^k n! \delta_{n,k} \\ &= \left\langle t^k \mid \alpha^n g(t)\, S_n(x) \right\rangle \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$g\left(\frac{t}{\alpha}\right) S_n(\alpha x) = \alpha^n g(t)\, S_n(x)$$

elde edilir (Roman 2005). ■

3. BULGULAR

Bu bölümde, 1. ve 2. Bölümde verilen Appell polinomlarının özellikleri kullanılarak, bazı özel polinomlar için yeni bağıntılar verilecektir. Özellikle Genocchi polinomlarının başta Raabe bağıntısı olmak üzere rekürans bağıntısı da operatörler ve fonksiyoneller yardımıyla yapılacaktır. Bu polinolar ile Stirling sayıları arasındaki ilişkiler verilecektir. Buradaki teoremler farklı ispat metodlarıyla başka kaynaklarda bulunabilir.

3.1. Hermite Polinomları

Mertebesi v olan Hermite polinomları $H_n^{(v)}(x)$ ile gösterilir. $H_n^{(v)}(x)$,

$$g(t) = e^{\frac{vt^2}{2}} \tag{3.17}$$

için bir Appell polinomudur. $v = 1$ olduğu durumda $H_n^{(1)}(x) = H_n(x)$ dir.

Teorem 2.45'ten,

$$\begin{aligned} H_n^{(v)}(x) &= e^{-\frac{vt^2}{2}} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-v}{2} \right)^k \frac{1}{k!} t^{2k} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(\frac{-v}{2} \right)^k \frac{(n)_{2k}}{k!} x^{n-2k} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.43 ve (3.17) bağıntısı birlikte kullanılırsa, Hermite polinomu için üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k^{(v)}(x)}{k!} t^k = e^{xt - \frac{vt^2}{2}},$$

(Roman 2005).

Teorem 2.45'ten,

$$H_n^{(v)}(x) = e^{-\frac{vt^2}{2}} x^n \tag{3.18}$$

elde edilir (Roman 2005).

Teorem 2.46'dan,

$$tH_n^{(v)}(x) = nH_{n-1}^{(v)}(x)$$

dir (Roman 2005). (2.15) bağıntısından

$$\frac{1}{t}H_n^{(v)}(x) = \frac{1}{n+1}H_{n+1}^{(v)}(x)$$

elde edilir (Roman 2005).

Teorem 3.52 (Raabe Bağıntısı) *Hermite polinomları için Raabe bağıntısı* $v \geq 1$ *için*

$$H_n^{(v)}(\alpha x) = \alpha^n H_n^{\left(\frac{v}{\alpha^2}\right)}(x)$$

dir.

İspat. Teorem 2.51'den,

$$H_n^{(v)}(\alpha x) = \alpha^n \frac{e^{\frac{vt^2}{2}}}{e^{\frac{vt^2}{2\alpha^2}}} H_n^{(v)}(x)$$

olur. Eşitliğin sağ tarafında (3.18) eşitliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned} H_n^{(v)}(\alpha x) &= \alpha^n \frac{e^{\frac{vt^2}{2}}}{e^{\frac{vt^2}{2\alpha^2}}} e^{-\frac{vt^2}{2}} x^n \\ &= \alpha^n H_n^{\left(\frac{v}{\alpha^2}\right)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir (Roman 2005). ■

Teorem 3.53 *Hermite polinomları için rekürans bağıntısı aşağıdaki gibidir:*

$$H_{n+1}^{(v)}(x) = xH_n^{(v)}(x) - vnH_{n-1}^{(v)}(x)$$

(Roman 2005).

İspat. (2.16) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} H_{n+1}^{(v)}(x) &= \left(x - \frac{vte^{\frac{vt^2}{2}}}{e^{\frac{vt^2}{2}}}\right) H_n^{(v)}(x) \\ &= xH_n^{(v)}(x) - vtH_n^{(v)}(x) \\ &= xH_n^{(v)}(x) - vnH_{n-1}^{(v)}(x) \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır (Roman 2005). ■

3.2. Bernoulli Polinomları

$a \neq 0$ olsun. Mertebesi a olan Bernoulli polinomları $B_n^{(a)}(x)$ ile gösterilir. $B_n^{(a)}(x)$,

$$g(t) = \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^a \tag{3.19}$$

için bir Appell polinomudur.

Teorem 2.45 ve (3.19) bağıntısından

$$B_n^{(a)}(x) = \left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^a x^n. \tag{3.20}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^b B_n^{(a)}(x) &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^b \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^a x^n \\
&= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{a+b} x^n \\
&= B_n^{(a+b)}(x)
\end{aligned}$$

olduğu görülür (Roman 2005).

Teorem 2.43'ten yararlanarak Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k^{(a)}(x)}{k!} t^k = \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^a e^{xt},$$

Ayrıca Teorem 2.46 kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$tB_n^{(a)}(x) = nB_{n-1}^{(a)}(x),$$

(Roman 2005).

(2.15) bağıntısı $B_n^{(a)}(x)$ polinomuna uygulanırsa

$$\frac{1}{t} B_n^{(a)}(x) = \frac{1}{n+1} B_{n+1}^{(a)}(x)$$

bulunur.

