T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIORDAN SIRALARI YÖNTEMİ ÜZERİNE

Özlem KOYUNCUOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2014

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIORDAN SIRALARI YÖNTEMİ ÜZERİNE

Özlem KOYUNCUOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2014

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIORDAN SIRALARI YÖNTEMİ ÜZERİNE

Özlem KOYUNCUOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul/red edilmiştir.

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Yrd. Doç. Dr. Ayhan DİL

ÖZET

RIORDAN SIRALARI YÖNTEMİ ÜZERİNE

Özlem KOYUNCUOĞLU

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ayhan DİL
Haziran 2014, 81 sayfa

Bu çalışmada, giriş kısmında konu hakkında genel bilgiler verildikten sonra tez kapsamında çeşitli özellikleri incelenecek ve uygulamaları verilecek olan özel sayı dizileri tanıtılmıştır.

İkinci bölümde öncelikle formal kuvvet serileri ve formal Laurent serileri tanıtılmış ve bunların temel özellikleri verilmiştir. Daha sonra, bunlar yardımıyla üreteç fonksiyonlarının genel teorisi ve temel işlemleri açıklanmıştır. Farklı tipten reküranslara sahip çeşitli dizilerin üreteç fonksiyonları yardımıyla nasıl incelenecekleri örneklerle açıklanmıştır. Riordan sıraları bölümünde ise formal kuvvet serileri ve üreteç fonksiyonları yardımıyla Riordan sırasının tanımı verilmiş; bu yöntemin çeşitli alanlarda kullanılabilmesini sağlayan temel kuralları ve teoremleri analiz edilmiştir.

Son olarak, özellikle Lagrange Tersinme Formülü kullanılarak, Riordan sıraları yöntemiyle birçok kombinatorik özdeşliğin elde edilebileceği gösterilmiş ve bazı özel sayı dizilerinin elemanlarının birbirleri ve başka dizi elemanları ile aralarındaki ilişkileri veren eşitlikler ifade edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Üreteç fonksiyonu, reküranс bağıntısı, binom katsayısı, Stirling sayıları, harmonik sayı, Fibonacci sayısı, Catalan sayısı.

JÜRİ: Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Yrd. Doç. Dr. Ayhan DİL (Danışman)

ABSTRACT

ON THE METHOD OF RIORDAN ARRAYS

Özlem KOYUNCUOĞLU

MSc Thesis, in Mathematics
Supervisor : Asst. Prof. Dr. Ayhan DİL
June 2014, 81 pages

In this work, some special number arrays along with their various properties and applications are examined. In the introduction part after some general information about the subject is given, the number arrays that will be studied in this context are presented.

In the second part, formal power series and formal Laurent series are defined and their basic properties are given. After that, by means of these series, the general and basic operations on the generating functions are explained. Some various arrays possessing different recurrence relations are examined by the help of generating functions. Next, using formal power series and generating functions, Riordan arrays are defined. Basic rules and theorems of this method which make it possible to be used in different areas are analysed.

Finally, by using Lagrange Inversion Formula, it has been shown that many combinatoric identities can be obtained by the method of Riordan arrays. Furthermore, equations involving the relations between the elements of some special number arrays and some other arrays are expressed.

KEYWORDS: Generating function, recurrence relation, binomial coefficient, Stirling number, harmonic number, Fibonacci number, Catalan number.

COMMITTEE: Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Asst. Prof. Dr. Ayhan DİL (Supervisor)

ÖNSÖZ

Riordan sıraları yöntemi, iki üreteç fonksiyonundan elde edilen bir sonsuz alt üçgensel matris yardımıyla, sayı dizilerinin elemanlarının birbirleri ile ve başka dizi elemanları ile aralarındaki ilişkilerin belirlenmesinde kullanılan bir yöntemdir. Özellikle kombinatorik problemlerde ortaya çıkan sayı dizilerinin araştırılmasında, kombinatorik özdeşliklerin elde edilmesinde ve sayılar teorisindeki bazı problemlerin çözülmesinde kullanışlı olmaktadır. Yöntem; analiz, cebir, sayılar teorisi ve kombinatorikte uygulama alanlarına sahiptir.

Bu tez çalışmasında Riordan sıralarının detaylıca analiz edilmesi, mevcut literatürün tez kapsamında olabildiğince toparlanması ve yeni uygulama alanlarının belirlenmesi hedeflenmiştir. Riordan sıraları konusunda Türkçe yazılmış olan bu tezin, ülkemizde bu alanda araştırma yapan ve yapacak olan araştırmacılar için bir başvuru kaynağı olması amaçlarımızdan birisidir.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan; desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayhan DİL'e (Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi), yardımlarını gördüğüm Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet TURAN'a (Atılım Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi) ve ayrıca beni her konuda destekleyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

H_n	Harmonik sayılar
$H_n^{(\alpha)}$	Hiperharmonik sayılar
$\left[{n \atop k} \right]$	Birinci çeşit Stirling sayıları
$\left\{ {n \atop k} \right\}$	İkinci çeşit Stirling sayıları
ϕ_n	Üstel sayılar (Bell sayıları)
$\mathcal{O}_n$	Geometrik sayılar (Sıralı Bell sayıları)
F_n	Fibonacci sayıları
C_n	Catalan sayıları
B_n	Bernoulli sayıları
$\delta_{n,k}$	Kronecker delta
$[t^n]$	t^n teriminin katsayısı
$\binom{n}{k}$	Binom sayısı

Kısaltmalar

LTF	Lagrange Tersinme Formülü

1. GİRİŞ

Riordan Sıraları yöntemi Shapiro vd (1991) tarafından aşağıdaki biçimde ortaya konulmuştur:

Bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlı iki kuvvet serisi $d(t)$ ve $h(t)$ olmak üzere; $D = (d(t), h(t))$ ikilisi göz önüne alınsın. Bu ikiliden girdileri

$$d_{n,k} = [t^n]d(t)(th(t))^k;$$

yani n. satır k. sütundaki elemanı $d(t)(th(t))^k$ formal kuvvet serisindeki t^n'nin katsayısı olacak biçimde bir sonsuz alt üçgensel matris tanımlanabilir. Bu durumda $D = (d(t), h(t))$ ikilisine bir "Riordan sırası" denilir.

Bu üreteç fonksiyonu ikililerinin ve bunlara karşılık gelen matrislerin özellikleri kullanılarak çeşitli sayı dizileri hakkında sonuçların elde edilmesi yöntemine Riordan sıraları yöntemi denilir. Riordan sıraları yöntemi özellikle kombinatorik problemlerde ortaya çıkan sayı dizilerinin araştırılmasında, bunlarla ilgili özdeşliklerin elde edilmesinde (Sprugnoli 1994, 2006, Cheon vd 2006, Baccherini vd 2008, Luzon vd 2012) ve sayılar teorisindeki bazı problemlerin çözülmesinde (Merlini ve Verri 2000, Merlini ve Sprugnoli 2002, Cheon ve El-Mikkawy 2008, Hennessy 2011) kullanışlı olmaktadır.

Klasik Riordan sıralarının genel teorisi ve uygulamaları Sprugnoli (2006 ve 2007) tarafından ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Ayrıca Riordan sıraları üzerine çeşitli master ve doktora tezleri de hazırlanmıştır. Barry (2009) doktora tez çalışmasında tam sayı dizileri ve başta Riordan sıraları olmak üzere bunlara uygulanan dönüşümler üzerine araştırma yapmıştır. Ortogonal polinomlardan kodlarla ilgili dizilere kadar uzanan çok çeşitli alanlarda uygulamalar ortaya koymuştur. Hennessy (2011) doktora tez çalışmasında Riordan sıraları yöntemini sürekli kesirlere, ortogonal polinomlara ve latislere uygulamıştır. Fürst (2011) master tez çalışmasında Egorychev katsayı metodu ile Riordan sıralarını birlikte kullanarak kombinatorik sayıların kapalı formlarını elde etmeye çalışmıştır. Stirling sayıları , binom katsayıları ve Bernoulli sayılarını içeren sonuçlar elde etmiştir.

Klasik Riordan sıralarının yanı sıra literatürde farklı problemlerin çözümüne olanak sağlayan genelleştirilmiş Riordan sıraları da tanımlanmıştır (Merlini vd 1997, Barry 2007, 2009).

Başlıca analiz, cebir, sayılar teorisi ve kombinatorik alanları ile ilgili olan Riordan sıraları yöntemi; nispeten yeni bir çalışma sahası olup günümüzde bu konuda araştırmalar aktif bir şekilde devam etmektedir.

Bu tez çalışmasında klasik Riordan sıralarının temel teorisi ve başlıca örnekleri üzerinde durulacaktır. Yöntem üreteç fonksiyonlarına ve üreteç fonksiyonları da formal serilere dayandığından, çalışma formal serilerin analizi ile başlamaktadır. Daha sonra üreteç fonksiyonlarının temel kavramları verilmiştir. Bu ön hazırlıktan sonra Riordan sıraları detaylıca incelenmiştir. Yöntemin binom katsayıları, harmonik sayılar, Stirling sayıları, üstel ve geometrik sayılar, Bernoulli sayıları, Catalan sayıları ve Fibonacci sayıları gibi pek çok sayı ailesine uygulanmasına örnekler verilmiştir.

1.1. Özel Bazı Sayı Aileleri

1.1.1. Harmonik ve hiperharmonik sayılar

Harmonik serinin n. kısmi toplamına, yani,

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{ve} \qquad H_0 := 0$$

ifadesine n. harmonik sayı adı verilir.

Bir $\alpha > 1$ tam sayısı için

$$H_n^{(\alpha)} := \sum_{k=1}^{n} H_k^{(\alpha-1)}$$

öyle ki $H_n^{(1)} := H_n$ şeklinde tanımlanan sayıya da "α. mertebeden n. hiperharmonik sayı" adı verilir. Conway ve Guy (1996) hiperharmonik sayıları tanıtmışlar ve bu sayıların harmonik sayılar cinsinden yazılabilmesine olanak tanıyan aşağıdaki formülü elde etmişlerdir:

$$H_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha-1}{\alpha-1} \left(H_{n+\alpha-1} - H_{\alpha-1}\right).$$

Harmonik ve hiperharmonik sayıları, analitik sayılar teorisinde daha kullanışlı hale getiren üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıda verilmişlerdir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(\alpha)} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^{\alpha}}.$$

Harmonik sayıların asimptotik davranışı aşağıdaki eşitsizlik ile ifade edilebilir (Havil 2003):

$$\frac{1}{2(n+1)} + \ln(n) + \gamma < H_n < \frac{1}{2n} + \ln(n) + \gamma$$

burada n bir doğal sayı ve $\gamma = 0,5772\ldots$ Euler-Mascheroni sabitidir.

1.1.2. Stirling sayıları

Birinci çeşit Stirling sayıları $\left[{n \atop k}\right]$, ikinci çeşit Stirling sayıları ise $\left\{{n \atop k}\right\}$ notasyonu ile gösterilirler. $n \geq k \geq 0$ olmak üzere bu sayıların kombinatorik anlamları aşağıdaki şekilde verilirler (Benjamin ve Quinn 2003, Comtet 1974, Riordan 1958):

$\left[{n \atop k}\right]$: n elemanlı bir kümenin, tam k tane çevrimden oluşan permütasyonlarının sayısıdır veya buna denk olarak; n tane farklı kişinin, her bir masada en az bir kişi olacak biçimde, birbirine özdeş k tane yuvarlak masaya yerleşmelerinin sayısıdır.

$\left\{{n \atop k}\right\}$: n elemanlı bir kümenin, kesişmeyen ve boştan farklı k tane alt kümeye parçalanma yollarının sayısıdır.

İkinci çeşit Stirling sayıları, $n \geq k \geq 1$ olmak üzere aşağıdaki rekürans bağıntısına sahiptirler:

$$\left\{{n+1 \atop k+1}\right\} = (k+1)\left\{{n \atop k+1}\right\} + \left\{{n \atop k}\right\}$$

Birinci çeşit Stirling sayıları ise

$$\left[{n+1 \atop k+1}\right] = n\left[{n \atop k+1}\right] + \left[{n \atop k}\right]$$

rekürans bağıntısına sahiptirler.

Kombinatorik tanımları verilen Stirling sayılarının, analiz yöntemleri ile araştırılabilmesi için üreteç fonksiyonlarının bilinmesi oldukça önemlidir. İkinci çeşit Stirling sayılarının daha sonra ihtiyaç duyacağımız üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^k}{k!}$$

eşitliği ile verilir (Abramowitz ve Stegun 1972).

1.1.3. Üstel sayılar (Bell sayıları)

Üstel sayılar (veya Bell sayıları),

$$\phi_n := \phi_n(1) = \sum_{k=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}$$

ile tanımlanır. Üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\frac{t^n}{n!} = e^{e^t-1}$$

olan üstel sayılardan birkaç tanesi $\phi_0 = 1$, $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = 2$, $\phi_3 = 5$, $\phi_4 = 15$ şeklindedir.

1.1.4. Geometrik sayılar (Sıralı Bell sayıları)

Geometrik sayılar,

$$\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k!$$

olarak ifade edilirler. Üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_n \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2 - e^t}$$

olan geometrik sayılardan birkaç tanesi $\mathcal{O}_0 = 1$, $\mathcal{O}_1 = 1$, $\mathcal{O}_2 = 3$, $\mathcal{O}_3 = 13$, $\mathcal{O}_4 = 75$ şeklindedir.

1.1.5. Fibonacci sayıları

Fibonacci sayıları,

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n & (n \geq 0) \\ F_0 = 0, \qquad F_1 = 1 & \end{cases}$$

reküransı ile tanımlanır. Üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \frac{t}{1 - t - t^2}$$

olan Fibonacci sayılarının ilk birkaç tanesi $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ şeklindedir.

1.1.6. Catalan sayıları

Catalan sayıları $n \geq 0$ için

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

ile tanımlanır. Üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}$$

olan Catalan sayılarının ilk birkaç tanesi $C_0 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$ şeklindedir.

1.1.7. Bernoulli sayıları

Bernoulli sayıları

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = \delta_{n,0}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = \frac{x}{e^x - 1}$$

olan Bernoulli sayılarının ilk birkaç tanesi $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$ şeklindedir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Formal Kuvvet Serileri

2.1.1. Formal kuvvet serileri için tanımlar

$\mathbb{R}$, reel sayılar cismi ve t de bir reel değişken olmak üzere, $\mathbb{R}$ üzerinde t'nin bir formal kuvvet serisi (f.k.s) şöyle ifade edilmektedir:

$$f(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 + \cdots + f_n t^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n.$$

Bu eşitlikteki $f_0, f_1, f_2, \ldots$ reel sayılardır. Benzer tanımlama birçok sayı kümesinde yapılabilir. Özel olarak rasyonel sayılar cismi $\mathbb{Q}$'da ve kompleks sayılar cismi $\mathbb{C}$'de de verilebilir. Buradaki elde edilen sonuçlar karakteristiği 0 olan herhangi bir $\mathbf{F}$ cismine kolayca genişletilebilir.

Bir t belirsiz değişkenine göre $\mathbf{F}$ cismi üzerindeki formal kuvvet serilerinin kümesi $\mathbf{F}[t]$ ile gösterilir. Yalnız elde edilecek sonuçların özel bir $\mathbf{F}$ cisminden ve özel bir t belirsiz değişkeninden bağımsız olduğunu vurgulamak için $\mathbf{F}[t]$'yi $\mathcal{F}$ ile göstereceğiz. Ancak $\mathcal{F}$'nin $\mathbb{R}[t]$ olduğunu düşünmenin bir mahsuru yoktur ve daha rahat anlaşılması için böyle düşünülebilir.

Kombinatorik analizde ve algoritma analizinde $f_0, f_1, f_2, \ldots$ katsayıları nesneleri saymaya yarayan sayılar olarak alınırlar. Dolayısıyla genellikle pozitif tamsayılardır ya da bazı özel durumlarda pozitif rasyonel sayılar olarak alınabilirler.

$f(t) \in \mathcal{F}$ olmak üzere, $f_r \neq 0$ olacak biçimde en küçük indis r ise buna $f(t)$ formal kuvvet serisinin mertebesi denir ve $ord(f(t))$ ile gösterilir. Mertebesi r olan bütün formal kuvvet serilerinin kümesi $\mathcal{F}_r$ veya $\mathbf{F}_r[t]$ ile gösterilir. Özel olarak, $0 = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3 + \cdots$ formal kuvvet serisinin mertebesi sonsuzdur.

$(f_0, f_1, f_2, \ldots) = (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bir reel sayı dizisi olmak üzere bu çalışmada bu dizi ile $\sum_{n=0}^{\infty} f_k t^k$ formal kuvvet serisi arasında önemli bir fark gözetilmeyecektir. Bu seriye adi(ordinary) üreteç fonksiyonu adı verilir. Bu seride t'nin işlevi dizinin terimlerinin yerlerini belirlemektir.

Formal kuvvet serilerinin cebirsel yapıları iyi bilindiğinden ve pek çok formal kuvvet serisi temel cebirsel manipülasyonlar ile kısaca ifade edilebildiğinden; formal kuvvet serileri ile çalışmayı, dizilerle çalışmaya tercih edeceğiz.

Başka bir formal seri tipi olan, formal Laurent kuvvet serisi (f.L.s)

$$g(t) = g_{-m}t^{-m} + g_{-m+1}t^{-m+1} + \cdots + g_{-1}t^{-1} + g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \cdots = \sum_{k=-m}^{\infty} g_k t^k$$

olarak tanımlanır.

Formal Laurent serileri, formal kuvvet serilerini kapsar. Bir formal Laurent serisinin mertebesi negatif olabilir. Eğer mertebe negatif değilse bu seri bir formal kuvvet serisi olur. Ayrıca, dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta vardır; $\sum_{-\infty}^{\infty} f_k t^k$ bir formal Laurent seri değildir. Formal Laurent serilerinde negatif kuvvetli terimler sonlu sayıda olmalıdır.

2.1.2. Temel cebirsel yapı

Formal kuvvet seriler kümesi $\mathcal{F}$, birçok cebirsel yapının içerisine gömülebilir. Bunlardan en yaygın olanını; serilerin bilindik toplama ve Cauchy çarpımı ile ilgili olanını vereceğiz.

$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ ve $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k$ iki formal kuvvet serisi olmak üzere bu iki serinin toplamı:

$$f(t) + g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (f_k + g_k) t^k$$

olarak tanımlanır.

Buradaki tanımdan $\mathcal{F}$'nin toplamaya göre değişmeli grup olduğu açıktır. Birleşme ve değişme özellikleri doğrudan $\mathcal{F}$ cisminin özelliklerinden çıkmaktadır. Formal kuvvet serisinin birimi,

$$\mathbf{0} = 0(t) = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3 + \cdots$$

ve $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ serisinin toplamaya göre tersi

$$-f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-f_k) t^k$$

olarak verilir.

$f(t)$ ve $g(t)$ olarak verilen iki serinin Cauchy çarpımları ise,

$$f(t)g(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} f_j g_{k-j}\right) t^k \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. t^k'nın katsayılarının biçiminden dolayı bu çarpıma $f(t)$ ve $g(t)$ nin girişimi de denilmektedir. Cauchy çarpımındaki ilk birkaç terimi yazarsak; buradan açıkça görüleceği üzere bu çarpım değişmelidir. Ayrıca yine çarpımın tanımından çarpmanın birim elemanı,

$$1 = 1 + 0t + 0t^2 + 0t^3 + \cdots$$

formal kuvvet serisidir. Dağılma özelliği de $\mathcal{F}$ cisminden gelen bir özelliktir. Yani $\mathcal{F}$ cismi üzerinde $f(t), g(t)$ ve $h(t)$ formal kuvvet serileri için

$$(f(t) + g(t))h(t) = f(t)h(t) + g(t)h(t)$$

ve

$$f(t)(g(t)+h(t)) = f(t)g(t) + f(t)h(t)$$

sağlanır.

Son olarak, $\mathcal{F}$ cisminin herhangi bir sıfır bölen içermediğini ispatlayalım. $f(t)$ ve $g(t)$, $\mathbf{0}$'dan farklı iki kuvvet serisi olsun. Dolayısıyla $ord(f(t)) = k_1$ ve $ord(g(t)) = k_2$ olacak biçimde $0 \leq k_1 < \infty$ ve $0 \leq k_2 < \infty$ tamsayıları vardır. Yani $f_{k_1} \neq 0$ ve $g_{k_2} \neq 0$ olur. $f(t)g(t)$ çarpımında derecesi $k_1 + k_2$ olan terimin katsayısı $f_{k_1} g_{k_2} \neq 0$'dır. Dolayısıyla, $f(t)g(t) \neq 0$ olur.

Sonuç olarak, $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ bir tamlık bölgesi olur.

Ayrıca, bir önceki analizden

$$ord(f(t)g(t)) = ord(f(t)) + ord(g(t))$$

olduğu görülür. Birimin mertebesinin 0 olduğu açıktır. Eğer $f(t)$, $\mathcal{F}$ de tersinir bir eleman ise $f(t)f(t)^{-1} = 1$ sağlanacak şekilde bir $f(t)^{-1} \in \mathcal{F}$ olmalıdır. Ayrıca

$$ord(f(t)f(t)^{-1}) = ord(f(t)) + ord(f(t)^{-1}) = 0$$

sağlanması gerektiğinden $ord(f(t)) = 0$ olmalıdır. Diğer bir taraftan eğer bir $f(t) \in \mathcal{F}_0$ için $f(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots$ ve $f_0 \neq 0$ ise $f(t)$ formal kuvvet serisinin tersinir olduğu da gösterilebilir. Bu durumda $f(t)g(t) = 1$ olacak biçimde bir $g(t) \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim. Formal kuvvet serileri için tanımlanan Cauchy çarpımının açık tanımı (2.1) kullanılarak ve bunun sonucunda

$$\begin{cases} f_0 g_0 = 1 \\ f_0 g_1 + f_1 g_0 = 0 \\ f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 = 0 \\ \cdots \end{cases}$$

sonsuz doğrusal denklem sistemi çözülerek,

$g_0 = f_0^{-1}$, $g_1 = -\frac{f_1}{f_0^2}$, $g_2 = -\frac{f_1^2}{f_0^3} - \frac{f_2}{f_0^2}$, $\ldots$ şeklinde $g(t)$ formal kuvvet serisinin katsayıları bulunur. Böylece sadece $f_0 \neq 0$ ise $g(t)$ serisi $g(t) = f(t)^{-1}$ olacak biçimde bulunur.

Sonuç olarak, bir formal kuvvet serisinin tersinir olması için gerek ve yeter koşul bu serinin mertebesinin 0 olmasıdır, sonucuna ulaşılır. Bu nedenle $\mathcal{F}_0$ kümesi, tersinebilir formal kuvvet serileri kümesi olarak da adlandırılmaktadır.

Örnek 1 *$f(t) = 1 - t$ olarak verilen formal kuvvet serisinin tersini hesaplayalım. Öncelikle $f(t) = 1 - t + 0t^2 + 0t^3 + \cdots$ olduğundan $f_0 = 1, f_1 = -1$ ve $\forall k > 1$ için*

$f_k = 0$ olduğu görülür. Yukarıdaki yöntemle,

$$\begin{cases} g_0 = 1 \\ g_1 - g_0 = 0 \\ g_2 - g_1 = 0 \\ \cdots \end{cases}$$

doğrusal denklem sistemi yazılır ve $\forall n \geq 0$ için $g_n = 1$ bulunur. Böylece $g(t) = 1 + t + t^2 + \cdots$ olarak elde edilir. Sonuç olarak $f(t)$ formal kuvvet serisinin tersi $|t| < 1$ için $g(t) = \frac{1}{1-t}$ şeklinde kapalı bir fonksiyon olarak ifade edilebilir.

2.1.3. Formal Laurent serileri

Formal Laurent serilerinin, formal kuvvet serilerinin bir genişlemesi olduğu daha önce belirtilmişti. Bu bölümde öncelikle formal Laurent serilerinin toplam ve Cauchy çarpımlarını tanımlayacağız.

$m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $a(t) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k$ ve $b(t) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k t^k$ iki formal Laurent seri olsun. Bu iki formal Laurent serinin toplamı,

$$a(t) + b(t) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k + \sum_{k=n}^{\infty} b_k t^k = \sum_{k=p}^{\infty} (a_k + b_k) t^k$$

olarak tanımlanır. Burada $p = min(m, n)$'dir.

Yukarıda verilen $a(t)$ ve $b(t)$ formal Laurent serilerinin Cauchy çarpımı ise

$$a(t)b(t) = \left(\sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k t^k\right) = \sum_{k=q}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) t^k \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır. Burada $q = m + n$'dir.

