T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN ASİMPTOTİK GÖSTERİMLERİ

İlyas YAKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN ASİMPTOTİK GÖSTERİMLERİ

İlyas YAKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN ASİMPTOTİK GÖSTERİMLERİ

İlyas YAKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez . . . / . . . / 2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (   ) not takdir edilerek oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Veli KURT ....
Yrd.Doç. Dr. Mümün CAN ....
(Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE ....

ÖZET

BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN ASİMPTOTİK GÖSTERİMLERİ

İlyas YAKAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN

Aralık 2011, 38 Sayfa

Bu çalışmada üreteç fonksiyonları ve Cauchy integrali yardımıyla n. dereceden genelleştirilmiş dejenere Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarının sabitlenmiş $z \in \mathbb{C}$ ve $\mu \in \mathbb{N}$ için Fourier açılımları elde edilmiştir. Yeteri kadar büyük n değerleri ve sabitlenmiş $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{N}$ için bu polinomların asimptotik gösterimleri Fourier serileri yardımıyla elde edilmiştir. Ayrıca $\mu = 0, -1, -2, \ldots$ için de bu polinomların asimptotik ifadeleri incelenmiştir. Benzer sonuçlar genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi polinomları için de elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi polinomları, dejenere Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları, Asimptotik Form, Üreteç fonksiyonu, Fourier serisi

JÜRİ: Prof. Dr. Veli KURT

Yrd.Doç. Dr. Mümün CAN

Yrd. Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE

ABSTRACT

ASYMPTOTICS REPRESENTATIONS OF SOME POLYNOMIALS

İlyas YAKAN

M. Sc. Thesis in Mathematics

Adviser: Asst. Prof. Dr. Mümün CAN

December 2011, 38 Pages

In this work, Fourier expansions of generalized degenerate Bernoulli, Euler, Genocchi polynomials and generalized Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi polynomials have been obtained via Cauchy integral and generating functions of these polynomials for fixed positive integer μ and $z \in \mathbb{C}$. Using these expansions, we establish asymptotic behavior of these polynomials for fixed positive integer μ and $z \in \mathbb{C}$, as $n \to \infty$. We also investigate the cases $\mu = 0, -1, -2, \ldots$ asymptotically.

KEY WORDS: Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi polynomials, degenerate Bernoulli, Euler, Genocchi polynomials, Asymtotics representation, Generating functions, Fourier series

COMMITTEE: Prof. Dr. Veli KURT

Asst. Prof. Dr. Mümün CAN

Asst. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları ile Bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Bulgular bölümünde kullanılacak olan genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi polinomları ve genelleştirilmiş dejenere Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları bölümünde tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

Bulgular bölümünde ise genelleştirilmiş dejenere Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarının Fourier serileri ve yeteri kadar büyük n değerleri için asimptotik ifadeleri elde edilmiştir. Benzer şekilde genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi polinomlarının Fourier serileri ve asimptotik ifadeleri elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasının, bu alandaki çalışmalara önemli katkılar sağlayacağı inancındayız.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Yard. Doç. Dr. Mümün CAN'a (A.Ü.F.F), yardımlarını gördüğüm hocalarım Prof. Dr. Veli KURT (A.Ü.F.F) ve İng. Okt. Devrim ARDIÇ'a (A.Ü.Y.D.Y.O) teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Bazı operatörleri yeterince büyük sayılar için hesaplamak oldukça zor olabilir. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için farklı metotlar bulunmuştur. Bu metotların en kullanışlılarından birisi "Asimptotiklik " kavramıdır. Çok yaygın olan bu kavram tüm matematiksel analizde kullanılmaktadır. f ve g fonksiyonları için $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ oluyorsa f ile g fonksiyonları asimptotiktir denir ve $f(x) \sim g(x)$ ile gösterilir. Örneğin, Stirling formülü $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}} = 1$ den yeteri kadar büyük n değerleri için $n! \sim e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$ asimptotik sonucu çıkar. Ayrıca $x > 0$ için $\pi(x)$, x e eşit veya x den küçük asal sayıların sayısı göstermek üzere, meşhur asal sayı teoremi; $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$ olduğunu sağlar. Bu sonuç asal sayıların dağılımı üzerine çok önemli bilgiler içermektedir.

Weinmann (1963) $\mathcal{F}_n^{\mu}(z) = \frac{1}{n!}B_n^{\mu}(z + \frac{1}{2}\mu)$ şeklinde tanımladığı $\mathcal{F}_n^{\mu}(z)$ fonksiyonu için, genelleştirilmiş Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonundan ve Cauchy integralinden yararlanarak, sabitlenmiş $z \in \mathbb{C}$ ve yeteri kadar büyük n değerleri için μ nün 0 ve negatif tamsayı veya pozitif tamsayı olma durumuna göre iki farklı asimptotik gösterim elde etmiştir.

López ve Temme (2010) ise aynı yöntemle Tanım 2.1 (sayfa 3) ile tanımlanan n. dereceden genelleştirilmiş Bernoulli ve Euler polinomlarının, sabitlenmiş $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{Z}$ ve yeteri kadar büyük n değerleri için, asimptotik gösterimlerini elde etmişlerdir. Ayrıca sabitlenmiş $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ ve $\mu \to \infty$ için bu polinomların asimptotik gösterimleri López ve Temme (1999) tarafından elde edilmiştir.

Navas vd (2011) $\mathcal{B}_n(z, \alpha)$ polinomunun Fourier açılımı yardımıyla sabitlenmiş $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{Z}$ ve $n \to \infty$ için asimptotik gösterimini elde etmiştir. Ayrıca $\mathcal{B}_n(z, \alpha)$ ile $\mathcal{E}_n(z, \alpha)$ arasındaki bağıntıdan yararlanarak benzer gösterim $\mathcal{E}_n(z, \alpha)$ polinomu için de bulmuştur.

Bu çalışmanın amacı Tanım 2.6 da (sayfa 5) verilen n. dereceden genelleştirilmiş dejenere Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonlarından ve Cauchy integralinden yararlanarak bu polinomların Fourier açılımlarını elde etmektir. Daha sonra bu Fourier açılımlarından yararlanarak sabitlenmiş $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{Z}$

ve yeteri kadar büyük n değerleri için bu polinomların asimptotik gösterimlerini elde etmektir. Ayrıca, Tanım 2.7 de (sayfa 5) verilen genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi polinomları için de benzer sonuçları incelemektir.

2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI

f ve g iki fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\forall x > a$ için $|f(x)| \leq M\,|g(x)|$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}^+$ sayısı bulunabiliyorsa $f(x) = O(g(x))$ şeklinde gösterilir.

Sonlu farkların hesaplanmasında önemli rol oynayan genelleştirilmiş Bernoulli ve Euler polinomları aşağıdaki gibi tanımlanır. Aslında interpolasyon, sayısal türev ve integral için merkez-fark formüllerinin katsayıları bu polinomlar cinsinden ifade edilir.

Tanım 2.1 *$\mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere z değişkenine göre n. dereceden genelleştirilmiş $B_n^\mu(z)$ Bernoulli, $E_n^\mu(z)$ Euler ve $G_n^\mu(z)$ Genocchi polinomları*

$$\begin{aligned}
\frac{w^\mu e^{zw}}{(e^w-1)^\mu} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^\mu(z)\frac{w^n}{n!}, \quad |w| < 2\pi \\
\frac{2^\mu e^{zw}}{(e^w+1)^\mu} &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^\mu(z)\frac{w^n}{n!}, \quad |w| < \pi \\
\frac{(2w)^\mu e^{wz}}{(e^w+1)^\mu} &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n^\mu(z)\frac{w^n}{n!} \quad , \quad |w| < \pi
\end{aligned}$$

üreteç fonksiyonları ile tanımlanır (Milne-Thomson 1951).

Weinmann (1963), $\mathcal{F}_n^\mu(z) = \frac{1}{n!}B_n^\mu(z + \frac{1}{2}\mu)$ şeklinde tanımladığı $\mathcal{F}_n^\mu(z)$ fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik ifadeleri elde etmiştir.

Teorem 2.2 *(Weinmann 1963) $\mathcal{F}_n^\mu(z) = \frac{1}{n!}B_n^\mu(z + \frac{1}{2}\mu)$ ve $\mu = -m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n^{-m}(z) &= \frac{1}{(n+m)!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}(z + \frac{1}{2}m - r)^{m+n} \\
\mathcal{F}_{2n}^{-m}(0) &= \frac{n^{m+2n}}{2^{m+2n-1}(m+2n)}\left\{1 + O\left(e^{\frac{-4n}{m}}\right)\right\}, \qquad n \to \infty \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.3 *(Weinmann 1963) $z \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $n, N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ olsun. Bu* *takdirde*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{n+b}^{n+\alpha}(z) &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}-\alpha+b}2^{\mu-\frac{3}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}}\left[A\cos\pi\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}b-b\right)+B\sin\pi\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}b-z\right)\right] \\
&\quad +O\left(\frac{1}{2^n n^{\frac{7}{2}}}\right), \qquad n\to\infty \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

dir. Burada $\mu = n+\alpha$ *ve*

$$\begin{aligned}
A &= 1+\left\{2z^2+\frac{1}{4}-\binom{\alpha-b-1}{2}\frac{4}{\pi^2}\right\}\frac{1}{\mu} \\
&\quad +\left\{2z^4+\frac{5}{2}z^2+\frac{1}{32}-\binom{\alpha-b-1}{2}\frac{24z^2+5}{\pi^2}+\binom{\alpha-b-1}{4}\frac{48}{\pi^2}\right\}\frac{1}{\mu^2} \\
B &= -\binom{\alpha-b-1}{1}\frac{4z}{\pi\mu}+\left\{-\binom{\alpha-b-1}{1}\frac{8z^3+5z}{\pi}+\binom{\alpha-b-1}{3}\frac{48z}{\pi^3}\right\}\frac{1}{\mu^2}
\end{aligned}$$

dir.

López ve Temme ise yeteri kadar büyük n değerleri ve sabitlenmiş $z\in\mathbb{C}$, $\mu\in\mathbb{Z}$ için genelleştirilmiş Bernoulli ve Euler polinomlarının asimptotik gösterimlerini elde etmişlerdir.

Teorem 2.4 *(López ve Temme 2010)* $\mu=-m$, $m=0,1,2,\cdots$ *ve* $z=x+iy$ *olsun. Bu takdirde* $x>-\frac{m}{2}$ *iken*

$$B_n^{-m}(z) = \frac{n!}{(n+m)!}(z+m)^{n+m}\left[1+O\left(\frac{z+m-1}{z+m}\right)^{n+m}\right] \qquad (2.3)$$

$$E_n^{-m}(z) = 2^{-m}(z+m)^{n}\left[1+O\left(\frac{z+m-1}{z+m}\right)^{n}\right] \qquad (2.4)$$

dir. $x<-\frac{m}{2}$ *iken*

$$B_n^{-m}(z) = \frac{n!}{(n+m)!}z^{n+m}\left[1+O\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n+m}\right] \qquad (2.5)$$

$$E_n^{-m}(z) = 2^{-m}z^{n}\left[1+O\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n}\right] \qquad (2.6)$$

dir. $x=-\frac{m}{2}$ *iken*

$$B_n^{-m}(z) \sim \frac{n!}{(n+m)!}\left[(-1)^m\left(-\frac{1}{2}m+iy\right)^{n+m}+\left(\frac{1}{2}m+iy\right)^{n+m}\right] \qquad (2.7)$$

$$E_n^{-m}(z) \sim 2^{-m}\left[\left(-\frac{1}{2}m+iy\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}m+iy\right)^{n}\right] \qquad (2.8)$$

dir.

Teorem 2.5 *(López ve Temme 2010) $\mu = m$ ve $m = 1, 2, 3\cdots$ olsun. Bu takdirde*

$$
\begin{aligned}
B_n^m(z) &= \frac{2(-1)^m}{(2\pi)^n}\binom{n-1}{m-1} \qquad (2.9)\\
&\times\left[\sum_{v=0}^{m-1} B_v^m(z)\binom{m-1}{v}\frac{(n-v-1)!}{(n-1)!}(2\pi)^v\cos\sigma + O\left(2^{-n}\right)\right]\\
E_n^m(z) &= \frac{2^{m+1}n!}{\pi^{n+m}}\binom{n+m-1}{m-1} \qquad (2.10)\\
&\times\left[\sum_{v=0}^{m-1} B_v^m(z)\binom{m-1}{v}\frac{(n+m-v-1)!}{(n+m-1)!}\pi^v\sin\tau + O\left(3^{-n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

dır. Burada $\sigma = \left(2z + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}v\right)\pi$ ve $\tau = \left(z - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(m-1)\right)\pi$ dır.

Tanım 2.6 *(Carlitz 1979, Cenkci ve Howard 2007) $w, \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere, z değişkenine göre, genelleştirilmiş dejenere Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları, sırasıyla,*

$$\frac{w^\mu (1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)^\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^\mu(\lambda, z)\frac{w^n}{n!} \quad , \quad |w| < \left|\frac{1}{\lambda}\left(e^{2\lambda\pi i} - 1\right)\right| \qquad (2.11)$$

$$\frac{2^\mu (1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} + 1\right)^\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^\mu(\lambda, z)\frac{w^n}{n!} \quad , \quad |w| < \left|\frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda\pi i} - 1\right)\right| \qquad (2.12)$$

$$\frac{(2w)^\mu (1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} + 1\right)^\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^\mu(\lambda, z)\frac{w^n}{n!} \quad , \quad |w| < \left|\frac{1}{\lambda}\left(e^{2\lambda\pi i} - 1\right)\right| \qquad (2.13)$$

üreteç fonksiyonları ile tanımlanır.