Teorem 3.54 *$(e^t - 1)$ operatörünün $B_n^{(a)}(x)$ polinomuna etkisi*

$$\left(e^t - 1\right) B_n^{(a)}(x) = nB_{n-1}^{(a-1)}(x)$$

dir.

İspat. (3.20) 'den,

$$\left(e^t-1\right)B_n^{(a)}(x)=\left(e^t-1\right)\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^a x^n$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}\left(e^t-1\right)B_n^{(a)}(x) &= \left(e^t-1\right)\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^a x^n\\ &= t\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{a-1}x^n\\ &= tB_n^{(a-1)}(x)\\ &= nB_{n-1}^{(a-1)}(x)\end{aligned}$$

elde edilir (Roman 2005). ■

Teorem 3.54'den aşağıdaki sonuç bulunur:

Sonuç 3.55

$$e^tB_n^{(a)}(x)=nB_{n-1}^{(a-1)}(x)+B_n^{(a)}(x)\,. \tag{3.21}$$

Teorem 3.56 $B_n^{(a)}(x)$ *polinomları için aşağıdaki eşitlik gerçeklenir:*

$$B_n^{(a)}(x+1)=nB_{n-1}^{(a-1)}(x)+B_n^{(a)}(x) \tag{3.22}$$

İspat. (2.10) bağıntısından

$$e^tB_n^{(a)}(x)=B_n^{(a)}(x+1)\,. \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.21) ve (3.23) bağıntılarından istenen sonuç bulunur (Roman 2005). ■

Sonuç 3.57 *(3.22) eşitliğinde özel olarak $a=1$ alınırsa,*

$$B_n(x+1)=B_n(x)+nx^{n-1}$$

elde edilir (Roman 2005).

$f(t)=\frac{1}{e^t-1}$ operatörü a. mertebeden Bernoulli polinomlarına uygulanırsa aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.58 $\frac{1}{e^t-1}$ *operatörünün* $B_n^{(a)}(x)$ *polinomuna etkisi*

$$\frac{1}{e^t-1}B_n^{(a)}(x)=\frac{1}{n+1}B_{n+1}^{(a+1)}(x)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^t-1}B_n^{(a)}(x) &= \frac{1}{e^t-1}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^a x^n \\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{a+1} x^n \\ &= \frac{1}{t}B_n^{(a+1)}(x) \\ &= \frac{1}{n+1}B_{n+1}^{(a+1)}(x).\end{aligned}$$

■

Teorem 3.59 $B_n^{(a)}(x)$ *polinomu aşağıdaki gibi integral gösterimine sahiptir:*

$$\left\langle \frac{e^{yt}-1}{t} \mid B_n^{(a)}(x)\right\rangle = \int_0^y B_n^{(a)}(u)du.$$

İspat. (2.15) ve (2.9) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{e^{yt}-1}{t} \mid B_n^{(a)}(x)\right\rangle &= \left\langle \frac{e^{yt}-1}{t} \mid \frac{1}{n+1}tB_{n+1}^{(a)}(x)\right\rangle \\ &= \frac{1}{n+1}\left\langle e^{yt}-1 \mid B_{n+1}^{(a)}(x)\right\rangle\end{aligned}$$

olur. Burada (2.7)'yi kullanırsak,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n+1}\left\langle e^{yt}-1 \mid B_{n+1}^{(a)}(x)\right\rangle \\ &= \frac{1}{n+1}\left[B_{n+1}^{(a)}(y)-B_{n+1}^{(a)}(0)\right] \\ &= \int_0^y B_n^{(a)}(u)du\end{aligned}$$

elde edilir (Roman 2005). ■

$B_n^{(a)}(x)$ polinomunun önemli bağıntılarından bir tanesi de rekürans bağıntısıdır. Bu bağıntı, aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.60 *$B_n^{(a)}(x)$ için rekürans bağıntısı,*

$$B_{n+1}^{(a)}(x) = \frac{(x-a)(n+1)}{n-a+1} B_n^{(a)}(x) - \frac{a}{n-a+1} B_{n+1}^{(a+1)}(x)$$

şeklindedir.

İspat. (2.16)'dan,

$$\begin{aligned} B_{n+1}^{(a)}(x) &= \left(x - a\left(\frac{e^t t - (e^t-1)}{t(e^t-1)}\right)\right) B_n^{(a)}(x) \\ &= xB_n^{(a)}(x) - a\left(\frac{e^t}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) B_n^{(a)}(x) \\ &= xB_n^{(a)}(x) - a\frac{e^t}{e^t-1} B_n^{(a)}(x) + \frac{1}{t} B_n^{(a)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $B_n^{(a)}(x)$ polinomuna e^t, $\frac{1}{e^t-1}$ ve $\frac{1}{t}$ operatörleri uygulanırsa,

$$B_{n+1}^{(a)}(x) = xB_n^{(a)}(x) - aB_n^{(a)}(x) - \frac{a}{n+1} B_{n+1}^{(a+1)}(x) + \frac{a}{n+1} B_{n+1}^{(a)}(x)$$

bulunur. Bazı düzenlemeler yapılarak ispat tamamlanır. ■

Not 10 *Teorem 3.60 kullanılarak, yüksek mertebeden Bernoulli polinomları kolayca bulunabilir. Örneğin; $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ olmak üzere, Teorem 3.60'ta $a = 1$ ve $n = 1$ alınırsa;*

$$B_2^{(1)}(x) = 2(x-1) B_1^{(1)}(x) - B_2^{(2)}(x).$$

Buradan,

$$B_2^{(2)}(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{6}$$

elde edilir. Bu şekilde a'ya ve n'ye farklı değerler verilerek diğer yüksek mertebeden Bernoulli polinomları da hesaplanabilir.