Daha önce formal kuvvet serilerinde belirtildiği gibi burada da çarpma ve toplama işlemlerinin özellikleri elemanların seçildiği cebirsel yapı ile ilgilidir. Bu cebirsel yapı bir cisim olarak seçildiğinde ve formal Laurent serileri kümesi $\mathcal{L}$ olarak gösterilmek üzere, $(\mathcal{L}, +, \cdot)$ bir cisim olur. Bu yapının bir cisim olduğunu göstermek için her $a(t) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k \neq 0$ şeklindeki formal Laurent serisinin $b(t) = \sum_{k=-m}^{\infty} b_k t^k$ şeklinde bir tersinin olduğunu göstermemiz yeterlidir; çünkü diğer cisim özelliklerini sağladığı kolayca görülmektedir. Tersi gösterirken aynen formal kuvvet serileri kümesi $\mathcal{F}_0$ daki her serinin tersinin olduğunu gösterdiğimiz yöntemi kullanabiliriz.

$$a(t)b(t) = 1$$

olmak üzere buradan iki seri çarpımından,

$$a(t)b(t) = a_m b_{-m} + (a_m b_{-m+1} + a_{m+1} b_{-m}) t$$

$$
\begin{aligned}
& +(a_m b_{-m+2} + a_{m+1} b_{-m+1} + a_{m+2} b_{-m}) t^2 + \cdots \\
= \; & 1
\end{aligned}
$$

olur ve buradan

$$
\begin{cases}
a_m b_{-m} = 1 \\
a_m b_{-m+1} + a_{m+1} b_{-m} = 0 \\
a_m b_{-m+2} + a_{m+1} b_{-m+1} + a_{m+2} b_{-m} = 0 \\
\cdots
\end{cases}
$$

doğrusal denklem sistemi çözülerek $b_{-m} = \frac{1}{a_m}$ bulunur ve bunun yardımıyla sırasıyla $b(t)$ serisinin diğer katsayıları olan $b_{-m+1}, b_{-m+2}, \ldots$ elde edilir. Böylece $a(t)b(t) = 1$ sağlanacak biçimdeki $b(t) = a(t)^{-1}$ formal Laurent serisi elde edilmiş olur.

Ayrıca $(\mathcal{L}, +, \cdot)$ cisminin $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ tamlık bölgesini içeren en küçük cisim olduğunu belirtelim.

2.1.4. Formal kuvvet serileri üzerindeki işlemler

Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin dışında bazı işlemleri de $\mathcal{F}$ üzerinde göz önüne alabiliriz. Ancak bunlardan küçük bir kısmı, $\mathcal{L}$'ye genişletilebilir.

Bu işlemlerin en önemlilerinden birisi bir formal kuvvet serisinin kuvvetini almaktır. Bu işlem $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$
\begin{cases}
f(t)^0 = 1 & ; p = 0 \\
f(t)^p = f(t) f(t)^{p-1} & ; p > 0
\end{cases}
$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Kuvveti alınan formal kuvvet serisinin mertebesinin ise

$$
ord(f(t)^p) = p(ord(f(t)))
$$

olduğu, tümevarım ile kolayca gösterilebilir. Ayrıca, $f(t)^p \in \mathcal{F}_0$ olması için gerek ve yeter koşulun $f(t) \in \mathcal{F}_0$ olduğu da açıktır. Eğer $f(t)^p \notin \mathcal{F}_0$ ise $f(t)^p$ serisinin mertebesi p büyüdükçe büyüyecektir.

Kuvvet alma işlemi formal Laurent serileri için de geçerlidir. Bu durumda $g(t)$ bir formal Laurent serisi olmak üzere $ord(g(t)) < 0$ olsun. Bu serinin bir pozitif tamsayı kuvvetini alırsak, $ord(g(t)^p)$ değeri p büyüdükçe küçülür; fakat daima sonlu kalır.

Ayrıca $g(t) = f(t)^{-1}$ olarak alırsak $g(t)^p = f(t)^{-p}$ olur. Dolayısıyla kuvvet her $p \in \mathbb{Z}$ için anlamlıdır.

Klasik üstel ve logaritma fonksiyonun bilinen özellikleri kullanılarak; formal kuvvet serileri için de üstel ve logaritma fonksiyonu tanımlanabilir; fakat bu işlemler formal Laurent serilerine genişletilememektedir.

Formal kuvvet serileri için üstel fonksiyon, $f(t) \in \mathcal{F}_0$ ve $f(t) = f_0 + v(t)$ olmak üzere

$$e^{f(t)} = exp(f_0 + v(t)) = e^{f_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v(t)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlanır. Burada da $v(t) \notin \mathcal{F}_0$ olduğundan $v(t)^k$ serisinin mertebesi, k büyüdükçe artar.

$f(t) \notin \mathcal{F}_0$ olduğu durumda da $e^{f(t)}$ benzer biçimde tanımlanır, sadece e^{f_0} çarpanı bu durumda çıkmaz.

Logaritma, $f(t) \in \mathcal{F}_0$, $f(t) = f_0 + \hat{v}(t)$ ve $v(t) = \frac{\hat{v}(t)}{f_0}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \ln(f_0 + \hat{v}(t)) &= \ln f_0 + \ln(1 + v(t)) \\ &= \ln f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{v(t)^k}{k} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $f(t) \notin \mathcal{F}_0$ olursa logaritma tanımlanamaz.

Bir diğer önemli operatör ise türev operatörüdür. Türev operatörü,

$$Df(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k t^{k-1} = f'(t)$$

olarak tanımlanır. Bu işlem her $f(t) \in \mathcal{L}$ için de uygulanabilir.

Teorem 2 *Herhangi bir $f(t) \in \mathcal{L}$ için $f'(t), t^{-1}$ içeren bir terim bulundurmaz.*

İspat. $f'(t)$ serisinin t^{-1} terimini içerdiğini varsayalım. Ancak bu durumda $f(t)$ serisinin $\log t$ gibi bir terim içermesi gerekir. Fakat bu durum $f(t)$'nin bir Laurent serisi olması ile çelişir. Sonuç olarak; herhangi bir $f(t) \in \mathcal{L}$ için $f'(t), t^{-1}$ içeren bir terim bulundurmaz. ■

Bir diğer işlem ise integraldir. Belirsiz integralde keyfi bir sabit ortaya çıkacağından belirli integral ile çalışmayı tercih edeceğiz. $f(t) \in \mathcal{F}$ için formal kuvvet serilerinde integral

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t f_k \tau^k d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k+1} t^{k+1}$$

şeklinde tanımlanır. Normalde terim terime integral alınırken integral ile serinin yerlerini değiştirmek için düzgün yakınsaklık gereklidir. Ancak burada formal olarak bunu yapmaktayız. Tanımdan kolayca anlaşılabileği gibi integral işlemi formal Laurent serileri için de uygulanabilmektedir. Ancak t^{-1} terimi içeren bir formal Laurent serisine integral işlemi uygulanamaz; çünkü sonuç bir formal Laurent serisi olamaz.

2.1.5. Bileşke

Formal kuvvet serilerindeki bir diğer önemli işlem ise bileşkedir. $f(t) \in \mathcal{F}$ ve $g(t) \notin \mathcal{F}_0$ olmak üzere bu iki formal kuvvet serisinin bileşkesi

$$f(g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g(t)^k \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır. Eğer $g(t) \in \mathcal{F}_0$ olursa $f(g(t))$'nin herbir terimin katsayısı sonsuz toplam biçiminde ortaya çıkar. Bu da bizim sakındığımız bir durum olup katsayıların bulunmasında sorun yaratmaktadır. Diğer bir yandan bileşke operatörü

$$f(g(t)) = [f(y)|y = g(t)]$$

olarak da gösterilir.

(2.3) ile verilen bileşke tanımı her $f(t) \in \mathcal{L}$ için genişletilebilmektedir; fakat $ord(g(t)) > 0$ olmalıdır, diğer durumda yukarıda söylediğimiz gibi katsayılar sonsuz toplamlar olarak ortaya çıkar.

$\mathcal{F}_1$ deki formal kuvvet serileri için bileşke işlemini ayrıca inceleyelim. $(\mathcal{F}_1, \circ)$ bir grup olduğunu göstereceğiz.

İlk olarak, $t \in \mathcal{F}_1$ formal kuvvet serisinin bileşke işlemi için birim olduğunu gözlemleyebiliriz. Gerçekten, $[y|y = g(t)] = g(t)$ ve $[f(y)|y = t] = f(t)$ olur.

Teorem 3 *Bir $f(t)$ formal kuvvet serisinin bileşke işlemine göre tersinin olması için gerek ve yeter koşul $f(t) \in \mathcal{F}_1$ olmasıdır.*

İspat. $g(t)$ kuvvet serisinin, $f(t)$ kuvvet serisinin tersi olması için $f(g(t)) = t$ ve $g(f(t)) = t$ olmalıdır. Diğer bir yandan verilen ilk tanımdan $ord(f(g(t))) = ord(f(t))ord(g(t))$ olduğu açıktır. $ord(t) = 1$ ve $ord(f(t)) > 0$, $ord(g(t)) > 0$ olduğundan $ord(f(t)) = ord(g(t)) = 1$ bulunur.

Şimdi kanıtın diğer tarafını gösterelim. $f(t) \in \mathcal{F}_1$ olsun. Bileşke işleminin tanımından $f(t)$ serisinin tersi olacak biçimde bir $g(t) \in \mathcal{F}$ varsa $g(t) \in \mathcal{F}_1$ olmalıdır.

$f(t) = f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 + \cdots$ ve $g(t) = g_1 t + g_2 t^2 + g_3 t^3 + \cdots$ olmak üzere $g(t)$ formal kuvvet serisi $f(t)$ formal kuvvet serisinin bileşke işlemine göre tersi ise $f(g(t)) = t$ sağlanmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} f(g(t)) &= f_1(g_1 t + g_2 t^2 + g_3 t^3 + \cdots) + f_2(g_1^2 t^2 + 2g_1 g_2 t^3 + \cdots) + f_3(g_1^3 t^3 + \cdots) \\ &= f_1 g_1 t + (f_1 g_2 + f_2 g_1^2)t^2 + (f_1 g_3 + 2f_2 g_1 g_2 + f_3 g_1^3)t^3 + \cdots \\ &= t \end{aligned}$$

yazarız ve $g(t)$ formal kuvvet serisini bulmak için

$$\begin{cases} f_1 g_1 = 1 \\ f_1 g_2 + f_2 g_1^2 = 0 \\ f_1 g_3 + 2 f_2 g_1 g_2 + f_3 g_1^3 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

sistemini çözeriz. İlk denklemden $g_1 = \frac{1}{f_1}$ bulunur. Bu değer ikinci denklemde yerine konularak g_2 değeri bulunur. Bu yol ile devam edilerek $g(t)$ formal kuvvet serisinin tüm katsayıları hesaplanır. Dolayısıyla $g(t)$ tek türlü ifade edilir. ■

Sonuç olarak $f(g(t)) = t$ ve $g(f(t)) = t$ olduğundan $g(t)$ formal kuvvet serisi $f(t)$ serisinin bileşke işlemine göre tersi olur. Literatürde bileşke tersi $\bar{f}(t)$ veya $f^{[-1]}(t)$ olarak gösterilmektedir. Bizim sıklıkla kullanacak olduğumuz ilk notasyondur. Ayrıca $\bar{\bar{f}}(t) = f(t)$ olduğunu kolayca görebiliriz.

Böylece $\mathcal{F}_1$ kümesindeki seriler birleşme özelliğini sağlar. Dolayısıyla her $f(t) \in \mathcal{F}_1$ bileşke işlemine göre tersinin olduğu gösterildiğinden $(\mathcal{F}_1, \circ)$ grup olduğu görülür.

2.1.6. Katsayı belirleme

$f(t) \in \mathcal{L}$ veya özel olarak $f(t) \in \mathcal{F}$ olmak üzere $[t^n]f(t)$ ifadesi $f(t)$ deki t^n'nin katsayısını vermektedir. Yani

$$[t^n]f(t) = f_n$$

olur.

Dolayısıyla $[t^n]$; $[t^n] : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) biçiminde bir dönüşüm olarak görülebilir. Bu nedenle $[t^n]$ katsayı operatörü olarak adlandırılır.

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$, $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere katsayı operatörünün sık kullanılan temel özellikleri şunlardır:

(a) $[t^n](\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha[t^n]f(t) + \beta[t^n]g(t)$ (doğrusallık kuralı).

Bu özellik katsayı operatörü tanımından açıktır.

(b) $[t^n]tf(t) = [t^{n-1}]f(t)$ (öteleme kuralı).

Bu özellik yine katsayı operatörü tanımından açıktır.

(c) $[t^n]f'(t) = (n+1)[t^{n+1}]f(t)$ (türev kuralı).

Bu özellik katsayı operatörünün tanımı ve formal kuvvet serilerindeki türev işleminin tanımı kullanılarak kolayca görülebilir.

(d) $[t^n]f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{n}[t^n]f(t)[t^{n-k}]g(t)$ (girişim kuralı).

(2.1) eşitliğinden, $f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}\right)t^n$ yazılır. Buradan istenen eşitlik görülür.

(e) $[t^n]f(g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}([y^k]f(y))[t^n]g(t)^k$ (bileşke kuralı).

(2.3) deki bileşke tanımı kullanılarak, $f(g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(g(t))^k$ olduğu görülür. Buradan,

$$[t^n]f(g(t)) \;=\; [t^n]\sum_{k=0}^{\infty} f_k(g(t))^k = \sum_{k=0}^{\infty}([y^k]f(y))[t^n]g(t)^k$$

olarak bulunur.

Ayrıca, (b)'de verilen öteleme kuralı $[t^n]t^k f(t) = [t^{n-k}]f(t)$ olarak kolayca genelleştirilebilir. Aynı şekilde negatif kuvvetler için $[t^n]\frac{f(t)}{t^k} = [t^{n+k}]f(t)$ olur. Bu kuralların hepsi çok önemlidir ve formal kuvvet serilerine ve formal Laurent serilerine uygulanabilir. Yalnız, $n = 1$ için türev kuralının $[t^{-1}]f'(t) = 0$ eşitliğini verdiğini gözlemleyelim. Ayrıca $[t^{-1}]$ operatörü kalıntı(rezidü) operatörü olarak adlandırılır.

Katsayı operatörüne birçok uygulamada ihtiyaç duyacağız. Örneğin, α ve r iki reel sayı olmak üzere $(1+\alpha t)^r$ seri açılımındaki $[t^n]$'in katsayılarını bulalım. (c)'de verilen türev kuralı $[t^n]f(t) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]f'(t)$ şeklinde kolayca yazılabilir. Bu ifade kullanılarak

$$\begin{aligned}
[t^n](1+\alpha t)^r &= \frac{r\alpha}{n}[t^{n-1}](1+\alpha t)^{(r-1)} \\
&= \frac{r\alpha}{n}\frac{(r-1)\alpha}{n-1}[t^{n-2}](1+\alpha t)^{(r-2)} \\
&= \frac{r\alpha}{n}\frac{(r-1)\alpha}{n-1}\cdots\frac{(r-n+1)\alpha}{1}[t^0](1+\alpha t)^{r-n} \\
&= \alpha^n\binom{r}{n}[t^0](1+\alpha t)^{r-n}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $[t^0](1+\alpha t)^{r-n} = 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla buradan

$$[t^n](1+\alpha t)^r = \binom{r}{n}\alpha^n \tag{2.4}$$

olan ve katsayı belirleme işlemlerinde çok sık kullanılan Newton özdeşliği bulunur. (2.4) özdeşliğinde $r = -1$ alınırsa geometrik seri elde edilir ve

$$[t^n]\frac{1}{1+\alpha t} \;=\; \binom{-1}{n}\alpha^n = \binom{1+n-1}{n}(-1)^n\alpha^n = (-\alpha)^n$$

bulunur.

2.1.7. Matris gösterimi

$f(t) \in \mathcal{F}_0$ olmak üzere $f(t)$ formal kuvvet serisinin katsayıları sonsuz alt üçgensel matris (veya sıra) olarak gösterilebilir. Bu matrisi $D = (d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ olarak göstereceğiz. Bu matrisin 0. sütununda sırasıyla $f_0, f_1, f_2, \ldots$ elemanları bulunur. 1. sütundaki elemanlar ise aynı katsayıların bir aşağı ötelenmiş biçimidir (Sprugnoli 2006). Yani, birinci sütundaki elemanlar $0, f_0, f_1, f_2, \ldots$ şeklindedir. k. sütundaki elemanlar ise $f(t)$ formal kuvvet serisinin katsayılarının k birim aşağı ötelenerek yazılmış halidir, yani ilk k sıradakiler 0 olur. Verdiğimiz bu tanım şu şekilde özetlenebilir: her $n, k \in \mathbb{N}$ için $d_{n,k} = f_{n-k}$ olur.

$D = (d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ matrisi $D = (f(t), 1)$ şeklinde gösterilir. Dolayısıyla

$$D = (f(t), 1) = \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ f_1 & f_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ f_2 & f_1 & f_0 & 0 & 0 & \cdots \\ f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 & \cdots \\ f_4 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olur. $f(t)$ ve $g(t)$ iki formal kuvvet serisi olmak üzere, bu kuvvet serilerinin katsayılarını içeren matrisler $(f(t), 1)$ ve $(g(t), 1)$ olur. Bu iki matrisin çarpımı

$$(f(t), 1) \cdot (g(t), 1)$$

şeklinde gösterilir. Bu çarpımda klasik satır sütun çarpımı yapılır. $(f(t), 1)$ matrisinde n. satır elemanları olan $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots$ ile $(g(t), 1)$ matrisinde k. sütun elemanları olan $\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{k-tane}, g_1, g_2, \ldots$ çarpılır. Dolayısıyla oluşan çarpım matrisinin genel elemanı

$$d_{n,k} = \sum_{j=0}^{\infty} f_{n-j} g_{j-k}$$

olur. Burada her $r < 0$ için $g_r = 0$ olur.

$k = 0$ için $d_{n,0} = \sum_{j=0}^{\infty} f_{n-j} g_j = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j} g_j$ olur. Dolayısıyla 0. sütunun (2.1) deki girişim tanımından $f(t)g(t)$ girişiminin katsayılarını içerdiğini görürüz.

$k = 1$ için $d_{n,1} = \sum_{j=0}^{\infty} f_{n-j} g_{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} f_{n-1-j} g_j$ olur. Bu eşitlikte $f(t)g(t)$ girişimindeki t^{n-1} katsayısını verir.

Aynı yol ile devam edersek k. sütunda ise $f(t)g(t)$ girişimdeki katsayıların k birim aşağı ötelenmiş olarak sıralandığını buluruz. Dolayısıyla

$$(f(t), 1) \cdot (g(t), 1) = (f(t)g(t), 1)$$

olur. Sonuç olarak, $(\mathcal{F}_0, \cdot)$ ile $(f(t), 1)$ şeklindeki matris kümesi arasında grup izomorfizmi olduğu görülür.

Özel olarak $(1,1)$ matrisi birim matris olarak ve $(f(t)^{-1},1)$ ise $(f(t),1)$ matrisinin ters matrisi olarak adlandırılmaktadır.

Şimdi $f(t) \in \mathcal{F}_1$ olmak üzere $f(t)^k$ formal serisinin katsayılarından bir sonsuz alt üçgensel matris oluşturabiliriz. Burada $f(t)$ serisinin kuvvetlerindeki katsayılar her bir sütuna sırayla yazılmaktadır. Bu matris aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & f_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & f_2 & f_1^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & f_3 & 2f_1f_2 & f_1^3 & 0 & \cdots \\ 0 & f_4 & 2f_1f_3+f_2^2 & 3f_1^2f_2 & f_1^4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Yukarıda verilen bu matris ise $(1, f(t)/t)$ şeklinde gösterilmektedir (Sprugnoli 2006).

$f(t) \in \mathcal{F}_1$ ve $g(t) \in \mathcal{F}_1$ olmak üzere $(1, g(t)/t) \cdot (1, f(t)/t)$ çarpımını inceleyelim.

$\left(\widehat{f}_{n,k}\right) = (1, f(t)/t)$ olmak üzere tanımdan $\widehat{f}_{n,k} = [t^n]f(t)^k$ olur. Dolayısıyla çarpımın genel elemanı

$$\begin{aligned} d_{n,k} &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{g}_{n,j}\hat{f}_{j,k} = \sum_{j=0}^{\infty}\left([t^n]g(t)^j\right)\left([y^j]f(y)^k\right) \\ &= [t^n]\sum_{j=0}^{\infty}\left([y^j]f(y)^k\right)g(t)^j \\ &= [t^n]f(g(t))^k \end{aligned}$$

olur. Diğer bir deyişle bu çarpım $f(g(t))$ bileşkesinin k. kuvvetindeki t^n'in katsayısını vermektedir. Sonuç olarak

$$(1, g(t)/t) \cdot (1, f(t)/t) = (1, f(g(t))/t)$$

olarak yazılır.

$t \in \mathcal{F}_1$ olmak üzere $(1, t/t) = (1,1)$ sonsuz boyutlu birim matrisi verir ve böylece formal kuvvet serileri ile $(1, f(t)/t)$ matrisleri arasında grup izomorfizmi olduğu görülür.

Sonuç olarak her $f(t) \in \mathcal{F}_0$ şeklindeki formal kuvvet serisi $(f(t),1)$ olarak gösterilebilir. $(f(t),1)$ şeklindeki matrislerin kümesi A olmak üzere, $(\mathcal{F}_0,\cdot)$ kümesi $(A,\cdot)$ kümesine izomorftur ve satır sütun çarpımı Cauchy çarpımına dönüşür.

Diğer taraftan $g(t) \in \mathcal{F}_1$ şeklindeki formal kuvvet serileri $(1, g(t)/t)$ olarak gösterilebilir. $(1, g(t)/t)$ şeklindeki matrislerin kümesi B olmak üzere $(\mathcal{F}_1,\cdot)$ kümesi $(B,\cdot)$ kümesine izomorftur ve satır sütun çarpımı bileşkeye dönüşür.

2.1.8. Lagrange Tersinme Teoremi

$f(t) \in \mathcal{F}_1$ olmak üzere $(1, f(t)/t)$ alt üçgensel matrisi verilsin ve bu matrisin tersi ise $(1, g(t)/t)$ olsun. Dolayısıyla $(1, g(t)/t) \cdot (1, f(t)/t) = (1, 1)$ olur. Bu çarpımın sonucu $(1, f(g(t))/t)$ olduğundan $f(g(t)) = 1$ bulunur. Diğer bir deyişle izomorfizmden dolayı $(1, f(t)/t)$ matrisinin tersi $f(t)$ formal kuvvet serisinin bileşke işlemine göre tersinin matrisi olur.

Lagrange, bileşkeye göre tersin katsayılarını veren önemli bir formül bulmuştur. Şimdi $(1, f(t)/t)$ matrisinin tersi olan $(1, g(t)/t)$ matrisinin gerçek formunu bulalım.

$D = (d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ olmak üzere

$$d_{n,k} = \frac{k}{n}[t^{n-k}]\left(\frac{t}{f(t)}\right)$$

olarak tanımlayalım. $f(t) \in \mathcal{F}_1$ olduğundan $f(t)/t \in \mathcal{F}_0$ olur. Dolayısıyla $(t/f(t))^k = (f(t)/t)^{-k}$ iyi tanımlıdır. $(d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}} = (1, g(t)/t)$ olduğunu göstermek için yalnızca $D \cdot (1, f(t)/t) = (1, 1)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir; çünkü $f(t)$ nin bileşkeye göre tersinin tek olduğunu biliyoruz.

$D \cdot (1, f(t)/t)$ matris çarpımının genel elemanı $v_{n,k}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} v_{n,k} &= \sum_{j=0}^{\infty} d_{n,j}\hat{f}_{j,k} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} d_{n,j}[y^j](f(y))^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{n}[t^{j-n}]\left(\frac{t}{f(t)}\right)^n [y^j](f(y))^k \end{aligned}$$

bulunur. Katsayı operatöründeki türev kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned} j[y^j](f(y))^k &= [y^{j-1}]\frac{d}{dy}f(y)^k \\ &= [y^{j-1}]kf(y)^{k-1}f'(y) \\ &= [y^j]ykf(y)^{k-1}f'(y) \\ &= k[y^j]yf'(y)f(y)^{k-1} \end{aligned}$$

olur. Sonuçta $[y^j](f(y))^k = \frac{k}{j}[y^j]yf'(y)f(y)^{k-1}$ bulunur ve bu eşitlik $v_{n,k}$'da yerine yazılırsa

$$v_{n,k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{n}[t^{n-j}]\left(\frac{t}{f(t)}\right)^n \frac{k}{j}[y^j]yf'(y)f(y)^{k-1}$$

$$= \frac{k}{n}\sum_{j=0}^{\infty}[t^{n-j}]\left(\frac{t}{f(t)}\right)^n [y^j]yf'(y)f(y)^{k-1}$$

bulunur ve burada da katsayı operatörü için verilen girişim kuralı kullanılarak

$$v_{n,k} = \frac{k}{n}[t^n]\left(\frac{t}{f(t)}\right)^n tf'(t)f(t)^{k-1}$$

olduğu görülür. Burada $k = n$ ve $k \neq n$ olma durumlarını inceleyelim.