$\lambda \to 0$ için $\beta_n^\mu(0, z) = B_n^\mu(z)$, $\varepsilon_n^\mu(0, z) = E_n^\mu(z)$ ve $\mathcal{G}_n^\mu(0, z) = G_n^\mu(z)$ olduğundan bu şekilde tanımlanan dejenere polinomlar Tanım 2.1 de verilen polinomların bir genelleştirmesidir.

Genelleştirilmiş degenere Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları ve sayılarının açık formülleri ve rekürens bağıntıları Carlitz (1956, 1979), Adelberg (1995), Howard (1996), Young (2008), bölünebilirlik özellikleri Carlitz (1956), Howard (1996), Young (2004, 2008) ve simetri özellikleri ise Young (2008), Liu (2009), Cenkci (2011) tarafından incelenmiştir.

Tanım 2.7 *(Luo and Srivastava 2005, Luo 2009) $\alpha,\mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere, z değişkenine göre genelleştirilmiş $B_n^{\mu}(z,\alpha)$ Apostol-Bernoulli, $E_n^{\mu}(z,\alpha)$ Apostol-Euler ve $G_n^{\mu}(z,\alpha)$ Apostol-Genocchi polinomları sırasıyla*

$$\frac{w^{\mu}e^{wz}}{(\alpha e^{w}-1)^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}_n^{\mu}(z,\alpha)\frac{w^n}{n!} \quad , \quad |w|<|2\pi i\mp\ln\alpha| \tag{2.14}$$

$$\frac{2^{\mu}e^{wz}}{(\alpha e^{w}+1)^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{E}_n^{\mu}(z,\alpha)\frac{w^n}{n!} \quad , \quad |w|<|\pi i\mp\ln\alpha| \tag{2.15}$$

$$\frac{(2w)^{\mu}e^{wz}}{(\alpha e^{w}+1)^{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_n^{\mu}(z,\alpha)\frac{w^n}{n!} \quad , \quad |w|<|\pi i\mp\ln\alpha| \tag{2.16}$$

üreteç fonksiyonları ile tanımlanır. Burada $\alpha=|\alpha|e^{i\theta}$, $-\pi\le\theta<\pi$ ve $\ln\alpha=\ln|\alpha|+i\theta$ dır.

Bu polinomlar Tanım 2.1 de verilen polinomların farklı bir genelleştirmesidir ve $\mathcal{B}_n^{\mu}(z,1)=B_n^{\mu}(z)$, $\mathcal{E}_n^{\mu}(z,1)=E_n^{\mu}(z)$, $\mathcal{G}_n^{\mu}(z,1)=G_n^{\mu}(z)$ dır. Ayrıca $\mu=1$ için $\mathcal{B}_n^{1}(z,\alpha)=\mathcal{B}_n(z,\alpha)$ Apostol-Bernoulli polinomu elde edilir (Apostol 1951). Bu polinomların açık formülleri ve temel özellikleri Apostol (1951), Luo and Srivastava (2005, 2006), 2011, Wang vd (2008), Kurt (2009), Luo (2009) tarafından incelenmiştir. Lipschitz toplama formülü kullanılarak Apostol-Bernoulli ve Apostol-Euler polinomlarının Fourier serisi, Luo (2009) tarafından

$$\mathcal{B}_n(z,\alpha) = -\delta_n(z,\alpha)-\frac{n!}{\alpha^z}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{2k\pi iz}}{(2k\pi i-\log\alpha)^n} \tag{2.17}$$

$$\mathcal{E}_n(z,\alpha) = \frac{2n!}{\alpha^z}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{(2k-1)\pi iz}}{((2k-1)\pi i-\log\alpha)^{n+1}} \tag{2.18}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada

$$\delta_n(z,\alpha)=\begin{cases}0 & ,\ \alpha=1\\ \dfrac{n!}{\alpha^z(-\log\alpha)^n} & ,\ \alpha\neq 1\end{cases}$$

dır. Apostol-Genocchi polinomlarının Fourier açılımı ise Bayad (2011) tarafından

$$\mathcal{G}_n^{\mu}(z,\alpha)=\frac{2n!}{\alpha^z}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{(2k-1)\pi iz}}{((2k-1)\pi i-\log\alpha)^n} \tag{2.19}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Navas vd (2011) $\mathcal{B}_n(z,\alpha)$ Apostol-Bernoulli polinomlarının Fourier açılımı yardımıyla sabitlenmiş $z \in \mathbb{C}$ ve yeteri kadar büyük n sayısı için

$\alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0,1\}$ ve $\alpha \notin (-\infty, 0)$ olduğunda

$$(-1)^{n-1} \frac{\log^n \alpha}{n!} \alpha^z \mathcal{B}_n(z,\alpha) = 1 + O\left(\frac{\exp\left(2\left(|\log \alpha| + \pi(m+1)\right)|z|\right)}{\min |1 \pm \frac{2(m+1)\pi i}{\log \alpha}|^n} \right) \tag{2.20}$$

ve $\alpha < 0$ olduğunda

$$(-1)^{n-1} \frac{\log^n \alpha}{n!} \alpha^z \mathcal{B}_n(z,\alpha) = 1 + \left(\frac{\log|\alpha| + \pi i}{\log|\alpha| - \pi i} \right)^n e^{2\pi i z} + O\left(\frac{\exp\left(2\left(\pi + |\log \alpha|\right)|z|\right)}{\min |1 + \frac{2\pi i}{\log \alpha}|^n} \right) \tag{2.21}$$

asimptotik gösterimlerini elde etmişlerdir.

Ayrıca Navas vd (2011) $\mathcal{E}_n(z,\alpha) = -\frac{2}{n+1}\mathcal{B}_n(z,\alpha)$ bağıntısı yardımıyla $\alpha > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \left(\mathcal{E}_n(z,\alpha) - \left(\frac{\log|\alpha| + \pi i}{\log|\alpha| - \pi i} \right)^{n+1} e^{2\pi i z} \right) = 1 \tag{2.22}$$

ve $\alpha \notin (-\infty, 0)$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathcal{E}_{n+1}(z,\alpha) - 1}{\mathcal{E}_n(z,\alpha) - 1} = \frac{\log|\alpha| + \pi i}{\log|\alpha| - \pi i} \tag{2.23}$$

gösterimlerini elde etmişlerdir.

Throughout this paper λ wil always represent a pure imaginary complex number, i.e., $\lambda = it \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ with $t \in R$, (so the fundemental branch of the logarithm is taken), and μ will be an integer . $x, a \in \mathbb{C}$ ve m negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $(x|a)_m$, a ya göre genelleştirilmiş azalan faktöriyel fonksiyonu; $m > 0$ için $(x|a)_m = \prod_{k=0}^{m-1} (x - ka)$ ve $(x|a)_0 = 1$ şeklinde tanımlanır. $a = 1$ alınırsa $(x|1)_m = (x)_m$ azalan faktöriyel fonksiyonu elde edilir.

3. BULGULAR

3.1. Dejenere Bernoulli Polinomları

Genelleştirilmiş dejenere Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu $w = 0$'da kaldırılabilir tekil noktasına sahip olduğundan (2.11) ve Cauchy türev formülü yardımıyla

$$\beta_n^{\mu}(\lambda, z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{w^{\mu}(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)^{\mu}} \frac{dw}{w^{n+1}} \tag{3.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada C orijin merkezli, yarıçapı $\min\{|w_{-1}|, |w_1|\}$ den küçük olan çemberdir $\left(w_k = \frac{1}{\lambda}\left(e^{2k\pi i\lambda} - 1\right)\right)$.

$\mu = m \geq 1$ için $\beta_n^{\mu}(\lambda, z)$ polinomunun Fourier açılımını inceleyelim. İlk olarak $m = 1$ durumunu ele alalım. Daha sonra $m > 1$ için Fourier açılımını elde edelim. orijin merkezli, r yarıçaplı uygun γ eğrisi boyunca

$$f_m(w) := f_m(w, z, \lambda) = \frac{w^m(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)^m} \frac{1}{w^{n+1}}$$

fonksiyonun intagralini hesaplayalım. Rezidü teoreminden ve (3.1) den

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{w(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)} \frac{dw}{w^{n+1}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} Rez\left(f_1(w), w_k\right) + Rez\left(f_1(w), 0\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} Rez\left(f_1(w), w_k\right) + \frac{1}{n!}\beta_n^1(\lambda, z), \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $w = re^{i\theta}$ dönüşümü yapılırsa, $0 \leq z < 1$ için

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \frac{w(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)} \frac{dw}{w^{n+1}} \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}\left(1+\lambda re^{i\theta}\right)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda re^{i\theta})^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} \right| \\ &\leq \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\left|\left(1+\lambda re^{i\theta}\right)^{\frac{z}{\lambda}}\right|}{\left|(1+\lambda re^{i\theta})^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right|} d\theta \\ &\leq \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\left|\left(\frac{1}{r}+\lambda e^{i\theta}\right)^{\frac{z}{\lambda}}\right|}{\left|\left|\left(\frac{1}{r}+\lambda e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right| - 1\right|} d\theta \\ &\leq \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{1}{r}+|\lambda|\right)^{\left|\frac{z}{\lambda}\right|}}{\left|e^{\frac{i}{\lambda}\arg\left(\frac{1}{r}+\lambda e^{i\theta}\right)} - 1\right|} d\theta \longrightarrow 0, \quad r \to \infty \end{aligned} \tag{3.2}$$

olduğundan

$$\beta_n^1(\lambda,z)=\beta_n(\lambda,z)=-n!\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}Rez\left(f_1(w),w_k\right) \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir. $f_1(w)=\dfrac{\frac{1}{w^n}(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)}$ fonksiyonu $w_k=\dfrac{1}{\lambda}\left(e^{2k\lambda\pi i}-1\right)$ noktalarında basit kutba sahip olduğundan

$$\begin{aligned}Rez\left(f_1(w),w_k\right) &= \frac{\frac{1}{w_k^n}(1+\lambda w_k)^{\frac{z}{\lambda}}}{(1+\lambda w_k)^{\frac{1}{\lambda}-1}}\\ &= \frac{e^{2k\pi zi}}{w_k^n e^{2k(1-\lambda)\pi i}}=\frac{e^{2k\pi i(z+\lambda)}}{w_k^n}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\beta_n^1(\lambda,z)=\beta_n(\lambda,z)=-n!\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{2k\pi i(z+\lambda)}}{w_k^n} \tag{3.4}$$

elde edilir. Oran testinden $n>1$, $0\leq z<1$ ve sabitlenmiş λ için (3.4) deki serinin mutlak yakınsak olduğu gösterilebilir. Buradan $n>1$ ve $0\leq z<1$ için

$$\begin{aligned}\beta_{2n}(\lambda,z) &= -(2n)!\lambda^{2n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^{2k\pi i(z+\lambda)}}{\left(e^{2k\lambda\pi i}-1\right)^{2n}}+\frac{e^{-2k\pi i(z+\lambda)}}{\left(e^{-2k\lambda\pi i}-1\right)^{2n}}\right)\\ &= 2(-1)^{n+1}(2n)!\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2k\pi z+2k\pi(1-n)\lambda\right)}{\left(\sin(k\pi\lambda)\right)^{2n}}\end{aligned}$$

ve

$$\beta_{2n+1}(\lambda,z)=2(-1)^{n+1}(2n+1)!\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2k\pi z+k\pi(1-2n)\lambda\right)}{\left(\sin(k\pi\lambda)\right)^{2n+1}}$$

açılımları elde edlir. Bu seriler sırasıyla $\beta_{2n}(\lambda,z)$ ve $\beta_{2n+1}(\lambda,z)$ polinomlarının Fourier açılımlarıdır.

$m>1$ için (3.4) e benzer olarak $0\leq z<1$ ve $n>m$ için

$$\beta_n^m(\lambda,z)=-n!\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}Rez\left(f_m(w),w_k\right)=-n!\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}D_k^m(n,z,\lambda)\frac{e^{2k\pi i(z+\lambda)}}{w_k^n}, \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $m=1$ olduğunda her $k\in\mathbb{Z}$ için $D_k^1(n,z,\lambda)=1$ dir. Şimdi $m>1$ için $D_k^m(n,z,\lambda)$ katsayılarını hesaplayalım. $f_m(w)$ fonksiyonu $w_k=\frac{1}{\lambda}(e^{2k\lambda\pi i}-1)$, $k\neq 0$ noktalarında m. mertebeden kutup noktasına sahip

olduğundan

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{w\to w_k}\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\left(\frac{(w-w_k)^m\,w^m\,(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)^m w^{n+1}}\right)=D_k^m\,(n,z,\lambda)\,\frac{e^{2k\pi i(z+\lambda)}}{w_k^n}$$

olur. Ayrıca w_k noktası $\dfrac{(w-w_k)^m\,w^m\,(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)^m w^{n+1}}$ fonksiyonun kaldırılabilir tekil noktası olduğundan

$$\frac{(w-w_k)^m\,w^m\,(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)^m w^{n+1}}=\sum_{r=0}^{\infty}C_r(w-w_k)^r \tag{3.6}$$

şeklinde Taylor açılımına sahiptir. (3.6) ifadesinde her iki taraftan $(m-1)$ defa türev alınırsa

$$\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\left(\frac{(w-w_k)^m\,w^m\,(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)^m w^{n+1}}\right)=\sum_{r=m-1}^{\infty}C_r r\cdots(r-m+2)(w-w_k)^{r-m+1} \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) ifadesinde her iki tarafdan $w\to w_k$ için limite geçilirse

$$C_{m-1}=D_k^m\,(n,z,\lambda)\,\frac{e^{2k\pi i(z+\lambda)}}{w_k^n} \tag{3.8}$$

bulunur. Ayrıca (3.6) da $w=s+w_k$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{s^m\,(s+w_k)^m\,(1+\lambda s+\lambda w_k)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda\,(s+w_k))^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)^m (s+w_k)^{n+1}}=\sum_{r=0}^{\infty}C_r s^r$$

olur. Eşitliğin sol tarafında $w_k=\frac{1}{\lambda}(e^{2k\lambda\pi i}-1),\ k\neq 0$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{\infty}C_r s^r &= \frac{s^m\left(1+\lambda s+\lambda\frac{1}{\lambda}(e^{2k\lambda\pi i}-1)\right)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left(\left(1+\lambda\left(s+\frac{1}{\lambda}(e^{2k\lambda\pi i}-1)\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)^m (s+w_k)^{n+1-m}}\\ &= \frac{s^m\left(\lambda s+e^{2k\lambda\pi i}\right)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((\lambda s+e^{2k\lambda\pi i})^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)^m (s+w_k)^{n+1-m}}\\ &= \frac{s^m\left(1+\lambda s\left(e^{-2k\lambda\pi i}\right)\right)^{\frac{z}{\lambda}}e^{2k\pi iz}}{\left((1+\lambda s\,(e^{-2k\lambda\pi i}))^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)^m (s+w_k)^{n+1-m}}\end{aligned}$$

şekline dönüşür. Son eşitlikte $t = se^{-2k\lambda\pi i}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{\infty} C_r e^{2k\lambda\pi ir} t^r &= \frac{t^m (1+\lambda t)^{\frac{z}{\lambda}} e^{2km\lambda\pi i} e^{2k\pi iz}}{\left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)^m (te^{2k\lambda\pi i} + w_k)^{n+1-m}} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r^m(\lambda, z) \frac{t^r}{r!} e^{2k\pi i(z+m\lambda)} \left(te^{2k\lambda\pi i} + w_k\right)^{m-n-1} \\ &= \frac{e^{2k\pi i(z+m\lambda)}}{w_k^{n+1-m}} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r^m(\lambda, z) \frac{t^r}{r!} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{m-n-1}{r} \left(t\frac{e^{2k\lambda\pi i}}{w_k}\right)^r\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\binom{m-n-1}{r}$ genelleştirilmiş binom katsayısıdır. Son eşitlikte Cauchy çarpımı yapılırsa

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_r e^{2k\lambda\pi ir} t^r = \frac{e^{2k\pi i(z+m\lambda)}}{w_k^{n+1-m}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{r} \frac{\beta_v^m(\lambda, z)}{v!} \binom{m-n-1}{r-v} \frac{e^{2k\lambda(r-v)\pi i}}{w_k^{r-v}} t^r$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$C_r = \frac{e^{2k\pi i(z+m\lambda)}}{w_k^{n+1-m}} \sum_{v=0}^{r} \frac{\beta_v^m(\lambda, z)}{v!} \binom{m-n-1}{r-v} \frac{e^{-2k\lambda v\pi i}}{w_k^{r-v}}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}C_{m-1} &= \frac{e^{2k\pi i(z+m\lambda)}}{w_k^{n+1-m}} \sum_{v=0}^{m-1} \frac{\beta_v^m(\lambda, z)}{v!} \binom{m-n-1}{m-1-v} \frac{e^{-2k\lambda v\pi i}}{w_k^{m-1-v}} \\ &= \frac{e^{2k\pi i(z+\lambda)}}{w_k^n} \sum_{v=0}^{m-1} \frac{\beta_v^m(\lambda, z)}{v!} \binom{m-n-1}{m-1-v} w_k^v e^{2k\pi i(m-1-v)\lambda} \qquad (3.9)\end{aligned}$$

bulunur. (3.8) ve (3.9) den

$$D_k^m(n, z, \lambda) = \sum_{v=0}^{m-1} \frac{\beta_v^m(\lambda, z)}{v!} \binom{m-n-1}{m-1-v} w_k^v e^{2k\pi i(m-1-v)\lambda}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\binom{m-n-1}{m-1-v}\frac{1}{v!} &= \frac{(m-n-1)\cdots(m-n-1-(m-2-v))}{(m-1-v)!v!}\frac{(m-1)!}{(m-1)!} \\ &= \binom{m-1}{v}(-1)^{m-1-v}\frac{(n+1-m-1)!}{(n-m)!} \\ &\quad\times\frac{(n+1-m)(n+1-(m-1))\cdots(n+1-[m-(m-2-v)])}{(m-1)!} \\ &= \binom{m-1}{v}(-1)^{m-1-v}\frac{(n-1-v)!}{(m-1)!(n-m)!}\frac{\binom{m-1}{v}(-1)^{m-1-v}}{(n-1)!} \\ &= \binom{m-1}{v}(-1)^{m-1-v}\binom{n-1}{m-1}\frac{(n-1-v)!}{(n-1)!} \qquad (3.10)\end{aligned}$$

olduğundan

$$D_k^m(n,z,\lambda) = (-1)^{m-1}\binom{n-1}{m-1}\sum_{v=0}^{m-1}\binom{m-1}{v}\frac{\beta_v^m(\lambda,z)}{(n-1)_v}(-w_k)^v e^{2k\pi i(m-1-v)\lambda}. \tag{3.11}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.5) den

$$\beta_n^m(\lambda,z) = n!\,(-1)^m\binom{n-1}{m-1}$$
$$\times\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{v=0}^{m-1}\binom{m-1}{v}\frac{(-1)^v}{(n-1)_v}\beta_v^m(\lambda,z)\,\frac{e^{2k\pi i(z+(m-v)\lambda)}}{w_k^{n-v}}, \tag{3.12}$$

şeklinde yazılır. Bu seri $n > m$ ve $0 \leq z < 1$ için mutlak yakınsak olup $n > m$ ve $0 \leq z < 1$ için $\beta_n^m(\lambda,z)$ polinomunun Fourier açılımına karşılık gelmektedir.

(3.12) de verilen seri $n > m$ ve $z \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsak olduğundan $\beta_n^m(\lambda,z)$

$$\beta_n^m(\lambda,z) = 2n!\,(-1)^{n+m}\binom{n-1}{m-1}$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{m-1}\binom{m-1}{v}\frac{\beta_v^m(\lambda,z)}{(n-1)_v}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-v}\frac{\cos\left(2k\pi\rho+\frac{n-v}{2}\pi\right)}{\sin^{n-v}(k\pi\lambda)},$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\rho = z + \left(m - \frac{n+v}{2}\right)\lambda$ dır.

Şimdi μ pozitif sayısı için $\beta_n^m(\lambda,z)$ polinomunun asimptotik davranışını inceleyelim.

Teorem 3.1 *$z \in \mathbb{C}$, m pozitif bir tamsayı, $\lambda = it \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere λ, z ve $\mu = m$ sabitlenmiş olsun. Eğer $t > 0$ ise*

$$\beta_n^m(\lambda,z) = n!\,(-1)^m\binom{n-1}{m-1}\frac{\lambda^n}{(e^{2\pi i\lambda}-1)^n}\left[\sum_{v=0}^{m-1}\binom{m-1}{v}\frac{(-w_1)^v}{(n-1)_v}\right.$$
$$\left.\times\beta_v^m(\lambda,z)\left\{e^{2\pi i(z+(m-v)\lambda)}+\delta^{n-v}e^{-2\pi i(z+(m-v)\lambda)}\right\}+\mathcal{O}\left(\left|\frac{w_1}{w_2}\right|^n\right)\right], \tag{3.13}$$

dır. Burada $\delta = \begin{cases} -e^{2\pi i\lambda} & , \min\{|w_{-1}|,|w_2|\} = |w_{-1}| \\ 0 & , \min\{|w_{-1}|,|w_2|\} = |w_2| \end{cases}$ *ve* $w_k = \dfrac{e^{2k\pi i\lambda}-1}{\lambda}$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *dır.*

Eğer $t < 0$ ise

$$\beta_n^m(\lambda, z) = n!\,(-1)^m \binom{n-1}{m-1} \frac{\lambda^n}{(e^{-2\pi i\lambda}-1)^n} \left[\sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v} \frac{(-w_{-1})^v}{(n-1)_v}\right.$$
$$\left. \times \beta_v^m(\lambda, z) \left\{ e^{-2\pi i(z+(m-v)\lambda)} + \eta^{n-v} e^{2\pi i(z+(m-v)\lambda)} \right\} + \mathcal{O}\left(\left| \frac{w_{-1}}{w_{-2}} \right|^n \right) \right], \tag{3.14}$$

dır. Burada $\eta = \begin{cases} -e^{-2\pi i\lambda} & , \ \min\{|w_1|, |w_{-2}|\} = |w_1| \\ 0 & , \ \min\{|w_1|, |w_{-2}|\} = |w_{-2}| \end{cases}$ *dır.*

İspat. $\forall k \geq 1$ ve $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ için

$$|w_k| < |w_{k+1}| \ \text{ and } \ |w_{-k}| < \left|w_{-(k+1)}\right| \tag{3.15}$$

dir. Ayrıca $k \geq 1$ iken $t > 0$ için

$$|w_k| < |w_{-k}| \tag{3.16}$$

ve $t < 0$ için

$$|w_{-k}| < |w_k| \tag{3.17}$$

dir.

$t > 0$ olsun. Bu durumda (3.15) ve (3.16) dan sadece $|w_{-1}|$ ve $|w_2|$ nin karşılaştırılması yeterlidir.

$$|w_2| = \left| \frac{e^{4\pi i\lambda}-1}{\lambda} \right| = \left| \frac{e^{-2\pi i\lambda}-1}{\lambda} \right| \left(e^{2\pi i\lambda} + e^{4\pi i\lambda} \right) = |w_{-1}| \left(e^{-2\pi t} + e^{-4\pi t} \right)$$

olduğundan

$$|w_{-1}| \leq |w_2| \Leftrightarrow 0 < t \leq t_0 \ \text{ ve } \ |w_2| < |w_{-1}| \Leftrightarrow 0 < t_0 < t, \tag{3.18}$$

burada t_0, $e^{-2\pi t} + e^{-4\pi t} = 1$ denkleminin çözümüdür. Eğer $|w_{-1}| \leq |w_2|$ ise

$$\begin{aligned} &|w_1| < |w_{-1}| \leq |w_2| < |w_3| < |w_4| < \cdots \\ &|w_1| < |w_{-1}| \leq |w_2| < |w_{-2}| < |w_{-3}| < \cdots, \end{aligned} \tag{3.19}$$

ve eğer $|w_2| \leq |w_{-1}|$ ise

$$\begin{aligned} &|w_1| < |w_2| < |w_3| < |w_4| < \cdots \\ &|w_1| < |w_2| \leq |w_{-1}| < |w_{-2}| < |w_{-3}| < \cdots. \end{aligned} \tag{3.20}$$

dir. Böylece (3.12) de $\beta_n^m(\lambda, z)$ nin asimptotik davranışı için genel terimi $k = 1$ durumunda ortaya çıkar. Dolayısıyla (3.19), (3.20) ve (3.12) den (3.13) elde edilir.

$t < 0$ olsun. (3.15) ve (3.17) den $|w_1|$ ve $|w_{-2}|$ konumunu incelemek yeterlidir. Eğer $\min\{|w_1|, |w_{-2}|\} = |w_1|$ ise

$$\begin{aligned} &|w_{-1}| < |w_1| \leq |w_{-2}| < |w_{-3}| < |w_{-4}| < \cdots \\ &|w_{-1}| < |w_1| \leq |w_{-2}| < |w_2| < |w_3| < \cdots, \end{aligned} \tag{3.21}$$

dır ve eğer $\min\{|w_1|, |w_{-2}|\} = |w_{-2}|$ ise

$$\begin{aligned} &|w_{-1}| < |w_{-2}| < |w_{-3}| < |w_{-4}| < \cdots \\ &|w_{-1}| < |w_{-2}| \leq |w_1| < |w_2| < |w_3| < \cdots. \end{aligned} \tag{3.22}$$

dır. Bu takdirde (3.12) de asimptotik davranış için $k = -1$ olduğunda temel terim görülür. Sonuç olarak (3.21), (3.22) ve (3.12) den (3.14) elde edilir. ∎

Not 1 *$\lambda = 0$ limit durumunda (3.12) formülünden Lopez ve Temme'nin (2010) elde ettiği (2.9) formülü elde edilir. Fakat (2.9) formülü genelleştirilmiş dejenere Bernoulli polinomlarının asimptotik ifadesini veren Teorem 3.1 den elde edilemez. Aslında bu beklenmedik bir sonuç değildir, çünkü, $\lambda = it = 0$ durumunda $|w_1| = |w_{-1}| = 2\pi$ olmasına karşın Teorem 3.1 de $t > 0$ iken $|w_1| < |w_2| \leq |w_{-1}| < \cdots$ ve $t < 0$ iken $|w_{-1}| < |w_{-2}| \leq |w_1| < \cdots$ $(\lambda = it)$ dır. Bununla beraber $\lim_{t\to 0^+}(\beta_n^m(\lambda, z) + \beta_n^m(-\lambda, z))$ limit değeri (2.9) formülüne karşılık gelmektedir.*

$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\beta_n^{-m}(\lambda, z)$ polinomunun asimptotik gösterimi (3.1) ve binom teoremi yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 3.2 *$z = x + iy \in \mathbb{C}$, $m = 0, 1, 2, \cdots$ olmak üzere $\mu = -m$ ve z sabitlenmiş olsun. Bu durumda $n \to \infty$ için, eğer $x > -\frac{m}{2}$ ise*

$$\beta_n^{-m}(\lambda, z) = \frac{n!}{(n+m)!}(z + m|\lambda)_{n+m}\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{(z+m-1|\lambda)_{n+m}}{(z+m|\lambda)_{n+m}}\right)\right], \tag{3.23}$$

eğer $x < -\frac{m}{2}$ ise

$$\beta_n^{-m}(\lambda, z) = (-1)^m \frac{n!}{(n+m)!}(z|\lambda)_{n+m}\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{(z+1|\lambda)_{n+m}}{(z|\lambda)_{n+m}}\right)\right], \tag{3.24}$$

eğer $x = -\frac{m}{2}$ *ise*

$$\beta_n^{-m}(\lambda, z) \sim \frac{n!}{(n+m)!}\left[(-1)^m\left(-\frac{m}{2}+iy|\lambda\right)_{n+m}+\left(\frac{m}{2}+iy|\lambda\right)_{n+m}\right] \qquad (3.25)$$

dır.

İspat. (3.1) de μ yerine $-m$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\beta_n^{-m}(\lambda, z) &= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \left(\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}\right)-1\right)^m (1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}\frac{dw}{w^{n+m+1}} \\ &= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}(1+\lambda w)^{\frac{r}{\lambda}}(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}\frac{dw}{w^{n+m+1}} \\ &= n!\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\frac{1}{2\pi i}\int_C (1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}(r+z)}\frac{dw}{w^{n+m+1}} \qquad (3.26)\end{aligned}$$

bulunur. Cauchy türev formülünden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}(r+z)}\frac{dw}{w^{n+m+1}} = \frac{1}{(n+m)!}(z+r \mid \lambda)_{n+m}$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$\beta_n^{-m}(\lambda, z) = \frac{n!}{(n+m)!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}(z+r \mid \lambda)_{n+m} \qquad (3.27)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için $\left|(z+r|\lambda)_{n+m}\right|$ nin en hızlı artan değerleri (3.27) deki toplama en büyük katkıyı sağlayacaktır. Dolayısıyla

$$\left|(z+r|\lambda)_{n+m}\right| = \prod_{a=0}^{n+m-1}|z+r-a\lambda| \quad \text{ve} \quad |z+r-a\lambda|^2 = (x+r)^2+(y-at)^2$$

olduğundan $h(r) = (x+r)^2$ fonksiyonun $[0, m]$ aralığında maksimum değerlerini araştırmak yeterlidir.

$x > -\frac{m}{2}$ iken $\max_{0\le r\le m} h(r) = h(m)$ olduğundan her $r = 0, 1, \cdots, m-1$ için

$$|z+r-a\lambda|^2 < (x+m)^2+(y-at)^2 = |z+m-a\lambda|^2,$$

yani $\left|(z+r|\lambda)_{n+m}\right| < \left|(z+m|\lambda)_{n+m}\right|$ olur. Böylelikle (3.23) ün ispatı tamamlanmış olur.

$x < -\frac{m}{2}$ iken $\max_{0\leq r\leq m} h(r) = h(0)$ olduğundan her $r = 1, 2, \cdots, m$ için

$$\left|(z + r|\lambda)_{n+m}\right| < \left|(z|\lambda)_{n+m}\right|$$

dır. Buradan (3.24) elde edilir.

Son olarak, eğer $x = -\frac{m}{2}$ ise $\max_{0\leq r\leq m} h(r) = h(0) = h(m)$ olduğundan her $r = 1, 2, \cdots, m-1$ için

$$\left|(z + r|\lambda)_{n+m}\right| < \left|(z|\lambda)_{n+m}\right| = \left|(z + m|\lambda)_{n+m}\right|$$

olur. Bu da (3.25) i verir. ■

Not 2 $\lambda = 0$ *limit durumunda Teorem 3.2 deki (3.23), (3.24), (3.25) formüllerden sırasıyla Lopez ve Temme'nin (2010) elde etmiş oldukları (2.3), (2.5), (2.7) formülleri elde edilir.*

3.2. Dejenere Euler Polinomları

(2.12) ve Cauchy türev formülü yardımıyla

$$\varepsilon_n^{\mu}(\lambda, z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{2^{\mu}(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} + 1\right)^{\mu}} \frac{dw}{w^{n+1}} \tag{3.28}$$

şeklinde yazılabilir. Burada C orijin merkezli yarıçapı $\min\{|w_{-1}|, |w_0|\}$ den küçük olan çemberdir $\left(w_k = \frac{e^{(2k+1)\pi i\lambda} - 1}{\lambda}\right)$.

$\varepsilon_n^{\mu}(\lambda, z)$ polinomunun $\mu = m \geq 1$ için Fourier açılımını bulalım. İlk olarak $m = 1$ durumunu inceleyelim.

$$\varepsilon_n^{1}(\lambda, z) = \varepsilon_n(\lambda, z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{2(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} + 1\right)} \frac{dw}{w^{n+1}}$$

γ_K orijin merkezli yarıçapı artan uygun çember dizisi olmak üzere

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_K} \frac{2(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} + 1\right)} \frac{dw}{w^{n+1}}$$

integralini ele alalım.

$$g_m(w) := g_m(w, z, \lambda) = \frac{2^m(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} + 1\right)^m} \frac{1}{w^{n+1}}$$

olmak üzere Rezidü teoreminden

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_K}\frac{2\left(1+\lambda w\right)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left(\left(1+\lambda w\right)^{\frac{1}{\lambda}}+1\right)}\frac{dw}{w^{n+1}}=n!\sum_{k\in\mathbb{Z}}Rez\left(g_1,w_k\right)+Rez\left(g_1,0\right)$$

dır. Ayrıca (3.2) ye benzer olarak γ_K üzerinden alınan integral 0 olacağından

$$Rez\left(g_1,0\right)=\varepsilon_n^1\left(\lambda,z\right)=\varepsilon_n\left(\lambda,z\right)=-n!\sum_{k=-\infty}^{\infty}Rez\left(g_1,w_k\right) \tag{3.29}$$

elde edilir. $g_1(w)=\dfrac{\frac{2}{w^{n+1}}\left(1+\lambda w\right)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left(1+\lambda w\right)^{\frac{1}{\lambda}}+1}$ fonksiyonu $w_k=\frac{e^{(2k+1)\pi i\lambda}-1}{\lambda}$ noktalarında basit kutba sahip olduğundan

$$\begin{aligned}Rez\left(g_1,w_k\right)&=\frac{\frac{2}{w_k^{n+1}}\left(1+\lambda w_k\right)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left(1+\lambda w_k\right)^{\frac{1}{\lambda}-1}}\\&=\frac{2e^{(2k+1)\pi zi}}{w_k^{n+1}e^{(2k+1)(1-\lambda)\pi i}}=-2\frac{e^{(2k+1)\pi i(z+\lambda)}}{w_k^{n+1}}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\varepsilon_n^1\left(\lambda,z\right)=\varepsilon_n\left(\lambda,z\right)=2n!\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{(2k+1)\pi i(z+\lambda)}}{w_k^{n+1}}$$

elde edilir. $n\geq 1$ ve z$\in\mathbb{R}$ için elde edilen seri mutlak yakınsak olduğundan

$$\varepsilon_n\left(\lambda,z\right)=4n!\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left\{(2k+1)\pi\left(z+\frac{1-n}{2}\lambda\right)-\frac{1}{2}n\pi\right\}}{\sin^{n+1}\left(\frac{2k+1}{2}\pi\lambda\right)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade $0\leq z<1$ ve $n\geq 1$ için $\varepsilon_n\left(\lambda,z\right)$ nin Fourier serisidir.

Şimdi $m>1$ için

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_K}\frac{2^m\left(1+\lambda w\right)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left(\left(1+\lambda w\right)^{\frac{1}{\lambda}}-1\right)^m}\frac{dw}{w^{n+1}}$$

integralini inceleyelim. Rezidü teoreminden

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_K}\frac{2^m\left(1+\lambda w\right)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left(\left(1+\lambda w\right)^{\frac{1}{\lambda}}+1\right)^m}\frac{dw}{w^{n+1}}=Rez\left(g_m(w),0\right)+n!\sum_{k=-\infty}^{\infty}Rez\left(g_m(w),w_k\right)$$

olur. Ayrıca (3.2) ye benzer olarak γ_K üzerinden alınan integral 0 olacağından

$$\varepsilon_n^m\left(\lambda,z\right)=-n!\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k^m\left(n,z,\lambda\right)\frac{e^{(2k+1)\pi i(z+\lambda)}}{w_k^{n+1}} \tag{3.30}$$

şeklinde bir açılıma sahiptir. $m=1$ olduğunda her $k\in\mathbb{Z}$ için $A_k^1(n,z,\lambda)=-2$ dir.

$m>1$ için $A_k^m(n,z,\lambda)$ katsayılarını bulmaya çalışalım. $g_m(w)$ fonksiyonu $w_k=\frac{1}{\lambda}(e^{(2k+1)\lambda\pi i}-1)$ noktalarında m. mertebeden kutup noktasına sahip olduğundan

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{n\to\infty}\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\left(\frac{(w-w_k)^m\,2^m\,(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}+1\right)^m w^{n+1}}\right)=A_k^m(n,z,\lambda)\,\frac{e^{(2k+1)\pi i(z+\lambda)}}{w_k^{n+1}}$$

olur. Ayrıca w_k noktası $\frac{(w-w_k)\,2^m\,(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}+1\right)^m w^{n+1}}$ fonksiyonun kaldırılabilir tekil noktası olduğundan

$$\frac{(w-w_k)^m\,2^m\,(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}+1\right)^m w^{n+1}}=\sum_{r=0}^{\infty}E_r(w-w_k)^r \tag{3.31}$$

şeklinde Taylor açılımına sahiptir. (3.31) ifadesinde w değişkenine göre $(m-1)$ defa türev alınırsa

$$\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\left(\frac{(w-w_k)^m\,2^m\,(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}+1\right)^m w^{n+1}}\right)=\sum_{r=m-1}^{\infty}E_r r\cdots(r-m+2)(w-w_k)^{r-m+1} \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.32) ifadesinde $w\to w_k$ için limite geçilirse

$$E_{m-1}=A_k^m(n,z,\lambda)\,\frac{e^{(2k+1)\pi i(z+\lambda)}}{w_k^n} \tag{3.33}$$

olur. Ayrıca (3.31) de $w=s+w_k$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{s^m 2^m\,(1+\lambda s+\lambda w_k)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1+\lambda(s+w_k))^{\frac{1}{\lambda}}+1\right)^m (s+w_k)^{n+1}}=\sum_{r=0}^{\infty}E_r s^r$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{\infty}E_r s^r &= \frac{s^m 2^m\left(1+\lambda s+\lambda\frac{1}{\lambda}(e^{(2k+1)\lambda\pi i}-1)\right)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left(\left(1+\lambda s+\lambda\frac{1}{\lambda}(e^{(2k+1)\lambda\pi i}-1)\right)^{\frac{1}{\lambda}}+1\right)^m (s+w_k)^{n+1}}\\ &= \frac{2^m s^m\left(\lambda s+e^{(2k+1)\lambda\pi i}\right)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left(\left(\lambda s+e^{(2k+1)\lambda\pi i}\right)^{\frac{1}{\lambda}}+1\right)^m (s+w_k)^{n+1}}\\ &= \frac{2^m s^m\left(1+\lambda s\left(e^{-(2k+1)\lambda\pi i}\right)\right)^{\frac{z}{\lambda}} e^{(2k+1)\pi i z}}{\left(-\left(1+\lambda s\left(e^{-(2k+1)\lambda\pi i}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}}+1\right)^m (s+w_k)^{n+1}}\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $t = se^{-(2k+1)\lambda\pi i}$ dönüşümü yapılırsa

$$\sum_{r=0}^{\infty} E_r e^{(2k+1)\lambda\pi i r} t^r = \frac{(-1)^m 2^m t^m (1+\lambda t)^{\frac{z}{\lambda}} e^{(2k+1)m\lambda\pi i} e^{(2k+1)\pi i z}}{\left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)^m \left(te^{(2k+1)\lambda\pi i} + w_k\right)^{n+1}}$$

$$= (-2)^m e^{(2k+1)\pi i(z+m\lambda)} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r^m(\lambda, z) \frac{t^r}{r!} \left(te^{(2k+1)\lambda\pi i} + w_k\right)^{-n-1}$$

$$= (-2)^m \frac{e^{(2k+1)\pi i(z+m\lambda)}}{w_k^{n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r^m(\lambda, z) \frac{t^r}{r!} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n-1}{r} \left(t\frac{e^{(2k+1)\lambda\pi i}}{w_k}\right)^r$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{r=0}^{\infty} E_r e^{(2k+1)\lambda\pi i r} t^r = (-2)^m \frac{e^{(2k+1)\pi i(z+m\lambda)}}{w_k^{n+1-m}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{r} \frac{\beta_v^m(\lambda, z)}{v!} \binom{-n-1}{r-v} \frac{e^{(2k+1)\lambda(r-v)\pi i}}{w_k^{r-v}} t^r$$

yani

$$E_r = (-2)^m \frac{e^{(2k+1)\pi i(z+m\lambda)}}{w_k^{n+1-m}} \sum_{v=0}^{r} \frac{\beta_v^m(\lambda, z)}{v!} \binom{-n-1}{r-v} \frac{e^{-(2k+1)\lambda v\pi i}}{w_k^{r-v}}$$

elde edilir. Buradan

$$E_{m-1} = (-2)^m \frac{e^{(2k+1)\pi i(z+\lambda)}}{w_k^n} \sum_{v=0}^{m-1} \frac{\beta_v^m(\lambda, z)}{v!} \binom{-n-1}{m-1-v} w_k^v e^{(2k+1)\pi i(m-1-v)\lambda} \tag{3.34}$$

olarak bulunur. (3.33) ve (3.34) ten

$$A_k^m(n, z, \lambda) = (-1)^m 2^m \sum_{v=0}^{m-1} \frac{\beta_v^m(\lambda, z)}{v!} \binom{-n-1}{m-1-v} w_k^v e^{(2k+1)\pi i(m-1-v)\lambda}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \binom{-n-1}{m-1-v} \frac{1}{v!} &= \frac{(-n-1)(-n-1-1)\ldots(-n-1-(m-2-v))}{(m-1-v)!v!} \frac{(m-1)!}{(m-1)!} \\ &= (-1)^{m-1-v} \binom{m-1}{v} \binom{n+m-1}{m-1} \frac{(n+m-v-1)!}{(n+m-1)!} \end{aligned} \tag{3.35}$$

olduğundan

$$A_k^m(n, z, \lambda) = -2^m \binom{n+m-1}{m-1} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v} \frac{\beta_v^m(\lambda, z)(-w_k)^v}{(n+m-1)_v} e^{(2k+1)\pi i(m-1-v)\lambda} \tag{3.36}$$

olarak bulunur. (3.36) ve (3.30) dan

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^m(\lambda, z) &= n! 2^m \binom{n+m-1}{m-1} \\ &\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v} \frac{(-1)^v}{(n+m-1)_v} \beta_v^m(\lambda, z) \frac{e^{(2k+1)\pi i(z+(m-v)\lambda)}}{w_k^{n+m-v}} \end{aligned} \tag{3.37}$$

bulunur.

(3.37) yardımıyla $m \geq 1$ için $\varepsilon_n^m(\lambda, z)$ nin asimptotik davranışı bulunabilir.

Teorem 3.3 *$z \in \mathbb{C}$, m pozitif bir tamsayı ve $\lambda = it \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$ olsun. Sabitlenmiş λ, z ve $\mu = m$ sayıları ve yeteri kadar büyük n sayısı için $\varepsilon_n^m(\lambda, z)$ nin asimptotik davranışı aşağıdaki gibidir. Eğer $t > 0$ ise*

$$\varepsilon_n^m(\lambda, z) = n!\binom{n+m-1}{m-1}\frac{2^m\lambda^{n+m}}{(e^{\lambda\pi i}-1)^{n+m}}\left[\sum_{v=0}^{m-1}\binom{m-1}{v}\frac{(-w_0)^v}{(n+m-1)_v}\right.$$
$$\left.\times\beta_v^m(\lambda, z)\left\{e^{\pi i(z+(m-v)\lambda)}+\kappa^{n+m-v}e^{-\pi i(z+(m-v)\lambda)}\right\}+\mathcal{O}\left(\left|\frac{w_0}{w_1}\right|^n\right)\right] \tag{3.38}$$

dir. Burada sırasıyla $\min\{|w_{-1}|, |w_1|\} = |w_{-1}|$ *veya* $|w_1|$ *ise* $\kappa = \frac{w_0}{w_{-1}} = -e^{\pi i\lambda}$ *veya* 0 *dır. Eğer $t < 0$ ise*

$$\varepsilon_n^m(\lambda, z) = n!\binom{n+m-1}{m-1}\frac{2^m\lambda^{n+m}}{(e^{-\lambda\pi i}-1)^{n+m}}\left[\sum_{v=0}^{m-1}\binom{m-1}{v}\frac{(-w_{-1})^v}{(n+m-1)_v}\right.$$
$$\left.\times\beta_v^m(\lambda, z)\left\{e^{-\pi i(z+(m-v)\lambda)}+\xi^{n+m-v}e^{\pi i(z+(m-v)\lambda)}\right\}+\mathcal{O}\left(\left|\frac{w_{-1}}{w_{-2}}\right|^n\right)\right] \tag{3.39}$$

dır. Burada sırasıyla $\min\{|w_0|, |w_{-2}|\} = |w_0|$ *veya* $|w_{-2}|$ *ise* $\xi = \frac{w_{-1}}{w_0} = -e^{-\pi i\lambda}$ *veya* 0 *dır.*

İspat. İlk olarak $|w_k| = \left|\frac{1}{\lambda}\left(e^{(2k+1)\lambda\pi i}-1\right)\right|$ in sıralanışını inceleyelim.

$t > 0$, $(\lambda = it)$ ve her $k \geq 0$ için

$$|w_k| < |w_{k+1}|, \quad |w_k| < \left|w_{-(k+1)}\right| \text{ ve } |w_{-k}| < \left|w_{-(k+1)}\right|$$

olduğu görülür. Bu takdirde $|w_0| < |w_1| < |w_2| < \cdots$, $|w_0| < |w_1| < |w_{-2}| < |w_{-3}| < \cdots$ ve $|w_0| < |w_{-1}| < |w_{-2}| < \cdots$ dır. Buradan

$$|w_0| < \min\{|w_{-1}|, |w_1|\} \leq \cdots \tag{3.40}$$

elde edilir. $\min\{|w_{-1}|, |w_1|\}$ değeri (3.18) de olduğu gibi belirlenir. Eğer $\min\{|w_{-1}|, |w_1|\} = |w_{-1}|$ ise

$$\begin{aligned} &|w_0| < |w_{-1}| \leq |w_1| < |w_2| < |w_3| < \cdots \\ &|w_0| < |w_{-1}| \leq |w_1| < |w_{-2}| < |w_{-3}| < \cdots \end{aligned} \tag{3.41}$$

ve $\min\{|w_{-1}|, |w_1|\} = |w_1|$ ise

$$\begin{aligned} &|w_0| < |w_1| < |w_2| < |w_3| < \cdots \\ &|w_0| < |w_1| \leq |w_{-1}| < |w_{-2}| < |w_{-3}| < \cdots \end{aligned} \tag{3.42}$$

dır. Dolayısıyla (3.41) ve (3.42) den (3.37) de $k = 0$ asimptotik davranış için ana terimi verir. Böylece (3.38) ispatlanır.

$t < 0$ ve her $k \geq 1$ için

$$|w_{-k}| < \left|w_{-(k+1)}\right| < |w_k| < |w_{k+1}| \text{ with } |w_{-1}| < |w_0| < |w_1|$$

dır. Buradan

$$|w_{-1}| < \min\{|w_0|, |w_{-2}|\} \leq \cdots, \tag{3.43}$$

olur. Bu takdirde $\min\{|w_0|, |w_{-2}|\} = |w_0|$ ise

$$\begin{aligned} &|w_{-1}| < |w_0| \leq |w_{-2}| < |w_1| < |w_2| < \cdots \\ &|w_{-1}| < |w_0| \leq |w_{-2}| < |w_{-3}| < \cdots \end{aligned}$$

dır. Eğer $\min\{|w_0|, |w_{-2}|\} = |w_{-2}|$ ise

$$\begin{aligned} &|w_{-1}| < |w_{-2}| \leq |w_0| < |w_1| < |w_2| < \cdots \\ &|w_{-1}| < |w_{-2}| < |w_{-3}| < |w_{-4}| < \cdots \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla (3.38) de asimptotik davranış için ana terim $k = -1$ deki terimdir. Bu da (3.39) un ispatını tamamlar. ■

Not 3 $\lambda = 0$ *limit durumunda (3.37) den Lopez ve Temme'nin (2010) elde ettikleri (2.10) formülü elde edilir. Ayrıca* $\lim_{t\to 0^+}\left(\varepsilon_n^m(\lambda, z) + \varepsilon_n^m(-\lambda, z)\right)$ *değeri (2.10) formülüne karşılık gelmesine rağmen, Not 1 dekine benzer nedenlerden dolayı, Teorem 3.3 den (2.10) formülü elde edilemez.*

$m = 0, -1, -2, \ldots$ için $\varepsilon_n^m(\lambda, z)$ polinomunun asimptotik davranışı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.4 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *ve* m *negatif olmayan bir tamsayı olsun. Sabitlenmiş* $\mu = -m$ *ve* z *kompleks sayısı için* $x > -\frac{m}{2}$ *ise*

$$\varepsilon_n^{-m}(\lambda, z) = \frac{(z + m|\lambda)_n}{2^m}\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{(z + m - 1|\lambda)_n}{(z + m|\lambda)_n}\right)\right], \quad n \to \infty \tag{3.44}$$

$x < -\frac{m}{2}$ *ise*

$$\varepsilon_n^{-m}(\lambda, z) = \frac{(z|\lambda)_n}{2^m}\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{(z+1|\lambda)_n}{(z|\lambda)_n}\right)\right], \quad n \to \infty \tag{3.45}$$

ve $x = -\frac{m}{2}$ *ise*

$$\varepsilon_n^{-m}(\lambda, z) \sim 2^{-m}\left[\left(-\frac{m}{2} + iy|\lambda\right)_n + \left(\frac{m}{2} + iy|\lambda\right)_n\right], \quad n \to \infty \tag{3.46}$$

dır.

İspat. (3.28) de μ yerine $-m$ yazılırsa

$$\varepsilon_n^{-m}(\lambda, z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{2^{-m}(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left(\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}\right)+1\right)^{-m}}\frac{dw}{w^{n+1}} \tag{3.47}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^{-m}(\lambda, z) &= \frac{n!}{2\pi i}\int_C 2^{-m}\left((1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}}+1\right)^m (1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}\frac{dw}{w^{n+1}} \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \sum_{r=0}^{m} 2^{-m}\binom{m}{r}(1+\lambda w)^{\frac{r}{\lambda}}(1+\lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}\frac{dw}{w^{n+1}} \\
&= n!\sum_{r=0}^{m} 2^{-m}\binom{m}{r}\frac{1}{2\pi i}\int_C (1+\lambda w)^{\frac{1}{\lambda}(r+z)}\frac{dw}{w^{n+1}} \\
&= 2^{-m}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(z+r \mid \lambda)_n
\end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ için $|(z+r|\lambda)_n|$ nin maksimum değerleri (3.27) deki toplama en büyük katkıyı sağlayacaktır. Dolayısıyla $|(z+r|\lambda)_n| = \prod_{a=0}^{n-1}|z+r-a\lambda|$ ve $|z+r-a\lambda|^2 = (x+r)^2 + (y-at)^2$ olduğundan $h(r) = (x+r)^2$ fonksiyonun $[0, m]$ aralığında maksimum değerlerini araştırmak yeterlidir.

$x > -\frac{m}{2}$ iken $\max_{0\le r\le m} h(r) = h(m)$ olduğundan her $r = 0, 1, \cdots, m-1$ için

$$|z+r-a\lambda|^2 < (x+m)^2 + (y-at)^2 = |z+m-a\lambda|^2,$$

yani $|(z+r|\lambda)_n| < |(z+m|\lambda)_n|$ olur. Böylelikle (3.44) ün ispatı tamamlanmış olur.

$x < -\frac{m}{2}$ iken $\max_{0\le r\le m} h(r) = h(0)$ olduğundan her $r = 1, 2, \cdots, m$ için

$$|(z+r|\lambda)_n| < |(z|\lambda)_n|$$

dır. Buradan (3.45) elde edilir.

Son olarak, eğer $x = -\frac{m}{2}$ ise $\max_{0 \le r \le m} h(r) = h(0) = h(m)$ olduğundan her $r = 1, 2, \cdots, m-1$ için

$$|(z + r|\lambda)_n| < |(z|\lambda)_n| = |(z + m|\lambda)_n|$$

olur. Buradan (3.46) elde edilir. ■

Not 4 $\lambda = 0$ *limit durumunda (3.44), (3.45), (3.46) formüllerinden sırasıyla Lopez ve Temme'nin (2010) elde etmiş oldukları (2.4), (2.6), (2.8) formülleri elde edilir.*

3.3. Dejenere Genocchi Polinomları

(2.13) ve Cauchy türev formülü yardımıyla

$$\mathcal{G}_n^{\mu}(\lambda, z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{(2w)^{\mu} (1 + \lambda w)^{\frac{z}{\lambda}}}{\left((1 + \lambda w)^{\frac{1}{\lambda}} + 1\right)^{\mu}} \frac{dw}{w^{n+1}} \tag{3.48}$$

şeklinde yazılabilir. Burada C orijin merkezli yarıçapı $\left|\frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda \pi i} - 1\right)\right|$ den küçük olan çemberdir.

(3.12) ye benzer şekilde $n > m$ ve $0 \le z < 1$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n^{m}(\lambda, z) &= n! 2^m \binom{n-1}{m-1} \\ &\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v} \frac{(-1)^v}{(n-1)_v} \beta_v^m(\lambda, z) \frac{e^{(2k+1)\pi i (z + (m-v)\lambda)}}{w_k^{n-v}}, \end{aligned} \tag{3.49}$$

elde edilir. Bu seri $n > m$ ve $z \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsaktır. Bu seri $n > m$ ve $0 \le z < 1$ için $\mathcal{G}_n^m(\lambda, z)$ polinomunun Fourier açılımına karşılık gelmektedir.

$\mathcal{G}_n^m(\lambda, z)$ polinomunun asimptotik davranışını veren aşağıdaki iki teoremin ispatı Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 ile aynıdır.

Teorem 3.5 $z \in \mathbb{C}$, *m pozitif tamsayı ve* $\lambda = it \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$ *olsun.* $n \to \infty$ *için* $\mu = m$ *ve* z *sabitlendiğinde* $t > 0$ *için*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n^m(\lambda, z) &= n! 2^m \binom{n-1}{m-1} \frac{\lambda^n}{(e^{\lambda \pi i} - 1)^n} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v} \frac{(-1)^v}{(n-1)_v} \\ &\times \beta_v^m(\lambda, z) \left(\frac{e^{\lambda \pi i} - 1}{\lambda}\right)^v e^{\pi i (z + (m-v)\lambda)} + O\left(\left|\frac{e^{\lambda \pi i} - 1}{e^{3\lambda \pi i} - 1}\right|^n\right) \end{aligned}$$

ve $t<0$ *için*

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n^m(\lambda,z) &= n!2^m\binom{n-1}{m-1}\frac{\lambda^n}{(e^{-\lambda\pi i}-1)^n}\sum_{v=0}^{m-1}\binom{m-1}{v}\frac{(-1)^v}{(n-1)_v}\\ &\quad\times\beta_v^m(\lambda,z)\left(\frac{e^{-\lambda\pi i}-1}{\lambda}\right)^v+O\left(\left|\frac{e^{-\lambda\pi i}-1}{e^{\eta\lambda\pi i}-1}\right|^n\right)\Bigg]\end{aligned}$$

dır.

Teorem 3.6 *$z=x+iy\in\mathbb{C}$ ve m negatif olmayan bir tamsayı olsun. $n\to\infty$ için $\mu=-m$ ve z sabitlendiğinde $x>-\frac{m}{2}$ için*

$$\mathcal{G}_n^{-m}(\lambda,z)=\frac{n!}{(n+m)!}\frac{(z+m|\lambda)_{n+m}}{2^m}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{(z+m-1|\lambda)_{n+m}}{(z+m|\lambda)_{n+m}}\right)\right],$$

eğer $x<-\frac{m}{2}$ ise

$$\mathcal{G}_n^{-m}(\lambda,z)=\frac{n!}{(n+m)!}\frac{(z|\lambda)_{n+m}}{2^m}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{(z+1|\lambda)_{n+m}}{(z|\lambda)_{n+m}}\right)\right],$$

eğer $x=-\frac{m}{2}$ ise

$$\mathcal{G}_n^{-m}(\lambda,z)\sim\frac{n!}{(n+m)!}2^{-m}\left[\left(-\frac{m}{2}+iy|\lambda\right)_{n+m}+\left(\frac{m}{2}+iy|\lambda\right)_{n+m}\right]$$

dır.

3.4. Apostol-Bernoulli Polinomları

(2.14) eşitliğinde $\mu=m$ yazılırsa

$$\frac{w^m e^{wz}}{(\alpha e^w-1)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}_n^m(z,\alpha)\frac{w^n}{n!},\qquad |w|<|2\pi i-\ln\alpha|$$

elde edilir. $n<m$ olduğunda $B_n^m(z,\alpha)=0$ dır. Bu takdirde, Cauchy türev formülünden

$$\mathcal{B}_n^m(z,\alpha)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{w^m e^{wz}}{(\alpha e^w-1)^m}\frac{dw}{w^{n+1}}$$

olur. Burada C orijin merkezli yarıçapı $|2\pi i-\ln\alpha|$ den küçük olan çemberdir.

$m=1$ için $\mathcal{B}_n^1(z,\alpha)=\mathcal{B}_n(z,\alpha)$ polinomunun Fourier açılımı (2.17) deki gibidir.

Şimdi $m > 1$ için inceleyelim. Bunun için

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{w^m e^{wz}}{(\alpha e^w - 1)^m}\frac{dw}{w^{n+1}}$$

integralini hesaplayalım. Burada γ orijin merkezli $|(2K+1)\pi i - \ln\alpha|$ yarıçaplı çemberdir.

$$h_m(w) := h(w,z,\alpha) = \frac{w^m e^{wz}}{(\alpha e^w - 1)^m}\frac{1}{w^{n+1}}$$

fonksiyonu $w_k = (2k\pi i - \ln\alpha)$ noktalarında $m.$ mertebeden kutba sahip olduğu için Rezidü teoreminden

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{w^m e^{wz}}{(\alpha e^w - 1)^m}\frac{dw}{w^{n+1}} = n!\sum_k Rez\left(h_m(w), w_k\right) + n!Rez\left(h_m(w), 0\right)$$

olur. Ayrıca $w = re^{i\theta}$ dönüşümü yapılırsa, $0 \leq z < 1$ için

$$\begin{aligned}\left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{w^m e^{wz}}{(\alpha e^w - 1)^m}\frac{dw}{w^{n+1}}\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{r^m e^{im\theta}e^{re^{i\theta}z}}{\left(\alpha e^{re^{i\theta}} - 1\right)^m}\frac{ire^{i\theta}d\theta}{r^{n+1}e^{i\theta(n+1)}}\right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{e^{rz\cos\theta}}{\left|\left(\alpha e^{r\cos\theta}e^{ir\sin\theta} - 1\right)^m\right|}\frac{d\theta}{r^{n-m}} \\ &= \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1}{\left|\left(\alpha e^{r(1-z)\cos\theta}e^{ir\sin\theta} - e^{-rz\cos\theta}\right)^m\right|}\frac{d\theta}{r^{n-m}} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (3.50)\end{aligned}$$

olduğundan

$$n!Rez\left(h_m(w), 0\right) = \mathcal{B}_n^m(z,\alpha) = -n!\sum_k Rez\left(h_m(w), w_k\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\mathcal{B}_n^m(z,\alpha) = -n!\sum_{k=-\infty}^{\infty} Rez\left(f, w_k\right) = -n!\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k^m(z,n,\alpha)\frac{e^{w_k z}}{w_k^n} \qquad (3.51)$$

şeklinde bir açılıma sahiptir. Burada $\forall k$ için $\xi_k^1(z,n,\alpha) = 1$ dir. $h_m(w)$ fonksiyonu w_k noktalarında $m.$ mertebeden kutba sahip olduğundan

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{w\to w_k}\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\left(\frac{(w-w_k)^m w^m e^{wz}}{(\alpha e^w - 1)^m w^{n+1}}\right) = \xi_k^m(z,n,\alpha)\frac{e^{w_k z}}{w_k^n}$$

olur. Ayrıca $\dfrac{(w-w_k)^m w^m e^{wz}}{(\alpha e^w-1)^m w^{n+1}}$ fonksiyonu w_k noktalarında kaldırılabilir tekil noktaya sahip olduğundan

$$\frac{(w-w_k)^m w^m e^{wz}}{(\alpha e^w-1)^m w^{n+1}}=\sum_{r=0}^{\infty} C_r(w-w_k)^r \tag{3.52}$$

şeklinde Taylor açılımına sahiptir. (3.52) ifadesinde $(m-1)$ defa türev alınırsa

$$\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\left(\frac{(w-w_k)^m w^m e^{wz}}{(\alpha e^w-1)^m w^{n+1}}\right)=\sum_{r=m-1}^{\infty} C_r r(r-1)...(r-m+2)(w-w_k)^{r-m+1}$$

olur. $w\to w_k$ için limite geçilirse

$$C_{m-1}=\xi_k^m(z,n,\alpha)\frac{e^{w_k z}}{w_k^n} \tag{3.53}$$

bulunur. Ayrıca (3.52) de $w=s+w_k$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{\infty} C_r s^r &= \frac{s^m(s+w_k)^m e^{(s+w_k)z}}{(\alpha e^{s+w_k}-1)^m (s+w_k)^{n+1}}\\ &= e^{w_k z}\frac{s^m e^{sz}}{(e^s-1)^m}(s+w_k)^{m-n-1}\\ &= \frac{e^{w_k z}}{w_k^{n+1-m}}\sum_{v=0}^{\infty} B_v^m(z)\frac{s^v}{v!}\sum_{v=0}^{\infty}\binom{m-n-1}{v}\frac{s^v}{w_k^v}\\ &= \frac{e^{w_k z}}{w_k^{n+1-m}}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{r}\frac{B_v^m(z)}{v!}\binom{m-n-1}{r-v}w_k^{v-r}s^r\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$C_{m-1}=\frac{e^{w_k z}}{w_k^n}\sum_{v=0}^{m-1}\frac{B_v^m(z)}{v!}\binom{m-n-1}{m-1-v}w_k^v \tag{3.54}$$

bulunur. (3.53) ve (3.54) ten

$$\xi_k^m(z,n,\alpha)=\sum_{v=0}^{m-1}\frac{B_v^m(z)}{v!}\binom{m-n-1}{m-1-v}w_k^v \tag{3.55}$$

elde edilir. (3.10) ve (3.55) ten

$$\xi_k^m(z,n,\alpha)=(-1)^{m-1}\binom{n-1}{m-1}\sum_{v=0}^{m-1}B_v^m(z)\binom{m-1}{v}\frac{(n-1-v)!}{(n-1)!}(-w_k)^v \tag{3.56}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.56) dan

$$\mathcal{B}_n^m(z,\alpha)=(-1)^m n!\binom{n-1}{m-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\sum_{v=0}^{m-1}\binom{m-1}{v}\frac{(-1)^v B_v^m(z)}{(n-1)_v}\frac{e^{w_k z}}{w_k^{n-v}} \tag{3.57}$$

olarak bulunur. $n > m$ olduğunda $0 \leq z < 1$ için bu seri mutlak yakınsaktır ve $\mathcal{B}_n^m(z,\alpha)$ polinomunun Fourier açılımına karşılık gelmektedir.

$\xi_k^m(z,n,\alpha)$ katsayılarının asimptotoik davranışı

$$\xi_k^m(z,n,\alpha) = (-1)^{m-1}\frac{n^{m-1}}{(m-1)!}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n\to\infty$$

şeklinde olur.

$\mathcal{B}_n^m(z,\alpha)$ polinomunun asimptotik davranışı aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 3.7 *Sabitlenmiş $\mu = m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ ve yeteri kadar büyük n sayıları için $\alpha \in C\backslash(-\infty,0)\cup\{1\}$ olduğunda*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n^m(z,\alpha) &= (-1)^{n+m}\frac{n!}{\alpha^z(\log\alpha)^n}\binom{n-1}{m-1}\\ &\times\left[\sum_{v=0}^{m-1}\frac{(\log\alpha)^v}{(n-1)_v}\binom{m-1}{v}B_v^m(z)+O\left(\frac{1}{\min\left|1\pm\frac{2\pi i}{\log\alpha}\right|^n}\right)\right]\end{aligned}\tag{3.58}$$

ve $\alpha \in (-\infty,0)$ olduğunda

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n^m(z,\alpha) &= (-1)^{n+m}\frac{n!}{\alpha^z(\log\alpha)^n}\binom{n-1}{m-1}\left[\sum_{v=0}^{m-1}\frac{(\log\alpha)^v}{(n-1)_v}\binom{m-1}{v}B_v^m(z)\right.\\ &\times\left.\left\{1+\left(\frac{\log|\alpha|+\pi i}{\log|\alpha|-\pi i}\right)^{n-v}e^{2\pi iz}\right\}+O\left(\frac{1}{\left|1+\frac{2\pi i}{\log\alpha}\right|^n}\right)\right]\end{aligned}\tag{3.59}$$

dır.

İspat. Her $k \geq 0$ için

$$0 < |w_{\pm k}| \leq \left|w_{\pm(k+1)}\right| \tag{3.60}$$

olduğu kolayca görülür.

$\alpha \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0)\cup\{1\}$ için, $|w_0| < |w_{\mp 1}|$ ve $\left|\frac{w_{\mp 1}}{\log\alpha}\right| = \left|1\pm\frac{2\pi i}{\log\alpha}\right| > 1$ dır. Dolayısıyla $\mathcal{B}_n^m(z,\alpha)$ polinomunun asimptotik davranışı için (3.57) de sadece $k=0$ terimini almak yeterlidir. Bu takdirde sabitlenmiş m ve z sayıları ve $n\to\infty$ için (3.58) elde edilir.

$\alpha \in (-\infty, 0)$ için $|w_0| = |-\log \alpha| = |2\pi i - \log \alpha| = |w_1| < |w_{-1}|$ ve $\left|\frac{w_{-1}}{\log \alpha}\right| = \left|1 + \frac{2\pi i}{\log \alpha}\right| > 1$ dır. Bu takdirde (3.57) de sadece $k = 0, 1$ terimlerini almak yeterlidir. Dolayısıyla (3.57) den (3.59) elde edilir. ■

Not 5 *Teorem 3.7 de verilen (3.58) ve (3.59) ifadeler aynı koşullar altında* $\alpha \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0) \cup \{1\}$ *için*

$$\mathcal{B}_n^m(z, \alpha) = (-1)^{n+m} \frac{n!}{\alpha^z (\log \alpha)^n} \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

ve $\alpha \in (-\infty, 0)$ *için*

$$\mathcal{B}_n^m(z, \alpha) = (-1)^{n+m} \frac{n!}{\alpha^z (\log \alpha)^n} \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} \left[1 + \left(\frac{\log|\alpha| + \pi i}{\log|\alpha| - \pi i}\right)^n e^{2\pi i z} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

şeklinde yazılabilir.

Not 6 *Ayrıca (3.57) de* $\alpha = 1$ *alınırsa Lopez ve Temme'nin (2010) elde ettiği (2.9) formülü elde edilir..*

Not 7 *Teorem 3.7 ün sonucu olarak Navas vd (2011) tarafından elde edilen (2.20) ve (2.21) formülleri elde edilir.*

Teorem 3.8 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *ve* m *negatif olmayan bir tamsayı olsun. Sabitlenmiş* $\mu = -m$, z *ve yeteri kadar büyük* n *sayıları için* $x > -\frac{m}{2}$ *olduğunda*

$$\mathcal{B}_n^{-m}(z, \alpha) = \alpha^m \frac{n!}{(n+m)!} (z+m)^{n+m} \left[1 + O\left(\left(\frac{z+m-1}{z+m}\right)^{n+m}\right)\right], \tag{3.61}$$

$x < -\frac{m}{2}$ *olduğunda*

$$\mathcal{B}_n^{-m}(z, \alpha) = (-1)^m \frac{n!}{(n+m)!} z^{n+m} \left[1 + O\left(\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n+m}\right)\right], \tag{3.62}$$

ve $x = -\frac{m}{2}$ *olduğunda*

$$\mathcal{B}_n^{-m}(z, \alpha) \sim \frac{(-1)^m n!}{(n+m)!} \left[\left(-\frac{m}{2} + iy\right)^{n+m} + (-\alpha)^m \left(\frac{m}{2} + iy\right)^{n+m}\right]. \tag{3.63}$$

dır.

İspat. (2.14) de μ yerine $-m$ yazılırsa

$$\frac{w^{-m}e^{wz}}{(\alpha e^{w}-1)^{-m}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}_n^{-m}(z,\alpha)\frac{w^n}{n!}\quad,\qquad\qquad |w|<|2\pi i-\ln\alpha|$$

elde edilir. Cauchy türev formülünden

$$\mathcal{B}_n^{-m}(z,\alpha)=n!\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{w^{-m}e^{wz}}{(\alpha e^{w}-1)^{-m}}\frac{dw}{w^{n+1}}$$

bulunur. Burada C orijin merkezli yarıçapı $|2\pi i-\ln\alpha|$ den küçük olan çemberdir. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_n^{-m}(z,\alpha) &= \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C(\alpha e^{w}-1)^{m}e^{wz}\frac{dw}{w^{n+1+m}}\\
&= \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\alpha^{r}e^{rw}e^{wz}\frac{dw}{w^{n+1+m}}\\
&= n!\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\alpha^{r}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{w(z+r)}\frac{dw}{w^{n+1+m}}\\
&= \frac{n!}{(n+m)!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\alpha^{r}(z+r)^{n+m} \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.64) deki toplama $n\to\infty$ iken $|z+r|$ nin maksimum değeri en büyük katkıyı sağlayacaktır. $z\in\mathbb{R}^{+}$ için $|z+r|$ maksimum değerini $r=m$ de aldığından (3.61) elde edilir. $z=x+iy\in\mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde $|z+r|$ nin maksimum değerini bulmak için $f(r)=(x+r)^2$ fonksiyonunun $[0,m]$ aralığında maksimumunu incelemek yeterlidir. $x<-\frac{m}{2}$ olduğunda $f(r)$ fonksiyonu $r=0$ noktasında maksimum olur. Bu da bize (3.62) yi verir. $x=-\frac{m}{2}$ durumunda ise $f(r)$ fonksiyonu $r=0$ ve $r=m$ noktalarında maksimum değerini alır. Bu da bize (3.63) ü verir. Son olarak $x>-\frac{m}{2}$ iken $f(r)$ fonksiyonu $r=m$ noktasında maksimum değerini aldığından (3.61) elde edilir. ■

Not 8 *Ayrıca teorem 3.8 de $\alpha=1$ alınırsa sırasıyla Lopez ve Temme'nin (2010) elde etmiş oldukları (2.3), (2.5), (2.7) formülleri elde edilir.*

3.5. Apostol-Euler Polinomları

Genelleştirilmiş Apostol-Euler polinomlarının üreteç fonksiyonu $w = 0$ noktasında analitik olduğundan (2.15) ve Cauchy türev formülü yardımıyla

$$\mathcal{E}_n^{\mu}(z,\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{2^{\mu}e^{wz}}{(\alpha e^{w}+1)^{\mu}}\frac{dw}{w^{n+1}} \tag{3.65}$$

şeklinde yazılır. Burada C orijin merkezli yarıçapı $|\pi i - \ln\alpha|$ den küçük olan çemberdir.

$\mu = m \geq 1$ durumunda $\mathcal{E}_n^{\mu}(z,\alpha)$ polinomunun Fourier açılımını inceleyelim. $m = 1$ için $\mathcal{E}_n^{1}(z,\alpha) = \mathcal{E}_n(z,\alpha)$ polinomunun Fourier açılımı (2.18) deki gibidir.

$m > 1$ için Fourier açılımını bulmaya çalışalım. Bunun için

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2^{m}e^{wz}}{(\alpha e^{w}+1)^{m}}\frac{dw}{w^{n+1}}$$

integralini hesaplayalım. Burada γ orijin merkezli $|2K\pi i - \ln\alpha|$ yarıçaplı çemberdir.

$$\varphi_m(w) := \varphi_m(w,z,\lambda) = \frac{2^{\mu}e^{wz}}{(\alpha e^{w}+1)^{\mu}}\frac{1}{w^{n+1}}$$

fonksiyonu $w_k = (2k+1)\pi i - \ln\alpha$ noktalarında $m.$ mertebeden kutba sahiptir. Ayrıca (3.50) ye benzer şekilde γ üzerinden alınan integral 0 olacağından ve Rezidü teoreminden

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2^{m}e^{wz}}{(\alpha e^{w}+1)^{m}}\frac{dw}{w^{n+1}} = n!Rez\left(\varphi_m(w),0\right) + n!\sum_{k=-\infty}^{\infty} Rez\left(\varphi_m(w),w_k\right) = 0$$

olur. Bu takdirde

$$\mathcal{E}_n^{m}(z,\alpha) = -n!\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_k^{m}(z,n,\alpha)\frac{e^{w_k z}}{w_k^{n+1}} \tag{3.66}$$

şeklinde bir açılıma sahiptir. Burada $\forall k$ için $\mathcal{F}_k^{1}(z,n,\alpha) = -2$ dir. $\varphi_m(w) := \varphi_m(w,z,\lambda) = \dfrac{2^{\mu}e^{wz}}{(\alpha e^{w}+1)^{\mu}}\dfrac{1}{w^{n+1}}$ fonksiyonu $w_k = (2k+1)\pi i - \ln\alpha$ noktalarında $m.$ mertebeden kutup noktasına sahip olduğundan

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{w\to w_k}\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\left(\frac{(w-w_k)^{m}2^{m}e^{wz}}{(\alpha e^{w}+1)^{m}w^{n+1}}\right) = \mathcal{F}_k^{m}(z,n,\alpha)\frac{e^{w_k z}}{w_k^{n+1}}$$

olur. Ayrıca $\dfrac{(w-w_k)^m\,2^m e^{wz}}{(\alpha e^w+1)^m\,w^{n+1}}$ fonksiyonu w_k noktalarında kaldırılabilir tekil noktaya sahip olduğundan

$$\frac{(w-w_k)^m\,2^m e^{wz}}{(\alpha e^w+1)^m\,w^{n+1}}=\sum_{r=0}^{\infty}C_r(w-w_k)^r \tag{3.67}$$

şeklinde Taylor açılımına sahiptir. (3.67) ifadesinde $(m-1)$ defa türev alınırsa

$$\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\left(\frac{(w-w_k)^m\,2^m e^{wz}}{(\alpha e^w+1)^m\,w^{n+1}}\right)=\sum_{r=m-1}^{\infty}C_r r(r-1)...(r-m+2)(w-w_k)^{r-m+1}$$

elde edilir. $w\to w_k$ için limite geçilirse

$$C_{m-1}=\mathcal{F}_k^m\left(z,n,\alpha\right)\frac{e^{w_k z}}{w_k^{n+1}} \tag{3.68}$$

olur. Ayrıca (3.67) de $w=s+w_k$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty}C_r s^r &= \frac{s^m 2^m e^{(s+w_k)z}}{(\alpha e^{s+w_k}+1)^m\,(s+w_k)^{n+1}}\\
&= 2^m e^{w_k z}\frac{s^m e^{sz}}{(-e^s+1)^m}\,(s+w_k)^{-n-1}\\
&= \frac{(-2)^m\,e^{w_k z}}{w_k^{n+1}}\frac{s^m e^{sz}}{(e^s-1)^m}\left(\frac{s}{w_k}+1\right)^{-n-1}\\
&= \frac{(-2)^m\,e^{w_k z}}{w_k^{n+1}}\sum_{v=0}^{\infty}B_v^m\left(z\right)\frac{s^v}{v!}\sum_{v=0}^{\infty}\binom{-n-1}{v}\frac{s^v}{w_k^v}\\
&= \frac{(-2)^m\,e^{w_k z}}{w_k^{n+1}}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{r}\frac{B_v^m\left(z\right)}{v!}\binom{-n-1}{r-v}w_k^{v-r}s^r
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$C_{m-1}=\frac{(-2)^m\,e^{w_k z}}{w_k^{n+1}}\sum_{v=0}^{m-1}\frac{B_v^m\left(z\right)}{v!}\binom{-n-1}{m-1-v}w_k^{v-m+1} \tag{3.69}$$

olur. (3.68) ve (3.69) dan

$$\mathcal{F}_k^m\left(z,n,\alpha\right)=(-2)^m\sum_{v=0}^{m-1}\frac{B_v^m\left(z\right)}{v!}\binom{-n-1}{m-1-v}w_k^{v-m+1} \tag{3.70}$$

elde edilir. (3.35) ve (3.70) den

$$\mathcal{F}_k^m\left(z,n,\alpha\right)=\frac{-2^m}{(w_k)^{m-1}}\binom{m+n-1}{m-1}\sum_{v=0}^{m-1}B_v^m\left(z\right)\binom{m-1}{v}\frac{(n+m-1-v)!}{(n+m-1)!}(-w_k)^v \tag{3.71}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.66) dan

$$\mathcal{E}_n^m(z,\alpha) = 2^m n! \binom{n+m-1}{m-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v} \frac{(-1)^v B_v^m(z)}{(n+m-1)_v} \frac{e^{w_k z}}{w_k^{n+m-v}} \tag{3.72}$$

elde edilir. Bu ifade $0 \le z < 1$ ve $n \ge 1$ için $\mathcal{E}_n^m(z,\alpha)$ nin Fourier serisine karşılık gelir.

$\mathcal{E}_n^m(z,\alpha)$ nın seri temsili yardımıyla $\mu = m \ge 1$ durumunda asimptotik davranışı incelenir.

Teorem 3.9 *$z \in \mathbb{C}$ ve m pozitif bir tamsayı olsun. $n \to \infty$ ve sabitlenmiş $\mu = m$ ve z için, $0 < \arg\alpha \le \pi$ ve $\alpha \ne -1$ olduğunda*

$$\mathcal{E}_n^m(z,\alpha) = \frac{2^m}{\alpha^z} \frac{n!}{(\pi i - \log\alpha)^{n+m}} \binom{n+m-1}{m-1} \times \left[\sum_{v=0}^{m-1} \frac{(\log\alpha - \pi i)^v}{(n+m-1)_v} \binom{m-1}{v} B_v^m(z) e^{\pi i z} + O\left(\left| \frac{\pi i - \log\alpha}{\pi i + \log\alpha} \right|^n \right) \right], \tag{3.73}$$

$\alpha \in (0,\infty)$ olduğunda

$$\mathcal{E}_n^m(z,\alpha) = \frac{2^m}{\alpha^z} \frac{(-1)^{n+m} n!}{(\pi i + \log\alpha)^{n+m}} \binom{n+m-1}{m-1} \left[\sum_{v=0}^{m-1} \frac{(\log\alpha + \pi i)^v}{(n+m-1)_v} \binom{m-1}{v} \right. \times B_v^m(z) \left\{ e^{-\pi i z} + \left(\frac{\log\alpha + \pi i}{\log\alpha - \pi i} \right)^{n+m-v} e^{\pi i z} \right\} \left. + O\left(\left| \frac{\pi i + \log\alpha}{3\pi i - \log\alpha} \right|^n \right) \right], \tag{3.74}$$

ve $-\pi < \arg\alpha < 0$ olduğunda

$$\mathcal{E}_n^m(z,\alpha) = \frac{2^m}{\alpha^z} \frac{(-1)^{n+m} n!}{(\pi i + \log\alpha)^{n+m}} \binom{n+m-1}{m-1} \times \left[\sum_{v=0}^{m-1} \frac{(\log\alpha + \pi i)^v}{(n+m-1)_v} \binom{m-1}{v} B_v^m(z) e^{-\pi i z} + O\left(\left| \frac{\pi i + \log\alpha}{\pi i - \log\alpha} \right|^n \right) \right] \tag{3.75}$$

dır.

İspat. Eğer $0 \le \arg\alpha \le \pi$ ve $\alpha \ne -1$ ise her $k \ge 0$ için

$$0 < |w_{-k}| \le |w_k| \le \left| w_{-(k+1)} \right| \le |w_{k+1}| \tag{3.76}$$

dır. Eğer $-\pi < \arg\alpha < 0$ ise her $k \ge 0$ için

$$0 < |w_{-k}| \le \left| w_{-(k+1)} \right| \le |w_k| \le |w_{k+1}| \text{ with } |w_{-1}| < |w_0| < |w_{-2}| \tag{3.77}$$

dır. Bu takdirde $0 < \arg\alpha \leq \pi$ ve $\alpha \neq -1$ için $|w_0| = |\pi i - \log\alpha| < |w_{-1}| \leq \cdots$ dır. Dolayısıyla sabitlenmiş m ve z için $n \to \infty$ iken $\mathcal{E}_n^m(z,\alpha)$ nin asimptotik davranışı için (3.72) de temel terim $k = 0$ olduğunda görülür. Bu takdirde (3.72) den (3.73) elde edilir. $\alpha \in (0,\infty)$ için $|w_0| = |w_{-1}| < |w_1| \leq \cdots$ dır. Bu takdirde (3.72) de $k = 0, -1$ olduğunda görülür. Bu da bize (3.74) yi verir. $-\pi < \arg\alpha < 0$ için $|w_{-1}| < |w_0| \leq \cdots$ dır. Bu durumda (3.72) de temel terim $k = -1$ de görülür. Böylece (3.75) nin ispatını tamamlanır. ■

Not 9 *Teorem 3.9 da verilen asimptotik formlar Not 1 deki gibi yazılabilir.*

Not 10 *(3.72) de $\alpha = 1$ alındığında, Lopez ve Temme'nin (2010) elde etmiş oldukları (2.10) formülü elde edilir.*

Not 11 *Teorem 3.9 un sonucu olarak Navas vd (2011) tarafından elde edilen (2.22) ve (2.23) formülleri elde edilir.*

Teorem 3.10 *$z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1$ ve m negatif olmayan bir tamsayı olsun. Sabitlenmiş $\mu = -m$, z ve yeteri kadar büyük n sayıları için eğer $x > -\frac{m}{2}$ ise*

$$\mathcal{E}_n^{-m}(z,\alpha) = 2^{-m}\alpha^m (z+m)^n \left[1 + O\left(\left(\frac{z+m-1}{z+m}\right)^n\right)\right], \tag{3.78}$$

eğer $x < -\frac{m}{2}$ ise

$$\mathcal{E}_n^{-m}(z,\alpha) = 2^{-m} z^n \left[1 + O\left(\left(\frac{z+1}{z}\right)^n\right)\right] \tag{3.79}$$

ve eğer $x = -\frac{m}{2}$ ise

$$\mathcal{E}_n^{-m}(z,\alpha) \sim 2^{-m}\left[\left(-\frac{m}{2} + iy\right)^n + \alpha^m \left(\frac{m}{2} + iy\right)^n\right] \tag{3.80}$$

dır.

İspat. (3.65) de μ yerine $-m$ yazılırsa

$$\mathcal{E}_n^{-m}(z,\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{2^{-m}e^{wz}}{(\alpha e^w + 1)^{-m}} \frac{dw}{w^{n+1}}$$

elde edilir. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n^{-m}(z,\alpha) &= \frac{n!}{2\pi i}\int_C (\alpha e^w+1)^m 2^{-m} e^{wz}\frac{dw}{w^{n+1}} \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\alpha^r e^{rw}2^{-m}e^{wz}\frac{dw}{w^{n+1}} \\
&= n!\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}2^{-m}\alpha^r\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{w(z+r)}\frac{dw}{w^{n+1}} \\
&= 2^{-m}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\alpha^r(z+r)^n
\end{aligned}$$

seri açılımı elde edilir. $\mathcal{E}_n^{-m}(z,\alpha)$ için elde ettiğimiz toplama $n\to\infty$ iken $|z+r|$ nin maksimum değeri en büyük katkıyı sağlayacaktır. Dolayısıyla Teorem 3.8 e benzer olarak sırasıyla (3.79), (3.80) ve (3.78) ispatlanır. ■

Not 12 *Teorem 3.10 da $\alpha = 1$ alınırsa sırasıyla Lopez ve Temme'nin (2010) elde etmiş oldukları (2.4), (2.6), (2.8) formülleri elde edilir.*

3.6. Apostol-Genocchi Polinomları

$\mathcal{B}_n^{\mu}(z,\alpha)$ ve $\mathcal{G}_n^{\mu}(z,\alpha)$ polinomlarının üreteç fonksiyonlarından

$$\mathcal{G}_n^{\mu}(z,\alpha) = (-2)^{\mu}\,\mathcal{B}_n^{\mu}(z,-\alpha)$$

olduğu görülür. Böylece (3.57) yardımıyla $\mathcal{G}_n^{\mu}(z,\alpha)$ için de bir Fourier serisi elde edilir. Ayrıca $\mathcal{G}_n^{\mu}(z,\alpha)$ ile $\mathcal{E}_n^{\mu}(z,\alpha)$ polinomlarının üreteç fonksiyonlarının kutup noktaları aynı olduğu için (3.77) kullanılarak Teorem 3.7 ve Teorem 3.8 e benzer teoremler $\mathcal{G}_n^{\mu}(z,\alpha)$ polinomu için de aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 3.11 *$z\in\mathbb{C}$ ve m bir pozitif tamsayı olsun. $n\to\infty$ için $\mu = m$ ve z sabitlendiğinde $0<\arg\alpha\le\pi$ ve $\alpha\ne -1$ için*

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n^{m}(z,\alpha) &= \frac{2^m}{\alpha^z}\frac{n!}{(\pi i-\log\alpha)^n}\binom{n-1}{m-1} \\
&\times\left[\sum_{v=0}^{m-1}\frac{(\log\alpha-\pi i)^v}{(n-1)_v}\binom{m-1}{v}B_v^m(z)\,e^{\pi i z}+O\left(\left|\frac{\pi i-\log\alpha}{\pi i+\log\alpha}\right|^n\right)\right],
\end{aligned}$$

$\alpha \in (0,\infty)$ *için*

$$\mathcal{G}_n^m(z,\alpha) = \frac{2^m}{\alpha^z}\frac{(-1)^n n!}{(\pi i+\log\alpha)^n}\binom{n-1}{m-1}\left[\sum_{v=0}^{m-1}\frac{(\log\alpha+\pi i)^v}{(n-1)_v}\binom{m-1}{v}\right.$$
$$\left.\times B_v^m(z)\left\{e^{-\pi i z}+\left(\frac{\log\alpha+\pi i}{\log\alpha-\pi i}\right)^{n-v}e^{\pi i z}\right\}+O\left(\left|\frac{\pi i+\log\alpha}{3\pi i-\log\alpha}\right|^n\right)\right],$$

ve $-\pi<\arg\alpha<0$ *için*

$$\mathcal{G}_n^m(z,\alpha) = \frac{2^m}{\alpha^z}\frac{(-1)^n n!}{(\pi i+\log\alpha)^n}\binom{n-1}{m-1}$$
$$\times\left[\sum_{v=0}^{m-1}\frac{(\log\alpha+\pi i)^v}{(n-1)_v}\binom{m-1}{v}B_v^m(z)\,e^{-\pi i z}+O\left(\left|\frac{\pi i+\log\alpha}{\pi i-\log\alpha}\right|^n\right)\right]$$

dır.

Teorem 3.12 $z=x+iy\in\mathbb{C}$ *ve* m *negatif olmayan bir tamsayı olsun. Sabitlenmiş* $\mu=-m$, z *ve* $n\to\infty$ *için* $x>-\frac{m}{2}$ *ise*

$$\mathcal{G}_n^{-m}(z,\alpha) = \frac{2^{-m}n!\alpha^m}{(n+m)!}(z+m)^{n+m}\left[1+O\left(\left(\frac{z+m-1}{z+m}\right)^{n+m}\right)\right],$$

$x<-\frac{m}{2}$ *ise*

$$\mathcal{G}_n^{-m}(z,\alpha) = \frac{2^{-m}n!}{(n+m)!}z^{n+m}\left[1+O\left(\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n+m}\right)\right]$$

ve $x=-\frac{m}{2}$ *ise*

$$\mathcal{G}_n^{-m}(z,\alpha) \sim \frac{2^{-m}n!}{(n+m)!}\left[\alpha^m\left(-\frac{m}{2}+iy\right)^{n+m}+\left(\frac{m}{2}+iy\right)^{n+m}\right]$$

dır.

4. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, genelleştirilmiş dejenere Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları ve genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi polinomları için Cauchy integrali ve üreteç fonksiyonlarından yararlanarak bu polinomların Fourier serileri elde edilmiştir. Bu Fourier açılımları yardımı ile yeteri kadar büyük n değerleri için bu polinomların asimptotik ifadeleri elde edilmiştir. Lopez ve Temme'nin (2010) genelleştirilmiş Bernoulli ve Euler polinomları için elde ettiği asimptotik ifadeler bu çalışmada genelleştirilmiş dejenere Bernoulli ve Euler polinomları için elde edilen asimptotik ifadelerin $\lambda \to 0$ durumunun bir özel halidir. Ayrıca genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli ve Apostol-Euler polinomları için bu çalışmada elde edilen asimptotik ifadelerde $\mu = 1$ alındığında Navas vd nin (2011) sonuçları elde edilmektedir.

5. KAYNAKLAR

ADELBERG, A. 1995. A finite difference approach to degenerate Bernoulli and Stirling polynomials, Discrete Math., 140 : 1-21.

APOSTOL, T. M. 1951. On the Lerch Zeta function, Pacific J. Math., 1 : 161-167.

BAYAD, A. 2011. Fourier expansions for Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler and Apostol-Genocchi polynomials, Math. Comp. DOI: 10.1090/S0025-5718-02476-2.

CARLITZ, L. 1956. A degenerate Staudt-Clausen theorem, Arch. Math., 7 : 28-33.

CARLITZ, L. 1979. Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers, Utilitas Math., 15 : 51-88.

CENKCI, M. and HOWARD, F.T. 2007. Notes on degenerate numbers, Discrete Math., 307 : 2359-2375.

CENKCI, M. 2011. Symmetry relation for generalized potential and its applications, Utilitas Math. in press.

HOWARD, F.T. 1996. Explicit formulas for degenerate Bernoulli numbers, Discrete Math. 162 : 175-185.

KURT, V. 2009. A further symmetric relation on the analogue of the Apostol-Bernoulli and the analogue of the Apostol-Genocchi polynomials, Appl. Math. Sciences 3, 56 : 2757 - 2764.

LIU, H. and WANG, W. 2009. Some identities on the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials via power sums and alternate power sums, Discrete Math. 309 : 3346-3363.

LOPEZ, J.L. and TEMME, N.M. 1999. Hermite polynomials in asymptotic representations of generalized Bernoulli, Euler, Bessel and Buchholz polynomials, J. Math. Anal. Appl. 239 (2) : 457-477.

LOPEZ, J.L. and TEMME, N.M. 2010. Large degree asymptotics of generalized Bernoulli and Euler polynomials, J. Math. Anal. Appl. 363 : 197-208.

LUO, Q.-M. and SRIVASTAVA, H.M. 2005. Some generalizations of the Apostol–Bernoulli and Apostol-Euler polynomials, J. Math. Anal. Appl. 308 : 290-302.

LUO, Q.-M. and SRIVASTAVA, H.M. 2006. Some Relationships Between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler Polynomials, Comput. Math. Appl. 51 : 631-642.

LUO, Q.-M. 2009. q-Extensions for the Apostol–Genocchi polynomials, Gen. Math. 17 : 113–125.

LUO, Q.-M. 2009. Fourier expansions and integral representations for the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials, Math. Comp. 78, 268 : 2193-2208.

LUO, Q.-M. and SRIVASTAVA, H.M. 2011. Some generalizations of the Apostol-Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind, Appl. Math. Comp. 217 : 5702-5728.

MILNE-THOMSON, L.M. 1951. The Calculus of Finite Differences, Macmillan and Co., Ltd., London.

NAVAS, L.M., RUIZ, F.J and VARONA, J.L 2011. Asymptotic estimates for Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials, arXiv:1102.1493v2 .

WANG, W., JIA, C. and WANG, T. 2008. Some results on the Apostol–Bernoulli and Apostol-Euler polynomials, Comput. Math. Appl. 55 : 1322-1332.

WEINMANN, A. 1963. Asymptotic expansions of generalized Bernoulli polynomials, Proc. Camb. PHI. Soc. 59 : 73-80.

YOUNG, P.T. 2004. Degenerate and n-adic versions of Kummer's congruences for values of Bernoulli polynomials, Discrete Math. 285 : 289-296.

YOUNG, P.T. 2008. Degenerate Bernoulli polynomials, generalized factorial sums, and their applications, J. Number Theory 128 : 738-758.

ÖZGEÇMİŞ

İlyas YAKAN, 1984 yılında Adana'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana'da tamamladı. 2003 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Ocak 2010'da Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.