Teorem 3.61 (Raabe bağıntısı) *$m \in \mathbb{N}$ olsun.*

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{k}{m}\right)$$

dir.

İspat. Teorem 2.51'a göre,

$$B_n(mx) = m^{n-1} \frac{e^t - 1}{e^{\frac{t}{m}} - 1} B_n(x)$$

yazılabilir. Yukarıdaki bağıntıdan

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{kt}{m}} B_n(x)$$

elde edilir. Şimdi, (2.10) bağıntısındaki $e^{\frac{kt}{m}}$ operatörü $B_n(x)$ polinomuna uygulanırsa teorem ispatlanmış olur. (Roman 2005). ■

$B_n^{(a)}(x)$ ve $S(n,k)$ arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 3.62 *$S(n,k)$ ikinci tür Stirling sayısı ve $k > a$ olmak üzere;*

$$\left\langle \left(e^t - 1\right)^k \mid B_n^{(a)}(x) \right\rangle = (n)_a (k-a)! S(n-a, k-a) \tag{3.24}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. Eşitliğin sol tarafında (3.20) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \left\langle \left(e^t - 1\right)^k \mid B_n^{(a)}(x) \right\rangle &= \left\langle \left(e^t - 1\right)^k \mid \left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^a x^n \right\rangle \\ &= \left\langle \left(e^t - 1\right)^{k-a} \mid t^a x^n \right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. t operatörü x^n 'e a kere uygulandığında,

$$\begin{aligned} \left\langle \left(e^t - 1\right)^k \mid B_n^{(a)}(x) \right\rangle &= \left\langle \left(e^t - 1\right)^{k-a} \mid n(n-1)\cdots(n-a+1)\, x^{n-a} \right\rangle \\ &= (n)_a \left\langle \left(e^t - 1\right)^{k-a} \mid x^{n-a} \right\rangle \end{aligned}$$

olur. Son olarak, (2.6) eşitliği kullanılarak ispat tamamlanır. ■

Özel olarak, Teorem 3.62'de $a = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.63

$$\left\langle \left(e^t - 1\right)^k \mid B_n(x) \right\rangle = n(k-1)! S(n-1, k-1)$$

(Roman 2005).

3.3. Euler Polinomları

$a \neq 0$ olmak üzere, mertebesi a olan $E_n^{(a)}(x)$ Euler polinomları

$$g(t) = \left(\frac{e^t+1}{2}\right)^a \tag{3.25}$$

için bir Appell polinomudur.

Teorem 2.45'te (3.25) bağıntısı kullanılırsa,

$$E_n^{(a)}(x) = \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^a x^n \tag{3.26}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^b E_n^{(a)}(x) &= \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^b \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^a x^n \\ &= \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{a+b} x^n \\ &= E_n^{(a+b)}(x)\end{aligned}$$

olur (Roman 2005).

Teorem 2.43'ten yararlanarak Euler polinomunun üreteç fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k^{(a)}(x)}{k!} t^k = \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^a e^{xt}.$$

Ayrıca Teorem 2.46 kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$tE_n^{(a)}(x) = nE_{n-1}^{(a)}(x)$$

(Roman 2005).

(2.15) bağıntısından,

$$\frac{1}{n} E_n^{(a)}(x) = \frac{1}{n+1} E_{n+1}^{(a)}(x)$$

dir.

Teorem 3.64 (e^t+1) *operatörünün* $E_n^{(a)}(x)$ *polinomuna etkisi*

$$\left(e^t+1\right) E_n^{(a)}(x) = 2E_n^{(a-1)}(x)$$

şeklindedir.

İspat. (3.26)'dan,

$$\begin{aligned}\left(e^{t}+1\right)E_{n}^{(a)}(x) &= \left(e^{t}+1\right)\left(\frac{2}{e^{t}+1}\right)^{a}x^{n}\\ &= 2\left(\frac{2}{e^{t}+1}\right)^{a-1}x^{n}\\ &= 2E_{n}^{(a-1)}(x)\end{aligned}$$

olduğu görülür (Roman 2005). ∎

Operatörün linerliğini kullanarak Teorem 3.54'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.65

$$e^{t}E_{n}^{(a)}(x)=2E_{n}^{(a-1)}(x)-E_{n}^{(a)}(x) \tag{3.27}$$

(Roman 2005).

Teorem 3.66 $E_{n}^{(a)}(x)$ *polinomu için,*

$$E_{n}^{(a)}(x+1)=2E_{n}^{(a-1)}(x)-E_{n}^{(a)}(x)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. (2.10) bağıntısından,

$$e^{t}E_{n}^{(a)}(x)=E_{n}^{(a)}(x+1) \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.27) ve (3.28) bağıntıları kullanılarak ispat tamamlanır (Roman 2005).