İlk olarak $k = n$ için,

$$\begin{aligned} v_{n,n} &= \frac{n}{n}[t^n]\left(\frac{t}{f(t)}\right)^n tf'(t)f(t)^{n-1} \\ &= [t^n]t^n tf(t)^{-n}f'(t)f(t)^{n-1} \\ &= [t^n]t^n tf(t)^{-1}f'(t) \\ &= [t^0]\left(\frac{t}{f(t)}\right)f'(t) = 1 \end{aligned}$$

olur; çünkü $f'(t) = f_1 + 2f_2t + 3f_3t^2 + \cdots$ ve $f(t)/t \in \mathcal{F}_0$, olduğundan $(f(t)/t)^{-1} = (f_1 + f_2t + f_3t^2 + \cdots)^{-1} = f_1^{-1} + \cdots$ bulunur, dolayısıyla $f'(t)(t/f(t))$ nin sabit terimi $f_1/f_1 = 1$ dir.

İkinci durum olarak $k \neq n$ için,

$$\begin{aligned} v_{n,k} &= \frac{k}{n}[t^n]\left(\frac{t}{f(t)}\right)^n tf'(t)f(t)^{k-1} \\ &= \frac{k}{n}[t^n]t^n tf(t)^{k-n-1}f'(t) \\ &= \frac{k}{n}[t^{-1}]\frac{1}{k-n}\frac{d}{dt}(f(t)^{k-n}) = 0 \end{aligned}$$

bulunur; çünkü $f(t)^{k-n}$ formal Laurent serisi olur dolayısıyla $[t^{-1}]f'(t) = 0$ olduğunu biliyoruz.

Böylece $D \cdot (1, f(t)/t) = (1, 1)$ kanıtlanmış olur. Yani D matrisi $(1, f(t)/t)$ matrisinin tersidir.

$\bar{f}(t)$, $f(t)$ formal kuvvet serisinin bileşke işlemine göre tersi olmak üzere; matrisin 1. sütunu $\bar{f}(t)$ fonksiyonunun katsayılarını verir. Dolayısıyla

$$\bar{f}_n = [t^n]\bar{f}(t) = d_{n,1} = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\left(\frac{t}{f(t)}\right)^n \tag{2.5}$$

eşitliği ünlü Lagrange Tersinme Formülü (LTF) olarak adlandırılmaktadır. Diğer sütunlar ise $\bar{f}(t)^k$'nın katsayılarını verir bu formül ise

$$[t^n]\bar{f}(t)^k = \frac{k}{n}[t^{n-k}]\left(\frac{t}{f(t)}\right)^n \tag{2.6}$$

olarak yazılır.

Lagrange Tersinme Formülünü uygulamak için başka bir yol daha vardır.

$\phi(t) \in \mathcal{F}_0$ olmak üzere $w = t\phi(t)$ şeklinde bir fonksiyon denklemi olsun. Bu fonksiyon denklemindeki amacımız $w = w(t)$ formal kuvvet serisini bulmaktır. Burada $w(t) \in \mathcal{F}_1$ olduğu açıktır. Ayrıca $f(y) = y/\phi(y)$ olduğu düşünülürse $f(t) \in \mathcal{F}_1$ olduğu görülür.

$w = t\phi(w)$ fonksiyon denklemini $t = \frac{w}{\phi(w)} = f(w)$ şeklinde yazabiliriz ki buradan $f(w(t)) = t$ olduğu görülür. Bu da bize $w(t)$ kuvvet serisinin $f(t)$ serisinin bileşke işlemine göre tersi olduğunu gösterir. Yani $\bar{f}(t) = w(t)$ olur. Dolayısıyla $w(t)$'nin tek türlü tanımlı olduğunu bildiğimizden (2.5) daki LTF eşitliği kullanılarak

$$[t^n]w(t) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\left(\frac{t}{f(t)}\right)^n = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\phi(t)^n \tag{2.7}$$

eşitliği bulunur.

LTF aynı zamanda $w(t)^k$'nın da katsayılarını verebilir. Buradan daha genel bir sonuç elde etmek için $F(t) \in \mathcal{F}$ olsun. $w = t\phi(t)$ fonksiyon denklemi ve $\phi(w) \in \mathcal{F}_0$ olmak üzere $F(w(t))$ bileşkesinin t^n katsayılarını bulalım:

$$\begin{aligned} [t^n]F(w(t)) &= [t^n]\sum_{k=0}^{\infty} F_k w(t)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_k [t^n] w(t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \frac{k}{n}[t^{n-k}]\phi(t)^n \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} kF_k [t^n] t^k \phi(t)^n \\ &= \frac{1}{n}[t^{n-1}]\left(\sum_{k=0}^{\infty} kF_k t^{k-1}\right)\phi(t)^n \\ &= \frac{1}{n}[t^{n-1}]F'(t)\phi(t)^n \end{aligned} \tag{2.8}$$

olur. Burada $[t^0]F(w(t)) = F_0$'dır.

Örnek 4 *$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}$ şeklindeki rekürans bağıntısını sağlayan bir dizinin terimleri için kesin bir formül elde edebiliriz. Burada $b(t)$'nin bir formal seri olduğunu düşünerek $b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ eşitliğini yazalım. Yukarıda vermiş olduğumuz rekürans bağıntısını t^{n+1} ile çarpıp, n üzerinden toplarsak*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}\right)$$

olur. $b_0 = 1$ *olduğunu göz önüne alıp gerekli düzenlemeleri yaparsak*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - 1 = t \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} \right) t^n$$

haline dönüşür. Eşitliğin sağ tarafında girişim vardır, sol tarafında ise $b(t)$ *formal serisi vardır. Girişim ve* $b(t)$*'yi yerine yazarsak*

$$b(t) - 1 = tb(t)^2$$

olur. Amacımız $b_n = [t^n]b(t)$*'yi hesaplamaktır. Dolayısıyla* $w = w(t) = b(t) - 1$ *olarak alalım ve bir fonksiyon denklemi oluşturalım. Burada* $w(t) \in \mathcal{F}_1$ *ve* $\forall n > 0$ *için* $w_n = b_n$*'dir. Dolayısıyla yukarıda vermiş olduğumuz bağıntı* $w = t(1+w)^2$ *olur. Burada* $\phi(t) = (1+t)^2$*'dir. Sonuç olarak oluşan bu fonksiyonel denklem yardımıyla LTF uygulanabilir ve*

$$\begin{aligned} b_n &= [t^n]w(t) = \frac{1}{n}[t^{n-1}](1+t)^{2n} \\ &= \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla b_n, *n. Catalan sayısını vermektedir. Böylece*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

eşitliğinin $n = 0$ *durumu için* $C_0 = 1$ *olduğunu görebiliriz.*

2.2. Üreteç Fonksiyonları

2.2.1. Genel kurallar

$F = (f_0, f_1, f_2, \ldots) = (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şeklinde bir sayı dizisini gözönüne alalım. Bu F dizisinin (adi) üreteç fonksiyonu $f(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots$ şeklinde bir formal kuvvet serisidir. Verilen bir $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\mathcal{G}$ üreteç fonksiyonu operatörü

$$\mathcal{G}(f_k)_{k\in\mathbb{N}} = f(t)$$

olarak tanımlanır. Buradaki t değişkenini vurgulamak için $\mathcal{G}_t(f_k)_{k\in\mathbb{N}} = f(t)$ gösterimi de kullanılmaktadır. Bu gösterim özellikle $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi birden fazla değişkene sahip olduğunda kullanışlıdır. Örneğin $f(t, w)$ iki değişkenli bir formal kuvvet serisi ve $f_{n,k}$ bu serideki $t^n w^k$'nın katsayısı olmak üzere bu serinin üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{G}(f_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}} = f(t, w)$$

olarak yazılır.

Ayrıca verilen bir $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ dizisinin üstel üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{E}(f_k) = \mathcal{G}\left(\frac{f_k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{t^k}{k!}$$

biçiminde ifade edilir.

Şimdi üreteç fonksiyonu operatörünün bazı temel özelliklerine bakalım:

(a) $\mathcal{G}(\alpha f_k + \beta g_k) = \alpha \mathcal{G}(f_k) + \beta \mathcal{G}(g_k)$ (doğrusallık özelliği).

Bu özellik formal kuvvet serisi tanımı ve üreteç fonksiyonu tanımı kullanılarak kolayca görülebilir.

(b) $\mathcal{G}(f_{k+1}) = \frac{\mathcal{G}(f_k) - f_0}{t}$ (öteleme özelliği).

Bu özellik de

$$\mathcal{G}(f_{k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1} t^k = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} f_k t^k = \frac{\mathcal{G}(f_k) - f_0}{t}$$

eşitliğinden elde edilir.

(c) $\mathcal{G}(k f_k) = t D \mathcal{G}(f_k)$ (türev özelliği).

Formal türev yardımıyla

$$D\mathcal{G}(f_k) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} k f_k t^{k-1} = \frac{1}{t}\mathcal{G}(k f_k)$$

olarak görülür.

(d) $\mathcal{G}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}\right) = \mathcal{G}(f_k)\mathcal{G}(g_k)$ (girişim özelliği).

Girişim tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}\right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n \\
&= \mathcal{G}(f_k)\mathcal{G}(g_k)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\mathcal{G}(g_k))^n = \mathcal{G}(f_k) \circ \mathcal{G}(g_k)$ (bileşke özelliği).

Bu özellik için $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k$ olmak üzere $g_0 = 0$ olmalıdır. Buradan formal kuvvet serileri için bileşke tanımı kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\mathcal{G}(g_k))^n = \sum_{n=0}^{f_n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k \right)^n = \mathcal{G}(f_k) \circ \mathcal{G}(g_k)$$

olduğu görülür.

(f) $\mathcal{G}([t^n]F(t)\phi(t)^n) = \left[\frac{F(w)}{1-t\phi'(w)} \middle| w = t\phi(w) \right]$ (köşegenleştirme özelliği).

Köşegenleştirme özelliği Lagrange Tersinme Formülü yardımıyla ispatlanabilir. Öncelikle

$$[t^n]F(t)\phi(t)^n = [t^{n-1}]\frac{F(t)}{t}\phi(t)^n$$

olur. Daha önce LTF olarak (2.8) eşitliği yani,

$$[t^n]F(w(t)) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]F'(t)\phi(t)^n \qquad (w = t\phi(w))$$

olduğu gösterilmişti. Bu formülde
$F(w(t)) = \int \frac{F(y)}{y} dy | y = w(t)$ olarak alalım,

$$[t^n] \left(\int \frac{F(y)}{y} dy \middle| y = w(t) \right) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\frac{F(t)}{t}\phi(t)^n$$

olur. Bunu kullanarak

$$[t^n]F(t)\phi(t)^n = n[t^n] \left[\int \frac{F(y)}{y} dy \middle| y = w(t) \right]$$

yazılabilir. Buradan ikinci kısımda katsayı operatörü için türev kuralı kullanılarak ($[t^n]f'(t) = (n+1)[t^{n+1}]f(t)$)

$$\begin{aligned} [t^n]F(t)\phi(t)^n &= [t^{n-1}]\frac{d}{dt} \left[\int \frac{F(y)}{y} dy \middle| y = w(t) \right] \\ &= [t^{n-1}] \left[\frac{F(w)}{w} \middle| w = t\phi(t) \right] \frac{dw}{dt} \end{aligned} \qquad (2.9)$$

elde edilir. Buradaki türevde zincir kuralı uygulanır. $w = t\phi(w)$ olmak üzere

$$\frac{dw}{dt} = \phi(w) + t \left[\frac{d\phi}{dw} \middle| w = t\phi(w) \right] \frac{dw}{dt} = \phi(w) + t\phi'(w)\frac{dw}{dt}$$

olur ve dolayısıyla

$$\frac{dw}{dt} = \left[\frac{\phi(w)}{1 - t\phi'(w)} \middle| w = t\phi(w) \right]$$

bulunur ve bulunan bu ifadeyi (2.9) eşitliğinde yerine yazarsak, sonuç olarak

$$\begin{aligned}
[t^n]F(t)\phi(t)^n &= [t^{n-1}] \left[\frac{F(w)}{w} \frac{\phi(w)}{1 - t\phi'(w)} \middle| w = t\phi(w) \right] \\
&= [t^{n-1}] \frac{1}{t} \left[\frac{F(w)}{1 - t\phi'(w)} \middle| w = t\phi(w) \right] \\
&= [t^n] \left[\frac{F(w)}{1 - t\phi'(w)} \middle| w = t\phi(w) \right]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi n. satırı $F(t)\phi(t)^n$ serisinin katsayılarından oluşan bir sonsuz matris düşünelim. $[t^n]F(t)\phi(t)^n$ bu matrisin ana köşegeni üzerindeki elemanları verdiğinden dolayı bu özellik köşegenleştirme özelliği olarak adlandırılmıştır.

İncelediğimiz tüm özellikler üreteç fonksiyonları teorisi için çok önemlidir. Bu özellikler ve şimdi vereceğimiz temel prensip, ileride sıkça kullanılacaktır.

Teorem 5 *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ve $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olmak üzere iki dizi verilsin. $\mathcal{G}(f_k) = \mathcal{G}(g_k)$ olması için gerek ve yeter koşul her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k = g_k$ olmasıdır.*

İspat. Tanımdan açıktır. ■

Tanımdan oldukça açık görünen bu ifade aslında çok önemlidir; çünkü üreteç fonksiyonlarının eşitliğinden katsayıları aynı olan dizilerin eşitliğine geçmemizi sağlar. Böylece önemli özdeşlikler elde edilir. İki dizinin elemanlarından herhangi iki tanesi bile eşit değilse, üreteç fonksiyonlarının eşitliği söz konusu değildir.

2.2.2. Üreteç fonksiyonları ile ilgili bazı teoremler

Bu bölümdeki Teoremler Sprugnoli (2006) kaynağından alınmıştır.

Teorem 6 *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ olmak üzere*

$$\mathcal{G}(f_{k+2}) = \frac{\mathcal{G}(f_k) - f_0 - f_1 t}{t^2}$$

olur.

İspat. $g_k = f_{k+1}$ seçerek daha önce elde ettiğimiz üreteç fonksiyonlarının temel özelliklerinden biri olan öteleme özelliğini kullanalım. $g_0 = f_1$ olacağından

$\mathcal{G}(f_{k+2}) = \mathcal{G}(g_{k+1}) = \frac{\mathcal{G}(g_k)-g_0}{t} = \frac{\frac{\mathcal{G}(f_k)-f_0}{t}-f_1}{t} = \frac{\mathcal{G}(f_k)-f_0-f_1 t}{t^2}$ olarak bulunur. ■

Aşağıdaki teorem sağa doğru j adım ötelenmiş dizinin üreteç fonksiyonunu vermektedir.

Teorem 7 *$f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ olmak üzere yukarıdaki eşitlikten daha genel olan*

$$\mathcal{G}(f_{k+j}) = \frac{\mathcal{G}(f_k) - f_0 - f_1 t - \cdots - f_{j-1}t^{j-1}}{t^j}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $g_k = f_{k+1}$ alınırsa j üzerinden tümevarım kullanılarak eşitlik kolayca ispatlanabilir. ■

Aşağıdaki teorem, sola doğru j adım ötelenmiş dizinin üreteç fonksiyonunu vermektedir.

Teorem 8 *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ olmak üzere*

$$\mathcal{G}(f_{k-j}) = t^j\mathcal{G}(f_k)$$

olur.

İspat. $\mathcal{G}(f_k) = \mathcal{G}(f_{(k-1)+1}) = \frac{\mathcal{G}(f_{k-1})-f_{-1}}{t}$ olmak üzere f_{-1}, t^{-1}'in katsayısıdır; fakat $f(t) \in \mathcal{F}$ olduğundan $f_{-1} = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{G}(f_{k-1}) = t\mathcal{G}(f_k)$$

olarak bulunur ve tümevarım uygulanarak

$$\mathcal{G}(f_{k-j}) = t^j\mathcal{G}(f_k)$$

elde edilir. ■

Üreteç fonksiyonlarının türev özdeşliği birçok biçimde genelleştirilebilir.

Teorem 9 *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ olmak üzere*

$$\mathcal{G}((k+1)f_{k+1}) = D\mathcal{G}(f_k)$$

olur.

İspat. $g_k = kf_k$ olarak alalım. Buradan üreteç fonksiyonlarının öteleme ve türev özellikleri kullanılarak

$$\mathcal{G}((k+1)f_{k+1}) = \mathcal{G}(g_{k+1}) = \frac{\mathcal{G}(kf_k) - 0f_0}{t} = t^{-1}tD\mathcal{G}(f_k) = D\mathcal{G}(f_k)$$

bulunur. ■

Bir önceki teoremde bulunan eşitliği bir adım daha uygulayabiliriz.

Teorem 10 *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ olmak üzere*

$$\mathcal{G}(k^2 f_k) = tD\mathcal{G}(f_k) + t^2D^2\mathcal{G}(f_k)$$

olur.

Bu teoremin daha genel halini yazıp kanıtlayalım.

Teorem 11 *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ ise*

$$\mathcal{G}(k^j f_k) = \mathcal{S}_j(tD)\mathcal{G}(f_k)$$

olur. Burada $\mathcal{S}_j(w) = \sum_{r=1}^{j} \left\{ {j \atop r} \right\} w^r$, ikinci çeşit j. Stirling polinomudur.

Not 1 *Bu formül operatör olarak algılanmalıdır. Örneğin $j = 3$ için,*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(k^3 f_k) = \mathcal{S}_3(tD)\mathcal{G}(f_k) &= \sum_{r=1}^{3} \left\{ {3 \atop r} \right\} (tD)^r \mathcal{G}(f_k) \\ &= \left\{ {3 \atop 1} \right\} (tD)\mathcal{G}(f_k) + \left\{ {3 \atop 2} \right\} (tD)^2\mathcal{G}(f_k) + \left\{ {3 \atop 3} \right\} (tD)^3\mathcal{G}(f_k) \\ &= (tD)\mathcal{G}(f_k) + 3(tD)^2\mathcal{G}(f_k) + (tD)^3\mathcal{G}(f_k) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

İspat. Kanıtı tümevarımla yapacağız. $j = 1$ için

$$\mathcal{G}(kf_k) = \mathcal{S}_1(tD)\mathcal{G}(f_k) = (tD)\mathcal{G}(f_k)$$

doğru olduğu açıktır.

$j = m$ için $\mathcal{G}(k^m f_k) = \mathcal{S}_m(tD)\mathcal{G}(f_k)$ doğru olduğunu varsayalım.

$j = m+1$ için bakalım

$$\mathcal{G}(k^{m+1} f_k) = \mathcal{G}(k(k^m f_k)) = (tD)\mathcal{G}(k^m f_k) = (tD)\mathcal{S}_m(tD)\mathcal{G}(f_k)$$

olur. Buradan öncelikle $(tD)\mathcal{S}_m(tD)$'yi bulup yerine yazalım.

$$
\begin{aligned}
(tD)\mathcal{S}_m(tD) &= (tD)\sum_{r=1}^{m} \left\{ m \atop r \right\} t^r D^r \\
&= t\left(\sum_{r=1}^{m} \left\{ m \atop r \right\} r t^{r-1} D^r + \sum_{r=1}^{m} \left\{ m \atop r \right\} t^r D^{r+1} \right) \\
&= \sum_{r=1}^{m} \left\{ m \atop r \right\} r t^r D^r + \sum_{r=2}^{m+1} \left\{ m \atop r-1 \right\} t^r D^r \\
&= \sum_{r=2}^{m} \left(\left\{ m \atop r \right\} r + \left\{ m \atop r-1 \right\} \right) t^r D^r + tD + t^{m+1} D^{m+1} \\
&= \sum_{r=2}^{m} \left\{ m+1 \atop r \right\} t^r D^r + tD + t^{m+1} D^{m+1} \\
&= \sum_{r=1}^{m+1} \left\{ m+1 \atop r \right\} t^r D^r
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu değer yukarıda yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(k^{m+1} f_k) &= \sum_{r=1}^{m+1} \left\{ m+1 \atop r \right\} (tD)^r \mathcal{G}(f_k) \\
&= \mathcal{S}_{m+1}(tD)\mathcal{G}(f_k)
\end{aligned}
$$

bulunur ve kanıt tamamlanmış olur. ■

$k^{\underline{r}} = k(k-1)\cdots(k-r+1)$ azalan faktöriyel gözönüne alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 12 $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisinin üreteç fonksiyonu* $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ *olmak üzere,*

$$\mathcal{G}(k^{\underline{r}} f_k) = t^r D^r \mathcal{G}(f_k)$$

olur.

İspat.

$$
\begin{aligned}
t^r D^r \mathcal{G}(f_k) = t^r D^r f(t) &= t^r D^r \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \\
&= t^r D^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} k f_k t^{k-1} \\
&= t^r D^{r-2} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) f_k t^{k-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
&= t^r \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1) f_k t^{k-r}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1) f_k t^{k}\\
&= \mathcal{G}(k^{\underline{r}} f_k)
\end{aligned}
$$

bulunarak kanıt tamamlanır. ■

Teorem 13 *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ olsun. $\forall k \neq 0$ için $g_k = \frac{f_k}{k}$ ve $g_0 = 0$ olmak üzere*

$$\mathcal{G}\left(\frac{1}{k} f_k\right) = \mathcal{G}(g_k) = \int_0^t (\mathcal{G}(f_k) - f_0)\frac{dz}{z}$$

olur.

İspat. $k \neq 0$ için $f_k = kg_k$'dır. Dolayısıyla $\mathcal{G}(kg_k) = \mathcal{G}(f_k) - f_0$ olur. Buradan üreteç fonksiyonları için türev kuralı kullanılarak $tD\mathcal{G}(g_k) = \mathcal{G}(f_k) - f_0$ bulunur ve bu eşitlikte integral alınırsa

$$\mathcal{G}(g_k) = \int_0^t (\mathcal{G}(f_k) - f_0)\frac{dz}{z}$$

elde edilir. ■

Teorem 14 *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ olmak üzere ($f(t)$ bir formal Laurent serisi değil)*

$$\mathcal{G}\left(\frac{1}{k+1} f_k\right) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{G}(f_k)dz = \frac{1}{t}\int_0^t f(z)dz$$

olur.

İspat. $g_{k+1} = f_k$ ve $g_0 = 0$ olacak biçimde $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisini gözönüne alalım. Burada $\mathcal{G}(f_k) = \mathcal{G}(g_{k+1}) = \frac{\mathcal{G}(g_k)-g_0}{t}$ olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}\left(\frac{1}{k+1} f_k\right) &= \mathcal{G}\left(\frac{1}{k+1} g_{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} g_{k+1} t^k = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} g_k t^k\\
&= \frac{1}{t}\mathcal{G}\left(\frac{1}{k} g_k\right) = \frac{1}{t}\int_0^t (\mathcal{G}(g_k) - g_0)\frac{dz}{z} = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\mathcal{G}(g_k)}{z}dz\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{G}(f_k)dz = \frac{1}{t}\int_0^t f(z)dz
\end{aligned}
$$

bulunarak ispat tamamlanır. ■

Teorem 15 *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ olmak üzere,*

$$\mathcal{G}(p^k f_k) = f(pt)$$

olur.

İspat. Üreteç fonksiyonunun bileşke özelliğinin

$$\mathcal{G}(f_k) \circ \mathcal{G}(g_k) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\mathcal{G}(g_k))^n$$

olduğunu daha önce göstermiştik. Burada $g(t) = pt$ olarak alırsak

$$f(t) \circ (pt) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(pt)^n = \sum_{n=0}^{\infty} p^n f_n t^n = \mathcal{G}(p^k f_k)$$

elde edilir. ■

Özel olarak, $p = -1$ için $\mathcal{G}((-1)^k f_k) = f(-t)$ olur.

2.2.3. Üreteç fonksiyonları ile ilgili bazı sonuçlar

Üreteç fonksiyonları ile ilgili şimdiye kadar verilen temel kavramlar ve teoremler kullanılarak biraz daha ileri seviye sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 16 (Sprugnoli, 2006) *$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ olmak üzere,*

$$\mathcal{G}(f_{2k}) = \frac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{2} \tag{2.10}$$

ve

$$\mathcal{G}(f_{2k+1}) = \frac{f(\sqrt{t}) - f(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \tag{2.11}$$

olur. (Buradaki $\sqrt{t}$, $(\sqrt{t})^2 = t$'yi sağlayan bir semboldür.)

İspat. Üreteç fonksiyonlarının bileşke özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\frac{f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})}{2} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\sqrt{t})^n + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(-\sqrt{t})^n}{2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{(\sqrt{t})^n + (-\sqrt{t})^n}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada n tek ise $(\sqrt{t})^n + (-\sqrt{t})^n = 0$ olur. $n = 2k$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} \frac{t^k + t^k}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} t^k = \mathcal{G}(f_{2k})$$

bulunur.

Benzer şekilde (2.11) formülü için de aynı yöntem kullanılarak ispat yapılır. ■

Teorem 17 (Sprugnoli, 2006) *$(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ ise,*

$$\mathcal{G}\left(\frac{f_k}{2k+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \int_0^t \frac{\mathcal{G}(f_k)}{\sqrt{z}} dz$$

olur.

İspat. $g_k = \frac{f_k}{2k+1}$ olarak alalım. Buradan $2kg_k + g_k = f_k$ olur. $g(t) = \mathcal{G}(g_k)$ olmak üzere üreteç fonksiyonunun türev özelliğini uygularsak $2\mathcal{G}(kg_k) + \mathcal{G}(g_k) = \mathcal{G}(f_k)$ bulunur ve buradan $2tg'(t) + g(t) = f(t)$ diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise $g(0) = f_0$ için teoremdeki eşitliği verir. ■

Teorem 18 (Sprugnoli, 2006) *(Kısmi Toplam Teoremi) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ olmak üzere*

$$\mathcal{G}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right) = \frac{1}{1-t} \mathcal{G}(f_k)$$

olur.

İspat. $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ olsun. Buradan her n için $s_{n+1} = s_n + f_{n+1}$ yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafına da $\mathcal{G}$ operatörü uygulanırsa $\mathcal{G}(s_{n+1}) = \mathcal{G}(s_n) + \mathcal{G}(f_{n+1})$ bulunur. Teorem (6)'in yardımıyla

$$\frac{\mathcal{G}(s_n) - s_0}{t} = \mathcal{G}(s_n) + \frac{\mathcal{G}(f_n) - f_0}{t}$$

elde edilir. $s_0 = f_0$ olduğundan $\mathcal{G}(s_n) = t\mathcal{G}(s_n) + \mathcal{G}(f_n)$ bulunur. Buradan da

$$\mathcal{G}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right) = \frac{1}{1-t} \mathcal{G}(f_k)$$

bulunur. ■

Teorem 19 (Sprugnoli, 2006)*(Euler Dönüşümü) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$ olmak üzere*

$$\mathcal{G}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_k\right) = \frac{1}{1-t}f\left(\frac{t}{1-t}\right) \tag{2.12}$$

olur.

İspat. Binom katsayılarının temel özelliklerinden,

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{-n+n-k-1}{n-k}(-1)^{n-k} = \binom{-k-1}{n-k}(-1)^{n-k}$ bulunur. Böylece bu ifade $(1-t)^{-k-1}$'deki t^{n-k}'nın katsayısını verir. Üreteç fonksiyonunun bileşke özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{-k-1}{n-k}(-1)^{n-k}f_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}[t^{n-k}](1-t)^{-k-1}[y^k]f(y) \\ &= \frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}[t^n]\left(\frac{t}{1-t}\right)^k[y^k]f(y) \\ &= [t^n]\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}f_k\left(\frac{t}{1-t}\right)^k \\ &= [t^n]\frac{1}{1-t}f\left(\frac{t}{1-t}\right)\end{aligned}$$

kanıtlanmış olur. ■

Not 2 *Ayrıca, formal kuvvet serilerinde girişim kuralının*

$$[t^n]f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{n}[t^k]f(t)[t^{n-k}]g(t)$$

olduğunu göstermiştik. Bu eşitlikte $g(t) = (1+t)^n$ olarak alırsak,

$$\begin{aligned}[t^n]f(t)(1+t)^n &= \sum_{k=0}^{n}[t^k]f(t)[t^{n-k}](1+t)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}f_k\binom{n}{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_k\end{aligned}$$

elde edilir. Fakat bu ifade n'ye bağlı olduğundan bir üreteç fonksiyonu göstermez.

2.2.4. Başka bazı üreteç fonksiyonları

Bu bölümün amacı önceki bölümleri kullanarak daha genel olan üreteç fonksiyonlarını elde etmektir. İlk örnek olarak her $k \in \mathbb{N}$ için $f_{k+1} = f_k = 1$ olacak şekilde bir $F = (1, 1, 1, \ldots)$ sabit dizi alalım. Bu dizi için Teorem 5'de verilen üreteç fonksiyonlarının temel prensibi kullanılarak $\mathcal{G}(f_{k+1}) = \mathcal{G}(f_k)$ bulunur. Daha sonra burada üreteç fonksiyonlarının öteleme özelliği kullanılarak $\mathcal{G}(f_k) - f_0 = t\mathcal{G}(f_k)$ elde edilir. Dolayısıyla $f_0 = 1$ olduğundan

$$\mathcal{G}(1) = \frac{1}{1-t}$$

bulunur.

Böylece herhangi bir $F = (c, c, c, \ldots)$ şeklindeki bir sabit dizi için üreteç fonksiyonlarının doğrusallık özelliği kullanılarak,

$$\mathcal{G}(c) = \mathcal{G}(c \cdot 1) = c\mathcal{G}(1) = \frac{c}{1-t}$$

elde edilir. Benzer şekilde önceki bölümlerde incelediğimiz üreteç fonksiyonlarının temel özellikleri ve teoremleri kullanılarak birçok formül bulunabilir. Şimdi bunları verelim:

$\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n \cdot 1) = tD\frac{1}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2}$.

$\mathcal{G}(n^2) = \mathcal{G}(n \cdot n) = tD\mathcal{G}(n) = tD\frac{t}{(1-t)^2} = \frac{t+t^2}{(1-t)^3}$.

$\mathcal{G}((-1)^n) = \mathcal{G}(1) \circ (-t) = \frac{1}{1+t}$.

$\mathcal{G}(\frac{1}{n}) = \mathcal{G}(\frac{1}{n} \cdot 1) = \int_0^t (\mathcal{G}(1) - f_0)\frac{dz}{z} = \int_0^t (\frac{1}{1-z} - 1)\frac{dz}{z} = \int_0^t \frac{dz}{1-z} = \ln\frac{1}{1-t}$.

$\mathcal{G}(H_n) = \mathcal{G}\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{1-t}\mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1-t}\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)$ olur, burada H_n n. harmonik sayıdır.

Bulduğumuz bu formüller kullanılarak başka üreteç fonksiyonları eşitlikleri de bulunabilir:

$$\mathcal{G}(nH_n) = tD\mathcal{G}(H_n) = tD\left(\frac{1}{1-t}\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)\right) = \frac{t}{(1-t)^2}\left(\ln\left(\frac{1}{1-t}\right) + 1\right).$$

$$\mathcal{G}\left(\frac{1}{n+1}H_n\right) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{G}(H_n)dz = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{1-z}\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)dz = \frac{1}{2t}\left(\ln\frac{1}{1-t}\right)^2.$$

Ayrıca $\delta_{n,m}$, bilinen Kronecker delta olmak üzere

$$\mathcal{G}(\delta_{0,n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{0,n}t^n = \delta_{0,0} + \underbrace{\delta_{0,1}t + \cdots}_{0} = 1$$

olarak bulunur. Bu eşitlik daha genel halde

$$\mathcal{G}(\delta_{n,m}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,m} t^n = \underbrace{\delta_{0,m} + \delta_{1,m} t + \cdots + \delta_{m-1,m} t^{m-1}}_{0} + \underbrace{\delta_{m,m}}_{1} t^m + \underbrace{\cdots}_{0} = t^m$$

olarak elde edilir.

Şimdi ilginç bir örnek olarak $\mathcal{G}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ ifadesini bulalım. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ olduğundan eşitliğin her iki tarafına $\mathcal{G}$ operatörünü uygulayabiliriz; fakat bu bağıntı $n = 0$ için tanımlı değildir. Dolayısıyla Teorem 5'de verilen üreteç fonkiyonlarının temel prensibini uygulayabilmek için

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \delta_{n,0}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n - \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n - \frac{1}{t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n - t \right) \\
&= -\ln(1-t) - \frac{1}{t}(-\ln(1-t) - t) \\
&= 1 + \frac{1-t}{t} \ln(1-t)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi binom katsayılarının üreteç fonksiyonlarına bakalım. $\mathcal{G}(\binom{p}{k})$'yı bulmak için öncelikle binom katsayıları tanımından

$$\binom{p}{k+1} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)(p-k)}{(k+1)!} = \frac{p-k}{k+1}\binom{p}{k}$$

elde edilir. Burada $f_k = \binom{p}{k}$ olarak seçersek $f_{k+1} = \binom{p}{k+1}$ olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{G}((k+1)f_k) = \mathcal{G}((p-k)f_k) = p\mathcal{G}(f_k) - \mathcal{G}(kf_k)$$

bulunur. Burada Teorem 9 ve üreteç fonksiyonlarının türev özelliğinden yararlanılarak $D\mathcal{G}(f_k) = p\mathcal{G}(f_k) - t\mathcal{G}(f_k)$ elde edilir. Bu eşitlikte, $\mathcal{G}(f_k) = f(t)$ olarak alırsak $f'(t) = pf(t) - tf'(t)$ diferansiyel denklemini verir. Bulunan bu diferansiyel denklemin çözümü ise $\ln f(t) = p\ln(1+t) + c$ veya diğer bir ifadeyle $f(t) = c(1+t)^p$

olarak kolayca bulunur. $t = 0$ için $f(0) = \binom{p}{0} = 1 = c$ olduğundan $c = 1$ olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\mathcal{G}\left(\binom{p}{k}\right) = (1+t)^p, p \in \mathbb{R}$$

olarak elde edilir.

Buradan hareketle binom katsayıları için meşhur reküransı, formal kuvvet serilerindeki katsayı belirleme operatörünün temel özellikleri yardımıyla elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}
\binom{p}{k} &= [t^k](1+t)^p = [t^k](1+t)(1+t)^{p-1} \\
&= [t^k]((1+t)^{p-1} + t(1+t)^{p-1}) \\
&= [t^k](1+t)^{p-1} + [t^{k-1}](1+t)^{p-1} \\
&= \binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k-1}.
\end{aligned}$$

2.2.5. Üreteç fonksiyonlarında öteleme metodu

Bir F dizisinin elemanları açık bir formül olarak verildiğinde bu F dizisinin üreteç fonksiyonunu bulabilmek için öteleme tekniği kullanılabilir. Yani f_{n+1}, f_n cinsinden belirlenir. Böylece, $f_n \in F$ elemanları için rekürans bulunur ve üreteç fonksiyonunun temel özellikleri kullanılarak bu rekürans çözülmeye çalışılır.

$(1, p, p^2, p^3, \ldots)$ olacak şekilde bir geometrik dizi alalım. Bu dizide her $k \in \mathbb{N}$ için $p^{k+1} = pp^k$ olur. Burada eşitliğin her iki tarafına $\mathcal{G}$ oreratörü uygulanırsa, $\mathcal{G}(p^{k+1}) = p\mathcal{G}(p^k)$ bulunur. Bulunan bu ifadeye üreteç fonksiyonlarının öteleme özelliği uygulanırsa,

$\mathcal{G}(p^{k+1}) = \frac{\mathcal{G}(p^k)-1}{t} = p\mathcal{G}(p^k)$ elde edilir ve buradan

$$\mathcal{G}(p^k) = \frac{1}{1-pt}$$

bulunur. Dolayısıyla bu ifade kullanılarak başka üreteç fonksiyonları da elde edilebilir. Örneğin

$\mathcal{G}(kp^k) = \frac{pt}{(1-pt)^2}$,

$\mathcal{G}(k^2p^k) = \frac{pt+p^2t^2}{(1-pt)^3}$,

$\mathcal{G}\left(\frac{1}{k}p^k\right) = \ln\frac{1}{1-pt}$,

$\mathcal{G}\left(\sum_{k=0}^{n} p^k\right) = \frac{1}{(p-1)t}\left(\frac{1}{1-pt} - \frac{1}{1-t}\right)$ olarak bulunur. Buradan $[t^k]$ operatörü kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$$

iyi bilinen geometrik dizi formülü elde edilir. Benzer şekilde

$$\mathcal{G}\left(\binom{m}{k}p^k\right) = (1+pt)^m$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\mathcal{G}\left(\binom{k}{m}p^k\right) = \frac{p^m t^m}{(1-pt)^{m+1}}$$

olarak bulunur.

Öteleme metodunun basit bir uygulaması olarak

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{n!}$$

eşitliğinde $f_n = 1/n!$ olarak alalım. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlik $(n+1)f_{n+1} = f_n$ olarak yazılabilir. Burada Teorem 9 kullanılarak $f'(t) = f(t)$ bulunur veya

$$\mathcal{G}\left(\frac{1}{n!}\right) = e^t,$$

$$\mathcal{G}\left(\frac{1}{n \cdot n!}\right) = \int_0^t \left(\mathcal{G}\left(\frac{1}{n!} - f_0\right)\right)\frac{dz}{z} = \int_0^t \frac{e^z-1}{z}dz,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\left(\frac{n}{(n+1)!}\right) = tD\mathcal{G}\left(\frac{1}{(n+1)!}\right) &= tD\mathcal{G}\left(\frac{1}{n+1}\frac{1}{n!}\right) \\
&= tD\left(\frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)dz\right) \\
&= tD\frac{1}{t}(e^t-1) \\
&= \frac{te^t - e^t + 1}{t}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikten $\mathcal{G}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}\right) = \frac{1}{1-t}\mathcal{G}\left(\frac{k}{(k+1)!}\right)$ kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!} &= [t^n]\frac{1}{1-t}\left(\frac{te^t-e^t+1}{t}\right) \\
&= [t^n]\left(\frac{1}{1-t} - \frac{e^t-1}{t}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $\binom{2n+2}{n+1}$'i inceleyelim:

$$(n+1)\binom{2n+2}{n+1} = 2(2n+1)\binom{2n}{n}$$

olduğu kolayca görülür. Bu reküerans bağıntısında $f_n = \binom{2n}{n}$ olarak alalım. Böylece reküerans bağıntısı

$$(n+1)f_{n+1} = 2(2n+1)f_n$$

olarak yazılır. Burada Teorem 9, üreteç fonksiyonlarının doğrusallık ve türev özellikleri kullanılarak $f'(t) = 4tf'(t) + 2f(t)$ diferansiyel denklemi bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümünün kolayca $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$ olduğu bulnur. Sonuç olarak,

$$\mathcal{G}\left(\binom{2n}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$$

elde edilir. Ayrıca bu üreteç fonksiyonu yardımıyla

$\mathcal{G}\left(\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\right) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{G}\left(\binom{2n}{n}\right) dz = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-4t}} dz = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$,

$\mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\binom{2n}{n}\right) = \int_0^t \left(\mathcal{G}\left(\binom{2n}{n}\right) - f_0\right)\frac{dz}{z} = \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{1-4z}} - 1\right)\frac{dz}{z} = 2\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)$,

$\mathcal{G}\left(n\binom{2n}{n}\right) = tD\mathcal{G}\left(\binom{2n}{n}\right) = tD\frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \frac{2t}{(1-4t)\sqrt{1-4t}}$,

$\mathcal{G}\left(\frac{1}{2n+1}\binom{2n}{n}\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\int_0^t \frac{\mathcal{G}\left(\binom{2n}{n}\right)}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2\sqrt{t}}\int_0^t \frac{dz}{\sqrt{(1-4z)z}} = \frac{1}{\sqrt{4t}}\arctan\sqrt{\frac{4t}{1-4t}}$ üreteç fonksiyonları elde edilir.

2.2.6. Üreteç fonksiyonlarında köşegenleştirme

Öteleme metodu, üreteç fonksiyonlarını elde etmede diğer metotlara göre daha genel bir metotdur. Bu yöntem bir önceki bölümde incelediğimiz gibi birinci mertebeden rekürsif bağıntılar üretir. Fakat her dizi, birinci mertebeden rekürsif bir bağıntı ile tanımlanamaz. Bu nedenle üreteç fonksiyonlarını bulmak için farklı metodlar da gerekebilir. Bunlardan birisi de köşegenleştirme özdeşliğidir. En yaygın ve basit olan örnek ise köşegenleştirme özdeşliği kullanılarak, merkezi binom katsayılarının üreteç fonksiyonlarının diferansiyel denklemsiz çözümüdür. Şimdi bu örneği inceleyelim:

$$\binom{2n}{n} = [t^n](1+t)^{2n}$$

eşitliğinde üreteç fonksiyonlarının

$$\mathcal{G}([t^n]F(t)\phi(t)^n) = \left[\frac{F(w)}{1-t\phi'(w)}\middle| w = t\phi(w)\right]$$

olan köşegenleştirme özdeşliğini uygulanırsa $F(t) = 1$ ve $\phi(t) = (1+t)^2$ olarak alınır. Dolayısıyla bu durumda $w = t(1+w)^2$ fonksiyonel denklemi çözülerek kolayca

$w = w(t)$ fonksiyonu elde edilir. Şimdi $tw^2 - (1-2t)w + t = 0$ ikinci derece denklemi çözülerek

$$w = w(t) = \frac{1 - 2t \pm \sqrt{1-4t}}{2t}$$

olarak bulunur. Fakat $w \in \mathcal{F}_1$ olduğundan "+" işaretli çözüm elenir, aksi takdirde bulunan fonksiyon bir formal kuvvet serisi olmaz. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\left(\binom{2n}{n}\right) &= \left[\frac{1}{1 - t\phi'(w)}\middle| w = \frac{1 - 2t - \sqrt{1-4t}}{2t}\right] \\ &= \left[\frac{1}{1 - 2t(1+w)}\middle| w = \frac{1 - 2t - \sqrt{1-4t}}{2t}\right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\phi(t) = (1+t)^2$ ikinci dereceden bir denklem oluşmasına neden olmaktadır.

2.2.7. Bazı özel üreteç fonksiyonları

$\{0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, \ldots\}$ olarak verilen ve genel elemanı $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ olan dizinin üreteç fonksiyonunu bulalım. Bu sonsuz elemanlı dizinin üreteç fonksiyonunu bulmak için dizi sonsuz sayıdaki basit dizilerin toplamı olarak yazılabilir:

$$\{0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, \ldots\} = \{0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} + \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots\} + \cdots$$

Bu şekilde yazılan dizilerin üreteç fonksiyonları

$$\frac{t}{1-t} \qquad \frac{t^4}{1-t} \qquad \frac{t^9}{1-t} \qquad \frac{t^{16}}{1-t} \qquad \cdots$$

olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{G}\left(\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k^2}}{1-t}$$

olur. Benzer şekilde

$$\mathcal{G}\left(\left\lfloor \sqrt[r]{k} \right\rfloor\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k^r}}{1-t} \qquad \mathcal{G}\left(\lfloor \log_r k \rfloor\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{r^k}}{1-t}$$

olarak bulunur. Bu eşitliklerde r herhangi bir tamsayı veya reel sayıdır. Eğer k^r ve r^k'yı birbirlerinin yerine koyarsak $\lceil k^r \rceil$ ve $\lceil r^k \rceil$ olur.

Bu üreteç fonksiyonlar birçok toplamın kapalı ya da yarı kapalı formda bulunması için kullanılır. Örneğin $\sum_k \binom{n}{k} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor (-1)^k$'yı kapalı form ya da yarı kapalı formda bulalım.

Öncelikle $\binom{n}{k}(-1)^{n-k} = \binom{-k-1}{n-k} = [t^{n-k}](1+t)^{-k-1}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu ifade $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f_k$'da yerine konularak, $f_k = [y^k]f(y)$ olmak üzere ve formal kuvvet serilerinin bileşke özdeşliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f_k &= \sum_{k=0}^{n}[t^{n-k}](1+t)^{-k-1}[y^k]f(y)\\ &= \sum_{k=0}^{n}[t^n]t^k(1+t)^{-k-1}[y^k]f(y)\\ &= [t^n]\frac{1}{1+t}\sum_{k=0}^{n}[y^k]f(y)\left(\frac{t}{1+t}\right)^k\\ &= [t^n]\frac{1}{1+t}f\left(\frac{t}{1+t}\right) \qquad (2.13)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu eşitlikte $f_k = \left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor(-1)^k &= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor\\ &= (-1)^n[t^n]\frac{1}{1+t}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^{k^2}}{1-y}\middle|y=\frac{t}{1+t}\right]\\ &= (-1)^n[t^n]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k^2}}{(1+t)^{k^2}}\\ &= (-1)^n\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}[t^{n-k^2}]\frac{1}{(1+t)^{k^2}}\end{aligned}$$

olur. Burada $(1+t)^{-k^2}$'nin binom katsayıları yardımıyla,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor(-1)^k &= (-1)^n\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\binom{-k^2}{n-k^2}\\ &= (-1)^n\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\binom{n-1}{n-k^2}(-1)^{n-k^2}\\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\binom{n-1}{n-k^2}(-1)^{k^2}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bulunan toplam n'ye bağlı olmasına rağmen terim sayısı n'den $\sqrt{n}$'ye indirgendiğinden bu toplamı yarı kapalı form olarak düşünebiliriz.

2.2.8. Sabit katsayılı doğrusal reküranslar

$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bir dizi ise, bu dizi bir *rekürans bağıntısı* ile tanımlanabilir. Yani dizinin genel terimi olan f_n elemanı $k < n$ olmak üzere diğer f_k terimlerine bağlı bir şekilde ifade edilebilir. Genel olarak dizinin genel terimini bulabilmemize yardımcı olacak bağıntıdan sırayla dizinin terimlerini bulabilmek için ilk birkaç terimi açık olarak verilmelidir. Bunlara *başlangıç değerleri* denir ve başlangıç değerleri kullanılarak dizinin geri kalan elemanları verilen rekürans bağıntısı ile hesaplanabiliyorsa buna iyi tanımlı dizi denir. Örneğin, $(1, 1, 1, \ldots)$ sabit dizisi $x_0 = 1$ başlangıç koşulu ve $x_n = x_{n-1}$ rekürans bağıntısı ile tanımlanabilir. Başlangıç değerleri değişince dizi tamamen değişebilir. Mesela, $x_n = x_{n-1}$ rekürans bağıntısı ile verilen dizide başlangıç koşulu $x_0 = 2$ olursa $(2, 2, 2, \ldots)$ sabit dizisi elde edilir.

Genel olarak bir rekürans bağıntısı $f_n = F(f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots)$ şeklinde yazılabilir. Burada F fonksiyonu $f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_1, f_0$ değerlerinin hepsine bağlı ise bağıntıya *tam geçmişe bağımlı*, $f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_{n-p}$ gibi sabit sayıda terime bağlı ise *kısmi geçmişe bağımlı* rekürans bağıntısı ve p sayısına da bağıntının *mertebesi* denir. Doğrusal reküranslar en yaygın ve önemli rekürans bağıntılardır. F fonksiyonu bütün değişkenler türünden doğrusal ise rekürans bağıntısına *doğrusal rekürans bağıntısı* denir. Doğrusal bir rekürans bağıntısındaki F fonksiyonundaki bütün katsayılar sabit ise buna *sabit katsayılı doğrusal rekürans bağıntısı*, katsayılar n değişkenine bağlı polinomlar ise buna *polinom katsayılı doğrusal rekürans* denir. Az sonra göreceğimiz gibi, üreteç fonksiyonları yöntemi herhangi bir sabit katsayılı doğrusal rekürans denklemini çözmemize yardımcı olacaktır. Bu yöntemde her $n \in \mathbb{N}$ için $[t^n]f(t) = f_n$ olmak üzere bir $f(t)$ fonksiyonu bulmaya çalışacağız. Polinom katsayılı doğrusal reküranslar için, çoğu zaman aynı yöntemle çözüm bulunabilir. Diğer yandan, bu türden bütün reküransları çözmek için herhangi bir yöntem bilinmemektedir ve üreteç fonksiyonlar yöntemi en çok olumlu sonuç veren yöntemdir. Bu durumu bir sonraki bölümde inceleyeceğiz.

Fibonacci reküransı olarak bilinen $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ reküransı sabit katsayılı reküransa bir örnektir. Bu tür bir rekürans bağıntısını ele aldığımızda bu bağıntıyı her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olacak şekilde ifade etmekle başlayacağız. Reküransı $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ şeklinde yazınca bu ifade her $n \in \mathbb{N}$ için geçerlidir. Bu ilk adım büyük bir önem teşkil etmektedir; çünkü bu reküransın her tarafına $\mathcal{G}$ operatörünü uygulayabiliriz. Bir önceki adımda üreteç fonksiyonlarının temel prensibine göre bu mümkün değildi.

Rekürans bağıntısı doğrusal olduğu için doğrusallık aksiyomunu

$$f_{n+p} = \alpha_1 f_{n+p-1} + \alpha_2 f_{n+p-2} + \cdots + \alpha_p f_n$$

reküransına uygulayarak

$$\mathcal{G}(f_{n+p}) = \alpha_1 \mathcal{G}(f_{n+p-1}) + \alpha_2 \mathcal{G}(f_{n+p-2}) + \cdots + \alpha_p \mathcal{G}(f_n)$$

bağıntısını elde ederiz.

Teorem 7'dan her $\mathcal{G}(f_{n+p-j})$ ifadesini $f(t) = \mathcal{G}(f_n)$ türünden ifade ederek $f(t)$ türünden doğrusal bir bağıntı ve dolayısıyla $f(t)$ için açık bir ifade elde ederiz ki bu da rekürans bağıntının çözümü olur. $\mathcal{G}(f_{n+p-j})$ için yazılan ifadede dizinin başlangıç koşullarının kullanıldığına dikkat edelim.