∎

Teorem 3.67 $\frac{1}{e^{t}+1}$ *operatörünün* $E_{n}^{(a)}(x)$ *polinomuna etkisi aşağıdaki gibidir:*

$$\frac{1}{e^{t}+1}E_{n}^{(a)}(x)=\frac{1}{2}E_{n}^{(a+1)}(x)$$

İspat. (3.26)'dan,

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{t}+1}E_{n}^{(a)}(x) &= \frac{1}{e^{t}+1}\left(\frac{2}{e^{t}+1}\right)^{a}x^{n}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{e^{t}+1}\right)^{a+1}x^{n}\\ &= \frac{1}{2}E_{n}^{(a+1)}(x)\end{aligned}$$

olduğu görülür. ∎

Teorem 3.68 *$E_n^{(a)}(x)$ polinomu aşağıdaki gibi integral gösterimine sahiptir:*

$$\left\langle \frac{e^{yt}-1}{t} \mid E_n^{(a)}(x) \right\rangle = \int_0^y E_n^{(a)}(u)du$$

İspat. (2.15) ve (2.9) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e^{yt}-1}{t} \mid E_n^{(a)}(x) \right\rangle &= \left\langle \frac{e^{yt}-1}{t} \mid \frac{1}{n+1} t E_{n+1}^{(a)}(x) \right\rangle \\ &= \frac{1}{n+1} \left\langle e^{yt}-1 \mid E_{n+1}^{(a)}(x) \right\rangle \end{aligned}$$

olur. Burada (2.7)'yi kullanırsak,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n+1} \left\langle e^{yt}-1 \mid E_{n+1}^{(a)}(x) \right\rangle \\ &= \frac{1}{n+1} \left[E_{n+1}^{(a)}(y) - E_{n+1}^{(a)}(0) \right] \\ &= \int_0^y E_n^{(a)}(u)du \end{aligned}$$

elde edilir (Roman 2005). ■

Teorem 3.69 *$E_n^{(a)}(x)$ için rekürans bağıntısı,*

$$E_{n+1}^{(a)}(x) = (x-a) E_n^{(a)}(x) + \frac{a}{2} E_n^{(a+1)}(x)$$

şeklindedir.

İspat. (2.16) bağıntısından,

$$\begin{aligned} E_{n+1}^{(a)}(x) &= \left(x - a \left(\frac{e^t}{(e^t+1)} \right) \right) E_n^{(a)}(x) \\ &= x E_n^{(a)}(x) - a \frac{e^t}{e^t+1} E_n^{(a)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $E_n^{(a)}(x)$ polinomuna e^t ve $\frac{1}{e^t-1}$ operatörleri uygulanırsa,

$$E_{n+1}^{(a)}(x) = (x-a) E_n^{(a)}(x) + \frac{a}{2} E_n^{(a+1)}(x)$$

olduğu görülür. ■

Not 11 *Teorem 3.69 kullanılarak, yüksek mertebeden Euler polinomları kolayca bulunabilir. Örneğin;* $E_0(x) = 1$, $E_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $E_2(x) = x^2 - x$ *olmak üzere, Teorem 3.69'da* $a = 1$ *ve* $n = 1$ *alınırsa;*

$$E_2^{(1)}(x) = (x-1) E_1^{(1)}(x) + \frac{1}{2} E_1^{(2)}(x).$$

Buradan,

$$E_1^{(2)}(x) = x - 1$$

elde edilir. Bu şekilde a'ya ve n'ye farklı değerler verilerek diğer yüksek mertebeden Euler polinomları da hesaplanabilir.

Teorem 3.70 $\alpha, m \in \mathbb{N}$ *olsun.* $E_n(x)$ *polinomu için Raabe bağıntısı,*
$\alpha = 2m+1$ *ise,*

$$E_n(\alpha x) = \alpha^n \sum_{k=0}^{\alpha-1} (-1)^k E_n^{(a)}\left(x + \frac{k}{\alpha}\right),$$

ve $\alpha = 2m$ *ise,*

$$E_n(\alpha x) = \frac{2\alpha^n}{n+1} \sum_{k=0}^{\alpha-1} (-1)^k B_{n+1}^{(a)}\left(x + \frac{k}{\alpha}\right)$$

şeklindedir.

İspat. $\alpha = 2m+1$ olsun. Teorem 2.51'e göre,

$$\begin{aligned} E_n((2m+1)x) &= (2m+1)^n \frac{e^t+1}{e^{\frac{t}{2m+1}}+1} E_n(x) \\ &= (2m+1)^n \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k e^{\frac{kt}{2m+1}} E_n(x) \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra $E_n(x)$ 'e $e^{\frac{kt}{2m+1}}$ uygulanarak ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur.

$\alpha = 2m$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} E_n((2m)x) &= (2m)^n \frac{e^t+1}{e^{\frac{t}{2m}}+1} E_n(x) \\ &= 2(2m)^n \frac{1}{e^{\frac{t}{2m}}+1} x^n \\ &= -\frac{2(2m)^n}{n+1} \sum_{k=0}^{2m-1} \left(-e^{\frac{t}{2m}}\right)^k B_{n+1}(x) \\ &= -\frac{2(2m)^n}{n+1} \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k B_{n+1}\left(x + \frac{k}{2m}\right) \end{aligned}$$

elde edilir (Roman 2005). ■

Teorem 3.70'de, $\alpha = 2$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.71

$$E_n(2x) = -\frac{2^{n+1}}{n+1}\left[B_{n+1}(x) - B_{n+1}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$$

(Roman 2005).

$E_n^{(a)}(x)$ ile ikinci tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 3.72 *$S(n,j)$ ikinci tür Stirling sayısı ve $k > a$ olmak üzere,*

$$\left\langle \left(e^t+1\right)^k \mid E_n^{(a)}(x) \right\rangle = 2^a (k-a)! \sum_{j=0}^{k-a} \frac{2^{k-j-a} S(n,j)}{(k-j-a)!}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. (3.26)'dan,

$$\left\langle \left(e^t+1\right)^k \mid E_n^{(a)}(x) \right\rangle = \left\langle \left(e^t+1\right)^k \mid \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^a x^n \right\rangle$$

yazılabilir. (2.9) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(e^t+1\right)^k \mid E_n^{(a)}(x) \right\rangle &= \left\langle \left(e^t+1\right)^{k-a} \mid 2^a x^n \right\rangle \\
&= 2^a \left\langle \left(e^t-1+2\right)^{k-a} \mid x^n \right\rangle \\
&= 2^a \left\langle \sum_{j=0}^{k-a} \binom{k-a}{j} \left(e^t-1\right)^j 2^{k-j-a} \mid x^n \right\rangle \\
&= 2^a \left\langle \sum_{j=0}^{k-a} \frac{(k-a)!}{(k-j-a)!j!} \left(e^t-1\right)^j 2^{k-j-a} \mid x^n \right\rangle \\
&= 2^a (k-a)! \sum_{j=0}^{k-a} \frac{2^{k-j-a}}{(k-j-a)!} \left\langle \frac{\left(e^t-1\right)^j}{j!} \mid x^n \right\rangle
\end{aligned}$$

bulunur. (2.6)'den ispat tamamlanır. ■

3.4. Genocchi Polinomları

$a \in \mathbb{N}$ olsun. $G_n^{(a)}(x)$ ile mertebesi a olan Genocchi polinomları gösterilir. $G_n^{(a)}(x)$ polinomu

$$g(t) = \left(\frac{e^t+1}{2t}\right)^a \tag{3.29}$$

için bir Appell polinomudur.

Teorem 2.45'te (3.29)'i kullanarak,

$$G_n^{(a)}(x) = \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^a x^n \tag{3.30}$$

elde edilir (Dere ve Şimşek 2011).

Buradan,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^b G_n^{(a)}(x) &= \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^b \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^a x^n \\ &= \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{a+b} x^n \\ &= G_n^{(a+b)}(x)\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki bağıntıdan, aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.73 $a, b \in \mathbb{N}$ *olsun.*

$$\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^b G_n^{(a)}(x) = G_n^{(a+b)}(x)$$

dir.

Teorem 2.43'ten yararlanarak Genocchi polinomunun üreteç fonksiyonu aşağıda verilir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k^{(a)}(x)}{k!} t^k = \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^a e^{xt}.$$

Ayrıca Teorem 2.46 ve (2.15) bağıntısı kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$tG_n^{(a)}(x) = nG_{n-1}^{(a)}(x) \tag{3.31}$$

ve

$$\frac{1}{t} G_n^{(a)}(x) = \frac{1}{n+1} G_{n+1}^{(a)}(x)$$

(Dere ve Şimşek 2011).

Teorem 3.74 (e^t+1) *operatörünün* $G_n^{(a)}(x)$ *polinomuna etkisi,*

$$\left(e^t+1\right) G_n^{(a)}(x) = 2nG_{n-1}^{(a-1)}(x)$$

şeklindedir.

İspat. (3.30)'den,

$$\begin{aligned}\left(e^t+1\right)G_n^{(a)}(x) &= \left(e^t+1\right)\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^a x^n \\ &= 2t\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{a-1} x^n \\ &= 2tG_n^{(a-1)}(x)\end{aligned}$$

olur. Burada, $G_n^{(a-1)}(x)$ polinomuna (3.31) eşitliğinde verilen t operatörü uygulanırsa,

$$\left(e^t+1\right)G_n^{(a)}(x) = 2nG_{n-1}^{(a-1)}(x)$$

bulunur (Dere ve Şimşek 2011). ∎

Operatörlerin lineer olmasından dolayı aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.75

$$e^tG_n^{(a)}(x) = 2nG_{n-1}^{(a-1)}(x) - G_n^{(a)}(x). \tag{3.32}$$

Teorem 3.76

$$G_n^{(a)}(x+1) = 2nG_{n-1}^{(a-1)}(x) - G_n^{(a)}(x).$$

İspat. (2.10)'den,

$$e^tG_n^{(a)}(x) = G_n^{(a)}(x+1) \tag{3.33}$$

olur. (3.32) ve (3.33) bağıntıları kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ∎