Fibonacci dizisi örneğimizle devam edelim: $\mathcal{G}(F_{n+2}) = \mathcal{G}(F_{n+1}) + \mathcal{G}(F_n)$ ifadesinde $F(t) = \mathcal{G}(F_n)$ olmak üzere

$$\frac{F(t) - F_0 - F_1 t}{t^2} = \frac{F(t) - F_0}{t} + F(t)$$

elde edilir. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olduğu için

$$F(t) - t = tF(t) + t^2 F(t)$$

ve buradan da

$$F(t) = \frac{t}{1 - t - t^2}$$

bulunur. Bu fonksiyon Fibonacci sayıları için üreteç fonksiyonudur. Buradan F_n için açık bir ifade bulabiliriz.

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989, \qquad \widehat{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.618033989$$

olmak üzere, $F(t)$'nin paydası $1 - t - t^2 = (1 - \phi t)(1 - \widehat{\phi} t)$ şeklinde yazılabilir.

Burada $1/\phi \approx 0.618033989$ sabiti *altın oran* olarak bilinir. Basit kesirlere ayırma yöntemi ile

$$F(t) = \frac{t}{(1 - \phi t)(1 - \widehat{\phi} t)} = \frac{A}{1 - \phi t} + \frac{B}{1 - \widehat{\phi} t} = \frac{A - A\widehat{\phi} t + B - B\phi t}{1 - t - t^2}$$

elde edilir. A ve B bilinmeyenlerini bulmak için $F(t)$'nin ilk ve son ifadelerindeki katsayılar eşitlenir ve

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A\widehat{\phi} - B\phi = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/(\phi - \widehat{\phi}) = 1/\sqrt{5} \\ B = -A = -1\sqrt{5} \end{cases}$$

bulunur. Böylece $F(t)$ ifadesindeki t^n katsayısı hesaplanarak F_n bulunur:

$$F_n = [t^n]F(t) = [t^n]\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \phi t} - \frac{1}{1 - \widehat{\phi} t}\right) = \frac{\phi^n - \widehat{\phi}^n}{\sqrt{5}}$$

$\phi^n = \exp(n \ln \phi)$ olduğu için bu formül F_n'yi sadece n'ye bağlı bir şekilde hesaplamamızı sağlar ve F_n'nin üstel arttığını gösterir. Aslında $|\widehat{\phi}| < 1$ olduğu için, $\widehat{\phi}^n$ ifadesi sıfıra çok hızlı yaklaşır ve $F_n = O(\phi^n)$ olur. Gerçekte F_n bir tam sayı olmalıdır ve bu nedenle F_n sayısını $\phi^n/\sqrt{5}$ sayısına en yakın tam sayıyı bularak hesaplayabiliriz.

2.2.9. Polinom katsayılı doğrusal reküranslar

Polinom katsayılı doğrusal reküranslar için üreteç fonksiyonları metodu bir çözüm vermez. Genellikle, türev kuralı ile üreteç fonksiyonları için bir diferansiyel denklem oluşur; fakat bu yaklaşımdaki problem diferansiyel denklemin çözümü ile uğraşılmasıdır. Bu durumun bazı örneklerini öteleme metodu alt başlığı altında inceledik. Burada ise kombinatorik problem kullanarak çözümü bulacağız.

$\pi \in P_n$ bir permütasyon olmak üzere, $\pi^2 = (1)$ olursa bu durum involüsyon tanımını verir. P_n kümesinde bulunan involüsyon sayısı ise I_n ile gösterilir. İnvolüsyon sayılarıyla ilgili

$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$

şeklinde bir rekürans bağıntısı olduğu gösterilebilir. Bu bağıntı ayrıca polinom katsayılıdır. İnvolüsyon sayıları çok hızlı büyüdüğünden $i_n = \frac{I_n}{n!}$ niceliğini düşünmek güzel bir fikir olabilir. Dolayısıyla öncelikle bu rekürans bağıntısının değiştirerek üreteç fonksiyonlarının temel prensibini uygulayacak hale getirelim:

$$I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$$

olur. Burada eşitliğin her iki tarafını $(n+2)!$ ile bölersek

$$\frac{I_{n+2}}{(n+2)!} = \frac{1}{n+2}\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n+2}\frac{I_n}{n!}$$

elde edilir. Böylece buradan

$$(n+2)i_n = i_{n+1} + i_n$$

şeklinde rekürsiyon bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıda $\mathcal{G}$ operatörü uygulanarak üreteç fonksiyonlarına geçilir ve

$$\mathcal{G}((n+2)i_{n+2}) = \mathcal{G}(i_{n+1}) + \mathcal{G}(i_n)$$

bulunur. Bu eşitlikte $\mathcal{G}((n+2)i_{n+2})$, $\mathcal{G}((n+1)i_{n+1}) = i'(t)$'nin ötelenmiş hali olarak düşünülür ve $i(t)$ ise $(i_k)_{k\in\mathbb{N}} = (I_k/k!)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonudur. Aslında $i(t)$ fonsiyonu $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ için üstel üreteç fonksiyon olur. Dolayısla buradan üreteç fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak

$$\frac{i'(t)-1}{t} = \frac{i(t)-1}{t} + i(t)$$

eşitliği bulunur. Burada başlagıç değerleri $i_0 = i_1 = 1$ olduğundan yukarıdaki eşitliği

$$i'(t) = (1+t)i(t)$$

diferansiyel denklem halinde yazabiliriz. Böylece diferansiyel denklemin çözümü

$$\ln i(t) = t + \frac{t^2}{2} + C \qquad \text{veya} \qquad i(t) = \exp\left(t + \frac{t^2}{2} + C\right)$$

olur. Buradaki C integral sabitidir. $i(0) = e^C = 1$ olduğundan $C = 0$ olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} I_n &= n! i_n \\ &= n![t^n] \exp\left(t + \frac{t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2.2.10. Çarpımların toplanma metodu

Bu metod, birinci mertebeden olan doğrusal reküranslar için tanımlanan dizilerin genel terimi için açık bir ifade bulmamızı sağlar. Metod kapalı formun bulunmasını garanti etmez. a_n, b_n, c_n n'ye bağlı ifadeler olmak üzere

$$a_{n+1} f_{n+1} = b_n f_n + c_n \tag{2.14}$$

şeklinde bir reküranс bağıntısı alalım. Bu bağıntıda $a_{n+1} = b_n = 1$ olduğunu düşünelim. Böylece f_{n+1} veya f_n için açık bir ifade bulunabilir:

$$f_{n+1} = f_n + c_n = f_{n-1} + c_{n-1} + c_n = \cdots = f_0 + \sum_{k=0}^{n} c_k$$

bu ifadede f_0 başlangıç koşuludur. İlk başta verilen reküranс her zaman bu şekilde daha basit forma çevrilebilir. Şimdi (2.14) eşitliğini "katsayı çarpanı" olarak adlandırılan

$$\frac{a_n a_{n-1} \cdots a_0}{b_n b_{n-1} \cdots b_0}$$

ile çarpalım. Katsayı çarpanında bulunan terimlerin hepsi sıfırdan farklıdır. Böylece

$$\frac{a_{n+1} a_n a_{n-1} \cdots a_0}{b_n b_{n-1} \cdots b_0} f_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} \cdots a_0}{b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_0} f_n + \frac{a_n a_{n-1} \cdots a_0}{b_n b_{n-1} \cdots b_0} c_n$$

elde edilir. Burada

$$g_{n+1} = \frac{a_{n+1} a_n a_{n-1} \cdots a_0}{b_n b_{n-1} \cdots b_0} f_{n+1}$$

olarak tanımlarsak $g_n = \frac{a_n a_{n-1} \cdots a_0}{b_{n-1} \cdots b_0} f_n$ olur ve buradan başlangıç durumu $g_0 = a_0 f_0$ olarak bulunur. Böylece reküranс

$$g_{n+1} = g_n + \frac{a_n a_{n-1} \cdots a_0}{b_n b_{n-1} \cdots b_0} c_n$$

olarak elde edilir. Reküransüzerinde gerekli düzenlemeler yapılarak sonuç olarak

$$f_{n+1} = \frac{b_n b_{n-1}\cdots b_0}{a_{n+1}a_n\cdots a_0}\left(a_0 f_0 + \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k a_{k-1}\cdots a_0}{b_k b_{k-1}\cdots b_0}c_k\right) \tag{2.15}$$

elde edilir. Eğer a_0 veya b_0 sıfır olsaydı buradaki indis 1'den başlatılırdı.

Bu metodu bir örnek üzerinde incelemek için $f(t) = \sqrt{1-t}\ln(1/1-t)$ fonksiyonundaki t^n'in katsayısını bulalım. $f(t)$ fonksiyonunun açılımı

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{1-t}\ln\frac{1}{1-t} \\ &= t - \frac{1}{24}t^3 - \frac{1}{24}t^4 - \frac{71}{1920}t^5 - \frac{31}{960}t^6 + \cdots \end{aligned}$$

olur. Öncelikle $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$ şeklinde formal kuvvet serisi olmak üzere f_n için rekürans bağıntısı bulmak amacıyla $f(t)$ fonksiyonunun türevini alırız:

$$f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{1-t}}\ln\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

bulunur. Bu eşitlik üzerinde gerekli işlemler yapılarak

$$(1-t)f'(t) = -\frac{1}{2}f(t) + \sqrt{1-t}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemde $f(t)$ formal kuvvet serisi yerine seri açılımı yazılarak ve t^n'in katsayısı ayrılarak

$$(n+1)f_{n+1} - nf_n = -\frac{1}{2}f_n + \binom{1/2}{n}(-1)^n$$

rekürans bağıntısı bulunur. Bu bağıntıda $\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}$ ifadesi yerine yazılıp gerekli işlemler yapılarak

$$(n+1)f_{n+1} = \frac{2n-1}{2}f_n - \frac{1}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n} \tag{2.16}$$

olarak bulunur. Bulunan bu rekürans bağıntısı birinci mertebeden olup başlangıç koşulu $f_0 = 0$'dır. Bu durumda katsayı çarpanı metodunu uygulayalım: $a_{n+1} = n+1$ olduğundan $a_n = n$ olur ve $b_n = \frac{2n-1}{2n}$'dir. $a_0 = 0$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \frac{a_n a_{n-1}\cdots a_1}{b_n b_{n-1}\cdots b_1} &= \frac{n(n-1)\cdots 1}{\frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{1}{2}} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots 1(2^n)}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} \\ &= \frac{n!2^n(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1(2n)(2n-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!2^n(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n)!} \\
&= \frac{n!2^n 2^n n!}{(2n)!} \\
&= \frac{4^n n!^2}{(2n)!} \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

olarak katsayı çarpanı elde edilir. Şimdi (2.16)'de bulduğumuz rekürans bağıntısını elde ettiğimiz (2.17) katsayı çarpanı ile çarparsak

$$\begin{aligned}
(n+1)\frac{4^n n!^2}{(2n)!} f_{n+1} &= \frac{2n-1}{2}\frac{4^n n!^2}{(2n)!} f_n - \frac{1}{4^n(2n-1)}\frac{4^n n!^2}{(2n)!}\binom{2n}{n} \\
&= \frac{2n-1}{2}\frac{4^n n!^2}{(2n)!} f_n - \frac{1}{2n-1}
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi (2.15)'de bulmuş olduğumuz genel eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= \frac{(2n)!}{(n+1)4^n n!^2}\left(\sum_{k=0}^{n} -\frac{1}{2k-1}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)4^n}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{-1}{2k-1} \qquad (a_0 f_0 = 0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadeyi daha basitleştirebiliriz. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$ harmonik sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k-1} &= \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \cdots + 1 - 1 \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2n} - \cdots - \frac{1}{2} - 1 \\
&= H_{2n+2} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2}\left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - 1 \\
&= H_{2n+2} - \frac{1}{2}H_{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - 1 \\
&= H_{2n+2} - \frac{1}{2}H_{n+1} - \frac{2(n+1)}{2n+1}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir ve ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)4^n}\binom{2n}{n} &= \frac{4}{(n+1)4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}\frac{n+1}{2(2n+1)} \\
&= \frac{2}{2n+1}\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$f_{n+1} = \left(\frac{1}{2}H_{n+1} - H_{2n+2} + \frac{2(n+1)}{2n+1}\right) \times \frac{2}{2n+1}\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}$$

olarak elde edilir. Ayrıca buradan

$$\begin{aligned}
f_n &= \left(\frac{1}{2}H_n - H_{2n} + \frac{2n}{2n-1}\right)\frac{2}{2n-1}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \\
&= \left(H_n - 2H_{2n} + \frac{4n}{2n-1}\right)\frac{1}{(2n-1)4^n}\binom{1/2}{n}\frac{4^n(2n-1)}{(-1)^{n-1}} \\
&= \left(H_n - 2H_{2n} + \frac{4n}{2n-1}\right)\binom{1/2}{n}(-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

Not 3 *$H_n \sim \ln n + \gamma$ olduğunu biliyoruz. Buradan*

$$\begin{aligned}
H_n - 2H_{2n} + \frac{4n}{2n-1} &\sim \ln n + \gamma - 2(\ln 2n + \gamma) + 2 \\
&\sim \ln n + \gamma - 2(\ln 2 + \ln n\gamma) + 2 \\
&= -\ln n - \gamma - \ln 4 + 2
\end{aligned}$$

olur. Bunun yanında

$$\frac{1}{2n-1}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{2n\sqrt{\pi n}}$$

ve sonuç olarak

$$f_n \sim -(\ln n + \gamma + \ln 4 - 2)\frac{1}{2n\sqrt{\pi n}}$$

bulunur. Bu da bize $|f_n|$'in $\ln n/n^{3/2}$ hızı ile büyüdüğünü gösterir.

2.2.11. Başka bazı reküranslar

Tüm rekürans bağıntıları doğrusal değildir, doğrusal olmayan rekürans bağıntıları vardır. Örneğin Catalan sayılarının $n > 0$ için

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

biçiminde rekürans bağıntısı vardır. Bu bağıntıya üreteç fonksiyonları metodunu uygulayalım. Bunun için katalan sayıları bağıntısı öncelikle $n+1$ için yazılır:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

Görüldüğü üzere eşitliğin sağ tarafında girişim vardır. Dolayısıyla $C_0 = 1$ başlangıç koşulu için

$$\frac{C(t)-1}{t} = C(t)^2 \quad \text{veya} \quad tC(t)^2 - C(t) + 1 = 0$$

olmak üzere ikinci dereceden bir denklem bulunur. Bu denklemin çözümleri $C(t) = (1 \pm \sqrt{1-4t})/(2t)$'dir. Fakat denklemde $t = 0$ için $C(0) = C_0 = 1$ olduğundan bu çözümlerden $+$ işaretli olan çözüm elenir. Sonuç olarak

$$C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

bulunur.(Aynı sonuç üreteç fonksiyonlarından öteleme metodu başlığı altında da bulunmuştur.)

İkinci bir örnek olarak, Bernoulli Sayılarının üreteç fonksiyonuna bakalım. $B(t) = \mathcal{G}(B_n/n!)$ olmak üzere, Bernoulli sayıları $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = \delta_{n,0}$ rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{n-k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} B_{n-k} = \delta_{n,0}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafını $(n+1)!$ ile bölersek

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\delta_{n,0}}{(n+1)!} = \delta_{n,0}$$

bulunur. Son eşitlik her $n \in \mathbb{N}$ için sağlandığından üreteç fonksiyonlarına geçebiliriz. Görüldüğü üzere eşitliğin sol tarafında girişim vardır.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} t^n = \sum_{k=0}^{n} \delta_{n,0} t^n = \mathcal{G}\left(\frac{1}{(k+1)!}\right) \mathcal{G}\left(\frac{B_{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

olur. Buradan

$$\frac{e^t-1}{t} B(t) = 1 \quad \text{veya} \quad B(t) = \frac{t}{e^t-1}$$

elde edilir.

2.3. Riordan Sıraları

2.3.1. Tanımlar ve ana kavramlar

$d(t)$ ve $h(t)$ iki formal kuvvet serisi olmak üzere $D = (d(t), h(t))$ ikilisine bir Riordan sırası denilir. Eğer $d(t), h(t) \in \mathcal{F}_0$ ise Riordan sırası, temel Riordan sırası olarak adlandırılır (Riordan 1979, Shapiro vd 1991, Sprugnoli 2006).

$$d_{n,k} = [t^n] d(t)(th(t))^k \tag{2.18}$$

olmak üzere bir Riordan sırası; girdileri $(d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ biçiminde elde edilen bir sonsuz alt üçgensel sıra olarak da tanımlanır. Dolayısıyla, bu sonsuz alt üçgensel sıranın sütun girdilerinin üreteç fonksiyonları

$$\begin{cases} d_0(t) = d(t) \\ d_k(t) = d_{k-1}(t)th(t) = d(t)(th(t))^k \end{cases}$$

olur.

Riordan sırasının sütunlarını veren formal serilerin üreteç fonksiyonu; $D = (d(t), h(t))$ olmak üzere

$$d(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} d(t)(th(t))^k z^k = \frac{d(t)}{1-tzh(t)} \tag{2.19}$$

iki değişkenli üreteç fonksiyonu ile verilebilir.

Örnek 20 *En yaygın Riordan sırası örneği Pascal üçgenidir. Pascal üçgeni için Riordan sırasında bulunan formal kuvvet serileri* $d(t) = h(t) = \frac{1}{1-t}$ *olarak alınır ve* (2.18)*'de verilen Riordan sırası tanımı kullanılarak,*

$$\begin{aligned} d_{n,k} &= [t^n]\frac{1}{1-t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^k \\ &= [t^n]t^k\frac{1}{(1-t)^{k+1}} \\ &= [t^{n-k}](1-t)^{-k-1} \\ &= \binom{-k-1}{n-k}(-1)^{n-k} \\ &= \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

bulunur. Bu durum genel terimin, $\binom{n}{k}$ *binom katsayısı olduğunu gösterir. Aynı durum* (2.19)*'deki eşitlik için uygulanırsa iyi bilinen* $d(t,z) = (1-t-tz)^{-1}$ *iki değişkenli üreteç fonksiyonu bulunur.*

Riordan sıralarının en önemli özelliklerinden birisi, aşağıdaki teoremle verilmiştir. Bu özellik, Riordan sıralarının satırları ile ilgili toplamların, söz konusu üreteç fonksiyonlarına uygun operasyonların uygulanmasıyla elde edilebileceği gerçeğidir.

Teorem 21 (Sprugnoli, 2006) $D = (d(t), h(t))$ *Riordan sırası ve* $f(t)$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n,k} f_k = [t^n]d(t)f(th(t)) \tag{2.20}$$

olur.

İspat. $d_{n,k}$'nın tanımını kullanarak;

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n,k} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} f_k$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty}[t^n]d(t)(th(t))^k f_k \\
&= [t^n]d(t)\sum_{k=0}^{\infty} f_k(th(t))^k \\
&= [t^n]d(t)f(th(t))
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Buradan Pascal üçgeni durumunda (2.12) eşitliğinde verilen Euler dönüşümü bulunabilir. $d_{n,k} = \binom{n}{k}$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f_k = [t^n]d(t)f(th(t)) = [t^n]\frac{1}{1-t}f\left(\frac{t}{1-t}\right)$$

Euler dönüşüm eşitliği elde edilir.

$f_k = 1$ için $f(t) = \frac{1}{1-t}$ olur. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = [t^n]\frac{1}{1-t}\frac{1}{1-\frac{t}{1-t}} = 2^n$$

bulunur.

Üreteç fonksiyonları bölümünden

$\mathcal{G}(1) = 1 + t + t^2 + \cdots = 1/(1-t)$,

$\mathcal{G}((-1)^k) = 1/(1+t)$ ve

$\mathcal{G}(k) = \mathcal{G}(k \cdot 1) = tD\frac{1}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2}$ olduğunu biliyoruz. Bu üreteç fonksiyonları ve Teorem 21 kullanılarak ,

Riordan sırasındaki n. satır girdilerinin toplamı:

$$\sum_k d_{n,k} = [t^n]\frac{d(t)}{1-th(t)},$$

n. satır girdilerinin alterne toplamı:

$$\sum_k (-1)^k d_{n,k} = [t^n]\frac{d(t)}{1+th(t)},$$

n. satır girdilerinin ağırlıklı (weighted) toplamı:

$$\sum_k k d_{n,k} = [t^n]\frac{td(t)h(t)}{(1-th(t))^2}$$

olarak bulunur.

Ayrıca, $\widehat{D}=(d(t),th(t))$ olarak verilen Riordan sırasının satırlarının $D=(d(t),h(t))$ Riordan sırasının köşegenlerinden oluştuğu aşağıdaki şekilde kolayca gözlemlenebilir. $\widehat{d}_{n,k}$, $\widehat{D}=(d(t),th(t))$ Riordan sırasının genel elemanı olmak üzere (2.18) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\widehat{d}_{n,k} &= [t^n]d(t)(tth(t))^k\\ &= [t^n]d(t)t^k(th(t))^k\\ &= [t^{n-k}]d(t)(th(t))^k\\ &= d_{n-k,k}\end{aligned}$$

bulunur (Sprugnoli 2006). Şimdi bu Riordan sırasının köşegen üzerindeki elemanlarının toplamına bakalım:

$$\sum_k \widehat{d}_{n,k}=\sum_k d_{n-k,k}=[t^n]d(t)f(t^2h(t))=[t^n]\frac{d(t)}{1-t^2h(t)}$$

elde edilir. Dolayısıyla yukarıda gözlemlenmiş olan durum her $s\geq 1$ için $\sum_k d_{n-sk,k}$ üreteç fonksiyonuna genelleştirilebilir. Köşegen toplamı kullanılarak, Pascal üçgeni için iyi bilinen sonuçlar elde edilebilir; Örneğin

$$\sum_k \binom{n-k}{k}=[t^n]\frac{d(t)}{1-t^2h(t)}=\frac{\frac{1}{1-t}}{1-\frac{t^2}{1-t}}=[t^n]\frac{1}{1-t-t^2}=F_{n+1}$$

bu durum Fibonacci sayılarını verir. Dolayısıyla bu eşitlik binom katsayıları ile Fibonacci sayıları arasındaki bağlantıyı gösterir.

Bir başka genel sonuç ise şöyledir: $f(t)$ fonksiyonu $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere $p=1,2,\ldots,$ için $(f(t),t^{p-1})$ Riordan sırasının genel terimi,

$$d_{n,k}=[t^n]d(t)(th(t))^k=[t^n]f(t)(t^p)^k=[t^{n-pk}]f(t)=f_{n-pk}$$

olarak yazılabilir. $g(t)$ fonksiyonu ise $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere (2.20) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\sum_k f_{n-pk}g_k &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/p\rfloor} f_{n-pk}g_k\\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/p\rfloor}[t^n]f(t)g_k(t^p)^k\\ &= [t^n]f(t)\sum_{k=0}^{\infty}g_k(t^p)^k\\ &= [t^n]f(t)[g(y)|y=t^p]\\ &= [t^n]f(t)g(t^p)\end{aligned}$$

elde edilir (Sprugnoli 2006). Bulunan bu sonuç ise genelleştirilmiş girişim kuralı olarak adlandırılır; çünkü $p = 1$'e kadar indirgendiğinde iyi bilinen girişim kuralı olduğu görülür.

Örnek 22 *$S_n = 2^n + 2^{n-3} + 2^{n-6} + 2^{n-9} + \cdots$ şeklinde bir dizi olmak üzere, (S_n) dizisi için bir kapalı formül elde etmeye çalışalım. Bunun için*

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} 2^{n-3k} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} 2^n 2^{-3k}$$

olarak yazalım. Böylece

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} 2^{n-3k} &= [t^n] f(t) g(t^p) \\ &= [t^n] f(t) g(t^3) \\ &= [t^n] \frac{1}{1-2t} \frac{1}{1-t^3} \end{aligned}$$

bulunur.

2.3.2. Riordan sıralarının cebirsel yapısı

Riordan sıralarının en önemli cebirsel özelliği, iki Riordan sırasının klasik satır ve sütun çarpımının yine bir Riordan sırası olmasıdır. Bunu göstermeye çalışalım. $(d(t), h(t))$ ve $(a(t), b(t))$ iki Riordan sırası olmak üzere, bu iki sıranın çarpımına bakalım. $d_{n,j}$, $(d(t), h(t))$'nin genel terimi ve $f_{j,k}$ da $(a(t), b(t))$ Riordan sırasının genel terimi olmak üzere,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} d_{n,j} f_{j,k} &= \sum_{j=0}^{\infty} ([t^n] d(t)(th(t))^j)([y^j] a(y)(yb(y))^k) \\ &= [t^n] d(t) \sum_{j=0}^{\infty} (th(t))^j [y^j] a(y)(yb(y))^k \\ &= [t^n] d(t) \sum_{j=0}^{\infty} [y^j] a(y)(yb(y))^k (th(t))^j \\ &= [t^n] d(t) a(th(t))(th(t) b(th(t)))^k \end{aligned} \tag{2.21}$$

olur. Riordan sırası tanımına göre son bulunan ifade

$$f(t) = d(t) a(th(t)) \quad \text{ve} \quad g(t) = h(t) b(th(t))$$

olmak üzere $(f(t), g(t))$ Riordan sırasının genel terimini verir. Dolayısıyla

$$(d(t), h(t)) \cdot (a(t), b(t)) = (d(t) a(th(t)), h(t) b(th(t))) \tag{2.22}$$

elde edilir (Shapiro vd 1991). Bu ifade önemlidir ve Riordan sıralarındaki birçok gelişime temel oluşturmaktadır.

Riordan sıralarının çarpımının birleşme özelliğini sağladığı kolayca görülebilir. Ayrıca çarpım için $(1,1)$ Riordan sırasının birim eleman olduğu da kolayca gözlemlenebilir. Riordan sıralarında çarpım tanımı kullanılarak

$$(d(t),h(t))\cdot(1,1)=(1,1)\cdot(d(t),h(t))=(d(t),h(t))$$

olur. Dolayısıyla $(1,1)$ Riordan sırası birim matrise karşılık gelir. $d_{n,k}$, $(1,1)$ Riordan sırasının genel terimi olmak üzere (2.18) eşitliği kullanılarak

$$d_{n,k} \;=\; [t^n]d(t)(th(t))^k=[t^n]1(t^k)=[t^{n-k}]1=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}$$

olduğu görülür. Yani $(1,1)$ Riordan sırasında köşegendeki elemanlar 1, diğerleri 0 olur. Ayrıca $(1,1)$ Riordan sırasının bir temel Riordan sırası olduğu açıktır.

Diğer taraftan $(d(t),h(t))$ Riordan sırasının temel Riordan sırası olduğunu varsayarsak (2.22) eşitliğinden kolayca görüldüğü gibi iki temel Riordan sırasının çarpımı yine bir temel Riordan sırası olur. Dolayısıyla $(d(t),h(t))(a(t),b(t))=(1,1)$ olan $(a(t),b(t))$ şeklinde temel Riordan sırası arayabiliriz. Bu durumda (2.22) eşitliği kullanılarak

$$d(t)a(th(t))=1 \quad \text{ve} \quad h(t)b(th(t))=1$$

elde edilir. $t(h(t))=y$ olarak alınırsa $t=yh(t)^{-1}$ olur. Böylece

$$d(t)a(y)=1 \quad\Rightarrow\quad a(y)=\left[d(t)^{-1}|t=yh(t)^{-1}\right]$$

ve

$$h(t)b(y)=1 \quad\Rightarrow\quad b(y)=\left[h(t)^{-1}|t=yh(t)^{-1}\right]$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi bu durumda Lagrange Tersinme Formülü karşımıza çıkar. Dolayısıyla $t=t(y)$ şeklinde $t(0)=0$ sağlayan ve $t=yh(t)^{-1}$ olan tek bir fonksiyon vardır. Ayrıca $d(t),h(t)\in\mathcal{F}_0$ olduğundan $a(y)$ ve $b(y)$ formal kuvvet serileri tek türlü tanımlıdır. Dolayısıyla aşağıdaki teoremin ispatını yapmış oluruz:

Teorem 23 (Sprugnoli 2006) *Temel Riordan sıralarından oluşan $\mathcal{A}$ kümesi* (2.22) *eşitliği ile tanımlanan satır ve sütun çarpım işlemine göre grup olur.*

2.3.3. Bir Riordan sırasının tersi

$h(t)$ tersi alınabilir bir formal kuvvet serisi $(h(t)\in\mathcal{F}_0)$ olmak üzere

$$\bar{d}_h(t)=\left[d(y)^{-1}|y=th(y)^{-1}\right] \tag{2.23}$$

olarak tanımlansın. Dolayısıyla $(d(t),h(t))^{-1}=(\bar{d}_h(t),\bar{h}_h(t))$ olarak yazılabilir. Buradan (2.22) çarpım formülü kullanılarak

$$d(t\bar{h}_h(t))=\bar{d}_h(t)^{-1} \qquad \bar{d}_h(th(t))=d(t)^{-1} \tag{2.24}$$

ve

$$h(t\bar{h}_h(t)) = \bar{h}_h(t)^{-1} \qquad \bar{h}_h(th(t)) = h(t)^{-1} \tag{2.25}$$

elde edilir. Daha basitleştirilmiş kural olarak her $f(t) \in \mathcal{F}_0$ için

$$f(t\bar{h}_h(t)) = \bar{f}_h(t)^{-1}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca $\bar{\bar{f}}_h(t) = f(t)$ olduğu kolayca görülebilir.

$(d(t), h(t))$ bir Riordan sırası, ve $(d(t), h(t))^{-1}$ de bu Riordan sırasının tersi olmak üzere, bu ters Riordan sırasına karşılık gelen matrisin $\bar{d}_{n,k}$ genel terimini verecek açık bir ifade bulunabilir. Bu açık ifade, (2.8) ile verilen Lagrange Tersinme Formülü kullanılarak elde edilecektir. (2.19) eşitliğinde gözlemlediğimiz, Riordan sıralarının iki değişkenli üreteç fonksiyonu gösteriminin $d(t)/(1 - tzh(t))$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla buradan Riordan sırasının tersi için

$$\bar{d}_{n,k} = [t^n z^k]\frac{\bar{d}_h(t)}{1 - tz\bar{h}_h(t)} = [z^k][t^n]\left[\frac{\bar{d}_h(t)}{1 - zy}\middle| y = t\bar{h}_h(t)\right]$$

olur. (2.25) formülleri kullanılarak,

$$y = t\bar{h}_h(t) = th(t\bar{h}_h(t))^{-1} = th(y)^{-1}$$

bulunur ve $y = th(y)^{-1}$ olduğundan $t = yh(y)$ olur. Böylece

$$\bar{d}_h(t) = \bar{d}_h(yh(y)) = d(y)^{-1}$$

elde edilir. Sonuç olarak Lagrange Tersinme Formülü

$$[t^n]F(w(t)) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]F'(t)\phi(t)^n \qquad w = t\phi(w)$$

kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\bar{d}_{n,k} &= [z^k][t^n]\left[\frac{d(y)^{-1}}{1 - zy}\middle| y = th(y)^{-1}\right] \\
&= [z^k]\frac{1}{n}[y^{n-1}]\left(\frac{d}{dy}\frac{d(y)^{-1}}{1 - zy}\right)(\phi(y))^n \\
&= [z^k]\frac{1}{n}[y^{n-1}]\left(\frac{d}{dy}\frac{d(y)^{-1}}{1 - zy}\right)\frac{1}{h(y)^n} \\
&= [z^k]\frac{1}{n}[y^{n-1}]\left(\frac{z}{d(y)(1 - zy)^2} - \frac{d'(y)}{d(y)^2(1 - zy)}\right)\frac{1}{h(y)^n}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\frac{1}{1-zy} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n y^n$ olduğunu biliyoruz. Bu formal kuvvet serisinin türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılarak $\frac{z}{(1-zy)^2} = \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)z^{r+1}y^r$ bulunur ve bu ifade yukarıda yerine konularak,

$$\bar{d}_{n,k} = [z^k]\frac{1}{n}[y^{n-1}]\left(\frac{z}{(1 - zy)^2} - \frac{d'(y)}{d(y)(1 - zy)}\right)\frac{1}{d(y)h(y)^n}$$

$$\begin{aligned}
&= [z^k]\frac{1}{n}[y^{n-1}]\left(\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)z^{r+1}y^r - \frac{d'(y)}{d(y)}\sum_{r=0}^{\infty}z^r y^r\right)\frac{1}{d(y)h(y)^n} \\
&= \frac{1}{n}[y^{n-1}]\left(ky^{k-1} - y^k\frac{d'(y)}{d(y)}\right)\frac{1}{d(y)h(y)^n} \\
&= \frac{1}{n}[y^{n-k}]\left(k - \frac{yd'(y)}{d(y)}\right)\frac{1}{d(y)h(y)^n}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.3.4. Temel Riordan sıralarının A-dizisi ve Z-dizisi

Temel Riordan sıraları bu çalışmada önemli rol oynamaktadır. $d(t) \in \mathcal{F}_0$ olan $D = (d(t), h(t))$ biçiminde temel olmayan bir Riordan sırası alalım. Bu Riordan sırası temel olmadığından $h(t) \notin \mathcal{F}_0$'dır. $h(0) = 0$ olduğundan bir $s > 0$ için $h(t) = h_s t^s + h_{s+1}t^{s+1} + \cdots$ ve $h_s \neq 0$ olur. $h(t) = t^s(h_s + h_{s+1}t + \cdots)$ olacak şekilde bir $\widehat{h}(t) = h_s + h_{s+1}t + \cdots$ tanımlanırsa $\widehat{h}(t) \in \mathcal{F}_0$ olduğundan $(\widehat{D}) = (d(t), \widehat{h}(t))$ bir temel Riordan sırası olur. $D = (d(t), h(t)) = (d(t), t^s\widehat{h}(t))$ olduğundan D Riordan sırasının satırları, $(\widehat{d}_{n-sk})_{k\in\mathbb{N}}$ olmak üzere $\widehat{D}$ Riordan sırasındaki s-köşegenleri olur.

Şimdi Riordan sıraları için aşağıdaki teoremin ispatında kullanacağımız önemli bir sonuç verelim.

Önerme 24 *$A(t) \in \mathcal{F}_0$ bir formal kuvvet serisi olmak üzere;*

$$h(t) = A(th(t))$$

eşitliğini sağlayan tek türlü belirli $h(t)$ formal kuvvet serisi vardır.

İspat. $h(t) = A(th(t))$ eşitliğini formal olarak yazıp, böyle bir $h(t)$ serisinin tek türlü elde edilebileceğini göstereceğiz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (th(t))^n$$

eşitliğinden $h_0 = a_0$ olduğu görülür ve bu terimler her iki taraftan sadeleştirilerek terimlerin karşılaştırılmasına devam edilirse;

$$\begin{aligned}
h_1 &= a_1 a_0 \\
h_2 &= a_1 a_0 + a_2 a_0 \\
\cdots
\end{aligned}$$

şeklinde bütün terimlerin tek türlü elde edilebileceği görülür. ■

Not 4 *Önermenin kanıtı Kapalı Fonksiyon Teoremi (Implicit Function Theorem) kullanılarak da yapılabilir.*

Temel Riordan sıraları için Rogers (Merlini vd 1997) önemli bir karakterizasyon bulmuştur. $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $d_{n+1,k+1}$ şeklindeki her eleman aşağıda belirtilen biçimde bir önceki sıradaki elemanların bir doğrusal kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

$$d_{n+1,k+1} = a_0 d_{n,k} + a_1 d_{n,k+1} + a_2 d_{n,k+2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j d_{n,k+j}. \tag{2.26}$$

Bu toplam sonludur ve $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi sabittir. Şimdi bunu kanıtlayalım.

Teorem 25 (Sprugnoli 2006) *$D = (d_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ sonsuz alt üçgensel sırası verilsin. Bu durumda D'nin bir Riordan sırası olması için gerek ve yeter koşul her $n, k \in \mathbb{N}$ için*

$$d_{n+1,k+1} = a_0 d_{n,k} + a_1 d_{n,k+1} + a_2 d_{n,k+2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j d_{n,k+j}$$

sağlanacak şekilde bir $A = \{a_0 \neq 0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ dizisinin var olmasıdır.

İspat. ($:\Rightarrow$) $D = (d(t), h(t))$ Riordan sırası olsun. $(d(t)h(t), h(t))$ Riordan sırasını ele alarak

$$(A(t), B(t)) = (d(t), h(t))^{-1} \cdot (d(t)h(t), h(t))$$

veya

$$(d(t), h(t)) \cdot (A(t), B(t)) = (d(t)h(t), h(t))$$

şeklinde $(A(t), B(t))$ Riordan sırası tanımlayalım. Buradan (2.22) eşitliğinde verilen çarpma işlemi yapılarak

$$d(t)A(th(t)) = d(t)h(t) \quad \text{ve} \quad h(t)B(th(t)) = h(t)$$

bulunur. İkinci özdeşlik $B(t) = 1$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$(d(t), h(t)) \cdot (A(t), 1) = (d(t)h(t), h(t))$$

olur. Bu eşitliğin sol tarafındaki çarpanların genel elemanlarına sırasıyla $d_{n,j}$ ve $c_{j,k}$ denilirse çarpımın genel elemanı $f_{n,k}$ olmak üzere,

$$d_{n,j} = [t^n]d(t)(th(t))^j$$

ve

$$c_{j,k} = [t^j]A(t)(t)^k = [t^{j-k}]A(t) = a_{j-k}$$

olduğundan

$$f_{n,k} = \sum_{j=0}^{\infty} d_{n,j} c_{j,k} = \sum_{j=k}^{\infty} d_{n,j} a_{j-k} = \sum_{j=0}^{\infty} d_{n,j+k} a_j$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafının genel elemanı

$$f_{n,k} = [t^n]d(t)h(t)(th(t))^k$$

$$
\begin{aligned}
&= [t^{n+1}]d(t)h(t)t(th(t))^k \\
&= [t^{n+1}]d(t)(th(t))^{k+1} = d_{n+1,k+1}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Her iki taraftaki genel terimleri birbirine eşitlersek,

$$\sum_{j=0}^{\infty} d_{n,j+k}a_j = (d_{n+1,k+1})$$

bulunur.

($\Leftarrow$:) $d_{n+1,k+1} = a_0 d_{n,k} + a_1 d_{n,k+1} + a_2 d_{n,k+2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j d_{n,k+j}$ tek tipli D Riordan sırasını tanımlamak üzere, D Riordan sırasının 0. sütununun elemanları $\{d_{0,0}, d_{1,0}, d_{2,0}, \ldots\}$ olarak verilsin. Bu sütunun üreteç fonksiyonu $d(t)$ ve $A(t)$ de A dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere; Önerme 24'da gördüğümüz gibi $h(t) = A(th(t))$ biçiminde $h(t)$ bulunabilir. Dolayısıyla $d(t)$ ve $h(t)$ formal kuvvet serileri bilinen $\widehat{D} = (d(t), h(t))$ Riordan sırası bulunur. Bulunan bu Riordan sırası da teoremde verilen D Riordan sırasından başka birşey değildir. Sonuç olarak, teorem çift yönlü ispatlanmış olur. ■

$A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $D = (d(t), h(t))$ Riordan sırasının A-dizisi olarak adlandırılır ve bu dizi yalnızca $h(t)$'ye bağlıdır. Önerme 24'da bahsedildiği üzere

$$h(t) = A(th(t)) \tag{2.27}$$

eşitliğinden $h(t)$, A-dizisini tanımlar veya tam tersi olarak, A-dizisi verildiğinde $h(t)$ tek türlü tanımlanmaktadır.

Örnek 26 *Pascal üçgeni için A-dizisini bulalım.* $h(t) = \frac{1}{1-t}$ *ve* $d(t) = \frac{1}{1-t}$ *olmak üzere,* (2.27) *eşitliği kullanılarak* $\frac{1}{1-t} = A(\frac{t}{1-t})$ *bulunur. Burada* $y = \frac{t}{1-t}$ *yazılırsa* $A(y) = 1 + y$ *elde edilir. Böylece bu fonksiyon* $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $\ldots$ *olmak üzere* $\{1, 1, 0, 0, 0, \ldots\}$ *dizisini verir. Buradan*

$$d_{n+1,k+1} = a_0 d_{n,k} + a_1 d_{n,k+1}$$

eşitliği bulunur ve bu eşitlik de

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

olan Pascal üçgeninin bilinen rekürsif bağıntısını verir.

Diğer bir yandan Pascal üçgeninin $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ *rekürsif bağıntısını kullanarak da Riordan sırasını bulabiliriz. Bu bağıntıdan* $d_{n+1,k+1} = d_{n,k} + d_{n,k+1}$ *ve* $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $\ldots$ *olduğu açıktır. Dolayısıyla* $\{1, 1, 0, 0, \ldots\}$ *dizisi elde edilir. Bu dizinin üreteç fonksiyonu* $A(t) = 1 + t$ *olur ve* (2.27) *eşitliği kullanılarak* $A(th(t)) = 1 + th(t)$ *elde edilir. Böylece* $h(t) = \frac{1}{1-t}$ *olur. Ayrıca Pascal üçgeninin 0. sütunu* $\{1, 1, 1, 1, \ldots\}$ *olduğu için* $d(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \frac{1}{1-t}$ *olur. Sonuç olarak Pascal üçgeninin Riordan sırası* $(1/1 - t, 1/1 - t)$ *olarak bulunur.*

$d(t)$ ve $A(t)$ fonksiyon ikilisi bir temel Riordan sırasını tam olarak karakterize eder. Diğer bir tip karakterizasyon ise aşağıdaki teorem ile ortaya konulacaktır.

Teorem 27 (Sprugnoli 2006) $(d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$, *her* $n \in \mathbb{N}$ *için bir* $(d(t), h(t))$ *temel Riordan sırasına karşılık gelen bir alt üçgensel sıra olsun. Bu durumda* 0. *sütundaki her elemanın kendinden bir önceki satırdaki elemanların bir doğrusal kombinasyonu olarak*

$$d_{n+1,0} = z_0 d_{n,0} + z_1 d_{n,1} + z_2 d_{n,2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} z_j d_{n,j}. \tag{2.28}$$

şeklinde yazılmasını sağlayan tek bir $Z = (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dizisi vardır.*

İspat. $d_{1,0}$ elemanını 0. satır elemanlarının bir doğrusal kombinasyonu şeklinde yazarsak $z_0 = \frac{d_{1,0}}{d_{0,0}}$ olur. Benzer şekilde $d_{2,0}$ elemanı, bir önceki satır elemanların bir doğrusal kombinasyonu olarak yazılınca

$$d_{2,0} = z_0 d_{1,0} + z_1 d_{1,1} \quad \text{veya} \quad z_1 = \frac{d_{0,0}d_{2,0} - d_{1,0}^2}{d_{0,0}d_{1,1}}$$

bulunur. Aynı yol ile $d_{3,0}$ bir önceki satır elemanlarının bir doğrusal kombinasyonu olarak yazılıp buradan z_2 çekilerek z_0 ve z_1 değerleri yerine yazılırsa, z_2 bulunur. Diğer z_k değerleri de aynı şekilde bulunabilir. Dolayısıyla Z dizisi tek bir yol ile bulunur. ■

Teoremde belirtilen $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi Riordan sırası için Z dizisi olarak adlandırılır ve bu dizi $d_{0,0}$ elemanı dışında 0. sütunu tanımlamaktadır. Dolayısıyla

$$(d_{0,0}, A(t), Z(t))$$

üçlüsü bir temel Riordan sırasını tam olarak tanımlar.

Örnek 28 *Yine sonsuz alt üçgensel sıra olarak Pascal üçgeni alırsak* Z*-dizisinin* $(1, 0, 0, 0, \ldots)$ *olduğu görülür. Böylece buna karşılık gelen Riordan sırasının karakterizasyonu* $(1, 1 + t, 1)$ *olur.*

Teorem 29 (Sprugnoli 2006) $(d(t), h(t))$ *bir temel Riordan sırası ve* $Z(t)$ *ise* Z*-dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere*

$$d(t) = \frac{d_{0,0}}{1 - tZ(th(t))}$$

olur.

İspat. Bir önceki teoreme göre Z-dizisi vardır ve tektir. Dolayısıyla (2.28) eşitliği her $n \in \mathbb{N}$ için geçerlidir. $d_{n,k} = [t^n]d(t)(th(t))^k$ olduğundan k. sütunun üreteç fonksiyonu $d(t)(th(t))^k$ olur. Ayrıca $d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n,0}t^n$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$
\begin{aligned}
\frac{d(t)-d_{0,0}}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} d_{n,0}t^n}{t} &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1,0}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(z_0 d_{n,0} + z_1 d_{n,1} + z_2 d_{n,2} + \cdots)t^n \\
&= z_0 \sum_{n=0}^{\infty} d_{n,0}t^n + z_1 \sum_{n=0}^{\infty} d_{n,1}t^n + z_2 \sum_{n=0}^{\infty} d_{n,2}t^n + \cdots \\
&= z_0 d(t) + z_1 d(t)(th(t)) + z_2 d(t)(th(t))^2 + \cdots \\
&= d(t)(z_0 + z_1(th(t)) + z_2(th(t))^2 + \cdots) \\
&= d(t)Z(th(t))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitlik $d(t)$'ye göre çözülürse istenen bağıntı bulunur. ■

Yukarıda bulmuş olduğumuz bağıntı düzenlenerek

$$Z(y) = \left[\frac{d(t)-d_{0,0}}{td(t)} \middle| t = yh(t)^{-1} \right]$$

biçiminde genel Z-dizisi formülü bulunur.

Örnek 30 $d(t) = h(t) = \frac{1}{1-t}$ *olan sonsuz alt üçgensel sıraya karşılık gelen*

$$Z(y) = \left[\frac{\frac{1}{1-t}-1}{\frac{t}{1-t}} \middle| t = \frac{y}{1+y} \right] = 1$$

olarak bulunur.

Teorem 31 (Sprugnoli 2006) $d(0) = h(0) \neq 0$ *olmak üzere,* $d(t) = h(t)$ *olması için gerek ve yeter koşul*

$$A(y) = d(0) + yZ(y)$$

olmasıdır.

İspat. ($\Leftarrow$:) $A(y) = d(0) + yZ(y)$ olduğunu düşünelim. Buradan $Z(y) = \frac{A(y)-d(0)}{y}$ yazılabilir. Teorem 29 kullanılarak

$$d(t) = \frac{d(0)}{1-tZ(th(t))} = \frac{d(0)}{1-t\left(\frac{A(th(t))-d(0)}{th(t)}\right)} = \frac{d(0)h(t)}{h(t)-A(th(t))+d(0)}$$

olur. Burada $A(th(t)) = h(t)$ olduğu göz önüne alınarak

$$d(t) = h(t)$$

bulunur. Şimdi teoremin diğer yönlü ispatına bakalım:

($:\Rightarrow$) $d(t) = h(t)$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned}
d(0) + yZ(y) &= \left[d(0) + y\left[\frac{d(t) - d_{0,0}}{td(t)}\right| t = yh(t)^{-1}\right]\Bigg] \\
&= \left[d(0) + y\left[\frac{1}{t} - \frac{d(0)}{td(t)}\right| t = yh(t)^{-1}\right]\Bigg] \\
&= \left[d(0) + y\left[\frac{1}{t} - \frac{d(0)}{th(t)}\right| t = yh(t)^{-1}\right]\Bigg] \\
&= \left[d(0) + \frac{th(t)}{t} - \frac{d(0)th(t)}{th(t)}\right| t = yh(t)^{-1}\Bigg] \\
&= \left[h(t) | t = yh(t)^{-1}\right] = A(y)
\end{aligned}$$

bulunur. ■

3. BULGULAR

3.1. Temel Binom Katsayılarının Riordan Sıraları

a, b iki tam sayı parametresi ve $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $\binom{n+ak}{m+bk}$ şeklindeki temel binom katsayılarını düşünelim. Eğer n bir değişken ve m bir parametre (sabit) ise $(d_{n,k})$ bir sonsuz sıra olur ve bu sıranın elemanları a, b, m parametrelerine bağlıdır. Eğer m bir değişken n parametre (sabit) ise $(\widehat{d}_{m,k})$ sırası olur ve bu sıranın elemanları ise a, b, n parametrelerine bağlıdır. Her iki durumda da a ve b üzerinde belli koşullar kullanılarak Riordan sıraları oluşturulabilir. Dolayısıyla birçok toplamın değerlerinin bulunması için (2.20) eşitliği olarak verilen

$$\sum_{k=0}^{n} d_{n,k} f_k = [t^n] d(t) f(th(t))$$

formülü kullanılabilir.

Teorem 32 (Sprugnoli 2006) *$d_{n,k}$ ve $\widehat{d}_{m,k}$ yukarıdaki gibi tanımlanmış olmak kaydıyla, eğer $b > a$ ise*

$$D = (d_{n,k}) = \left(\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}, \frac{t^{b-a-1}}{(1-t)^b} \right)$$

bir Riordan sırası olur. Eğer $b \in \mathbb{Z}^-$ ise

$$\widehat{D} = (\widehat{d}_{m,k}) = \left((1+t)^n, \frac{t^{-b-1}}{(1+t)^{-a}} \right)$$

bir Riordan sırası olur.