Teorem 3.77 $\frac{1}{(e^t+1)}$ *operatörünün* $G_n^{(a)}(x)$ *polinomuna etkisi aşağıdaki bağıntı ile verilir:*

$$\frac{1}{(e^t+1)}G_n^{(a)}(x) = \frac{1}{2(n+1)}G_{n+1}^{(a+1)}(x).$$

İspat. (3.30) bağıntısından,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(e^t+1)}G_n^{(a)}(x) &= \frac{1}{(e^t+1)}\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^a x^n \\ &= \frac{1}{2t}\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{a+1} x^n \\ &= \frac{1}{2t}G_n^{(a+1)}(x) \\ &= \frac{1}{2(n+1)}G_{n+1}^{(a+1)}(x)\end{aligned}$$

olduğu görülür (Dere ve Şimşek 2011). ■

$G_n^{(b)}(x)$ polinomunun integral gösterimi aşağıdaki teorem ile verilmiştir:

Teorem 3.78

$$\left\langle \frac{e^{ta}-1}{2t} \mid G_n^{(b)}(x) \right\rangle = \frac{1}{2}\int_0^a G_n^{(b)}(x)dx.$$

İspat. (2.15) ve (2.9) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e^{ta}-1}{2t} \mid G_n^{(b)}(x) \right\rangle &= \left\langle \frac{e^{ta}-1}{2t} \mid \frac{1}{n+1} t G_{n+1}^{(b)}(x) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \left\langle e^{at}-1 \mid G_{n+1}^{(b)}(x) \right\rangle \end{aligned}$$

olur. Burada (2.7)'yi kullanırsak,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(n+1)} \left\langle e^{at}-1 \mid G_{n+1}^{(b)}(x) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \left[G_{n+1}^{(b)}(a) - G_{n+1}^{(b)}(0) \right] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a G_n^{(b)}(x)dx \end{aligned}$$

elde edilir (Dere ve Şimşek 2011). ■

Teorem 3.79 (Rekürans Bağıntısı) *$a \in \mathbb{N}$ olsun.*

$$G_{n+1}^{(a+1)}(x) = \frac{2}{a}\Big((n-a+1)\, G_{n+1}^{(a)}(x) + (a-x)(n+1)\, G_n^{(a)}(x) \Big)$$

şeklindedir.

İspat. (2.16)'den,

$$\begin{aligned} G_{n+1}^{(a)}(x) &= \left(x - a\frac{e^t t - (e^t+1)}{t(e^t+1)} \right) G_n^{(a)}(x) \\ &= xG_n^{(a)}(x) - a\frac{e^t}{(e^t+1)} G_n^{(a)}(x) + \frac{a}{t} G_n^{(a)}(x) \end{aligned}$$

olduğu görülür. $G_n^{(a)}(x)$ polinomuna e^t, $\frac{1}{(e^t+1)}$ ve $\frac{1}{t}$ operatörleri uygulanırsa,

$$G_{n+1}^{(a)}(x) = (x-a)\, G_n^{(a)}(x) + \frac{a}{2(n+1)} G_{n+1}^{(a+1)}(x) + \frac{a}{n+1} G_{n+1}^{(a)}(x)$$

elde edilir. Bazı düzenlemelerden sonra ispat tamamlanır (Dere ve Şimşek 2011). ■

Teorem 3.80 (Raabe Bağıntısı) *m pozitif tek tamsayı olsun.*

$$G_n(mx) = m^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^n G_n\left(x+\frac{j}{m}\right)$$

dir.

İspat. Teorem 2.51'dan,

$$G_n(\alpha x) = \alpha^n\left(\frac{e^t+1}{2t}\right)\frac{\left(\frac{2t}{\alpha}\right)}{e^{\frac{t}{\alpha}}+1}G_n(x) = \alpha^{n-1}\frac{e^t+1}{e^{\frac{t}{\alpha}}+1}G_n(x)$$

bulunur. Geometrik seriden yararlanılarak

$$G_n(\alpha x) = \alpha^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^n e^{\frac{tj}{\alpha}}G_n(x)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafında (2.10) kullanılırsa ispat tamamlanır (Dere ve Şimşek 2011). ■

$G_n^{(a)}(x)$ polinomu ile ikinci tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 3.81 *$S(n,j)$ ikinci tür Stirling sayısı ve $k>a$ olmak üzere,*

$$\left\langle (e^t+1)^k \mid G_n^{(a)}(x)\right\rangle = 2^a (n)_a (k-a)!\sum_{j=0}^{k-a}\frac{2^{k-j-a}}{(k-j-a)!}S(n-a,j) \tag{3.34}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (3.30) bağıntısından,

$$\left\langle \left(e^t+1\right)^k \mid E_n^{(a)}(x)\right\rangle = \left\langle \left(e^t+1\right)^k \mid \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^a x^n\right\rangle$$