İspat. Binom katsayılarının bilinen özellikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
d_{n,k} = \binom{n+ak}{m+bk} &= \binom{n+ak}{n+ak-m-bk} \\
&= \binom{-n-ak+n+ak-m-bk-1}{n+ak-m-bk} \cdot (-1)^{n+ak-m-bk} \\
&= \binom{-m-bk-1}{n-m+ak-bk} \cdot (-1)^{n-m+ak-bk} \\
&= [t^{n-m+ak-bk}] \frac{1}{(1-t)^{m+bk+1}} \\
&= [t^{n-m}] \frac{t^{bk-ak}}{(1-t)^{m+bk+1}} \\
&= [t^n] \frac{t^m}{(1-t)^{m+1}} \left(\frac{t^{b-a}}{(1-t)^b} \right)^k
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $D = \left(\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}, \frac{t^{b-a-1}}{(1-t)^b}\right)$ olur. Şimdi $\widehat{d}_{m,k}$'yı bulalım:

$$\begin{aligned}\widehat{d}_{m,k} = \binom{n+ak}{m+bk} &= [t^{m+bk}](1+t)^{n+ak} \\ &= [t^m]t^{-bk}(1+t)^n(1+t)^{ak} \\ &= [t^m](1+t)^n\left(t^{-b}(1+t)^a\right)^k\end{aligned}$$

olur. Buradan $\widehat{D} = (\widehat{d}_{m,k}) = \left((1+t)^n, \frac{t^{-b-1}}{(1+t)^{-a}}\right)$ elde edilir. ■

$\binom{n+ak}{m+bk}$ için $m = a = 0$ ve $b = 1$ olursa, $\binom{n}{k}$ bulunur. Yani buradan Pascal üçgenini veren Riordan sırası bulunur. (2.20) eşitliği olarak verilen $\sum_{k=0}^{n} d_{n,k} f_k = [t^n]d(t)f(th(t))$ toplam formülü aşağıdaki gibi ifade edilen iki özel formda olabilir:

$$\sum_k \binom{n+ak}{m+bk} f_k = [t^n]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}} f\left(\frac{t^{b-a}}{(1-t)^b}\right), \quad b > a \tag{3.1}$$

ve

$$\sum_k \binom{n+ak}{m+bk} f_k = [t^m](1+t)^n f(t^{-b}(1+t)^a), \quad b < 0. \tag{3.2}$$

Eğer m ve n birbirinden bağımsız ise bu bağıntılar üreteç fonksiyonu özdeşlikleri cinsinden de belirtilebilir. $\binom{n+ak}{m+bk}$ genel binom katsayısı (3.1) ve (3.2)'de verilen eşitlikler kullanılarak da çözülebilir.

Örnek 33 *Bir $\binom{n-k}{m}$ binom katsayısının oluşturduğu Riordan sırasını bulup sonra da bu sıranın satır toplamını bulalım. Verilen binom katsayısında $a = -1$ ve $b = 0$ olmak üzere;*

$$\binom{n-k}{m} = [t^n]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}\left(\frac{t^{b-a}}{(1-t)^b}\right)^k = [t^n]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}(t^k)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\binom{n-k}{m}$ binom katsayısı $D = \left(\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}, 1\right)$ Riordan sırasını verir. Böylece bu sıradaki satır toplamları (3.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_k \binom{n-k}{m} &= [t^n]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}} f\left(\frac{t^{b-a}}{(1-t)^b}\right) \\ &= [t^n]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}} f(t) \\ &= [t^n]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}\frac{1}{1-t} \\ &= [t^{n-m}](1-t)^{-m-2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{-m-2}{n-m}(-1)^{n-m} \\
&= \binom{n+1}{n-m} = \binom{n+1}{m+1}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Örnek 34 $\sum_k \binom{n}{2k+1}5^k$ *toplamını bulalım. Öncelikle, genel olarak verilen* $\binom{n+ak}{m+bk}$ *binom katsayısında* $a=0$*,* $b=2$ *ve* $m=1$ *olduğundan (3.1) eşitliği kullanılarak*

$$
\sum_k \binom{n}{2k+1}5^k = [t^n]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}f\left(\frac{t^{b-a}}{(1-t)^b}\right) = [t^n]\frac{t}{(1-t)^2}f\left(\frac{t^2}{(1-t)^2}\right)
$$

bulunur ve burada $f_k = 5^k$ *olarak alınırsa* $f(t) = \frac{1}{1-5t}$ *bulunur. Dolayısıyla*

$$
\begin{aligned}
\sum_k \binom{n}{2k+1}5^k &= [t^n]\frac{t}{(1-t)^2}\left[\frac{1}{1-5y}\middle| y = \frac{t^2}{(1-t)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}[t^n]t\frac{2}{1-2t-4t^2} \\
&= \frac{1}{2}[t^n]\frac{2t}{1-2t-4t^2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $F(t) = \frac{t}{1-t-t^2}$ *olduğundan* $F(2t) = \frac{2t}{1-2t-4t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n 2^n t^n$ *olur. Dolayısıyla*

$$
\sum_k \binom{n}{2k+1}5^k = \frac{1}{2}[t^n]\frac{2t}{1-2t-4t^2} = \frac{1}{2}2^n F_n = 2^{n-1}F_n
$$

olarak bulunur.

Sıradaki toplam ise ilginç durumlardan bir tanesidir. Catalan sayılarının üreteç fonksiyonu kullanılarak bulunmaktadır.

Örnek 35 *(3.1) eşitliğinde* $a=1$*,* $b=2$ *ve* $f_k = \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$ *olarak alınırsa*

$$
f(t) = \mathcal{G}\left(\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\right) = \frac{\sqrt{1+4t}-1}{2t}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} &= [t^n]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}f\left(\frac{t}{(1-t)^2}\right) \\
&= [t^n]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}\left[f(y)\middle| y = \frac{t}{(1-t)^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [t^n]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}\left[\frac{\sqrt{1+4y}-1}{2y}\bigg| y=\frac{t}{(1-t)^2}\right]\\
&= [t^n]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}(1-t)\\
&= [t^{n-m}](1-t)^{-m}\\
&= \binom{-m}{n-m}(-1)^{n-m}=\binom{n-1}{m-1}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Şimdi inceleyecek olduğumuz toplam için bir dizinin tek veya çift terimlerinin üreteç fonksiyonlarını veren (bisection) formülleri kullanacağız.

Örnek 36 $\left(\binom{z+1}{k}2^k\right)$ *dizisinin üreteç fonksiyonu* $(1+2t)^{z+1}$ *olur. Dolayısıyla*

$$(1+2t)^{z+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{z+1}{k}2^k t^k$$

ve

$$(1-2t)^{z+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{z+1}{k}2^k(-1)^k t^k$$

olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarıp $2t$*'ye bölersek*

$$\frac{(1+2t)^{z+1}-(1-2t)^{z+1}}{2t}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{z+1}{2k+1}2^{2k+1}t^{2k}$$

bulunur. Burada t *yerine* $\sqrt{t}$ *yazarsak*

$$\frac{(1+2\sqrt{t})^{z+1}-(1-2\sqrt{t})^{z+1}}{2\sqrt{t}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{z+1}{2k+1}2^{2k+1}t^{k}$$

olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{G}\left(\binom{z+1}{2k+1}2^{2k+1}\right)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\left((1+2\sqrt{t})^{z+1}-(1-2\sqrt{t})^{z+1}\right)$$

elde edilir. Şimdi (3.2) eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\sum_k\binom{z+1}{2k+1}\binom{z-2k}{n-k}2^{2k+1} &= [t^n](1+t)^z f(t(1+t)^{-2})\\
&= [t^n](1+t)^z\left[\frac{(1+2\sqrt{y})^{z+1}-(1-2\sqrt{y})^{z+1}}{2\sqrt{y}}\bigg| y=\frac{t}{(1+t)^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$= [t^n](1+t)^{z+1}\left[\frac{(1+t+2\sqrt{t})^{z+1}-(1+t-2\sqrt{t})^{z+1}}{(1+t)^{z+1}2\sqrt{t}}\right]$$
$$= [t^n]\frac{(1+\sqrt{t})^{2z+2}-(1-\sqrt{t})^{2z+2}}{2\sqrt{t}}$$

elde edilir. Burada t yerine t^2 yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_k \binom{z+1}{2k+1}\binom{z-2k}{n-k}2^{2k+1} &= [t^{2n}]\frac{(1+t)^{2z+2}-(1-t)^{2z+2}}{2t} \\
&= [t^{2n}]\frac{2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2z+2}{2k+1}t^{2k+1}}{2t} \\
&= [t^{2n}]\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2z+2}{2k+1}t^{2k} \\
&= \binom{2z+2}{2n+1}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 37 *Son örnek olarak $\sum_k \binom{2n-2k}{m-k}\binom{n}{k}(-2)^k$ toplamına bakalım. Bu toplamda $f_k = \binom{n}{k}(-2)^k$ olduğundan üreteç fonksiyonu $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}(-2t)^k = (1-2t)^n$ olur. Ayrıca $\binom{n+ak}{m+bk}$ genel binom katsayısına göre n yerine $2n$ alıp, $a = -2$ ve $b = -1$ olduğundan (3.2) eşitliği kullanılarak,*

$$\begin{aligned}
\sum_k \binom{2n-2k}{m-k}\binom{n}{k}(-2)^k &= [t^m](1+t)^{2n} f\left(\frac{t}{(1+t)^2}\right) \\
&= [t^m](1+t)^{2n}\left[(1-2y)^n \middle| y = \frac{t}{(1+t)^2}\right] \\
&= [t^m](1+t^2)^n \\
&= [t^m]\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}t^{2k} \\
&= \binom{n}{m/2}
\end{aligned}$$

bulunur.

3.2. Binom Katsayıları İle İlişkili Diğer Riordan Sıraları

Başka Riordan sıraları için bir önceki bölümde verilen teoremler ve

$$\frac{\alpha \pm \beta}{\alpha}\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha}{\beta} \pm \binom{\alpha-1}{\beta-1} \tag{3.3}$$

şeklindeki binom katsayıları ile ilgili kuralı kullanacağız. (Bu kural "-" işaretli düşünülürse $\alpha \neq 0$ olur.) Örnek olarak;

$$\frac{2n}{n+k}\binom{n+k}{2k}$$

gözönüne alınırsa $\alpha = n+k$, $\beta = n-k$ alınmalıdır. Böylece

$$\frac{2n}{n+k}\binom{n+k}{2k} = \binom{n+k}{2k} + \binom{n-1+k}{2k}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_k \frac{2n}{n+k}\binom{n+k}{n-k} f_k = \sum_k \binom{n+k}{2k} f_k + \sum_k \binom{n-1+k}{2k} f_k$$

olmak üzere iki toplamı ayrı ayrı (3.1) eşitliği yardımıyla

$$\sum_k \binom{n+k}{2k} f_k = [t^n]\frac{1}{1-t} f\left(\frac{t}{(1-t)^2}\right)$$

ve

$$\sum_k \binom{n-1+k}{2k} f_k = [t^{n-1}]\frac{1}{1-t} f\left(\frac{t}{(1-t)^2}\right)$$

olarak yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{2n}{n+k}\binom{n+k}{n-k} f_k &= [t^n]\frac{1}{1-t} f\left(\frac{t}{(1-t)^2}\right) + [t^{n-1}]\frac{1}{1-t} f\left(\frac{t}{(1-t)^2}\right) \\ &= [t^n]\frac{1+t}{1-t} f\left(\frac{t}{(1-t)^2}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Bu ifade de $\frac{2n}{n+k}\binom{n+k}{n-k}$'nın sonsuz alt üçgensel matris olan temel Riordan sırası olduğunu gösterir. Birçok özdeşlik de en son bulduğumuz (3.4) formülü kullanılarak aynı mantık ile ispatlanabilir. Örneğin $f_k = \binom{2k}{k}(-1)^k$ alalım:

$$\mathcal{G}\left(\binom{2k}{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$$

olduğundan $f(t) = \mathcal{G}(f_k) = 1/\sqrt{1+4t}$ bulunur ve buradan $n \geq 1$ için

$$\sum_k \frac{2n}{n+k}\binom{n+k}{n-k}\binom{2k}{k}(-1)^k = [t^n]\frac{1+t}{1-t}\left[\frac{1}{\sqrt{1+4y}}\middle| y = \frac{t}{(1-t)^2}\right] = [t^n]1 = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde $n \geq 1$ için

$$\sum_k \frac{2n}{n+k}\binom{n+k}{n-k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = [t^n]\frac{1+t}{1-t}\left[\frac{\sqrt{1+4y}-1}{2y}\middle| y = \frac{t}{(1-t)^2}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= [t^n]\frac{1+t}{1-t}(1-t) \\
&= [t^n](1+t) \\
&= [t^n]+[t^{n-1}] = \delta_{n,1}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Sıradaki durum biraz daha farklıdır. $f(t)=\mathcal{G}(f_k)$ olmak üzere

$$G(t)=\mathcal{G}\left(\frac{f_k}{k}\right)=\int_0^t \frac{f(\tau)-f_0}{\tau}d\tau$$

olur. $k \neq 0$ için sağlanan

$$\binom{n-k}{k}=\frac{n-k}{k}\binom{n-k-1}{k-1}$$

eşitliği göz önüne alalım. Buradan (3.1) formülü kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\sum_k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}f_k &= f_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{n-k}\frac{n-k}{k}\binom{n-k-1}{k-1}f_k \\
&= f_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}f_k \\
&= f_0+n\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n-k-1}{k-1}\frac{f_k}{k} \\
&= f_0+n[t^n]G\left(\frac{t^2}{1-t}\right) \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $f_k=(-1)^k$ alınırsa $\mathcal{G}(f_k)=\frac{1}{1+t}$ bulunur. Aynı zamanda

$$
\begin{aligned}
G(t)=\mathcal{G}\left(\frac{f_k}{k}\right)=\mathcal{G}\left(\frac{(-1)^k}{k}\right) &= \int_0^t \frac{f(\tau)-f_0}{\tau}d\tau \\
&= \int_0^t \frac{\frac{1}{1+\tau}-1}{\tau}d\tau \\
&= \int_0^t \frac{-1}{1+\tau}d\tau \\
&= -\ln(1+t)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\sum_k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(-1)^k &= 1+n[t^n]\left(-\ln\left(\frac{1-t^2}{1+t^3}\right)\right) \\
&= 1+n[t^n](\ln(1-t^2)-\ln(1+t^3))
\end{aligned}
$$

$$= \quad 1 + n[t^n]\left[-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^{2m}}{m} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{3m}}{m}\right]$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\sum_k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(-1)^k \quad = \begin{cases} 1 + 6m\left(-\frac{1}{3m}+\frac{1}{2m}\right), & n = 6m \\ 1, & n = 6m+1 \\ 1+(6m+2)\left(-\frac{1}{3m+1}\right), & n = 6m+2 \\ 1+(6m+3)\left(-\frac{1}{2m+1}\right), & n = 6m+3 \\ 1+(6m+4)\left(-\frac{1}{3m+2}\right), & n = 6m+4 \\ 1, & n = 6m+5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^n \cdot 2, & n \equiv 0 \pmod 3 \\ (-1)^{n-1}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik *Hardy Özdeşliği* olarak bilinir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n-k}\binom{n-k}{k} &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n-k}\binom{n-k}{k} \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n-k}\frac{n-k}{k}\binom{n-k-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\binom{n-k-1}{k-1} \end{aligned}$$

eşitliği kolayca bulunur. Burada $f_k = 1$ olduğundan $f(t) = 1/(1-t)$ olduğu görülür. $g_k = 1/k$ olduğundan

$\mathcal{G}(g_k) = \mathcal{G}(1/k) = \int_0^t \frac{f(s)-f_0}{s}ds = \int_0^t \frac{1}{1-s}ds = -\ln(1-t)$ olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n-k}\binom{n-k}{k} &= \frac{1}{n} + [t^{n-1}]\frac{1}{t}G\left(\frac{t^2}{1-t}\right) \\ &= \frac{1}{n} + [t^n]G\left(\frac{t^2}{1-t}\right) \\ &= \frac{1}{n} + [t^n]\left(\ln\left(\frac{1-t}{1-t-t^2}\right)\right) \\ &= -[t^n]\ln(1-t-t^2) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu aşamada ϕ altın oran ve dolayısıyla $\widehat{\phi} = -\phi^{-1}$ sağlamak üzere $1-t-t^2 = (1-\phi t)(1-\widehat{\phi}t)$ olarak alınırsa yukarıdaki eşitlik,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n-k}\binom{n-k}{k} \quad = \quad [t^n](-\ln(1-\phi t) - \ln(1-\widehat{\phi}t))$$

$$= [t^n]\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi^n t^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widehat{\phi}^n t^n}{n}\right)$$
$$= \frac{\phi^n}{n} + \frac{\widehat{\phi}^n}{n}$$

olarak elde edilir.

(3.5) eşitliğinde t yerine pt yazılarak

$$\sum_k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}p^k f_k = p^0 f_0 + n[t^n]G\left(\frac{p^2t^2}{1-pt}\right)$$

biçiminde genelleştirilebilir.

3.3. Binom Katsayıları ve Lagrange Tersinme Formülü

Bir önceki bölümdeki formüller bazı durumlarda m ve n'nin pay veya paydada olma durumuna göre binom katsayılarında istenen sonucu veriyordu. Fakat bu bölümde, $[t^n]$'in katsayısını verilen fonksiyonun n veya m'ye bağlı olma durumuna göre inceleyeceğiz. Bu nedenle burada Lagrange Tersinme Formülüne başvuracağız.

Örneğin $\binom{2n-k}{n-k}$ binom katsayısının bir Riordan sırası oluşturup oluşturmayacağını inceleyelim:

$$\binom{2n-k}{n-k} = [t^{n-k}](1+t)^{2n-k} = [t^n](1+t)^{2n}\left(\frac{t}{1+t}\right)^k$$

Görüldüğü gibi $(1+t)^{2n}$ fonksiyonu Riordan sırasının $d(t)$ formal kuvvet serisi olarak düşünülemez; çünkü bu fonksiyon n değeri değiştikçe değişmektedir. Dolayısıyla k değerinin sabit olduğunu düşünelim ve üreteç fonksiyonlarının

$$\mathcal{G}([t^n]F(t)\phi(t)^n) = \left[\frac{F(w)}{1-t\phi'(w)}\middle| w = t\phi(w)\right]$$

olarak verilen köşegenleştirme kuralını uygulayalım. $F(t) = \left(\frac{t}{1+t}\right)^k$ ve $\phi(t) = (1+t)^2$ olmak üzere

$$w = t\phi(w) \quad \text{veya} \quad w = t(1+w)^2$$

denkleminin çözümünü bulmak için elde edilen $tw^2-(1-2t)w+t = 0$ ikinci dereceden denklemin çözümü $w(0) = 0$ eşitliğini sağlayan

$$w(t) = \frac{1-2t-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

olur. Çünkü $F(w)$ anlamlı olabilmesi için $w(0) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla buradan

$$F(w) = \left(\frac{w}{1+w}\right)^k = \left(\frac{1-2t-\sqrt{1-4t}}{1-\sqrt{1-4t}}\right)^k = \left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2}\right)^k$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{1}{1-t\phi'(w)} = \frac{1}{1-2t(1+w)} = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$$

olur. Böylece köşegenleştirme kuralı ile

$$\binom{2n-k}{n-k} = [t^n]\frac{1}{\sqrt{1-4t}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2}\right)^k$$

elde edilir. Dolayısıyla $\binom{2n-k}{n-k}$ binom katsayılarının Riordan sırasının

$$D = \left(\frac{1}{\sqrt{1-4t}}, \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)$$

olduğunu gösterir. Görüldüğü gibi 0. sütun $k=0$ olduğu durumdaki tüm elemanları içerir. Yani $k=0$ için $\binom{2n}{n}$ binom katsayısının üreteç fonksiyonu daha önceden de bildiğimiz gibi $d(t) = 1/\sqrt{1-4t}$ olur.

$f_k = 2^k$ dolayısıyla $f(t) = \frac{1}{1-2t}$ olmak üzere basit bir örnek olarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{n-k}2^k &= [t^n]\frac{1}{\sqrt{1-4t}}\left[\frac{1}{1-2y}\bigg| y = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2}\right] \\
&= [t^n]\frac{1}{\sqrt{1-4t}}\frac{1}{\sqrt{1-4t}} \\
&= [t^n]\frac{1}{1-4t} = 4^n
\end{aligned}$$

olur.

Köşegenleştirme kuralı kullanılarak

$$\left(\binom{2n+ak}{n-ck}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-4t}}, t^{c-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{a+2c}\right)$$

olduğu ispatlanabilir. Bu ispata bakalım. Öncelikle,

$$\binom{2n+ak}{n-ck} = [t^{n-ck}](1+t)^{2n+ak} = [t^n](1+t)^{2n}\left(t^c(1+t)^a\right)^k$$

olur. Buradan köşenleştirme kuralına göre $F(t) = (t^c(1+t)^a)^k$ ve $\phi(t) = (1+t)^2$ alınarak $w = t(1+w)^2$ denklemi çözülerek $w(t) = \frac{1-2t-\sqrt{1-4t}}{2t}$ bulunur. Böylece

$$F(w) = (w^c(1+w)^a)^k = \left(t^c(1+w)^{2c}(1+w)^a\right)^k = \left(t^c\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{2c+a}\right)^k$$

ve

$$\frac{1}{1-t\phi'(w)} = \frac{1}{1-2t(1+w)} = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla buradan

$$\left(\binom{2n+ak}{n-ck}\right)_{k\in\mathbb{N}} = [t^n]\left(\frac{1}{\sqrt{1-4t}}\right)\left(t^c\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{a+2c}\right)^k$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\left(\binom{2n+ak}{n-ck}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-4t}}, t^{c-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{a+2c}\right)$$

Riordan sırası elde edilir.

İlginç bir örnek olarak bulunan bu genel ifade kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\sum_k \binom{2n}{n-3k}(-1)^k &= [t^n]\frac{1}{\sqrt{1-4t}}\left[\frac{1}{1+y}\bigg| y = t^3\left(\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^6\right] \\
&= [t^n]\frac{1}{\sqrt{1-4t}}\left[\frac{64t^3}{64t^3+(1-\sqrt{1-4t})^6}\right] \\
&= [t^n]\left(\frac{1}{2\sqrt{1-4t}} + \frac{t-1}{2(3t-1)}\right) \\
&= [t^n]\left(\frac{1}{2\sqrt{1-4t}} + \frac{3-3t}{6(1-3t)}\right) \\
&= [t^n]\left(\frac{1}{2\sqrt{1-4t}} + \frac{2+1-3t}{6(1-3t)}\right) \\
&= [t^n]\left(\frac{1}{2\sqrt{1-4t}} + \frac{1}{3(1-3t)} + \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2}\binom{2n}{n} + \frac{1}{3}3^n + \frac{\delta_{n,0}}{6} \\
&= \frac{1}{2}\binom{2n}{n} + 3^{n-1} + \frac{\delta_{n,0}}{6}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\sum_k \binom{2n}{n-3k} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} + \frac{4^n}{6} + \frac{1}{3}$$

bulunur.

Not 5 *Aynı yol ile* $\binom{pn+ak}{n-ck}$ *şeklindeki binom katsayılarına da bakabiliriz; fakat burada LTF uygulayabilmek için derecesi ikiden büyük olan denklemlerin çözülmesi gerekir. Üçüncü ve daha büyük dereceli denklemleri çözmek zor olduğundan,* $p > 2$ *durumu ile ilgilenmeyeceğiz.*

3.4. Stirling Sayıları ve Riordan Sıraları

Riordan sıraları ve Stirling sayıları arasındaki bağlantı açık değildir. Stirling sayılarından oluşan (birinci ve ikinci çeşit Stirling sayılarının ikisi için de geçerli) $d_{n,k} = \left\{ {n \atop k} \right\}$ veya $d_{n,k} = \left[{n \atop k} \right]$ olacak şekilde Riordan sıralarının bulunamayacağı Teorem 25'den yararlanılabilir.

İkinci çeşit Stirling sayılarından oluşan, sonsuz alt üçgensel matrisin sütun üreteç fonksiyonunu bulmak için

$$\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = (k+1) \left\{ {n \atop k+1} \right\} + \left\{ {n \atop k} \right\} \tag{3.6}$$

rekürans bağıntısı kullanılabilir. n. sütun elemanları $\left\{ {k \atop n} \right\}$, $n = k, k+1, \ldots$ olmak üzere sıfırıncı sütunun üreteç fonksiyonu $S_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ {k \atop 0} \right\} t^k = 1$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için yukarıda verilen rekürans bağıntısının $k = 0$ için

$$\left\{ {n+1 \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop 1} \right\} + \left\{ {n \atop 0} \right\}$$

olur. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n+1 \atop 1} \right\} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop 1} \right\} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop 0} \right\} t^n$$

bulunur. Dolayısıyla üreteç fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak

$$\frac{S_1(t) - S_1(0)}{t} = S_1(t) + S_0(t)$$

bulunur. $S_1(0) = 0$ ve $S_0(t) = 1$ olduğundan $S_1(t) = \frac{t}{1-t}$ olarak elde edilir. Benzer şekilde $k = 1$ için rekürans bağıntısından

$$\left\{ {n+1 \atop 2} \right\} = 2 \left\{ {n \atop 2} \right\} + \left\{ {n \atop 1} \right\}$$

yazılabilir. Buradan üreteç fonksiyonu bulmak için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n+1 \atop 2} \right\} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop 2} \right\} 2t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop 1} \right\} t^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop 2} \right\} t^n + S_1(t)$$

eşitliklerini gözlemleyerek

$$\frac{S_2(t) - S_2(0)}{t} = 2S_2(t) + S_1(t)$$

elde edilir. Böylece

$$S_2(t) = \frac{t^2}{(1-t)(1-2t)}$$

olarak bulunur. Ayrıca bu eşitlikte kısmi kesir yöntemi uygulanarak

$$
\begin{aligned}
S_2(t) = \frac{t^2}{(1-t)(1-2t)} &= t^2\left(-\frac{1}{1-t}+\frac{2}{1-2t}\right) \\
&= t^2\left(-\sum_{n=0}^{\infty} t^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n\right) \\
&= t^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)t^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)t^{n+2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)t^n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $S_2(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ {n \atop 2} \right\} t^n$ olduğundan dolayısıyla cebirsel yol ile $n \geq 2$ için $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$ kanıtlanmış olur.