yazılabilir. (2.9) yardımıyla,

$$\begin{aligned}\left\langle \left(e^t+1\right)^k \mid G_n^{(a)}(x)\right\rangle &= \left\langle \left(e^t+1\right)^{k-a} \mid (2t)^a x^n\right\rangle \\ &= 2^a\left\langle \left(e^t-1+2\right)^{k-a} \mid t^a x^n\right\rangle\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, t operatörü x^n 'e a kez uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle \left(e^t+1\right)^k \mid G_n^{(a)}(x)\right\rangle &= 2^a\left\langle \sum_{j=0}^{k-a}\binom{k-a}{j}\left(e^t-1\right)^j 2^{k-j-a} \mid (n)_a x^{n-a}\right\rangle \\ &= 2^a (n)_a\left\langle \sum_{j=0}^{k-a}\frac{(k-a)!}{(k-j-a)!j!}\left(e^t-1\right)^j 2^{k-j-a} \mid x^{n-a}\right\rangle \\ &= 2^a (n)_a (k-a)!\sum_{j=0}^{k-a}\frac{2^{k-j-a}}{(k-j-a)!}\left\langle \frac{\left(e^t-1\right)^j}{j!} \mid x^{n-a}\right\rangle\end{aligned}$$

bulunur. (2.6) bağıntısı kullanılarak ispat tamamlanır. ■

(3.34) eşitliğinde özel olarak $a = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.82

$$\left\langle (e^t+1)^k \mid G_n(x) \right\rangle = 2n\,(k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^{k-j-1}}{(k-j-1)!} S\,(n-1,j)$$

(Dere ve Şimşek 2011).

$G_n^{(a)}(x)$ ile birinci tür Stirling sayıları ve $E_n^{(a)}(x)$ arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 3.83 *$s\,(k,m)$ birinci tür Stirling sayısı olmak üzere,*

$$G_n^{(a)}(x) = \sum_{j=0}^{a} \sum_{k=0}^{j} \sum_{m=0}^{k} \binom{a}{j} \binom{j}{k} 2^{k-a} (-1)^{j-k}\, s\,(k,m)\, n^m E_{n-k}^{(a)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (3.30) bağıntısından,

$$\begin{aligned} G_n^{(a)}(x) &= \left(\frac{1}{e^t+1} + \frac{2t-1}{e^t+1} \right)^a x^n \\ &= \sum_{j=0}^{a} \binom{a}{j} \frac{1}{(e^t+1)^{a-j}} \left(\frac{2t-1}{e^t+1} \right)^j x^n \\ &= \sum_{j=0}^{a} \binom{a}{j} \frac{1}{(e^t+1)^a} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (2t)^k (-1)^{j-k} x^n \\ &= \sum_{j=0}^{a} \binom{a}{j} \frac{1}{(e^t+1)^a} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} 2^k (-1)^{j-k} t^k x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda, t operatörü x^n 'e a kez uygulanıp bazı düzenlemeler yapılırsa,

$$G_n^{(a)}(x) = \sum_{j=0}^{a} \binom{a}{j} \frac{1}{2^a} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} 2^k (-1)^{j-k} (n)_k \left(\frac{2}{(e^t+1)} \right)^a x^{n-k}$$

olur. (3.30) ve (1.1) bağıntıları yukarıdaki denklemde kullanılırsa ispat tamamlanmış olur (Dere ve Şimşek 2011). ■

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Umbral cebirin kullanım alanlarından bahsedilmiş, uygulama olarak da Hermite, Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları incelenmiştir.

Klasik analiz metotlarıyla da ispatlanabilen bazı özelliklerin Umbral metoduyla yapılan ispatları verilmiştir.

Ayrıca, Umbral cebir ve Umbral analiz metodları kullanılarak bu tezde;

i) Yüksek mertebeden Bernoulli ve Euler polinomlarının rekürans bağıntıları ispatlanmıştır.

*ii)*Genocchi polinomları için bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Genocchi polinomları ile Stirling sayıları arasındaki bağıntılar ispatlanmıştır.

iii) Bu polinomlar ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ, M. ve STEGUN, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publication, New York.

BATEMAN, H. 1940. The polynomial of Mittag-Leffer. Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A, 26: 491-496.

BLASIAK, P., DATTOLI, G. HORZELA, A. ve PENSON, K. A. 2006. Representations of monomiality principle with Sheffer-type polynomials and boson normal ordering. Phys. Lett. A, 352: 7-12.

CANGÜL, İ. N., OZDEN, H. ve ŞİMŞEK, Y. 2008. Generating functions of the (h, q) extensin of twisted Euler polynomials and numbers. Acta Math. Hungar., 120: 281-299.

CANGÜL, İ. N., KURT, V., OZDEN, H. ve ŞİMŞEK, Y. 2009. On the higher-order w-q-Genocchi numbers. Adv. Stud. Contemp. Math. 19(1): 39-57.

CARLITZ, L. 1960. Note on Nörlund's Polynomial $B_n^{(z)}$. Proc. Amer. Math. Soc., 11: 452-455.

CARLITZ, L. 1962. Some generalized multiplication formulae for the Bernoulli polynomials and related functions. Mh. Math, 66: 1-8.

CENKCİ, M., CAN, M. ve KURT, V. 2006. q-extensions of Genocchi numbers. J. Korean Math. Soc., 43: 183-198.

CHOI, J., ANDERSON P. J. ve SRIVASTAVA H. M. 2008. Some q-extensions of the Apostol-Bernoulli and the Apostol-Euler polynomials of order n, and the multiple Hurwitz zeta function. Appl. Math. Comput., 199: 723-737.

CHOI, J., ANDERSON P. J. ve SRIVASTAVA H. M. 2009. Carlitz's q-Bernoulli and q-Euler polynomials and a class of q-Hurwitz zeta functions. Appl. Math. Comput., 215: 1185-1208.

CHOI, J. ve SRIVASTAVA H. M. 2009. Some applications of the Gamma and polygamma functions involving convolutions of the Rayleigh functions, multiple Euler sums and log-sine integrals. Math. Nachr. 282: 1709-1723.

DATTOLI, G., MIGLIORATI, M. ve SRIVASTAVA, H. M. 2007. Sheffer polynomials, monomiality principle, algebraic methods and the theory of classical polynomials. Math. Comput. Modelling, 45: 1033-1041.

DERE, R. ve ŞİMŞEK, Y. 2011. Genocchi polynomials associated with the Umbral algebra, (doi:10.1016/j.amc.2011.01.078), Appl. Math. Comput.

DI BUCCHİANİCO ve A. LOEB, D. 2000. A Selected Survey of Umbral Calculus. The Electronic Journal of Combinatorics.

ERDELYI, A. 1953. Higher Transcendental Functions. The bateman Manuscript Procect, Vols I-III. McGraw-Hill, New York.

GARG, M., JAIN, K. ve SRIVASTAVA H. M. 2006. Some relationships between the generalized Apostol-Bernoulli polynomials and Hurwitz-Lerch Zeta functions. Integral Transform. Spec. Funct, 17: 803–815.

JORDAN, C. 1965. Calculus of Finite Differences. Chelsea, Bronx, New York.

KARANDE, B. K. ve THAKARE N. K. 1975. On the unification of Bernoulli and Bernoulli polynomials. Indian J. Pure Appl. Math., 6: 98-107.

KIM, T., RIM, S-H., ŞİMŞEK, Y. ve KIM, D. 2008. On the analogs of Bernoulli and Euler numbers, related identities and zeta and L-functions. J. Korean Math. Soc., 45: 435-453.

KIM, Y-H., KIM, W. ve JANG, L-C. 2008. On the q-Extension of Apostol-Euler Numbers and Polynomials. Abstract and Applied Analysis, Article ID 296159, doi:10.1155/2008/296159.

LUO Q-M. ve SRIVASTAVA H. M. 2005. Some generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. J. Math. Anal. Appl., 308(1): 290-302.

LUO Q-M. 2009. q-Extensions for the Apostol-Genocchi polynomials. General Math., 17(2): 113-125.

LUO Q-M. 2009. The multiplication formulas for the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials of higher order. Integral transforms and Special Functions, 20: 377-391.

OZDEN, H. ve ŞİMŞEK, Y. 2008. A new extension of q-Euler numbers and polynomials related to their interpolation functions. Appl. Math. Lett., 21: 934-939.

ŞİMŞEK, Y. 2006. Twisted (h, q)-Bernoulli numbers and polynomials related to twisted (h, q)-zeta function and L-function. J. Math. Anal. Appl., 324: 790-804.

ŞİMŞEK, Y. 2008. Generating functions of the twisted Bernoulli numbers and polynomials associated with their interpolation functions, Adv. Stud. Contemp. Math., 16: 251-278.

ŞİMŞEK, Y. q-Hardy–Berndt type sums associated with q-Genocchi type zeta and q-l-functions Nonlinear Analysis(Theory, Methods & Applications), 71(12): e377-e395.

ŞİMŞEK, Y., OZDEN, H. ve CANGÜL, İ. N. 2009. A new approach to q-Genocchi numbers and their interpolation functions. Nonlinear Analysis(Theory, Methods & Applications),71(12) : e793-e799.

ŞİMŞEK, Y., OZDEN, H. ve CANGÜL, İ. N. 2009. Hurwitz Type Multiple Genocchi Zeta Function. Numerical Analysis and Applied Math. AIP Conf. Proc., 1148: 781-784.

ROMAN, S. 1982. The theory of the Umbral calculus I. J. Math. Anal. Appl., 87: 58-115.

ROMAN, S. 1982. The theory of the Umbral calculus II. J. Math. Anal. Appl., 89: 290-314.

ROMAN, S. 1992. Advanced Linear Algebra. Springer-Verlag, New York.

ROMAN, S. 2005. The Umbral Calculus. Dover Publications Inc, New York.

SRIVASTAVA, H. M. 2000. Some formulas for the Bernoulli and Euler polynomials at rational arguments. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 129: 77-84.

SRIVASTAVA, H. M. 2005. q-Bernoulli numbers and polynomials associated with multiple q-zeta functions and basic L-series. Russian J. Math. Phys., 12: 241-268.

MALDONADA, M., PRADA, J. ve SENOSIAIN, M. J. 2007. Basic Appell Sequences, Taiwan J. Math. 11: 1045-1055.

NÖRLUND, N. E. 1924. Vorlesungen uber Differenzenrechnung. Springer.

TEMPESTA, P. 2008. On Appell sequences of polynomials of Bernoulli and Euler type. J. Math. Anal. Appl., 341: 1295-1310.

ÖZGEÇMİŞ

Rahime DERE 1988 yılında Antalya ili Alanya ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Alanya'da tamamladı. 2005 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2009 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 2009'da Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.