İkinci çeşit Stirling sayılarının sütun üreteç fonksiyonlarının sıfırıncı sütun için $S_0(t) = 1$, birinci sütun için $S_1(t) = \frac{t}{1-t}$, ikinci sütun için $S_2(t) = \frac{t^2}{(1-t)(1-2t)}$ olduğunu gösterdik, $k = m$ olmak üzere, m. sütun üreteç fonksiyonunun ise tümevarım ile

$$S_m(t) = \mathcal{G}\left(\left\{ {n \atop m} \right\}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{t^m}{(1-t)(1-2t)\cdots(1-mt)}$$

olduğu görülür.

$$\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = (k+1)\left\{ {n \atop k+1} \right\} + \left\{ {n \atop k} \right\}$$

rekürans bağıntısını $(k+1)!/(n+1)!$ ile çarparsak;

$$\frac{(k+1)!}{(n+1)!}\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \frac{(k+1)!}{n!}\left\{ {n \atop k+1} \right\}\frac{k+1}{n+1} + \frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}\frac{k+1}{n+1}$$

olur. Bu rekürans bağıntısında $d_{n,k} = \frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}$ olarak alırsak bağıntı

$$d_{n+1,k+1} = d_{n,k+1}\frac{k+1}{n+1} + d_{n,k}\frac{k+1}{n+1}$$

şekline dönüşür ve

$$(n+1)d_{n+1,k+1} = (k+1)d_{n,k+1} + (k+1)d_{n,k} \tag{3.7}$$

olarak yazılabilir. Şimdi yeni bulduğumuz rekürans bağıntısı üzerinde ilerleyelim ve yeni oluşturulan $(d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ sırasının sütun üreteç fonksiyonlarını bulalım. $d_{n,k} = \frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}$ olmak üzere

$$d_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n,k}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\} t^n$$

bulunur ve buradan $d_0(t) = 1$ ve $d_1(0) = 0$ olduğu kolayca görülür. Böylece $k = 0$ için (3.7) eşitliğinde verilen reküran bağıntısı

$$(n+1)d_{n+1,1} = d_{n,1} + d_{n,0}$$

olur. Bu reküran bağıntısına $\mathcal{G}$ operatörünü uygularsak

$$\mathcal{G}((n+1)d_{n+1,1}) = \mathcal{G}(d_{n,1}) + \mathcal{G}(d_{n,0})$$

olur ve buradan üreteç fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak $d_1'(t) = d_1(t) + 1$ diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise $d_1(t) = e^t - 1$ olarak bulunur.

$k = 1$ için (3.7) eşitliğinde verilen reküran bağıntısı;

$$(n+1)d_{n+1,2} = 2d_{n,2} + 2d_{n,1}$$

olur. Burada $\mathcal{G}$ operatörü uygulanırsa $\mathcal{G}((n+1)d_{n+1,2}) = 2\mathcal{G}(d_{n,2}) + 2\mathcal{G}(d_{n,1})$ olur ve burada üreteç fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak $d_2'(t) = 2d_2(t) + 2d_1(t)$ diferansiyel denklemi elde edilir $d_1(t) = e^t - 1$ değeri diferansiyel denklemde yerine yazılıp çözülürse, bu diferansiyel denklemin çözümü $d_2(t) = (e^t - 1)^2$ olarak bulunur. Dolayısıyla $d_0(t) = 1$, $d_1(t) = e^t - 1$ ve $d_2(t) = (e^t - 1)^2$ olduğundan tümevarım yöntemi ile $d_k(t) = (e^t - 1)^k$ olduğu ispatlanır. Sonuç olarak,

$$d_k(t) = \mathcal{G}\left(\frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}\right) = (e^t - 1)^k$$

bulunur ve buradan $(d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}} = [t^n](e^t - 1)^k$ olduğundan $d(t) = 1$ ve $h(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ formal kuvvet serileri elde edilir. Dolayısıyla $(d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$'nın Riordan sırası olduğu ispatlanmış olur. Bu durum ikinci çeşit Stirling sayılarını içeren birçok özdeşliğin kanıtlanmasını sağlar.

Şimdi birinci çeşit Stirling sayılarına bakalım. Birinci çeşit Stirling sayıları için

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

şeklinde reküran bağıntısı vardır. Bu reküransı $\frac{(k+1)!}{(n+1)!}$ ile çarparsak

$$\frac{(k+1)!}{(n+1)!}\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \frac{(k+1)!}{n!}\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}\frac{n}{n+1} + \frac{k!}{n!}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{k+1}{n+1}$$

elde edilir. Burada $f_{n,k} = \frac{k!}{n!}\left[{n \atop k} \right]$ olarak alınırsa, reküran bağıntısı

$$(n+1)f_{n+1,k+1} = nf_{n,k+1} + (k+1)f_{n,k} \tag{3.9}$$

biçimine dönüşür. $f_{n,k} = \frac{k!}{n!} \left[{n \atop k} \right]$ olduğundan $f_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{n!} \left[{n \atop k} \right] t^n$ olur ve buradan $f_0(t) = 1$ olduğu açıktır. $k = 0$ için (3.9) eşitliğinde verilen rekürans bağıntısı $(n+1)f_{n+1,1} = nf_{n,1} + f_{n,0}$ olur. Bu reküransa $\mathcal{G}$ operatörü uygulanırsa

$$\mathcal{G}((n+1)f_{n+1,1}) = \mathcal{G}(nf_{n,1}) + \mathcal{G}(f_{n,0})$$

elde edilir. Buradan üreteç fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak

$$f_1'(t) = tf_1'(t) + f_0(t)$$

diferansiyel denklemi bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise

$$f_1(t) = \ln \frac{1}{1-t}$$

olarak kolayca bulunur.

$k = 1$ için (3.9) eşitliğinde verilen rekürans bağıntısı $(n+1)f_{n+1,2} = nf_{n,2} + 2f_{n,1}$ olur. Burada da $\mathcal{G}$ operatörü uygulanarak $\mathcal{G}((n+1)f_{n+1,2}) = \mathcal{G}(nf_{n,2}) + 2\mathcal{G}(f_{n,1})$ bulunur ve üreteç fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak $f_2'(t) = tf_2'(t) + 2f_1(t)$ diferansiyel denklemi bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise

$$f_2(t) = \left(\ln \frac{1}{1-t} \right)^2$$

olarak bulunur. Tümevarım yöntemi ile genel formülün

$$f_k(t) = \mathcal{G} \left(\frac{k!}{n!} \left[{n \atop k} \right] \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\ln \frac{1}{1-t} \right)^k$$

olduğu ispatlanır. Sonuç olarak,

$$(f_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}} = [t^n] \left(\ln \frac{1}{1-t} \right)^k$$

olduğundan $(f_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$'nın $d(t) = 1$ ve $h(t) = t^{-1} \ln \frac{1}{1-t}$ formal kuvvet serilerine sahip olan bir Riordan sırası olduğu ispatlanmış olur.

3.5. Stirling Sayılarını İçeren Özdeşlikler

$\frac{k!}{n!} \left\{ {n \atop k} \right\}$ ikinci çeşit Stirling sayılarından oluşan matrisin genel terimi $d_{n,k}$ ve $\frac{k!}{n!} \left[{n \atop k} \right]$ birinci çeşit Stirling sayılarından oluşan matrisin genel terimi $f_{n,k}$ olmak üzere, $d_{n,k}$ ve $f_{n,k}$ için verilen iki rekürans bağıntısı da oluşan iki alt üçgensel matrisin Riordan sırası olduğunu hemen kanıtlayamaz; çünkü bu matrislerden A-dizisi hemen görülmez. Bunun yanında iki sıra içinde A-dizisi, $h(t)$ fonksiyonlarını bildiğimiz için bulunabilir.

Birinci çeşit Stirling sayılarının A-dizisinin üreteç fonksiyonunu (2.27)'de verilen $h(t) = A(th(t))$ eşitliğini kullanarak bulalım. $h(t) = t^{-1}\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)$ olduğundan

$$\ln(\left(\frac{1}{1-t}\right)) = tA\left(\ln\frac{1}{1-t}\right)$$

fonksiyonel denklemi bulunur. Bu denklemde $y = \ln 1/(1-t)$ veya $t = (e^y - 1)/y$ olarak alınırsa birinci çeşit Stirling sayılarının A-dizisinin üreteç fonksiyonu

$$A(y) = \frac{ye^y}{e^y - 1}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde, ikinci çeşit Stirling sayılarının A-dizisinin üreteç fonksiyonunu bulurken ise $h(t) = \frac{e^t-1}{t}$ olduğundan (2.27)'de verilen $h(t) = A(th(t))$ eşitliği kullanılarak

$$\frac{e^t - 1}{t} = A(e^t - 1)$$

fonksiyonel denklemi bulunur. Bu denklemde ise $y = e^t - 1$ olarak alınırsa, ikinci çeşit Stirling sayılarının A-dizisinin üreteç fonksiyonu

$$A(y) = \frac{y}{\ln(y+1)}$$

olarak bulunur.

İlk sonuç olarak Stirling sayılarının her iki çeşidi için de yazılan alt üçgensel matrislerin bir Riordan sırası oluşturduğunu gördük. Şimdi Riordan sıralarının özellikleri ve teoremlerini kullanarak Stirling sayıları için bulunan matrisin satır toplamlarını bulalım.

Birinci çeşit Stirling sayıları için oluşturulan matrisin satır toplamı;

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{n!}\frac{k!}{k!}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n!}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{1}{k!}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte $g_k = \frac{1}{k!}$ olarak alınırsa $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k = e^t$ olarak bulunur ve $f_{n,k} = \frac{k!}{n!}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ olmak üzere $d(t) = 1$ ve $th(t) = \ln\frac{1}{1-t}$ olduğunu bir önceki bölümden biliyoruz. Böylece (2.20) eşitliği kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = n![t^n]d(t)f(th(t)) = n![t^n]\left[e^y\middle| y = \ln\frac{1}{1-t}\right] = n![t^n]\frac{1}{1-t} = n!$$

bulunur. Bu sonuç kombinatorik yol ile de bulunabilir. İkinci çeşit Stirling sayılarının satır toplamları Bell sayılarını verir. Dolayısıyla bu sayılar için üreteç fonksiyonunu bulabiliriz.

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n!}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\frac{1}{k!}$$

olarak yazılabilir. Burada $f_k = 1/k!$ olarak alınırsa $f(t) = e^t$ olur. Ayrıca $d_{n,k} = \frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}$ olmak üzere $d(t) = 1$ ve $th(t) = e^t - 1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla (2.20) eşitliği kullanılarak;

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} = n![t^n]\left[e^y | y = e^t - 1\right] = n![t^n]\left[e^{e^t - 1}\right] = n![t^n]\exp\left(e^t - 1\right)$$

bulunur. Buradan $\frac{\mathcal{B}_n}{n!} = [t^n]\exp\left(e^t - 1\right)$ olduğundan

$$\mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}_n}{n!}\right) = \exp\left(e^t - 1\right)$$

olarak elde edilir. Bu nedenle Bell sayılarına üstel sayılar da denir.

Sıralı Bell sayıları ise $\mathcal{O}_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k!$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$\frac{\mathcal{O}_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte $f_k = 1$ olarak alınırsa $f(t) = \frac{1}{1-t}$ olur. Ayrıca $d_{n,k} = \frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}$ olmak üzere $d(t) = 1$ ve $th(t) = e^t - 1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla (2.20) eşitliği kullanılarak;

$$\frac{\mathcal{O}_n}{n!} = [t^n]\left[\frac{1}{1-y}\middle| y = e^t - 1\right] = [t^n]\left(\frac{1}{2 - e^t}\right)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak sıralı Bell sayılarının üstel üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{E}(\mathcal{O}_n) = \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{O}_n}{n!}\right) = \frac{1}{2 - e^t}$$

olur.

Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayılarının çarpımlarının sıra toplamına bakalım:

$$\sum_k \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} = \frac{n!}{m!} \sum_k \frac{k!}{n!}\left[{n \atop k} \right] \frac{m!}{k!}\left\{ {k \atop m} \right\}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlikte $g_k = \frac{m!}{k!}\left\{ {n \atop k} \right\}$ olmak üzere $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{k!}\left\{ {n \atop k} \right\} t^k = (e^t - 1)^m$ olur. Ayrıca birinci çeşit Stirling sayıları için $d(t) = 1$ ve $th(t) = \ln\frac{1}{1-t}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla (2.20) eşitliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}\sum_k \left[{n \atop k} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} &= \frac{n!}{m!}[t^n]\left[(e^y - 1)^m \middle| y = \ln\frac{1}{1-t}\right] \\ &= \frac{n!}{m!}[t^n]\left[\left(\frac{1}{1-t} - 1\right)^m\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{m!}[t^{n-m}](1-t)^{-m} \\
&= \frac{n!}{m!}\binom{-m}{n-m}(-1)^{n-m} \\
&= \frac{n!}{m!}\binom{n-1}{m-1}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Stirling sayıları için iki tane diklik bağıntısı (orthogonality relations) ifade edilebilir. Birinci diklik bağıntısı şu yol ile ispatlanır:

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} = (-1)^n \frac{n!}{m!} \sum_k \frac{k!}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{m!}{k!} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^k$$

yazılarak bu eşitlikte $g_k = \frac{m!}{k!} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^k$ olarak alınırsa $g(t) = (e^{-t}-1)^m$ olur. Ayrıca birinci çeşit Stirling sayıları için $d(t) = 1$ ve $th(t) = \ln \frac{1}{1-t}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla (2.20) eşitliği kullanılarak;

$$
\begin{aligned}
\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} &= (-1)^n \frac{n!}{m!}[t^n] \left[(e^{-y}-1)^m \Big| y = \ln \frac{1}{1-t} \right] \\
&= (-1)^n \frac{n!}{m!}[t^n] \left[\left(e^{\ln(1-t)} - 1 \right)^m \right] \\
&= (-1)^n \frac{n!}{m!}[t^n](-1)^m t^m \\
&= (-1)^{n+m} \frac{n!}{m!}[t^{n-m}]1 \\
&= \delta_{n,m}
\end{aligned}
$$

olur. Benzer yöntem kullanılarak ikinci diklik bağıntısı

$$\sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = \delta_{n,m}$$

olarak bulunur.

Stirling sayıları Stirling özdeşliklerine göre kuvvet ve azalan faktöriyel cinsinden de tanımlanır. Bu özdeşlikleri Riordan sırası yaklaşımı ile ispatlayalım:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^k}{k!} (-1)^k$$

eşitliğinde $g_k = \frac{x^k}{k!}(-1)^k$ olarak alınırsa $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k = e^{-tx}$ olur. Ayrıca $(f_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}} = \frac{k!}{n!} \left[{n \atop k} \right]$ olmak üzere birinci çeşit Stirling sayıları için $d(t) = 1$ ve $th(t) = \ln \frac{1}{1-t}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k = (-1)^n n! [t^n] \left[e^{-yx} \Big| y = \ln \frac{1}{1-t} \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^n n![t^n](1-t)^x \\
&= (-1)^n n![t^n]\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{x}{n}(-1)^n t^n\right) \\
&= (-1)^n n!\binom{x}{n}(-1)^n \\
&= n!\binom{x}{n} = x^{\underline{n}}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}\frac{x^{\underline{k}}}{k!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}\binom{x}{k}$$

olarak bulunur. Bu eşitlikte $f_k = \binom{x}{k}$ olmak üzere $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}t^k = (1+t)^x$ olarak bulunur. Ayrıca $(d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}} = \frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}$ olmak üzere $d(t) = 1$ ve $th(t) = e^t - 1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = n![t^n]\left[(1+y)^x | y = e^t - 1\right] = n![t^n]e^{tx} = n!\frac{x^n}{n!} = x^n$$

olarak elde edilir.

Bu bölümü Stirling sayıları ve Bernoulli sayıları arasındaki iki ilişkiyi göstererek sonlandıralım. İlk olarak,

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}\frac{(-1)^k k!}{k+1} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte $f_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$ olarak alınırsa $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k = \frac{1}{t}\ln(1+t)$ olur. Ayrıca $(d_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}} = \frac{k!}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}$ olmak üzere $d(t) = 1$ ve $th(t) = e^t - 1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}\frac{(-1)^k k!}{k+1} &= n![t^n]\left[\frac{1}{y}\ln(1+y)\Big| y = e^t - 1\right] \\
&= n![t^n]\left(\frac{1}{e^t-1}\ln e^t\right) \\
&= n![t^n]\frac{t}{e^t-1} = B_n
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu eşitlik Bernoulli sayılarının ikinci çeşit Stirling sayıları cinsinden tanımlanabileceğini gösterir.

İkinci olarak, birinci çeşit Stirling sayıları ile Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

$$\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k} \right] B_k = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n!}\left[{n \atop k} \right]\frac{B_k}{k!}$$

olarak yazılan eşitlikte $g_k = \frac{B_k}{k!}$ olarak alınırsa $g(t) = \mathcal{G}\left(\frac{B_k}{k!}\right) = \frac{t}{e^t-1}$ olur. Aynı zamanda $(f_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}} = \frac{k!}{n!}\left[{n \atop k}\right]$ olmak üzere $d(t) = 1$ ve $th(t) = \ln\left(\frac{1}{1-t}\right)$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]B_k &= n![t^n]\left[\frac{y}{e^y-1}\middle| y=\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)\right] \\ &= n![t^n]t^{-1}(t-1)\ln(1-t) \\ &= n![t^n](1-t^{-1})\ln(1-t) \\ &= n![t^n]\left(\ln(1-t)-\frac{1}{t}\ln(1-t)\right) \\ &= n!\left(\frac{-1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \\ &= n!\frac{(-1)}{n(n+1)} = (-1)\frac{(n-1)!}{n+1}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Açıkça görüldüğü gibi bu ifade $n > 0$ için sağlanır. $n = 0$ için

$$\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]B_k = B_0 = 1$$

olur.

3.6. Fibonacci ve Harmonik Sayıları İçeren Özdeşlikler

Bu kısımda Teorem 21 yardımıyla binom katsayıları, Fibonacci sayıları ve harmonik sayıları içeren bazı açık formüller elde edilecektir.

İlk olarak (2.20) formülünde $d(t) = h(t) = \frac{1}{1-t}$ ve Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu olan $\frac{t}{1-t-t^2}$'yi $f(t)$ olarak alırsak

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = [t^n]\frac{1}{1-t}f\left(\frac{t}{1-t}\right) &= [t^n]\frac{1}{1-t}\frac{\frac{t}{1-t}}{1-\frac{t}{1-t}-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} \\ &= [t^n]\frac{t}{t^2-3t-1}\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi (2.20) formülünde $f(t)$ yerine harmonik sayıların üreteç fonksiyonu olan $\frac{-\ln(1-t)}{1-t}$'yi alırsak

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k = [t^n]\frac{1}{1-t}f\left(\frac{t}{1-t}\right) &= [t^n]\frac{1}{1-t}\frac{-\ln\left(1-\frac{t}{1-t}\right)}{1-\frac{t}{1-t}} \\ &= [t^n]\frac{1}{1-2t}\ln\left(\frac{1-t}{1-2t}\right)\end{aligned}$$

bulunur ve son olarak (2.20) formülünde $f(t)$ yerine hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonu olan $\frac{-\ln(1-t)}{(1-t)^{\alpha}}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k{}^{(\alpha)} = [t^n]\frac{1}{1-t}f\left(\frac{t}{1-t}\right) &= [t^n]\frac{1}{1-t}\frac{-\ln\left(1-\frac{t}{1-t}\right)}{\left(1-\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha}} \\ &= [t^n]\ln\left(\frac{1-t}{1-2t}\right)\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-2t)^{\alpha}}\end{aligned}$$

elde edilir.

4. KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. Dover, New York, 824 p.

BACCHERINI, D., MERLINI, D. and SPRUGNOLI, R. 2008. Level generating trees and proper Riordan arrays. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, (2): 69-91.

BARRY, P. 2007. On a family of generalized Pascal triangles defined by exponential Riordan arrays. *J. of Integer Sequences*, 10(3-5):1.

BARRY, P. 2009. A Study of Integer Sequences, Riordan Arrays, Pascal-like Arrays and Hankel Transforms. Ph.D. Thesis, University College Cork, 324 p.

BENJAMIN, A.T. and QUINN, J.J. 2003. Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof. MAA, Washington, 194 p.

CHEON, G.S. and EL-MIKKAWY, M.E.A. 2008. Generalized harmonic numbers with Riordan arrays. *J. of Number Theory*, 128: 413-425.

CHEON, G.S., EL-MIKKAWY, M.E.A. and SEOL, H.G. 2006. New identities for Stirling numbers via Riordan arrays. *J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math.*, 13: 311-318.

COMTET, L. 1974. Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. Revised and enlarged edition. D. Riedel Publishing Co., Dordrecht, 343 p.

CONWAY, J.H. and GUY, R.K. 1996. The Book of Numbers, New York, Springer-Verlag, 310 p.

DİL, A. and MEZO, I. 2008. A Symmetric Algorithm for Hyperharmonic and Fibonacci Numbers, *Applied Mathematics and Computation*, 206: 942-951.

FİRENGİZ, M.C. and DİL, A. 2013. Generalized Euler-Seidel Method for Second Order Recurrence Relations, (preprint).

FÜRST, C. 2011. Combinatorial Sums: Egorychev's Method of Coefficients and Riordan Arrays. M.Sc. Thesis, Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University Linz, 94 p.

HAVIL, J. 2003. Gamma: Exploring Euler's Constant. Princeton University Press, New Jersey, 266 p.

HENNESSY, A. 2011. A Study of Riordan Arrays with Applications to Continued Fractions, Orthogonal Polynomials and Lattice Paths, Ph.D. Thesis (published), Waterford Institute of Technology, 242 p.

HORADAM, A.F. 1965. Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers, *Fibonacci Quart.*, 3(3): 161-176.

JORDAN, C. 1950. Calculus of Finite Differences. Chelsea Pub. Comp., New York, 652 p.

LANG, W. 2002. On polynomials related to derivatives of the generating function of Catalan numbers. *Fibonacci Quart.*, 40: 299–313.

LI, D. and SHANG, S. 2002. Several computing formulas for combinatorial sums. *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, 17: 119–124.

LUZÓN, A., MERLINI, D., MORÓN, M.A. and SPRUGNOLI, R. 2012. Identities induced by Riordan arrays. *Linear Algebra and its Applications*, 436: 631-647.

MERLINI, D., ROGERS, D.G., SPRUGNOLI, R. and VERRI, M.C. 1997. On some alternative characterizations of Riordan arrays. *Canadian J. Mathematics*, 49: 301-320.

MERLINI, D., SPRUGNOLI, R. and VERRI, M.C. 2005. The Akiyama-Tanigawa Transformation. *Integers, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 5, A05.

MERLINI, D. and SPRUGNOLI, R. 2002. A Riordan array proof of a curious identity. *Integers, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 2, A8.

MERLINI, D. and VERRI, M.C. 2000. Generating trees and proper Riordan arrays. *Discrete Mathematics*, 218: 167-183.

MEZÒ, I. and DİL, A. 2009 Euler- Seidel Method for Certain Combinatorial Numbers and a New Characterization of Fibonacci Sequence. *Cent. Eur. J. Math.*, 7 (2): 310-321.

MEZO, I. and DİL, A. 2010. Hyperharmonic series involving Hurwitz zeta function. *Journal of Number Theory*, 130 (2): 360-369.

RIORDAN, J. 1958. An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley&Sons Inc., New York, 244 p.

RIORDAN, J. 1979. Combinatorial Identities, Robert E. Krieger Pub. Comp., Inc. New York, 256 p.

SHAPIRO, L.W., GETU, S., WOAN, W.J. and WOODSON, L. 1991. The Riordan group. *Discrete Appl. Math.*, 34: 229-239.

SHAPIRO, L.W. 1994. A survey of the Riordan Group. Talk at a meeting of the American Mathematical Society, Richmond, Virginia.

SPRUGNOLI, R. 1994. Riordan arrays and combinatorial sums. *Discrete Math.*, 132: 267-290.

SPRUGNOLI, R. 2006. An Introduction to Mathematical Methods in Combinatorics. http://www.dsi.unifi.it/~resp/Handbook.pdf. (Son erişim tarihi: 20.05.2014)

SPRUGNOLI, R. 2007. Riordan array proofs of identities in Goulds book. http://www.dsi.unifi.it/~resp/GouldBK.pdf. (Son erişim tarihi: 20.05.2014)

ÖZGEÇMİŞ

Özlem KOYUNCUOĞLU, 1988 yılında Antalya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2007 yılında girdiği Atılım Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2012 yılında bölüm birinciliği ve fakülte üçüncülüğü derecesi ile mezun oldu. Eylül 2012'de Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı.