T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UZAY-ZAMAN SİMETRİLERİ İLE LİE VE NOETHER SİMETRİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Aydın YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

2014

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UZAY-ZAMAN SİMETRİLERİ İLE LİE VE NOETHER SİMETRİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Aydın YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

(Bu tez Bilimsel Araştırma Fonu tarafından 2013.01.115.003 nolu proje ile desteklenmiştir.)

2014

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UZAY-ZAMAN SİMETRİLERİ İLE LİE VE NOETHER SİMETRİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Aydın YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez ../../201.. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Uğur CAMCI (Danışman)

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Doç. Dr. Timur ŞAHİN

ÖZET

UZAY-ZAMAN SİMETRİLERİ İLE LİE VE NOETHER SİMETRİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Aydın YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Uğur CAMCI
Ocak 2014, 36 sayfa

Bu çalışmada ilk olarak genel görelilik teorisinde uzay-zaman simetrilerinin önemi hakkında bilgi verilmiş, daha sonra simetri sınıflamaları incelenecek olan pp-dalga uzay-zamanları ele alınmıştır. Uzay-zaman simetrilerinden, Noether ayar ve Lie nokta simetrilerinden bahsedilmiş ve bu simetrilerin hesaplanma metotları gereği birbirleriyle ilişkili olması gerektiği vurgulanmıştır. pp-dalga uzay-zaman sınıfları için model Lagrangian ve jeodezik denklemleri oluşturulmuş, bu Lagrangian ve jeodezik denklemleri kullanılarak Noether ayar ve Lie nokta simetrileri hesaplanmıştır. Tez kapsamında gerçekleştirilen hesaplamalar Noether ayar ve Lie nokta simetrilerinin ilişkili olduğunu göstermiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Genel görelilik teorisi, pp-dalga uzay-zamanları, Noether ayar simetrisi, Lie nokta simetrisi

JÜRİ: Prof. Dr. Uğur CAMCI (Danışman)
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Doç. Dr. Timur ŞAHİN

ABSTRACT

THE RELATIONS BETWEEN SPACE-TIME SYMMETRIES, NOETHER SYMMETRIES AND LIE SYMMETRIES

Aydın YILDIRIM

MSc Thesis in Physics
Supervisor: Prof. Dr. Uğur CAMCI
January 2014, 36 pages

In this study, it is provided information about importance of space-time symmetries in general theory of relativity first, and then some information about pp-waves space-time for which symmetry classes will be investigated is taken into account. Space-time symmetries, Noether gauge (NGS) and Lie point (LPS) symmetries are mentioned and it is emphasised that these symmetries due to computational techniques that are required should be associated with each other. Model Lagrangian and geodesic equations for pp-wave space-time classes are formed and these equations are used to compute Noether gauge and Lie point symmetries. Computations performed under this thesis, Noether gauge and Lie point symmetries are found to be related.

KEYWORDS: General theory of relativity, pp-waves space-time, space-time symmetries, Noether gauge symmetry, Lie point symmetry

COMMITTEE: Prof. Dr. Uğur CAMCI (Supervisor)
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Assoc. Prof. Dr. Timur ŞAHİN

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim boyunca ve bu tez çalışmasının her aşamasındaki desteği, yardımı ve sabrı için değerli danışman hocam Prof. Dr. Uğur CAMCI'ya teşekkürlerimi sunarım. Öğrenim hayatım boyunca beni yalnız bırakmayan aileme de teşekkürlerimi bir borç bilirim. Yine bu tez çalışmasında yanımda olup bana yardım eden tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

(.)	s veya τ' ya göre türev
(,)	Kısmi türev
$(')$	x değişkenine göre türev
(;) ve (|)	Kovaryant türev
D	Tam türev operatörü
ds	Yay uzunluğu
ds^2	Metrik
E^i	Jeodezik denklem bileşenleri
f	Ayar fonksiyonu
g_{ab}	Metrik tensör
H	Metrik fonksiyonu
$\boldsymbol{k}$	Sıfır (null) vektör alan
L	Lagrangian
$\mathcal{M}$	n-boyutlu manifold
R_{ab}	Ricci tensörü
$R^a{}_{bcd}$	Riemann eğrilik tensörü
T_{ab}	Enerji-momentum tensörü
U	Potansiyel
$\boldsymbol{X}$ veya $\boldsymbol{Y}$ veya $\boldsymbol{Z}$	Simetri doğurucuları
$£_{\boldsymbol{\eta}}$	$\boldsymbol{\eta}$ vektör alanı yönünde Lie türev operatörü
Γ^c_{ab}	Christoffel sembolü
Λ	Kozmolojik sabit

τ	Öz zaman
$\tau(u)$ veya $\delta(\theta)$	Metrik fonksiyonu bileşeni
ξ veya η^a	Simetri doğurucusu bileşeni

Kısaltmalar

AC	Affine Collineation (Affine kolinasyonu)
CKV	Conformal Killing Vector (Konformal Killing vektörü)
EFE	Einstein Field Equations (Einstein alan denklemleri)
GRT	General Relativity Theory (Genel görelilik teorisi)
HV	Homothetic vector (Homotetik vektör)
KV	Killing vector (Killing vektörü, izometri)
LPS	Lie point symmetry (Lie nokta simetrisi)
NGS	Noether gauge symmetry (Noether ayar simetrisi)
NS	Noether symmetry (Noether simetrisi)
ODE	Ordinar Differantial Equation (Adi türevli diferansiyel denklem)
PC	Projective Collineation (Projektij kollinasyon)
PDE	Partial Differantial Equation (Kısmi türevli diferansiyel denklem)
SCKV	Special Conformal Killing Vector (Özel konformal Killing vektörü)
SPC	Special Projective Collineation (Özel projektif kollinasyon)

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Günümüz fiziğinde kütle çekim teorileri arasında en başarılı model Einstein'ın Genel Görelilik (Relativite) Teorisi (GRT)'dir. Gerek kütle çekim teorileri, gerekse fizikteki diğer teoriler matematiksel bir modele ve dolayısıyla bu model kapsamında ortaya konulan diferansiyel denklem sistemlerine dayanır. Einstein'ın genel görelilik teorisindeki diferansiyel denklem sistemi bir Riemann manifoldu ile tanımlanabilen, uzay-zaman geometrisi taban alınarak oluşturulur. GRT'nin denklemleri,

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa_0 T_{ab} \tag{1.1}$$

şeklinde verilen Einstein Alan Denklemleridir (EFE). Burada R_{ab} Ricci tensörü, g_{ab} metrik tensör, Λ kozmolojik sabit, $\kappa_0 = \frac{8\pi G}{c^4}$ ve T_{ab} enerji-momentum tensörüdür. Genel görelilik teorisi veya herhangi bir fiziksel teori için oluşturulan matematiksel model fiziksel olarak yorumlanmadan önce, ele alınan modele ait diferansiyel denklem sistemi çözülmelidir.

GRT' de ortaya çıkan diferansiyel denklemler, ikinci mertebe kısmi veya adi türevli diferansiyel denklem sisteminden oluşurlar ve çözümleri oldukça zordur (Stephani vd. 2009). Bu denklemlerin çözümü ancak bazı kabuller yöntemlerle mümkün olabilir. Çözüm aranırken ele alınan uzaya-zamana ait metrik tensör üzerinde simetri kabulü yapmak bu yöntemlerden birisidir. Genel görelilik teorisinde kullanılan geometri Riemann geometrisidir. Riemann geometrisi, çalışılan diferansiyel geometriye g_{ab} metriğinin eklenmesi ve $g_{ab;c} = 0$ kabulünün yapılmasıyla elde edilir. Bu kabulde (;) kovaryant türevi göstermektedir. GRT' de, geometrinin yani uzay-zamanın içinde bulunduğu yapıya diferansiyellenebilir bir $\mathcal{M}$ uzay-zaman manifoldu adı verilmektedir. Manifold kavramı, yerel olarak düz Minkowski uzayı gibi alınabilen ve fakat global olarak çok farklı özellikteki bir yapıyı ifade eder. Bir n-boyutlu $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde metrik, $\boldsymbol{u} = u^a \boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{v} = v^b \boldsymbol{e}_b$ n-vektör alanlarının skaler çarpımında ortaya çıkan simetrik bilineer gönderim (mapping) ile aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u} = g(u, v) = g_{ab} u^a v^b \tag{1.2}$$

Bu gönderimdeki g_{ab} tensörü (0,2) tipinden simetrik kovaryant metrik tensördür ve

$$g_{ab} = g_{ba} = \boldsymbol{e}_a . \boldsymbol{e}_b \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanır. Sıfırdan farklı bir $\boldsymbol{u}$ n-vektörü için $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}$ skaler çarpımının sonucu pozitif ise $\boldsymbol{u}$ uzaysal (spacelike) n-vektör, negatif ise zamansal (timelike) n-vektör ve sıfır ise ışıksal (lightlike veya null) n-vektör adını alır. Eğrisel bir geometrik yapıda iki nokta arasındaki uzaklık (veya yay uzunluğu-ds) söz konusu olduğunda, g_{ab} metrik tensörü kullanılarak,

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \tag{1.4}$$

yazılır. Eğer ele alınan geometri sadece uzay koordinatlarını değil, ayrıca zaman koordinatlarını da içeriyorsa; iki nokta arasındaki uzaklık kavramı yerine, iki olay arasındaki uzaklık kavramından bahsedilebilir. Çalışılan uzay-zaman geometrisi metrik tensör ile tanımlanır. Dört-boyutlu uzay-zaman (üç uzay ve bir zaman) geometrisi için yazılabilecek en basit metrik, düz uzay-zamandaki

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.5}$$

Minkowski metriğidir. Bu tez çalışmasında; hem kartezyen hem de kutupsal (polar) koordinat sisteminde yazılacak olan pp-dalga uzay zamanı dikkate alınmış ve bu geometrideki uzay-zaman simetrileri ile Noether ve Lie simetrileri arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

1.1. Uzay-Zaman Simetrileri

GRT'nin alan denklemleri (EFE), lineer olmayan ve çiftlenmiş (coupled) bir diferansiyel denklem sistemi olup (Ryan ve Shepley 1975), bunların çözümlerini elde etmek için bazı çözüm teknikleri uygulanır. Bu tekniklerden en çok kullanılanı ve çözüm bulmada kolaylık sağlayanı simetri teknikleridir.

Simetrinin en iyi tanımlarından biri Weyl (1952) tarafından yapılmıştır.

"Bir nesne üzerine işlem uygulandığında, işlem sonunda elde edilen nesne ilk alınan ile aynı çıkarsa, bu nesne simetriktir denir. Yani ele alınan nesne, uygulanan işleme göre değişmezdir."

Böyle bir işleme örnek olarak "öteleme" verilebilir. Uzayın bir bölgesinde bir deney yapılsın. Daha sonra bu deney ve deneyi etkileyebilecek bütün şartlar uzayın başka bir bölgesine taşınarak tekrar yapılsın. İki deneyin sonucu da aynı ise bu deney uzayda öteleme işlemine göre simetriktir. Aynı deney, deneyin uzaydaki yeri değiştirilmeden başka bir zamanda yapılırsa ve aynı sonuç elde edilirse, deney zamanda öteleme işlemine göre simetriktir (Feynman 1970).

GRT' de kullanılan simetri, yerel akışa ait türevlenebilir dönüşüm (diffeomorphism) sonucunda uzay-zamanın bazı özelliklerini koruyan vektör alanlar ile ifade edilir. Bu vektör alanların (veya simetrilerin) korudukları özellikler ve bu özelliklere göre aldıkları isimler (Hall 2004);

a) Jeodeziği (geodesic) korurlar (Projektif Vektör Alanlar)
b) Jeodezik ve affine parametrelerini korurlar (Affine Vektör Alanlar)
c) Konformal parametrelere bağlı olarak metriği korurlar (Konformal Vektör Alanlar)
d) Sabit bir konformal faktöre bağlı olarak metriği korurlar (Homotetik Vektör Alanlar)
e) Metriği korurlar (Killing Vektör Alanlar)
f) veya uzay-zamana ait başka temel özellikleri korurlar, örneğin eğrilik tensörü

şeklinde sıralanmıştır. Örnek olarak Newton mekaniğinde kullanılan küresel simetri kavramını ele alalım. Küresel simetri tanımı, bir merkez ve bu merkez etrafında eşit uzaklıktaki herhangi bir noktada eşdeğer olma özelliği şeklinde tanımlanabilir. Genel görelilik teorisinde ise böyle doğrudan bir tanımlama yapılamaz çünkü merkez adı verilen bir yer bulunması mümkün olmayabilir; örneğin Schwarzschild geometrisinde durum böyledir. Buna karşılık genel görelilikte metriği koruyan simetri tanımlanmak istenirse, iki nokta arasındaki uzaklığı değiştirmeden bırakan ve metriği koordinatlardan bağımsız hale getiren bir dönüşüm (Killing Vektör Alanı) olarak tanımlanabilir (Islam 2001). Killing vektör alanları (veya izometriler), Riemann uzayında kollinasyon olarak adlandırılırlar. Riemann uzayında bir kollinasyon, $\boldsymbol{Y} = Y^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ vektör alan olmak üzere,

$$£_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{1.6}$$

eşitliği ile belirlenir. Bu denklemde $\boldsymbol{A}$, metrik ve metriğin türevleri ile tanımlanan geometrik bir nicelik iken, $\boldsymbol{B}$' de $\boldsymbol{A}$ ile aynı indise sahip bir tensördür. $£_{\boldsymbol{Y}}$ ise $\boldsymbol{Y} = Y^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ vektör alanı yönünde Lie türevini göstermektedir. Çizelge 1.1. de uzaya ait kollinasyonlar gösterilmiştir (Tsamparlis ve Paliathanasis 2011). Bu çizelgedeki $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ nesnelerinin, g_{ab} metrik tensör veya skaler çarpanlı metrik tensör olduğu durumlardaki kollinasyonlar, uzay-zaman simetrileri adını almaktadır.

Çizelge 1.1. Riemann uzayında kollinasyonlar

KOLLİNASYON	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	KISITLAMA
Killing Vektörü (KV)	g_{ab}	0	-
Homotetik Vektör (HV)	g_{ab}	ψg_{ab}	$\psi_{,a} = 0$
Özel Konformal Killing Vektör (SCKV)	g_{ab}	ψg_{ab}	$\psi_{;ab} = 0$
Konformal Killing Vektörü(CKV)	g_{ab}	ψg_{ab}	$\psi_{,a} \neq 0, \psi_{;ab} \neq 0$
Affine Kollinasyon (AC)	Γ^a_{bc}	0	-
Projektif Kollinasyon (PC)	Γ^a_{bc}	$2\phi_{(,b}\delta^a_{c)}$	$\phi_{,a} \neq 0$
Özel Projektif Kollinasyon (SPC)	Γ^a_{bc}	$2\phi_{(,b}\delta^a_{c)}$	$\phi_{,a} \neq 0, \phi_{,bc} = 0$

1.2. pp-Dalga Uzay-Zamanları

Bu tez çalışmasında kullanılan pp-dalga uzay-zamanları (açık yazılırsa, paralel ışınlı düzlem-önlü kütle çekimsel dalgalar -the plane fronted gravitational waves with parallel rays-) kovaryant olarak sabit bir ışıksal (null) vektör alanın,

$$\boldsymbol{k}_{a;b} = 0 \tag{1.7}$$

$$R^a{}_{bcd}R^b{}_{aef} = 0 \tag{1.8}$$

şartlarını sağladığı uzay-zamanlardır (Sippel ve Goenner 1986). Burada $R^a{}_{bcd}$ Riemann eğrilik tensörüdür. Bu şartlar altında pp-dalga uzay-zamanları için en genel haliyle metrik, $x^a = (u, v, x^i)$, $i = 2{,}3$ ve $a = 0{,}1{,}2{,}3$ olmak üzere,

$$ds^2 = -2dudv - 2H(u, x^i)du^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j \tag{1.9}$$

ile verilir. pp-dalga uzay zamanları ilk kez Brinkmann (1925) tarafından keşfedilmiş ve incelenmiştir. pp-dalga uzay-zamanları üzerine daha sonra Jordan ve ark. (1960), Takeno (1961), Ehlers ve Kundt (1962), Sippel ve Goenner (1986), Maartens ve Maharaj (1991), Podolsky ve Vesely (1998) ve Keane ve Tupper (2004) tarafından pek çok araştırma yapılmıştır. Özellikle Sippel ve Goenner (1986) tarafından yapılan pp-dalga uzay zamanlarının izometri (Killing vektör alanları) sınıfları ile Keane ve Tupper (2004) tarafından yapılan konformal Killing vektör alanlarının sınıflamaları bu çalışmada temel alınmıştır.

Bu çalışmada kullanılacak olan pp-dalga metrikleri kartezyen ve kutupsal koordinatlarda seçilmiş olup sırasıyla,

$$ds^2 = -2dudv - 2H(u,y,z)du^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.10a}$$

$$ds^2 = -2dudv - 2H(u,r,\theta)du^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{1.10b}$$

ile verilmektedir. Çalışmanın üçüncü bölümünde Keane ve Tupper'ın (2004) konformal simetri sınıfları kullanılarak (1.10a) ve (1.10b) metrikleri için Noether ve Lie nokta simetrileri hesaplanmış ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Çalışmanın sonunda beklenenler ise Lie nokta simetrilerinin hesaplanma metodu gereği, Noether simetrilerinin tamamının Lie nokta simetrisi olması ve Noether simetrisi olmayan Lie nokta simetrilerinin bulunmasıdır. Ayrıca bu metrikler için ışıksal KV alan $\boldsymbol{k} = \partial_v$ olup bütün sınıflarda ortaya çıkmalıdır. Bunlarla birlikte diğer uzay-zaman simetrileri ile Noether ve Lie nokta simetrileri arasındaki ilişki de araştırılmıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde Noether ayar (gauge) simetrileri (NGS) ile Lie nokta (point) simetrileri (LPS) için detaylı bir açıklama yapılmış ve (2+1)-boyutlu bir metrik için bu simetrilerin nasıl bulunabileceği örnek olarak gösterilmiştir. Üçüncü bölümde; pp-dalga uzay-zamanları için NGS ve LPS vektör alanları hesaplanmıştır. Bu bölümde Sippel ve Goenner (1986) ile Keane ve Tupper (2004) tarafından yapılan pp-dalga metriği için uzay-zaman simetri sınıflamaları dikkate alınarak, aynı uzay-zaman için hem NGS hem de LPS sınıflamaları yapılmıştır.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Materyal

2.1.1 Noether Ayar Simetrileri ve Lie Nokta Simetrileri

Noether teoremi, her diferansiyellenebilir simetrinin fizikte bir korunan büyüklüğe karşılık geldiğini ifade etmektedir. Noether teoremi Alman matematikçi Emmy Noether tarafından 1918'de ispatlanmıştır (Noether 1918). Noether simetrileri Lagrangian'a ait simetrilerdir. Örneğin fiziksel bir sistemin Lagrangian'ı rotasyonel simetriye sahipse, bu simetri açısal momentumun korunumuna karşılık gelmektedir. Noether simetrileri (NS) ile ilgili yapılan çalışmalar arasında Capozziello ve Lambiase (2000a, 2000b), Sanyal vd. (2005), de Souza ve Kremer (2008), Capozziello vd. (2009), Jamil vd. (2011) çalışmaları bulunmaktadır. Noether ayar simetrileri (NGS) ise Noether simetri denklemine bir ayar teriminin eklenmesiyle elde edilir ve NS'nin genelleştirilmiş şeklidir. NGS ile ilgili, Jamil vd. (2011), Hussain (2012), Kucukakca ve Camci (2012), Sk ve Sanyal (2012), Jamil vd. (2012), Aslam vd. (2013) çalışmaları mevcuttur.

Bir sistemin Lie nokta simetrileri (LPS) diferansiyel denklem sisteminin her çözümünü aynı sistemin diğer bir çözümüne taşıyan yerel dönüşüm grubu oluşturur (Olver 1986). Lie simetrileri diferansiyel denklemlere ait simetrilerdir ve NGS'lerden daha geneldir. Bu durumda aynı fiziksel sistem için LPS hesaplandığında NGS'lerden daha fazla simetri bulunması beklenmektedir. Lie nokta simetrileri ile yapılan çalışmalar arasında Olver (1986), Stephani (1989), Blumen ve Kumei (1989), Kweyema vd. (2011), Tsamparlis ve Paliathanasis (2010a), Tsamparlis ve Paliathanasis (2010b), Tsamparlis ve Paliathanasis (2011), Tsamparlis (2013) bulunmaktadır.

2.1.2. Noether ayar simetrileri

Klasik fizikte herhangi bir evren çizgisi üzerinde ve iki nokta arasında hareket eden bir parçacığın hareket denklemi, parçacığın Lagrangian'ı ile tanımlanabilir. Bu parçacık için tanımlanan Lagrangian; s, yay parametresi olmak üzere, koordinatlar ve koordinatların s' ye göre türevlerinin bir fonksiyonudur (Gron ve Hervik 2007);

$$L = L(x^a, \dot{x}^a) \tag{2.1}$$

Burada $\dot{x}^a = \frac{dx^a}{ds}$'tir. Bu parçacığa ait Lagrangian'ın varyasyonunun alınmasıyla,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \tag{2.2}$$

Euler-Lagrange hareket denklemleri elde edilir. Klasik fizikte serbest parçacık için Lagrange fonksiyonu parçacığın kinetik enerjisine eşittir. Göreli fizikte ise aynı Lagrange fonksiyonu, parçacığın 4-hızının karesine (yani kinetik enerjisine) ve potansiyel enerjisine bağlı skaler bir fonksiyondur. Bu durumda kütleli bir parçacık için göreli fizikteki Lagrangian,

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}_a\dot{x}^b - U(x^a) = \frac{1}{2}g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b - U(x^a) \tag{2.3}$$

şeklinde verilir. (2.3) denklemindeki $\dot{x}_a$ 4-hız, U potansiyel ve g_{ab} metrik tensördür. Göreli fizik için τ öz zamanı göstermek üzere $\dot{x}^a = \frac{dx^a}{d\tau}$ 4-lü hız ifadesidir. (2.3) ile verilen Lagrangian'ın g_{ab}'ye göre varyasyonu alındığında Euler-Lagrange hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$g_{cb}\ddot{x}^b + \frac{1}{2}\left(g_{ca,b} + g_{cb,a} - g_{ab,c}\right)\dot{x}^a\dot{x}^b = 0 \tag{2.4}$$

Burada $\ddot{x}^c = g^{cd}g_{db}\ddot{x}^b$ ve $\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}\left(g_{da,b} + g_{db,a} - g_{ab,d}\right)$ eşitliklerinden yararlanılırsa, (2.4) Euler-Lagrange hareket denklemleri veya parçacığın jeodezik denklemleri

$$\ddot{x}^c + \Gamma^c_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = 0 \tag{2.5}$$

şeklini alır. Buradaki Γ^c_{ab} sembolüne, Christoffel sembolü denir ve Christoffel sembolleri (veya bağlantı katsayıları), bir $\mathcal{M}$ manifolduna ait farklı noktalardaki bazlar arasında bağlantı kurmak için kullanılır (Stephani vd. 2009). Lagrange fonksiyonu Noether ayar simetrilerinin hesabında ve Euler-Lagrange hareket denklemleri ise Lie nokta simetrileri hesaplanırken kullanılır. NGS denklemleri

$$\boldsymbol{X}^{[1]}L + L(D\xi) = Df \tag{2.6}$$

eşitliği ile verilir (Ibragimov 1993). Burada L, Lagrange fonksiyonu ve f ayar (gauge) fonksiyonudur. D, s eğrilik parametresine göre tam türev operatörü olup,

$$D = \frac{\partial}{\partial s} + \dot{x}^a\frac{\partial}{\partial x^a} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlıdır. $\boldsymbol{X}^{[1]}$, simetri doğurucusunun birinci mertebe genişletmesi (extension, prolongation) olup $\boldsymbol{X} = \xi(s, x^b)\frac{\partial}{\partial s} + \eta^a(s, x^b)\frac{\partial}{\partial x^a}$ ve $\eta^a_s \equiv D\eta^a - \dot{x}^a D\xi$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{X}^{[1]} = \boldsymbol{X} + \eta^a_s\frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} \tag{2.8}$$

eşitliği ile verilir. NGS denklemlerinin başka bir ifadesi,

$$\begin{aligned}
&\xi_{,a} = 0 \\
&g_{ab}\eta^b_{,s} = f_{,a} \\
&£_\eta g_{ab} = \xi_{,s}g_{ab} \Leftrightarrow g_{ab,c}\eta^c + g_{ac}\eta^c_{,b} + g_{cb}\eta^c_{,a} = \xi_{,s}g_{ab} \\
&£_\eta U = -\xi_{,s}U - f_{,s} \Leftrightarrow U_{,a}\eta^a = -\xi_s U - f_{,s}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

denklemleridir (Tsamparlis ve Paliathanasis 2011). Burada $£_{\boldsymbol{\eta}}$, $\boldsymbol{\eta}$ yönündeki Lie türev operatörüdür. (2.6) bağıntısı ile verilen ilk NGS denklemlerindeki $\boldsymbol{X}$ vektör alanı, bu çalışmada hem Noether ayar simetri denklemleri hem de Lie nokta simetri denklemleri hesaplanırken kullanılacaktır. (2.9) denklemleri, uzay-zaman simetrileri ile Noether ayar simetrileri arasındaki ilişkiyi açık bir şekilde vermektedir.

Diferansiyel denklemlerin çözümleri aranırken sıklıkla başvurulan metot, diferansiyel denklemi basitleştirecek bir değişken dönüşümünün yapılmasıdır. Bu değişken dönüşümü yapılırken x^a'lar bağımsız değişkenler olmak üzere $\tilde{x}^a = \tilde{x}^a(x^a)$ şeklinde bir dönüşüm aranır. Bu dönüşüme x^a noktalarını, $\tilde{x}^a$ noktalarına dönüştüren nokta dönüşüm adı verilir. Simetri hesabı söz konusu olduğunda ise bu nokta dönüşüm,

$$\tilde{x}^a = \tilde{x}^a(x^a; \varepsilon) \tag{2.10}$$

denkleminde olduğu gibi en az bir keyfi parametreye (ε) bağlı olmalıdır (Stephani 1989), (Ibragımov 1993). Bununla birlikte bir parametreli nokta dönüşümünün sağlanabilmesi için dönüşümler tersinir olmalı ve dönüşüm tekrar uygulandığında yine aynı aileden sonuçlar vermelidir. İşte bu dönüşümlerin oluşturduğu eğri ailelerinin teğet vektörleri, $\boldsymbol{X}$ vektör alanını veya diğer adıyla simetri doğurucusunu (veya simetri üreticisi) oluştururlar. (2.10) denklemi $\varepsilon = 0$ civarında Taylor serisine açılırsa,

$$\tilde{x}^a \approx x^a + \varepsilon\zeta^a(x^b) \tag{2.11}$$

şeklinde yazılabilir (Ibragımov 1993). Burada $\zeta^a(x^b)$,

$$\zeta^a(x^b) = \frac{\partial \tilde{x}^a(x^b;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}, \tag{2.12}$$

denklemi ile verilir. $\zeta^a(x^a)$, $\boldsymbol{X}$ vektör alanının bileşenleridir. Bir parametreli nokta dönüşüm için parametre olarak s yay uzunluğu alındığında $\boldsymbol{X}$ vektör alanı bileşenleri,

$$\boldsymbol{X} = \xi(s, x^b)\frac{\partial}{\partial s} + \eta^a(s, x^b)\frac{\partial}{\partial x^a} \tag{2.13}$$

şeklinde yazılabilir. Simetri hesabı yapılırken $\boldsymbol{X}$ vektör alanının genişletmesi kullanılır. $\boldsymbol{X}$ vektör alanının veya doğurucusunun k. mertebeden genişletmesi,

$$\boldsymbol{X}^{[k]} = \boldsymbol{X} + \eta_s^a \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} + \cdots + \eta_{(k)}^a \frac{\partial}{\partial x^{(a)}} \tag{2.14}$$

denklemi ile verilir. $\boldsymbol{X}^{[k]}$ doğurucusundaki η_s^a ve $\eta_{(k)}^a$ nicelikleri,

$$\begin{aligned} \eta_s^a &= D\eta^a - \dot{x}^a D\xi, \\ \eta_{ss}^a &= D\eta_s^a - \ddot{x}^a D\xi \\ &. \\ &. \\ &. \\ \eta_{(k)s}^a &= D\eta_{(k-1)s}^a - x_{(k)}^a D\xi, \quad k \geq 2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

denklemleri ile hesaplanır. Burada (k), s parametresine göre k'ıncı türevi göstermektedir. $\boldsymbol{X}$ ile gösterilen Noether ayar simetrileri hesaplanırken (2.8) denkleminde verildiği gibi simetri doğurucusunun birinci mertebe genişletmesi kullanılır.

Eğer $\boldsymbol{X}$ bir L Lagrangian'ından elde edilen Noether ayar simetrisi ise

$$I = \xi L + (\eta^a - \xi \dot{x}^a)\frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} - f \tag{2.16}$$

eşitliği, $\boldsymbol{X}$ ile ilişkili ilk integral veya bir korunumlu nicelik vermektedir. Noether ayar simetrilerinin hesaplanması bir örnek ile sonraki bölümde gösterilecektir.

2.1.3. Lie nokta simetrileri

Öklidyen bir uzaydaki iki noktayı birbirine bağlayan en kısa eğri bir doğrudur. Eğri bir uzay ele alındığında ise bu noktaları bağlayan en kısa yol için bir doğrudan bahsedilemez. Eğri bir uzay söz konusu olduğunda bu noktaları birbirine bağlayan en uzun ve en kısa eğrilere jeodezik eğrileri denir. Eğri uzaylar için genel olarak jeodezik eğrileri; teğet vektörleri paralel taşıma ile dönüştüren, iki nokta arasındaki olası en kısa eğrilerdir. Bir eğriye ait teğet vektör $\boldsymbol{u} = u^a \boldsymbol{e}_a$ ile verilir. Jeodezik eğrilerinin teğet vektörleri tanım gereği paralel taşıma ile bağlıdırlar ve bu durum

$$E^a \equiv u^a_{;b} u^b = 0 \tag{2.17}$$

jeodezik denklemi ile gösterilebilir (Gron ve Hervik 2007). (2.17) eşitliği, (2.5) jeodezik denkleminin gösterimidir. Jeodezik denklemleri uzay-zaman metriğinden elde edilirler ve bu metriğin bazı simetrilerini miras alırlar. Lie nokta simetriler hesaplanırken simetri doğurucusunun ikinci mertebe genişletilmiş şekli kullanılır. Lie nokta simetri denklemleri

$$\boldsymbol{X}^{[2]} E^a|_{E^a=0} = 0 \tag{2.18}$$

şeklinde olup, elde edilen diferansiyel denklemlerin sistem halinde çözülmesiyle $\boldsymbol{X}$ vektör alanı bileşenleri bulunur. Örneğin; x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olan durumda $\boldsymbol{X}^{[2]}$, simetri doğurucusunun ikinci mertebe genişletmesi,

$$\boldsymbol{X}^{[2]} = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x^a} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta_s(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'} + \eta_{ss}(x,y,y',y'')\frac{\partial}{\partial y''} \tag{2.19}$$

eşitliği ile verilir. Buradaki η_s ve η_{ss},

$$\eta_s = \eta_{,x} + (\eta_{,y} - \xi_{,x})y' - \xi_{,y}y'^2 \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\eta_{ss} = \eta_{,xx} &+ (2\eta_{,xy} - \xi_{,xx})y' + (\eta_{,yy} - 2\xi_{,xy})y'^2 - \xi_{,yy}y'^3 \\ &+ (\eta_{,y} - 2\xi_{,x} - 3\xi_{,y}y')y''\end{aligned} \tag{2.21}$$

Şeklinde tanımlıdır (Stephani 1989). (2.18) LPS denkleminde dikkat edilmesi gereken durum, simetri operatörü jeodezik denklemine uygulandıktan sonra $E^a = 0$ alınmasıdır. Lie nokta simetrisinin hesaplanması bir örnekle gelecek bölümde gösterilecektir. (2.18) ile verilen Lie nokta simetri denklemleri, aynı zamanda

$$\eta^a_{,ss} = 0 \tag{2.22}$$

$$2\eta^a_{,s|b} - \xi_{,ss}\delta^a_c = 0 \tag{2.23}$$

$$£_{\boldsymbol{\eta}}\Gamma^a_{(bc)} - 2\xi_{,s(b}\delta^a_{c)} = 0 \tag{2.24}$$

$$\Gamma^a_{bc,d}\eta^d + \Gamma^a_{dc}\eta^d_{,b} + \Gamma^a_{bd}\eta^d_{,c} - \Gamma^d_{bc}\eta^a_{,d}$$

$$\xi_{(,b|c}\delta^a_{d)} = 0 \tag{2.25}$$

olarak ifade edilebilirler (Tsamparlis ve Paliathanasis 2011). Burada (2.24) eşitliğinde $£_{\boldsymbol{\eta}}\Gamma^a_{(bc)} = \Gamma^a_{bc,d}\eta^d + \Gamma^a_{dc}\eta^d_{,b} + \Gamma^a_{bd}\eta^d_{,c} - \Gamma^d_{bc}\eta^a_{,d}$, $\Gamma^a_{(bc)}$'nın $\boldsymbol{\eta}$ boyunca Lie türevi ve $\eta^a_{,s|b} = \eta^a_{,sb} + \eta^c_{,s}\Gamma^a_{(cb)}$, $\eta^a_{,s}$'nın $\Gamma^a_{(cb)}$'ye göre kovaryant türevidir (Tsamparlis ve Paliathanasis 2010a). Bu denklemler; Çizelge 1.1 dikkate alındığında, Lie nokta simetrileri ile uzay-zaman simetrileri arasındaki ilişkiyi vermektedir.

2.2. Metot

2.2.1. (2+1)-Boyutlu pp-dalga metriği için Noether ayar simetrileri

Verilen bir uzay-zamana ait Noether ayar simetri denklemleri, (2.6) veya (2.9) denklemleri kullanılarak oluşturulur ve oluşan denklem sisteminin çözümünden NGS vektör bileşenleri bulunmaya çalışılır. Bu işlemleri anlatmak için düşük boyutlu yani (2+1)-boyutlu pp-dalga metriği kullanılacaktır. Noether ayar simetrileri hesaplanırken kullanılacak olan (2+1)-boyutlu pp-dalga metriği, bu tezde ele alınan pp-dalga uzay-zamanının özel bir durumudur ve

$$ds^2 = -2H(x)du^2 - 2dudv + dx^2 \tag{2.26}$$

denklemi ile verilir. (2.26) metriğine ait jeodezik Lagrangian'ı, (2.3) denklemi ile

$$L = \frac{1}{2}g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b - U(x^a) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - H(x)\dot{u}^2 - \dot{u}\dot{v} - U(x,u,v) \tag{2.27}$$

şeklinde hesaplanır. Bu Lagrangian (2.6) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki on üç tane kısmi türevli diferansiyel denklem (PDE) elde edilir:

$$\eta^1_{,s} - f_{,x} = 0,$$

$$2\eta^1_{,x} - \xi_{,s} = 0,$$

$$\eta^1_{,u} - 2H\eta^2_{,x} - \eta^3_{,x} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\xi_{,x} = 0,\\
&\xi_{,u} = 0,\\
&\xi_{,v} = 0,\\
&\eta^1_{,v} - \eta^2_{,x} = 0,\\
&2H\eta^2_{,x} + \eta^3_{,s} - f_{,u} = 0,\\
&2H\eta^2_{,u} - H\xi_{,s} + \eta^3_{,u} + H'\eta^1 = 0,\\
&2H\eta^2_{,v} + \eta^2_{,u} + \eta^3_{,v} - \xi_{,s} = 0,\\
&\eta^2_{,s} + f_{,v} = 0,\\
&\eta^2_{,v} = 0,\\
&f_{,s} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Bu on üç PDE'nin sistem halinde çözülmesiyle NGS bileşenleri $\xi, \eta^1, \eta^2, \eta^3$ ve f elde edilir. Örnek olarak; $H(x) = \alpha x^n$ ve $U(x,u,v) = 0$ seçilirse PDE'lerin çözümünden elde edilen Noether ayar simetri bileşenleri ve f ayar fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
&\xi = sc_1 + c_2,\ \eta^1 = \tfrac{1}{2}xc_1, \eta^2 = -sc_4 - \tfrac{1}{4}(n-2)uc_1 + c_6\\
&\eta^3 = sc_3 + \tfrac{1}{4}(n+2)vc_1 + c_7,\ f = uc_3 + vc_4 + c_5,
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

bulunur. Burada $c_1, \dots, c_7$ sabit parametrelerdir. Böylece NGS vektör alanları

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{k} = \partial_v,\ \boldsymbol{X}_1 = \partial_u,\ \boldsymbol{Y}_1 = \partial_s,\\
&\boldsymbol{Y}_2 = s\partial_v, \text{ ayar terimi } f = u,\\
&\boldsymbol{Y}_3 = -s\partial_u, \text{ ayar terimi } f = v,
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

ve $\boldsymbol{Z} = x\partial_x - \frac{1}{2}(n-2)u\partial_u + \frac{1}{2}(n+2)v\partial_v$ olmak üzere $\boldsymbol{Y}_4 = 2s\partial_s + \boldsymbol{Z}$ şeklini alır.

2.2.2. (2+1)-Boyutlu pp-dalga metriği için Lie nokta simetrisi denklemleri

Örnek Lie nokta simetrileri hesaplanırken yine (2.26) metriği kullanılacaktır. (2.3) denkleminden hesaplanan Lagrangian, (2.27) denklemi ile verilir. Varyasyon hesabı ile (2.27) Lagrangian'ına ait jeodezik denklemleri hesaplanırsa,

$$
E^1: \ddot{x} + H'\dot{u}^2 + U_{,x} = 0 \tag{2.31}
$$

$$E^2 : \ddot{u} - U_{,v} = 0 \tag{2.32}$$

$$E^3 : \ddot{v} + 2H'\dot{x}\dot{u} + 2HU_{,v} - U_{,u} = 0 \tag{2.33}$$

bulunur. Jeodezik denklemleri elde edildikten sonra (2.18) ile verilen Lie nokta simetri denklemi kullanılır ve

$$\eta^1_{,ss} + \dot{u}^2[H''\eta^1] + U_{,xx}\eta^1 + U_{,xu}\eta^2 + U_{,xv}\eta^3 + \dot{u}\left[2H'\eta^2_{,s}\right] = 0 \tag{2.34}$$

$$\eta^2_{,ss} - U_{,xv}\eta^1 - U_{,uv}\eta^2 - U_{,vv}\eta^3 = 0 \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}&\eta^3_{,ss} + \dot{x}\dot{u}[2H''\eta^1] + \dot{u}\left[2H'\eta^1_{,s}\right] + \dot{x}\left[2H'\eta^2_{,s}\right] + 2H'U_{,v}\eta^1 + 2HU_{,xv}\eta^1\\&+2HU_{,uv}\eta^2 + 2HU_{,vv}\eta^3 - U_{,xu}\eta^1 - U_{,uu}\eta^2 - U_{,uv}\eta^3 = 0\end{aligned} \tag{2.36}$$

denklemleri elde edilir. Daha sonra (2.20) ve (2.21) denklemlerinden elde ettiğimiz sonuçlara benzer şekilde (2.15) bağıntılarından $\eta^1_{,s}$, $\eta^2_{,s}$, $\eta^3_{,s}$, $\eta^1_{,ss}$, $\eta^2_{,ss}$ ve $\eta^3_{,ss}$ hesaplanıp (2.34)-(2.36) denklemlerinde yerlerine konulur. Denklemler yeniden düzenlendikten sonra; (2+1)-boyutlu pp-dalga uzay-zamanına ait (2.26) metriği için otuz altı tane PDE elde edilir:

$$\begin{aligned}
&2\eta^1_{,sx} - \xi_{,ss} + 3U_{,x}\xi_{,x} - U_{,v}\xi_{,u} - U_{,u}\xi_{,v} + 2HU_{,v}\xi_{,v} = 0,\\
&\eta^1_{,su} + U_{,x}\xi_{,u} + H'\eta^2_{,s} = 0,\\
&\eta^1_{,sv} + U_{,x}\xi_{,v} = 0, \qquad \eta^1_{,xx} - 2\xi_{,sx} = 0,\\
&\eta^1_{,xu} - \xi_{,su} - H'\eta^1_{,v} + H'\eta^2_{,x} = 0, \qquad \eta^1_{xv} - \xi_{sv} = 0,\\
&\eta^1_{,uu} - H'\eta^1_{,x} + H''\eta^1 + 2H'\eta^2_{,u} = 0, \qquad \xi_{,xx} = 0,\\
&H'\xi_{,v} - \xi_{,xu} = 0, \qquad \xi_{,xv} = 0, \qquad H'\xi_{,x} - \xi_{,uu} = 0,\\
&\eta^1_{,uv} + H'\eta^2_{,v} = 0, \qquad \eta^1_{,vv} = 0, \qquad \xi_{,uv} = 0, \qquad \xi_{,vv} = 0,\\
&\eta^1_{,ss} - U_{,x}\eta^1_{,x} + 2U_{,x}\xi_{,s} + U_{,v}\eta^1_{,u} - 2HU_{,v}\eta^1_{,v} + U_{,u}\eta^1_{,v} + U_{,xx}\eta^1 + U_{,xu}\eta^2\\
&+U_{,xv}\eta^3 = 0, \qquad \eta^2_{,sx} - U_{,v}\xi_{x} = 0,\\
&2\eta^2_{,su} - \xi_{,ss} - 3U_{,v}\xi_{,u} + U_{,x}\xi_{,x} + 2HU_{,v}\xi_{,v} - U_{,u}\xi_{,v} = 0,\\
&\eta^2_{,sv} - U_{,v}\xi_{v} = 0, \qquad \eta^2_{,ux} - \xi_{,sx} - H'\eta^2_{,v} = 0,\\
&\eta^2_{,uu} - 2\xi_{,su} - H'\eta^2_{,x} = 0, \qquad \eta^2_{,uv} - \xi_{sv} = 0, \qquad \eta^2_{,xx} = 0,\\
&\eta^2_{,xv} = 0, \qquad \eta^2_{,vv} = 0, \qquad \eta^3_{,vv} - 2\xi_{sv} = 0,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\eta^2_{,ss} + U_{,v}\eta^2_{,u} - 2U_{,v}\xi_{,s} - U_{,x}\eta^2_{,x} - 2HU_{,v}\eta^2_{,v} + U_{,u}\eta^2_{,v} - U_{,xv}\eta^1 + U_{,uv}\eta^2$$

$$+U_{,vv}\eta^3 = 0,$$

$$\eta^3_{,sx} + 2HU_{,v}\xi_{,x} + U_{,u}\xi_{,x} + H'\eta^2_{,s} = 0,$$

$$\eta^3_{,su} + 2HU_{,v}\xi_{,u} - U_{,u}\xi_{,u} + H'\eta^1_{,s} = 0,$$

$$2\eta^3_{,sv} - \xi_{,ss} + 6HU_{,v}\xi_{,v} - 3U_{,u}\xi_{,v} + U_{,x}\xi_{,x} - U_{,v}\xi_{,u} = 0,$$

$$\eta^3_{,xv} - \xi_{,sx} + H'\eta^2_{,v} = 0, \qquad \eta^3_{,uv} - \xi_{,su} + H'\eta^1_{,v} = 0,$$

$$\eta^3_{,ux} - H'\eta^3_{,v} + H''\eta^1 + H'\eta^1_{,x} + H'\eta^2_{,u} = 0,$$

$$\eta^3_{,xx} + 2H'\eta^2_{,x} = 0, \quad \eta^3_{,uu} + H'\eta^3_{,x} + 2H'\eta^1_{,u} = 0,$$

$$\eta^3_{ss} - 2HU_v\eta^3_v + U_u\eta^3_v + 4HU_v\xi_s - 2U_u\xi_s + U_x\eta^3_x + U_v\eta^3_u + 2H'U_v\eta^1$$

$$+2HU_{vx}\eta^1 + 2HU_{vu}\eta^2 + 2HU_{vv}\eta^3 - U_{xu}\eta^1 - U_{uu}\eta^2 - U_{uv}\eta^3 = 0.$$

Bu aşamada Lie nokta simetrilerini hesaplamak için yapılması gereken PDE'lerin çözülmesidir. (2.37) ile verilen PDE'lerden $\xi, \eta^1, \eta^2\ ve\ \eta^3$ bulunmak istenmektedir. Bu nedenle; H(x) metrik katsayısı ve U(x,u,v) potansiyeli verildiğinde, dört bilinmeyenli otuz altı denklemden overdetermined PDE sistemi çözülecektir. Aşağıda $H(x) = \alpha x^n\ ve\ U(x,u,v) = 0$ için PDE'lerin çözümünden elde edilen $\xi, \eta^1, \eta^2\ ve\ \eta^3$ ile Lie nokta simetri bileşenleri verilmiştir.

$$\xi = uc_3 + sc_4 + c_5, \;\; \eta^1 = -\frac{2c_1 x}{n-2}, \;\; \eta^2 = uc_1 + c_2, \qquad (2.38)$$

$$\eta^3 = -\frac{c_1(n+2)v}{n-2} + uc_6 + sc_7 + c_8$$

$$\boldsymbol{k} = \partial_v, \boldsymbol{X}_1 = \partial_u, \boldsymbol{X}_2 = u\partial_v, \boldsymbol{X}_3 = -\frac{2x}{n-2}\partial_x + u\partial_u - \frac{(n+2)v}{n-2}\partial_v, \qquad (2.39)$$

$$\boldsymbol{Y}_1 = \partial_s, \boldsymbol{Y}_2 = s\partial_v, \boldsymbol{Y}_3 = u\partial_s, \boldsymbol{Y}_4 = s\partial_s.$$

NGS denklemleri ile LPS denklemleri hakkında verilen bilgiler doğrultusunda örnek olarak seçilen (2+1)-boyutlu pp-dalga metriği için hesaplama metodu gösterilmiştir. Bu tez çalışmasının asıl konusu olan 4-boyutlu pp-dalga uzay-zamanlarına ait NGS ve LPS vektör alanlarının hesaplanması, aralarındaki ilişkilerin incelenmesi ve uzay-zaman simetrileri ile bağlantılarının araştırılması bulgular kısmında yapılacaktır.

3. BULGULAR

(1.10a) ve (1.10b) ile verilen, dört boyutta pp-dalga uzay-zamanına ait metriklerden yola çıkılarak Keane ve Tupper'ın (2004) çalışmasındaki $H(u,y,z)$ ve $H(u,r,\theta)$ metrik fonksiyonları için Noether simetrileri ile Lie nokta simetrileri hesaplanmıştır. Bu uzay-zamana ait Noether simetrileri 3.1 bölümünde verilirken, 3.2 bölümünde Lie nokta simetrileri ele alınmıştır.

3.1. Noether Ayar Simetrileri

NGS bölümü iki alt bölüm ile incelenmiştir. Birinci alt bölüm ile H metrik fonksiyonunun daha genel durumları araştırılırken, ikinci alt durum ile metrik fonksiyonunun özel bir durumu için oluşan düzlem dalga sınıfları araştırılmıştır. Metrik fonksiyonun bu özel durumu ikinci alt bölümde açık olarak verilmiştir.

3.1.1. pp-dalga uzay-zamanı için Noether ayar simetrileri

Denklem (2.3) kullanılarak hesaplanan kartezyen koordinatlardaki pp-dalga metriğine ait jeodezik Lagrangian,

$$L = -H(u,y,z)\dot{u}^2 - \dot{u}\dot{v} + \tfrac{1}{2}\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2}\dot{z}^2 - U(u,v,y,z) \tag{3.1}$$

ve kutupsal koordinatlardaki pp-dalga metriğine ait jeodezik Lagrangian,

$$L = -H(u,r,\theta)\dot{u}^2 - \dot{u}\dot{v} + \tfrac{1}{2}\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 - U(u,v,r,\theta) \tag{3.2}$$

şeklinde bulunmuştur. (2.6) NGS denklemi kullanılırsa yukarıdaki her bir Lagrangian için on dokuz tane denklem elde edilir. Kartezyen koordinatlardaki NGS denklemleri;

$$\xi_{,u} = 0, \qquad \xi_{,v} = 0, \qquad \xi_{,y} = 0, \qquad \xi_{,z} = 0, \tag{3.3a}$$

$$\eta^1_{,v} = 0, \qquad \eta^1_{,y} - \eta^3_{,v} = 0, \qquad \eta^1_{,z} - \eta^4_{,v} = 0, \tag{3.3b}$$

$$\eta^3_{,z} - \eta^4_{,y} = 0, \qquad 2\eta^3_{,y} - \xi_{,s} = 0, \qquad 2\eta^4_{,z} - \xi_{,s} = 0, \tag{3.3c}$$

$$2H\eta^1_{,z} + \eta^2_{,z} - \eta^4_{,u} = 0, \qquad 2H\eta^1_{,y} + \eta^2_{,y} - \eta^3_{,u} = 0, \tag{3.3d}$$

$$2H\eta^1_{,v} + \eta^2_{,v} + \eta^1_{,u} + \xi_{,s} = 0, \qquad \eta^1_{,s} + f_{,v} = 0, \tag{3.3e}$$

$$\eta^3_{,s} - f_{,y} = 0, \qquad \eta^4_{,s} - f_{,z} = 0, \qquad 2H\eta^1_{,s} + \eta^2_{,s} + f_{,u} = 0 \tag{3.3f}$$

$$\eta^2_u + 2H\eta^1_u + H_u\eta^1 + H_y\eta^3 + H_z\eta^4 - H\xi_s = 0, \tag{3.4}$$

$$U_u\eta^1 + U_v\eta^2 + U_y\eta^3 + U_z\eta^4 + U\xi_s + f_s = 0, \tag{3.5}$$

denklem sistemiyle verilmiştir. Bu denklem sistemindeki (3.3a) - (3.4) ile verilen 18 denklem kullanılarak Noether ayar simetrisi doğurucuları hesaplanır. Eğer ele alınan Lagrangian' da potansiyel mevcut ise (3.5) denkleminin de sağlanması gerekmektedir. (3.3) ve (3.5) denklemleri ile $\xi,\ \eta^1,\ \eta^2,\ \eta^3,\ \eta^4\ ve\ f$ NGS vektör bileşenleri ve f ayar fonksiyonu hesaplanırken (3.4), kısıtlama denklemlerini verecektir:

$$\begin{aligned}
&\xi = c_1 s + c_2, \qquad \eta^1 = c_6 u + c_7,\\
&\eta^2 = -s f_{1,u} + y f_{2,u} + z f_{3,u} + (c_1 - c_6)v + f_4,\\
&\eta^3 = c_3 s + c_1 \tfrac{y}{2} + c_5 z + f_2,\\
&\eta^4 = c_4 s + c_1 \tfrac{z}{2} - c_5 y + f_3, \qquad f = c_3 y + c_4 z + f_1.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Böylece, sağlanması gereken kısıtlama denklemleri,

$$f_{1,uu} - \left(c_3 H_{,y} + c_4 H_{,z}\right) = 0, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
&y\left(f_{2,uu} + \tfrac{1}{2} c_1 H_{,y} - c_5 H_{,z}\right) + z\left(f_{3,uu} + \tfrac{1}{2} c_1 H_{,z} + c_5 H_{,y}\right) + H_{,y} f_2 + H_{,z} f_3\\
&+ f_{4,u} - c_1 H + c_6\left(u H_{,u} + 2H\right) + c_7 H_{,u} = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde bulunur. (3.6)-(3.8) denklemlerinde $(i = 1, \ldots, 7)$ c_i sabitler ve olmak üzere f_k'lar $(k = 1, \ldots, 4)$ u değikenine bağlı fonksiyonlardır. Yukarıdaki denklemler kullanılarak H(u,y,z) metrik fonksiyonunun seçilmesiyle birlikte pp-dalga uzay zamanları için kartezyen koordinatlarda Noether ayar simetrileri hesaplanır. Bununla birlikte literatürde pp-dalga metrikleri için hesaplanmış uzay-zaman simetrilerinin büyük bir kısmı kutupsal koordinatlardadır (Sippel ve Goenner 1986, Keane ve Tupper 2004). Bu durumda kartezyen koordinatlarda hesaplanacak olan simetrilere ek olarak kutupsal koordinatlardaki simetrilere de ihtiyaç duyulmaktadır. Kutupsal koordinatlarda yazılmış (1.10b) pp-dalga metriği ele alınır ve yukarıdaki gibi simetriler hesaplanırsa, on dokuz denklemden oluşan NGS sistemini çözmemiz gerekir. Bu sistem;

$$\xi_{,u} = 0, \qquad \xi_{,v} = 0, \qquad \xi_{,r} = 0, \qquad \xi_{,\theta} = 0, \tag{3.9a}$$

$$\eta^1_{,v} = 0, \qquad \eta^1_{,r} - \eta^3_{,v} = 0, \qquad \eta^1_{,\theta} - r^2 \eta^4_{,v} = 0, \tag{3.9b}$$

$$\eta^3_{,\theta} + r^2 \eta^4_{,r} = 0, \qquad 2\eta^3_{,r} - \xi_{,s} = 0, \qquad 2\eta^4_{,\theta} + \frac{2}{r}\eta^3 - \xi_{,s} = 0, \tag{3.9c}$$

$$2H\eta^1_{,\theta} + \eta^2_{,\theta} - r^2 \eta^4_{,u} = 0, \qquad 2H\eta^1_{,r} + \eta^2_{,r} - \eta^3_{,u} = 0, \tag{3.9d}$$

$$2H\eta^1_{,v} + \eta^2_{,v} + \eta^1_{,u} + \xi_{,s} = 0, \qquad 2H\eta^1_{,s} + \eta^2_{,s} + f_{,u} = 0, \tag{3.9e}$$

$$\eta^3_{,s} - f_{,r} = 0, \qquad r^2 \eta^4_{,s} - f_{,\theta} = 0, \qquad \eta^1_{,s} + f_{,v} = 0, \tag{3.9f}$$

$$\eta^2_{u} + 2H\eta^1_{u} + H_u \eta^1 + H_r \eta^3 + H_\theta \eta^4 - H\xi_s = 0, \tag{3.10}$$

$$U_u\eta^1 + U_v\eta^2 + U_r\eta^3 + U_\theta\eta^4 + U\xi_s + f_s = 0 \tag{3.11}$$

denklemleri ile verilmiştir. Kutupsal koordinatlarda hesaplanan NGS vektör bileşenleri $\xi,\ \eta^1,\ \eta^2,\ \eta^3,\ \eta^4\ ve\ f$ ayar fonksiyonu en genel halde,

$$\begin{aligned}
&\xi = c_1 s + c_2, \qquad \eta^1 = c_6 u + c_7,\\
&\eta^2 = -s g_{1,u} + r cos\theta g_{2,u} + r sin\theta g_{3,u} + (c_1 - c_6)v + g_4,\\
&\eta^3 = (c_4 s + g_2)cos\theta + (c_3 s + g_3)sin\theta + c_1\frac{r}{2},\\
&\eta^4 = (c_3 s + g_3)\frac{cos\theta}{r} - (c_4 s + g_2)\frac{sin\theta}{r} + c_5,\\
&f = r(c_3 sin\theta + c_4 cos\theta) + g_1
\end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde bulunur. Bu durumdaki kısıtlama denklemleri ise

$$g_{1,uu} - cos\theta\left(c_4 H_{,r} + c_3\frac{H_{,\theta}}{r}\right) + sin\theta\left(c_3 H_{,r} - c_4\frac{H_{,\theta}}{r}\right) = 0, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
&cos\theta\left(r g_{2,uu} + H_{,r} g_2 + \frac{H_{,\theta}}{r} g_3\right) + sin\theta\left(r g_{3,uu} + H_{,r} g_3 - \frac{H_{,\theta}}{r} g_2\right)\\
&+ g_{4,u} - 2c_6 H + (c_6 u + c_7)H_{,u} + c_1\left(\frac{r}{2}H_{,r} - H\right) + c_5 H_{,\theta} = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olur. Bu denklemlerde H metrik fonksiyonunun u, r ve θ değişkenlerine bağlı olduğu göz önüne alınmalıdır.$\xi,\ \eta^1,\ \eta^2,\ \eta^3,\ \eta^4\ ve\ f$ nicelikleri ile kısıtlama denklemleri hem kartezyen hem de kutupsal koordinatlarda bulunduktan sonra Noether ayar simetrileri Keane ve Tupper (2004) ile Sippel ve Goenner'ın (1986) sınıflamaları dikkate alınarak hesaplanacaktır. Kartezyen koordinatlarda veya polar koordinatlarda verilmiş olan genel simetri doğurucularına bakıldığında $\boldsymbol{k} = \partial_v,\ \boldsymbol{Y}_1 = \partial_s,\ \boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v\ (f = u)$ simetrilerinin, verilecek olan her sınıfta mutlaka ortaya çıktığına dikkat edilmelidir. Bu aşamadan sonra, H metrik fonksiyonuna bağlı olarak simetri sınıfları incelenecektir.

İlk olarak konformal Killing vektörlerinin (CKV) Keane ve Tupper'ın (2004) çalışmasına göre en genel sınıfları ele alınmıştır. CKV sınıfları ile bu sınıflara ait H metrik fonksiyonu ve Ricci tensöründe ortaya çıkan F fonksiyonu Çizelge 3.1. ile verilmiştir. Bu çizelgedeki Aiv, Biv, Civ ve Div sınıfları A, B, C ve D sınıflarına ait metrik fonksiyonunda $\tau(u) = 0$ alındığında oluşan sınıflardır.

Çizelge 3.1. pp-dalga uzay-zamanları için konformal killing vektör sınıfları

Sınıf	Metrik fonksiyonu H	F
A	$\tau(u)r^2 + le^{2m\theta}r^{-2}$	$4\tau(u) + 4l(1+m^2)e^{2m\theta}r^{-4}$
B	$\tau(u)r^2 + l(\sigma z - \rho y)^{-2}$	$4\tau(u) + 6l(\sigma^2+\rho^2)(\sigma z - \rho y)^{-4}$
C	$\tau(u)r^2 + \delta r^{-2}$	$4\tau(u) + 4\delta r^{-4}$
D	$\tau(u)r^2 + \delta(\theta)r^{-2}$	$4\tau(u) + 4\big(\delta(\theta) + \delta(\theta)_{,\theta\theta}\big)r^{-4}$

Devamı sonraki sayfada.

Çizelge 3.1. pp-dalga uzay-zamanları için konformal killing vektör sınıfları (devam)

Aiv	$le^{2m\theta}r^{-2}$	$4le^{2m\theta}(1+m^2)r^{-4}$
Biv	$l(\sigma z-\rho y)^{-2}$	$6l(\sigma^2+\rho^2)(\sigma z-\rho y)^{-4}$
Civ	δr^{-2}	$4\delta r^{-4}$
Div	$\delta(\theta)r^{-2}$	$\left(4\delta(\theta)+\delta(\theta)_{,\theta\theta}\right)r^{-4}$

Sınıf A: Bu sınıfa ait simetriler $N_4\supset H_2\supset G_1$ cebrine sahiptir ve Noether ayar simetrileri

$$\boldsymbol{k}=\partial_v,\ \boldsymbol{Y}_1=\partial_s,\ \boldsymbol{Y}_2=-s\partial_v,\ ayar\ terimi f=u,$$
$$\boldsymbol{Y}_3=2s\partial_s+\boldsymbol{Z}_1 \qquad (3.15)$$

şeklinde bulunur. Burada $\boldsymbol{k}$ Killing vektörü ve $\boldsymbol{Z}_1=2v\partial_v+r\partial_r+\frac{2}{m}\partial_\theta$ homotetik vektördür. Bu sınıf için sıfırdan farklı Lie parantezleri veya diğer bir deyişle komütasyon bağıntıları

$$[\boldsymbol{k},\boldsymbol{Y}_3]=\boldsymbol{k},\qquad [\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_3]=\boldsymbol{Y}_1,\qquad [\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2]=-\boldsymbol{k} \qquad (3.16)$$

olur. Sınıf A için (2.16) eşitliği kullanılırsa ilk integraller;

$$I_1=-\dot{u},\quad I_2=-E_L,\quad I_3=s\dot{u}-u,\quad I_4=-2sE_L-2v\dot{u}+r\dot{r}+\frac{2}{m}r^2\dot{\theta}$$

şeklinde hesaplanır. Burada $E_L=\dot{x}^a\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^a}-L$ olmak üzere sistemin enerji fonksiyoneli ya da Hamiltonyen'i olarak bilinir. Yukarıdaki simetriler haricinde $H=\tau(u)r^2+le^{2m\theta}r^{-2}$ denkleminde $\tau(u)$'nun özel durumları için alt durumlar ortaya çıkmaktadır. Aşağıda bu alt durumlar ve bunlara karşılık gelen NGS vektör alanları verilmiştir.

a) $\tau(u)=w$ = sabit için $\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{X}_2$ ve bu vektör alanlara ait ilk integraller

$$I_1=-\dot{u},\quad I_2=-E_L,\quad I_3=s\dot{u}-u,\quad I_4=-2H\dot{u}-\dot{v}$$

olur. Bu sınıfa ait simetriler $N_4\supset G_2$ cebrine sahiptir.

b) $\tau(u)=wu^{-2}$ iken NGS vektör alanları $\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_4$ olarak hesaplanmıştır. Bu sınıfın cebri $N_4\supset H_2\supset G_1$ ve ilk integralleri

$$I_1=-\dot{u},\quad I_2=-E_L,\quad I_3=s\dot{u}-u,\quad I_4=-2sE_L-4Hu\dot{u}-2u\dot{v}+r\dot{r}$$

şeklindedir.

Sınıf B:

a) $\tau(u)=wu^{-4}$: Burada w sabiti $\frac{q^2}{8}$ (q=sabit) alınmıştır. *Sınıf B*'nin bu alt durumu için Noether ayar simetrileri;

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{k} = \partial_v, \boldsymbol{Y}_1 = \partial_s, \boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v,\\
&\boldsymbol{X}_3 = f(u)_{,u}(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)r\partial_v + f(u)(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)\partial_r\\
&\qquad -r^{-1}f(u)(\sigma sin\theta - \rho cos\theta)\partial_\theta,\\
&\boldsymbol{X}_4 = g(u)_{,u}(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)r\partial_v + g(u)(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)\partial_r\\
&\qquad -r^{-1}g(u)(\sigma sin\theta - \rho cos\theta)\partial_\theta
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

olarak bulunmuştur. $\boldsymbol{X}_3$ ve $\boldsymbol{X}_4$ simetrileri killing vektörleri olup $f(u) = usin(q/u)$ ve $g(u) = ucos(q/u)$'dur. Bu alt durum için cebirsel yapı $N_5 \supset G_3$ şeklindedir. Burada ilk integraller

$$I_1 = -\dot{u}, \quad I_2 = -E_L, \quad I_3 = s\dot{u} - u,$$

$$I_4 = -f'(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)r\dot{u} + f(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)\dot{r} - f(\sigma sin\theta - \rho cos\theta)r\dot{\theta},$$

$$I_5 = -g'(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)r\dot{u} + g(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)\dot{r} - g(\sigma sin\theta - \rho cos\theta)r\dot{\theta}$$

ile verilirler.

b) $\tau(u) = q$ = sabit: Bu alt durumda Noether ayar simetrileri

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{k} = \partial_v, \boldsymbol{Y}_1 = \partial_s, \boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v, \boldsymbol{X}_2 = \partial_u,\\
&\boldsymbol{X}_3 = f(u)_{,u}(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)r\partial_v + f(u)(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)\partial_r\\
&\qquad -r^{-1}f(u)(\sigma sin\theta - \rho cos\theta)\partial_\theta,\\
&\boldsymbol{X}_4 = g(u)_{,u}(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)r\partial_v + g(u)(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)\partial_r\\
&\qquad -r^{-1}g(u)(\sigma sin\theta - \rho cos\theta)\partial_\theta
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

şeklinde verilmiş olup $\boldsymbol{X}_3$ ve $\boldsymbol{X}_4$ vektör alanlarında $f(u) = sin(\sqrt{2q}u)$ ve $g(u) = cos(\sqrt{2q}u)$' dur. Bu iki alt durum için Lie parantezleri sırasıyla,

a) $$[\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4] = (\rho^2 + \sigma^2)m\boldsymbol{k}, \qquad m = (fg' - f'g)$$
$$[\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2] = -\boldsymbol{k} \tag{3.19}$$

b) $$[\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3] = \sqrt{2q}\boldsymbol{X}_4, \qquad [\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_4] = -\sqrt{2q}\boldsymbol{X}_3,$$
$$[\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4] = (\rho^2 + \sigma^2)m\boldsymbol{k}, \qquad m = (fg' - f'g) \tag{3.20}$$
$$[\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2] = -\boldsymbol{k}$$

denklemleri ile verilmiştir. İlk integraller;

$$I_1 = -\dot{u}, \quad I_2 = -E_L, \quad I_3 = s\dot{u} - u, \quad I_4 = -2sE_L - 4Hu\dot{u} - 2u\dot{v} + r\dot{r},$$

$$I_5 = -f'(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)r\dot{u} + f(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)\dot{r} - f(\sigma sin\theta - \rho cos\theta)r\dot{\theta},$$

$$I_6 = -g'(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)r\dot{u} + g(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)\dot{r} - g(\sigma sin\theta - \rho cos\theta)r\dot{\theta}$$

şeklindedir.

Sınıf C: Bu sınıf $N_4 \supset G_2$ cebrine sahiptir ve NGS vektör alanları;

$$\boldsymbol{k} = \partial_v, \quad \boldsymbol{Y}_1 = \partial_s, \quad \boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v, \quad \boldsymbol{X}_5 = \partial_\theta \tag{3.21}$$

$$[\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2] = -\boldsymbol{k} \tag{3.22}$$

$$I_1 = -\dot{u}, \quad I_2 = -E_L, \quad I_3 = s\dot{u} - u, \quad I_4 = r^2\dot{\theta}$$

olarak bulunur. Oluşan tek alt durum $\tau(u) = wu^{-2}$ için NGS'ler;

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{k} = \partial_v, \quad \boldsymbol{Y}_1 = \partial_s, \quad \boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v, \quad \boldsymbol{X}_5 = \partial_\theta \\ &\boldsymbol{Y}_4 = 2s\partial_s + \boldsymbol{Z}_2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$[\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2] = -\boldsymbol{k}, \quad [\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_4] = \boldsymbol{Y}_1, \quad [\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_4] = \boldsymbol{Y}_2 \tag{3.24}$$

Burada $\boldsymbol{Z}_2 = 2u\partial_u + r\partial_r$ olup homotetik vektör alandır ve $N_5 \supset H_3 \supset G_2$'dir.

$$I_1 = -\dot{u}, \quad I_2 = -E_L, \quad I_3 = s\dot{u} - u, \quad I_4 = r^2\dot{\theta},$$

$$I_5 = -2sE_L - 4Hu\dot{u} - 2u\dot{v} + r\dot{r}$$

Sınıf D: Bu sınıf metrik fonksiyonunda bulunan $\delta(\theta)$ fonksiyonunun keyfi alındığı duruma karşılık gelir ve $N_3 \supset G_1$ cebrine sahiptir. Noether ayar simetrileri ise üç tanedir ve

$$\boldsymbol{k} = \partial_v, \ \boldsymbol{Y}_1 = \partial_s, \ \boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v \tag{3.25}$$

$$[\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2] = -\boldsymbol{k} \tag{3.26}$$

ile verilir.

$$I_1 = -\dot{u}, \quad I_2 = -E_L, \quad I_3 = s\dot{u} - u$$

Eğer metrik fonksiyonu H'deki $\tau(u)$ sıfır seçilirse A, B, C ve D sınıfları Keane ve Tupper (2004) çalışmasındaki Aiv, Biv, Civ ve Div sınıflarına dönüşür ortaya çıkan NGS'ler Çizelge 3.2.'de verilmiştir.

Çizelge 3.2. Aiv, Biv, Civ ve Div sınıfları için Noether ayar simetrileri

Sınıf	Simetriler	Cebir	Metrik Fonksiyonu H	F
Aiv	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_4$	$N_6 \supset H_4 \supset G_3$	$le^{2m\theta} r^{-2}$	$4le^{2m\theta}(1+m^2)r^{-4}$
Biv	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_6, \boldsymbol{X}_7, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_5, \boldsymbol{Y}_6$	$N_8 \supset H_5 \supset G_4$	$l(\sigma z - \rho y)^{-2}$	$6l(\sigma^2+\rho^2)(\sigma z - \rho y)^{-4}$
Civ	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_4$	$N_6 \supset H_4 \supset G_3$	δr^{-2}	$4\delta r^{-4}$
Div	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_4$	$N_5 \supset H_3 \supset G_2$	$\delta(\theta) r^{-2}$	$\left(4\delta(\theta) + \delta(\theta)_{,\theta\theta}\right) r^{-4}$

Daha önce bulunan NGS'ler haricinde Çizelge 3.2.'de ilgili durumlarda ortaya çıkan NGS vektör alanları $\boldsymbol{X}_6, \boldsymbol{X}_7, \boldsymbol{Y}_5$ ve $\boldsymbol{Y}_6$ kullanılmış olup bunlar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}_6 = \sigma\partial_y + \rho\partial_z, \qquad \boldsymbol{X}_7 = (\sigma y + \rho z)\partial_v + u\left(\sigma\partial_y + \rho\partial_z\right), \\ &\boldsymbol{Y}_5 = s\left(\sigma\partial_y + \rho\partial_z\right) \text{ ve } f = \sigma y + \rho z \\ &\boldsymbol{Y}_6 = 2s\partial_s + \boldsymbol{Z}_3. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Burada $\boldsymbol{Z}_3 = 2u\partial_u + y\partial_y + z\partial_z$ bir homotetik vektördür. Çizelge 3.3.'de Sippel ve Goenner'ın (1986) pp-dalga uzay-zamanları için izometri sınıfları ile Keane ve Tupper'ın (2004) pp-dalga metriklerine ait konformal simetri sınıflamasında bulduğu ilave sınıflar verilmiş olup bu sınıfların sahip olduğu Noether ayar simetrileri her bir durum için yazılmıştır. Çizelge 3.3.'den sonra, izometri sınıfı 2'nin iki alt durumu ayrıca ele alınacaktır.

Çizelge 3.3. Sippel ve Goenner'ın izometri sınıflarına göre Noether ayar simetrileri

Sınıf	Simetriler	Cebir	Metrik Fonksiyonu H
1	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_3 \supset G_1$	Keyfi
$1i$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_8, \boldsymbol{X}_9, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_7$	$N_6 \supset G_3$	$H(u,z)$
2	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_4 \supset G_2$	$H(u,r)$
$2ii$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_8$	$N_5 \supset H_3 \supset G_2$	$Ke^{[-u/\beta]} \ln\lvert r\rvert$
3	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_{10}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_4 \supset G_2$	$u^{-2}W(s,t)$
4	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_{11}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_4 \supset G_2$	$W(s,t)$
5	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{X}_{12}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_5 \supset G_3$	$u^{-2}W(r)$
$5i$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{X}_{12}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_5 \supset G_3$	$u^{-2}\zeta \ln\lvert r\rvert$
$5ii$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{X}_{12}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_5 \supset G_3$	$u^{-2}(\delta r^{-\sigma} - \sigma(2-\sigma)^{-2} r^2)$
6	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_5 \supset G_3$	$W(r)$
$6i$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_5 \supset G_3$	$\nu r^2/4 + \delta r^{-2}$
$6ii$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_4$	$N_6 \supset H_4 \supset G_3$	δr^{-2}
$6iii$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_5 \supset G_3$	$\zeta \ln\lvert r\rvert$

Devamı sonraki sayfada.

Çizelge 3.3. Sippel ve Goenner'ın izometri sınıflarına göre Noether ayar simetrileri (devam)

$6iv$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_9$	$N_6 \supset H_4 \supset G_3$	$\delta r^{-\sigma}$
7	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_5 \supset G_3$	$W(r)e^{2c\theta}$
$7i$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_{10}$	$N_6 \supset H_4 \supset G_3$	$\delta r^{-\sigma} e^{2c\theta}$
$7ii$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_5, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_{11}$	$N_6 \supset H_4 \supset G_3$	$\delta r^{-2} e^{2c\theta}$
8	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_{13}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$	$N_5 \supset G_3$	$e^{2t} W(s)$
9	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_6, \boldsymbol{X}_{14}, \boldsymbol{X}_7, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_5$	$N_8 \supset G_5$	$Ke^{2(\eta y - \sigma z)}$

Çizelge 3.3.'de kullanılan ve önceden açık olarak yazılmamış olan NGS vektör alanları ve varsa ayar fonksiyonları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_8 = \partial_y, \qquad \boldsymbol{X}_9 = u\partial_y + y\partial_v, \\
&\boldsymbol{X}_{10} = u\partial_u - v\partial_v + \varepsilon\big(z\partial_y - y\partial_z\big), \\
&\boldsymbol{X}_{11} = \partial_u + \varepsilon\big(z\partial_y - y\partial_z\big), \\
&\boldsymbol{X}_{12} = u\partial_u - v\partial_v, \\
&\boldsymbol{X}_{13} = \varepsilon(u\partial_u - v\partial_v) + \rho\partial_y + \sigma\partial_z, \\
&\boldsymbol{X}_{14} = \sigma(u\partial_u - v\partial_v) + \partial_z, \\
&\boldsymbol{Y}_7 = s\partial_y \ ve \ f = y, \\
&\boldsymbol{Y}_8 = 2s\partial_s + \boldsymbol{Z}_4, \qquad \boldsymbol{Z}_4 = -2\beta\partial_u + \left(2v + \beta K e^{-\frac{u}{\beta}}\right)\partial_v + r\partial_r, \\
&\boldsymbol{Y}_9 = 2s\partial_s + \boldsymbol{Z}_5, \qquad \boldsymbol{Z}_5 = \tfrac{(\sigma+2)u}{2}\partial_u - \tfrac{(\sigma-2)v}{2}\partial_v + r\partial_r, \\
&\boldsymbol{Y}_{10} = 2s\partial_s + \boldsymbol{Z}_6, \qquad \boldsymbol{Z}_6 = 2v\partial_v + r\partial_r + \tfrac{\sigma+2}{2c}\partial_\theta, \\
&\boldsymbol{Y}_{11} = 2s\partial_s + \boldsymbol{Z}_7, \qquad \boldsymbol{Z}_7 = -v\partial_v + r\partial_r - \tfrac{2}{c}\partial_\theta
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Şimdi Çizelge 3.3.'de yer almayan izometri sınıfı 2'ye ait simetri sınıfları için Noether ayar simetrileri ele alınacaktır.

Sınıf 2i: Metrik fonksiyonu $H = K(\alpha u + \beta)^q \ln(r)$ alındığında oluşan bu sınıf için oluşan alt durumlar aşağıdaki gibidir.

a) $\mathrm{q} = -1$ iken NGS vektör alanları:

$$\boldsymbol{k} = \partial_v, \ \ \boldsymbol{Y}_1 = \partial_s, \ \ \boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v, \ \ \boldsymbol{X}_5 = \partial_\theta, \ \ \boldsymbol{Y}_{12} = 2s\partial_s + \boldsymbol{Z}_8 \tag{3.29}$$

Burada $\boldsymbol{Z}_8 = 2\frac{(\alpha u+\beta)}{\alpha}\partial_u - K\frac{(\alpha u+\beta)}{\alpha}\partial_v + r\partial_\theta$ homotetik vektör olup, cebir $N_5 \supset H_3 \supset G_2$ şeklindedir.

$[\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2] = -\boldsymbol{k}, \qquad [\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_{12}] = \boldsymbol{Y}_1, \qquad [\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_{12}] = \boldsymbol{Y}_2$

$I_1 = -\dot{u},\ I_2 = -E_L,\ I_3 = s\dot{u} - u,\ I_4 = r^2\dot{\theta}$ ve $I_5 = -2sE_L - 2\frac{\alpha u+\beta}{\alpha}(2H\dot{u} + \dot{v}) + K\frac{\alpha u+\beta}{\alpha}\dot{u} + r^3\dot{\theta}$

b) q $\neq -1$ iken NGS'ler:

$$\boldsymbol{k} = \partial_v, \qquad \boldsymbol{Y}_1 = \partial_s, \qquad \boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v, \qquad \boldsymbol{X}_5 = \partial_\theta \tag{3.30}$$

$[\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2] = -\boldsymbol{k}$

olup bu durumdaki cebir $N_4 \supset G_2$'dir.

$I_1 = -\dot{u}, I_2 = -E_L, I_3 = s\dot{u} - u$ ve $I_4 = r^2\dot{\theta}$

Sınıf 2iii: Bu sınıf için metrik fonksiyonu $H = e^{g(u)}\ln|r|$ ile verilir. Oluşan alt durumlar ise $g(u) = keyfi$ ve $g(u) = -\ln(|\rho u^2 + \alpha u + \beta|) - \sigma\int(\rho u^2 + \alpha u + \beta)^{-1}du$ şeklindedir. Her iki durumda da hesaplanan NGS'ler ve bunlara ait cebirsel yapı aynıdır.

Simetriler: $\boldsymbol{k} = \partial_v, \boldsymbol{Y}_1 = \partial_s, \boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v, \boldsymbol{X}_5 = \partial_\theta$ Cebir: $N_4 \supset G_2$ (3.31)

$[\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2] = -\boldsymbol{k}$

denklemleri ile verilmiştir.

$I_1 = -\dot{u}, I_2 = -E_L, I_3 = s\dot{u} - u$ ve $I_4 = r^2\dot{\theta}$

3.1.2. Düzlem dalga uzay-zamanları için Noether ayar simetrileri

Eğer pp-dalga uzay-zamanları için $H(u, y, z)$ metrik fonksiyonu, $2H = A(u)y^2 + 2B(u)yz + C(u)z^2$ şeklinde yazılabiliyorsa, ele alınan uzay-zaman *düzlem dalga uzay-zamanı* olarak adlandırılır (Keane ve Tupper 2004). Düzlem dalga uzay-zamanları için genel çözüm (3.4) denklemleri ile verilmektedir. Sadece kısıtlama denklemleri aşağıdaki şekli alır:

$$f_{1,uu} = 0, \qquad f_{4,u} = 0, \tag{3.32}$$

$$f_{2,uu} + A(u)f_2 + B(u)f_3 = 0, \tag{3.33}$$

$$f_{3,uu} + C(u)f_3 + B(u)f_2 = 0, \tag{3.34}$$

$$c_3A(u) + c_4B(u) = 0, \qquad c_3B(u) + c_4C(u) = 0, \tag{3.35}$$

$$(c_6u + c_7)A'(u) + 2c_6A(u) - 2c_5B(u) = 0, \tag{3.36}$$

$$(c_6u + c_7)B'(u) + 2c_6B(u) + c_5[A(u) - C(u)] = 0, \tag{3.37}$$

$$(c_6u + c_7)C'(u) + 2c_6C(u) - 2c_5B(u) = 0, \tag{3.38}$$

Bu kısıtlama denklemlerinde $c_3, c_4, c_5, c_6\ ve\ c_7$ sabitler ve f_1, f_2, f_3 ve f_4 nicelikleri u'ya bağlı fonksiyonlardır. Düzlem dalgalar için konformal simetri sınıfları *Sınıf 10 – Sınıf 14* olup (Keane ve Tupper 2004) aşağıda bu durumlardaki NGS vektör alanları araştırılacaktır. Düzlem dalga uzay-zamanlarına ait sınıflar Çizelge 3.3 ile verilen izometri sınıflarının devamı şeklinde verildiği için Sınıf 10 ile başlanmıştır (Sippel ve Goenner 1986, Keane ve Tupper 2004).

Sınıf 10: (3.4) genel çözümleri kullanıldığında c_2 sabiti ile f_1 ve f_4 fonksiyonlarından Killing vektörü $\boldsymbol{k} = \partial_v$ ile Noether ayar simetrileri $\boldsymbol{Y}_1 = \partial_s$, $\boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v\ (f = u)$ bulunur. (3.33) ve (3.34) denklemlerinden dört tane killing vektörü elde edilir:

$$\boldsymbol{X}_i = f_2(u)_i\partial_y + f_3(u)_i\partial_z + [y(f_{2,u})_i + z(f_{3,u})_i]\partial_v \tag{3.39}$$

Denklemleri ile verilmiştir. Burada $i = 1,2,3$ ve 4 olmak üzere $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ ve $\boldsymbol{X}_4$ simetrileri elde edilmiştir. Kısıtlama denklemlerinde olmayan c_1 parametresi de göz önüne alınırsa bu parametreden bulunan NGS $\boldsymbol{Z}_9 = 2v\partial_v + y\partial_y + z\partial_z$ olmak üzere $\boldsymbol{Y}_3 = 2s\partial_s + \boldsymbol{Z}_9$ olarak hesaplanır. Böylece *Sınıf 10*, $N_8 \supset H_6 \supset G_5$ cebrine sahiptir.

Konformal olmayan düz uzay-zamanlar için $A(u) \neq C(u)$ ve $B(u) \neq 0$ alındığında, denklem (3.33) – (3.38)'de bulunan A(u), B(u) ve C(u) fonksiyonlarının bazı özel durumları için oluşacak dört sınıf (Keane ve Tupper 2004) aşağıda incelenmiştir.

Sınıf 11: Bu sınıf için $A(u) = au^{-2}, B(u) = bu^{-2}$ ve $C(u) = cu^{-2}$ olmak üzere metrik fonksiyonu, $2H = au^{-2}y^2 + cu^{-2}z^2 + 2bu^{-2}yz$ şeklini alır. Bu durumda $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$ ve $\boldsymbol{Y}_3$ simetrilerine ek olarak $\boldsymbol{X}_5 = u\partial_u - v\partial_v$ Killing vektörü ile $\boldsymbol{Y}_4 = s(\sigma\partial_y + \rho\partial_z)$ simetrisine sahip olacaktır. Dolayısıyla bu sınıfa ait cebir $N_{10} \supset H_7 \supset G_6$ şeklinde olur.

Sınıf 12: Bu sınıfta c, l, γ sabitler ve $\phi = 2\gamma ln|u|$ olmak üzere $A(u) = cu^{-2}(sin\phi + l)$, $B(u) = cu^{-2}cos\phi$ ve $C(u) = cu^{-2}(-sin\phi + l)$'dir. Bu sınıfta *Sınıf 10*'a ek olarak $\boldsymbol{X}_6 = \gamma(z\partial_y - y\partial_z) + u\partial_u - v\partial_v$ KV alanı bulunmuş ve bu sınıfa ait cebir $N_9 \supset H_7 \supset G_6$ ile verilmiştir.

Sınıf 13: Metrik fonksiyonu $H = (ay^2 + cz^2)/2 + byz$ alındığında yani $A(u) = a$, $B(u) = b$ ve $C(u) = c$ iken *Sınıf 12*'de olduğu gibi *Sınıf 10*'a ek olarak bir KV alanı daha elde ($\boldsymbol{X}_7 = \partial_u$) edilir. Bu sınıfa ait cebir de $N_9 \supset H_7 \supset G_6$ şeklindedir.

Sınıf 14: Bu sınıf için metrik fonksiyonu;

$$2H = c(sin\phi + l)y^2 + c(-sin\phi + l)z^2 + 2cyzcos\phi \tag{3.40}$$

ile verilir. Bu durumda yine *Sınıf 10*'a ek olarak bir adet KV alanı elde edilir ve $N_9 \supset H_7 \supset G_6$ cebri bulunur.

$$\boldsymbol{X}_8 = \gamma\left(z\partial_y - y\partial_z\right) + \partial_u \tag{3.41}$$

Noether ayar simetrileri hesaplanırken temel alınan Keane ve Tupper'ın (2004) çalışmasında verilen sınıflar hesaplandıktan sonra karşılaştırma yapabilmek için aynı sınıfların Lie simetrileri de hesaplanmaya çalışılmıştır. Fakat Lie simetrileri hesaplanırken $\xi, \eta^1, \eta^2, \eta^3$ ve η^4 genel olarak hesaplansa da kısıtlama denklemleri kullanılarak Noether ayar simetrileri için elde edilen sınıfların tamamı hesaplanamamıştır. Özellikle düzlem dalga uzay-zamanları için Lie simetrileri hesaplanamamıştır. Bir sonraki bölümde Lie simetrileri verilirken hesaplanamayan sınıflar bu bölüme dâhil edilmemiştir.

3.2. Lie Nokta Simetrileri

pp-dalga uzay-zamanları için NGS hesabı yapılırken elde edilen (3.1) Lagrangian'ına ait jeodezik denklemleri varyasyon yöntemiyle hesaplanırsa kartezyen koordinatlarda,

$$\begin{aligned}
&E^1: \ddot{u} - U_{,v} = 0,\\
&E^2: \ddot{v} + 2HU_{,v} + H_{,u}\dot{u}^2 + 2H_{,y}\dot{u}\dot{y} + 2H_{,z}\dot{u}\dot{z} - U_{,u} = 0,\\
&E^3: \ddot{y} + \dot{u}^2 H_{,y} + U_{,y} = 0,\\
&E^4: \ddot{z} + \dot{u}^2 H_{,z} + U_{,z} = 0
\end{aligned} \tag{3.42}$$

bulunur. Jeodezik denklemleri elde edildikten sonra Lie nokta simetri denklemi (2.18)'in kullanılmasıyla yetmiş adet PDE elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\xi_{,yy} = 0, \quad \xi_{,vv} = 0, \quad \xi_{,zz} = 0, \quad \xi_{,uv} = 0, \quad \xi_{,yz} = 0,\\
&\xi_{,vz} = 0, \quad \xi_{,vy} = 0, \quad \eta^3_{,vv} = 0, \quad \eta^3_{,zz} = 0, \quad \eta^3_{,vz} = 0,\\
&\eta^1_{,yy} = 0, \quad \eta^1_{,yz} = 0, \quad \eta^1_{,vv} = 0, \quad \eta^1_{,zz} = 0, \quad \eta^1_{,vy} = 0,\\
&\eta^1_{,vz} = 0, \quad \eta^4_{,yy} = 0, \quad \eta^4_{,vv} = 0, \quad \eta^4_{,vy} = 0,\\
&2\eta^3_{,sy} - \xi_{,ss} + 3U_{,y}\xi_{,y} + 2HU_{,v}\xi_{,v} - U_{,v}\xi_{,u} - U_{,u}\xi_{,v} + U_{,z}\xi_{,z} = 0,\\
&\eta^3_{,su} + H_{,y}\eta^1_{,s} + U_{,y}\xi_{,u} = 0, \quad \eta^3_{,sv} + U_{,y}\xi_{,v} = 0, \quad \eta^3_{,sz} + U_{,y}\xi_{,z} = 0,\\
&\eta^3_{,yy} - 2\xi_{,sy} = 0, \quad \eta^3_{,uy} + H_{,y}\eta^1_{,y} - \xi_{,su} - H_{,y}\eta^3_{,v} = 0, \quad \eta^3_{,vy} - \xi_{,sv} = 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\eta^3_{,yz} - \xi_{,sz} = 0, \quad \eta^3_{,uv} + H_{,y}\eta^1_{,v} = 0, \quad \eta^3_{,uz} - H_{,z}\eta^3_{,v} + H_{,y}\eta^1_{,z} = 0,\\
&H_{,y}\xi_{,v} - \xi_{,uy} = 0, \quad H_{,u}\xi_{,v} - \xi_{,uu} + H_{,z}\xi_{,z} + H_{,y}\xi_{,y} = 0,\\
&H_{,z}\xi_{,v} - \xi_{,uz} = 0, \quad \eta^1_{,sy} - U_{,v}\xi_{,y} = 0,\\
&2\eta^1_{,su} - \xi_{,ss} + U_{,y}\xi_{,y} - 3U_{,v}\xi_{,u} + 2HU_{,v}\xi_{,v} - U_{,u}\xi_{,v} + U_{,z}\xi_{,z} = 0,\\
&\eta^1_{,sv} - U_{,v}\xi_{,v} = 0, \quad \eta^1_{,sz} - U_{,v}\xi_{,z} = 0, \quad \eta^1_{,uy} - \xi_{,sy} - H_{,y}\eta^1_{,v} = 0,\\
&\eta^1_{,uu} - H_{,y}\eta^1_{,y} - 2\xi_{,su} - H_{,u}\eta^1_{,v} - H_{,z}\eta^1_{,z} = 0, \quad \eta^1_{,uv} - \xi_{,sv} = 0,\\
&\eta^1_{,uz} - \xi_{,sz} - H_{,z}\eta^1_{,v} = 0, \quad \eta^2_{,sy} + 2HU_{,v}\xi_{,y} - U_{,u}\xi_{,y} + H_{,y}\eta^1_{,s} = 0,\\
&\eta^2_{,su} + 2HU_{,v}\xi_{,u} - U_{,u}\xi_{,u} + H_{,y}\eta^3_{,s} + H_{,u}\eta^1_{,s} + H_{,z}\eta^4_{,s} = 0,\\
&2\eta^2_{,sv} - \xi_{,ss} + U_{,y}\xi_{,y} - U_{,v}\xi_{,u} + 6HU_{,v}\xi_{,v} - 3U_{,u}\xi_{,v} + U_{,z}\xi_{,z} = 0,\\
&\eta^2_{,sz} + 2HU_{,v}\xi_{,z} - U_{,u}\xi_{,z} + H_{,z}\eta^1_{,s} = 0, \quad \eta^2_{,yy} + 2H_{,y}\eta^1_{,y} = 0,\\
&\eta^2_{,vy} - \xi_{,sy} + H_{,y}\eta^1_{,v} = 0, \quad \eta^2_{,yz} + H_{,y}\eta^1_{,z} + H_{,z}\eta^1_{,y} = 0,\\
&\eta^2_{,uv} - \xi_{,su} + H_{,y}\eta^3_{,v} + H_{,u}\eta^1_{,v} + H_{,z}\eta^4_{,v} = 0,\\
&\eta^2_{,vv} - 2\xi_{,sv} = 0, \quad \eta^2_{,vz} - \xi_{,sz} + H_{,z}\eta^1_{,v} = 0,\\
&\eta^2_{,zz} + 2H_{,z}\eta^1_{,z} = 0, \quad \eta^4_{,sy} + U_{,z}\xi_{,y} = 0, \quad \eta^4_{,su} + U_{,z}\xi_{u} + H_{,z}\eta^1_{,s} = 0,\\
&\eta^4_{,sv} + U_{,z}\xi_{,v} = 0, \quad \eta^4_{,uy} + H_{,z}\eta^1_{,y} - H_{,y}\eta^4_{,v} = 0, \quad \eta^4_{,yz} - \xi_{,sy} = 0,\\
&2\eta^4_{,sz} - \xi_{,ss} - U_{,v}\xi_{,u} + 2HU_{,v}\xi_{,v} - U_{,u}\xi_{,v} + 3U_{,z}\xi_{,z} + U_{,y}\xi_{,y} = 0,\\
&\eta^4_{,uv} + H_{,z}\eta^1_{,v} = 0, \quad \eta^4_{,uz} + H_{,z}\eta^1_{,z} - H_{,z}\eta^4_{,v} - \xi_{,su} = 0, \quad \eta^4_{,vz} - \xi_{,sv} = 0,\\
&\eta^4_{,zz} - 2\xi_{,sz} = 0,\\
&\eta^1_{,ss} - U_{,y}\eta^1_{,u} + U_{,v}\eta^1_{,u} - 2U_{,v}\xi_{,s} + U_{,u}\eta^1_{,v} - U_{,z}\eta^1_{,z} - U_{,vy}\eta^3 - U_{,uv}\eta^1 - U_{,vv}\eta^2\\
&\qquad - U_{,vz}\eta^4 - 2HU_{,v}\eta^1_{,v} = 0,\\
&\eta^2_{,ss} - U_{,y}\eta^2_{,y} + U_{,u}\eta^2_{,v} - 2U_{,u}\xi_{,s} + U_{,v}\eta^2_{,u} - U_{,z}\eta^2_{,z} - U_{,uy}\eta^3 - U_{,uu}\eta^1 - U_{,uv}\eta^2\\
&\qquad - U_{,uz}\eta^4 - 2HU_{,v}\eta^2_{,v} + 4HU_{,v}\xi_{,s} + 2H_{,y}U_{,v}\eta^3 + 2HU_{,vy}\eta^3 + 2H_{,u}U_{,v}\eta^1\\
&\qquad + 2HU_{,uv}\eta^1 + 2HU_{,vv}\eta^2 + 2H_{,z}U_{,v}\eta^4 + 2HU_{,vz}\eta^4 = 0,
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

$$\eta^3_{,ss} + U_{,yy}\eta^3 - U_{,y}\eta^3_{,y} + U_{,v}\eta^3_{,u} - 2HU_{,v}\eta^3_{,v} + U_{,u}\eta^3_{,v} - U_{,z}\eta^3_{,z} + U_{,uy}\eta^1 + U_{,vy}\eta^2$$
$$U_{,yz}\eta^4 + 2U_{,y}\xi_{,s} = 0,$$

$$\eta^4_{,ss} - U_{,y}\eta^4_{,y} + U_{,u}\eta^4_{,v} + U_{,v}\eta^4_{,u} - U_{,z}\eta^4_{,z} + 2U_{,z}\xi_{,s} + U_{,yz}\eta^3 + U_{,uz}\eta^1 + U_{,vz}\eta^2$$
$$+U_{,zz}\eta^4 - 2HU_{,v}\eta^4_{,v} = 0$$

$$\begin{aligned}&\eta^2_{,uu} - H_{,y}\eta^2_{,y} - H_{,u}\eta^2_{,v} - H_{,z}\eta^2_{,z} + H_{,uy}\eta^3 + H_{,uu}\eta^1 + H_{,uz}\eta^4 + 2H_{,y}\eta^3_{,u}\\&+2H_{,u}\eta^1_{,u} + 2H_{,z}\eta^4_{,u} = 0,\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}&\eta^2_{,uz} - H_{,z}\eta^2_{,v} + H_{,yz}\eta^3 + H_{,uz}\eta^1 + H_{,zz}\eta^4 + H_{,y}\eta^3_{,z} + H_{,u}\eta^1_{,z}\\&+H_{,z}\eta^4_{,z} + H_{,z}\eta^1_{,u} = 0,\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}&\eta^2_{,uy} - H_{,y}\eta^2_{,v} + H_{,yy}\eta^3 + H_{,uy}\eta^1 + H_{,yz}\eta^4 + H_{,y}\eta^3_{,y} + H_{,u}\eta^1_{,y}\\&+H_{,z}\eta^4_{,y} + H_{,y}\eta^1_{,u} = 0,\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}&H_{,yy}\eta^3 - H_{,y}\eta^3_{y} + \eta^3_{,uu} - H_{,u}\eta^3_{v} - H_{,z}\eta^3_{z} + 2H_{,y}\eta^1_{u}\\&+H_{,uy}\eta^1 + H_{,yz}\eta^4 = 0,\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}&\eta^4_{,uu} - H_{,y}\eta^4_{,y} - H_{,yz}\eta^3 + H_{,uz}\eta^1 + H_{,zz}\eta^4 + 2H_{,z}\eta^1_{,u}\\&-H_{,u}\eta^4_{,v} - H_{,z}\eta^4_{,z} = 0\end{aligned} \tag{3.48}$$

Sippel ve Goenner (1986) ile Keane ve Tupper'ın (2004) çalışmalarında ele alınan ve 3.1 bölümünde NGS vektör alanları bulunan izometri sınıfları durumunda bu denklem sisteminin çözülmesi sonucu kartezyen koordinatlarda Lie nokta simetrileri elde edilmiştir. NGS vektör alanları hesabında olduğu gibi (3.46) denklemlerinden Lie nokta simetri vektör alan bileşenleri $\xi, \eta^1, \eta^2, \eta^3$ ve η^4,

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 su + c_3 s + c_2 u + c_4,\\ \eta^1 &= c_1 u^2 + c_5 u + c_6,\\ \eta^2 &= y g_1(u) + c_{11} s + v(c_1 u + c_{12}) + z g_4(u) + g_5(u),\\ \eta^3 &= y(c_1 u + c_7) + c_8 z + g_2(u),\\ \eta^4 &= c_9 y + z(c_1 u + c_{10}) + g_3(u)\end{aligned} \tag{3.49}$$

şeklinde hesaplanır. Kalan (3.44) - (3.48) denklemlerinde bu bileşenlerin kullanılması sonucu kısıtlama bağıntıları,

$$
\begin{aligned}
&u\left[H_{,uu}c_5+3H_u c_1\right]+u^2\left[H_{,uu}c_1\right]+uy\left[H_{,uy}c_1\right]+uz\left[H_{,uz}c_1\right]\\
&\quad +y\left[H_{,uy}c_7+H_{,uz}c_9+2H_{,y}c_1+g_{1,uu}\right]\\
&\quad +z\left[H_{,uy}c_8+H_{,uz}c_{10}+2H_{,z}c_1+g_{4,uu}\right]+g_{5,uu}-H_{,y}g_1(u)\\
&\quad -H_{,u}c_{12}-H_{,z}g_4(u)+H_{,uy}g_2(u)+H_{,uu}c_6+H_{,uz}g_3(u)\\
&\quad +2H_{,y}g_{2,u}+2H_{,u}c_5+2H_{,z}g_{3,u}=0,
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

$$
\begin{aligned}
&u\left[H_{,uy}c_5+2H_y c_1\right]+u^2\left[H_{,uy}c_1\right]+uy\left[H_{,yy}c_1\right]+uz\left[H_{,yz}c_1\right]\\
&\quad +y\left[H_{,yy}c_7+H_{,yz}c_9\right]+z\left[H_{,yy}c_8+H_{,yz}c_{10}\right]+g_{1,u}+H_{,yy}g_2(u)\\
&\quad +H_{,uy}c_6-H_{,y}c_{12}+H_{,yz}g_3(u)+H_{,y}c_7+H_{,z}c_9+H_{,y}c_5=0,
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

$$
\begin{aligned}
&u\left[H_{,uz}c_5+2H_z c_1\right]+u^2\left[H_{,uz}c_1\right]+uy\left[H_{,yz}c_1\right]+uz\left[H_{,zz}c_1\right]\\
&\quad +y\left[H_{,yz}c_7+H_{,zz}c_9\right]+z\left[H_{,yz}c_8+H_{,zz}c_{10}\right]+g_{4,u}\\
&\quad -H_{,z}c_{12}+H_{,yz}g_2(u)+H_{,uz}c_6+H_{,zz}g_3(u)+H_{,y}c_8\\
&\quad +H_{,z}c_{10}+H_{,z}c_5=0
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

$$
\begin{aligned}
&u\left[H_{,uy}c_5+3H_y c_1\right]+u^2\left[H_{,uy}c_1\right]+uy\left[H_{,yy}c_1\right]+uz\left[H_{,yz}c_1\right]\\
&\quad +y\left[H_{,yy}c_7+H_{,yz}c_9\right]+z\left[H_{,yy}c_8+H_{,yz}c_{10}\right]+g_{2,uu}+H_{,yy}g_2(u)\\
&\quad +H_{,uy}c_6+H_{,yz}g_3(u)-H_{,y}c_7+2H_{,y}c_5-H_{,z}c_8=0,
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

$$
\begin{aligned}
&u\left[H_{,uz}c_5+3H_z c_1\right]+u^2\left[H_{,uz}c_1\right]+uy\left[H_{,yz}c_1\right]+uz\left[H_{,zz}c_1\right]\\
&\quad +y\left[H_{,yz}c_7+H_{,zz}c_9\right]+z\left[H_{,yz}c_8+H_{,zz}c_{10}\right]+g_{3,uu}-H_{,y}c_9\\
&\quad +H_{,yz}g_2(u)\quad +H_{,uz}c_6+H_{,zz}g_3(u)+2H_{,z}c_5-H_{,z}c_{10}=0,
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

olur. Dikkate alınan izometri sınıflarının büyük bir kısmı kutupsal koordinatlarda verildiği için (3.2) Lagrangian'ı kullanılarak kutupsal koordinatlardaki jeodezik denklemlerine ait yetmiş adet Lie nokta simetrisi denklem sistemi elde edilir. Kutupsal koordinatlarda jeodezik denklemleri,

$$
\begin{aligned}
&E^1: \ddot{u}-U_{,v}=0,\\
&E^2: \ddot{v}+2HU_{,v}+H_{,u}\dot{u}^2+2H_{,r}\dot{u}\dot{r}+2H_{,\theta}\dot{u}\dot{\theta}-U_{,u}=0,\\
&E^3: \ddot{r}+H_{,r}\dot{u}^2-r\dot{\theta}^2+U_{,r}=0,\\
&E^4: \ddot{\theta}+\tfrac{H_{,\theta}}{r^2}\dot{u}^2+\tfrac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}+\tfrac{1}{r^2}U_{,\theta}=0
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

şeklindedir. Bu denklemlere ait Lie nokta simetri denklemleri ise

$$2\eta^1_{,su}-\xi_{,ss}-3U_{,v}\xi_{,u}+2HU_{,v}\xi_{,v}-U_{,u}\xi_{,v}+U_{,r}\xi_{,r}+\tfrac{U_{,\theta}\xi_{,\theta}}{r^2}=0,$$

$$\eta^1_{,sv}-U_{,v}\xi_{,v}=0,\qquad \eta^1_{,rs}-U_{,v}\xi_{,r}=0,\qquad \eta^1_{,s\theta}-U_{,v}\xi_{,\theta}=0,$$

$$\eta^1_{,uu} - 2\xi_{,su} - H_{,u}\eta^1_{,v} - H_{,r}\eta^1_{,r} - \frac{H_{,\theta}\eta^1_{,\theta}}{r^2} = 0, \qquad \eta^1_{,uv} - \xi_{,sv} = 0,$$

$$\eta^1_{,ru} - \xi_{,rs} - H_{,r}\eta^1_{,v} = 0, \qquad \eta^1_{,\theta u} - \xi_{,s\theta} - H_{,\theta}\eta^1_{,v} = 0, \qquad \eta^1_{,vv} = 0,$$

$$\eta^1_{,rv} = 0, \qquad \eta^1_{,\theta v} = 0, \qquad \eta^1_{,rr} = 0, \qquad \eta^1_{,r\theta} - \frac{\eta^1_{,\theta}}{r} = 0,$$

$$r\eta^1_{,r} + \eta^1_{,\theta\theta} = 0, \qquad \xi_{,uu} + H_{,u}\xi_{,v} + H_{,r}\xi_{,r} + \frac{H_{,\theta}\xi_{,\theta}}{r^2} = 0, \quad \xi_{,uv} = 0,$$

$$\xi_{,vv} = 0, \qquad H_{,r}\xi_{,v} - \xi_{,ru} = 0, \qquad H_{,\theta}\xi_{,v} - \xi_{,\theta u} = 0, \qquad \xi_{,rv} = 0,$$

$$\xi_{,\theta v} = 0, \qquad \xi_{,rr} = 0, \qquad \frac{\xi_{,\theta}}{r} - \xi_{,r\theta} = 0, r\xi_{,r} + \xi_{,\theta\theta} = 0,$$

$$\eta^1_{,ss} + U_{,v}\eta^1_{,u} - 2U_{,v}\xi_{,s} - 2HU_{,v}\eta^1_{,v} + U_{,u}\eta^1_{,v} - U_{,r}\eta^1_{,r} - \frac{U_{,\theta}\eta^1_{,\theta}}{r^2} - U_{,uv}\eta^1$$
$$-U_{,vv}\eta^2 - U_{,rv}\eta^3 - U_{,\theta v}\eta^4 = 0,$$

$$\eta^2_{,su} + 2HU_{,v}\xi_{,u} - U_{,u}\xi_{,u} + H_{,u}\eta^1_{,s} + H_{,r}\eta^3_{,s} + H_{,\theta}\eta^4_{,s} = 0,$$

$$2\eta^2_{,sv} - \xi_{,ss} - U_{,v}\xi_{,u} + 6HU_{,v}\xi_{,v} - 3U_{,u}\xi_{,v} + U_{,r}\xi_{,r} + \frac{U_{,\theta}\xi_{,\theta}}{r^2} = 0,$$

$$\eta^2_{,rs} + 2HU_{,v}\xi_{,r} - U_{,u}\xi_{,r} + H_{,r}\eta^1_{,s} = 0,$$

$$\eta^2_{,s\theta} + 2HU_{,v}\xi_{,\theta} - U_{,u}\xi_{,\theta} + H_{,\theta}\eta^1_{,s} = 0,$$

$$\eta^2_{,uv} - \xi_{,su} + H_{,u}\eta^1_{,v} + H_{,r}\eta^3_{,v} + H_{,\theta}\eta^4_{,v} = 0,$$

$$\eta^2_{,vv} - 2\xi_{,sv} = 0, \qquad \eta^2_{,rv} - \xi_{,rs} + H_{,r}\eta^1_{,v} = 0,$$

$$\eta^2_{,\theta v} - \xi_{,s\theta} + H_{,\theta}\eta^1_{,v} = 0, \qquad \eta^2_{,rr} + 2H_{,r}\eta^1_{,r} = 0,$$

$$\eta^2_{,r\theta} - \frac{\eta^2_{,\theta}}{r} + H_{,r}\eta^1_{,\theta} + H_{,\theta}\eta^1_{,r} = 0, \qquad r\eta^2_{,r} + \eta^2_{,\theta\theta} + 2H_{,\theta}\eta^1_{,\theta\theta} = 0, \tag{3.56}$$

$$\eta^2_{,ss} + U_{,v}\eta^2_{,u} - 2HU_{,v}\eta^2_{,v} + U_{,u}\eta^2_{,v} + 4HU_{,v}\xi_{,s} - 2U_{,u}\xi_{,s} - U_{,r}\eta^2_{,r} - \frac{U_{,\theta}\eta^2_{,\theta}}{r^2}$$
$$+\left(2H_{,u}U_{,v} + 2HU_{,uv}\right)\eta^1 + 2HU_{,vv}\eta^2 + \left(2H_{,r}U_{,v} + 2HU_{,rv}\right)\eta^3$$
$$+\left(2H_{,\theta}U_{,v} + 2HU_{,\theta v}\right)\eta^4 - U_{,uu}\eta^1 - U_{,uv}\eta^2 - U_{,ru}\eta^3 - U_{,\theta u}\eta^4 = 0,$$

$$\eta^2_{,su} + U_{,r}\xi_{,u} + H_{,r}\eta^1_{,s} = 0, \quad \eta^3_{,sv} + U_{,r}\xi_{,v} = 0,$$

$$2\eta^3_{,rs} - \xi_{,ss} - U_{,v}\xi_{,u} + 2HU_{,v}\xi_{,v} - U_{,u}\xi_{,v} + 3U_{,r}\xi_{,r} + \frac{U_{,\theta}\xi_{,\theta}}{r^2} = 0,$$

$$\eta^3_{,s\theta} + U_{,r}\xi_{,\theta} - r\eta^4_{,s} = 0,$$

$$\eta^3_{,uv} + H_{,r}\eta^1_{,v} = 0, \quad \eta^3_{,vv} = 0, \quad \eta^3_{,rv} - \xi_{,sv} = 0, \quad \eta^3_{,\theta v} - r\eta^4_{v} = 0,$$

$$\eta^3_{,ru} - \xi_{,su} - H_{,r}\eta^3_{,v} + H_{,r}\eta^1_{,r} = 0, \quad \eta^3_{,\theta u} - H_{,\theta}\eta^3_{,v} + H_{,r}\eta^1_{,\theta} - r\eta^4_{,u} = 0,$$

$$\eta^3_{,rr} - 2\xi_{,rs} = 0, \quad \eta^3_{,r\theta} - \xi_{,s\theta} - \frac{\eta^3_{\theta}}{r} - r\eta^4_{,r} = 0,$$

$$r\eta^3_{,r} + \eta^3_{,\theta\theta} - \eta^3 - 2r\eta^4_{,\theta} = 0,$$

$$\eta^3_{,ss} + U_{,v}\eta^3_{,u} + \left(-2HU_{,v} + U_{,u}\right)\eta^3_{,v} - U_{,r}\eta^3_{,r} + 2U_{,r}\xi_{,s} - \frac{U_{,\theta}\eta^3_{,\theta}}{r^2} + U_{,ru}\eta^1 + U_{,rv}\eta^2$$

$$U_{,rr}\eta^3 + U_{,r\theta}\eta^4 = 0,$$

$$\eta^4_{,sv} + \frac{H_{,\theta}\xi_{,v}}{r^2} = 0, \quad \eta^4_{,rs} + \frac{U_{,\theta}\xi_{,r}}{r^2} + \frac{\eta^4_{,s}}{r} = 0,$$

$$\eta^4_{,ru} - H_{,r}\eta^4_{,v} + \frac{H_{,\theta}\eta^1_{,r}}{r^2} + \frac{\eta^4_{,u}}{r} = 0, \quad \eta^4_{,su} + \frac{U_{,\theta}\xi_{,u}}{r^2} + \frac{H_{\theta}\eta^1_{,s}}{r^2} = 0,$$

$$2\eta^4_{,s\theta} - \xi_{,ss} - U_{,v}\xi_{,u} + 2HU_{,v}\xi_{,v} - U_{,u}\xi_{,v} + U_{,r}\xi_{,r} + \frac{3U_{,\theta}\xi_{,\theta}}{r^2} + \frac{2\eta^3_{,s}}{r} = 0,$$

$$\eta^4_{,uv} + \frac{H_{,\theta}\eta^1_{,v}}{r^2} = 0, \quad \eta^4_{,\theta u} - \xi_{,su} - H_{,\theta}\eta^4_{,v} + \frac{H_{,\theta}\eta^1_{,\theta}}{r^2} + \frac{\eta^3_{,u}}{r} = 0, \quad \eta^4_{,vv} = 0,$$

$$\eta^4_{,rv} + \frac{\eta^4_{,v}}{r} = 0, \quad \eta^4_{,\theta v} - \xi_{,sv} + \frac{\eta^3_{,v}}{r} = 0, \quad \eta^4_{,rr} + \frac{2\eta^4_{,r}}{r} = 0,$$

$$\eta^4_{,r\theta} - \xi_{,rs} - \frac{\eta^3}{r^2} + \frac{\eta^3_{,r}}{r} = 0, \quad \eta^4_{,\theta\theta} - 2\xi_{,s\theta} + r\eta^4_{,r} + \frac{2\eta^3_{,\theta}}{r} = 0,$$

$$\eta^4_{,ss} + U_{,v}\eta^4_{,u} - 2HU_{,v}\eta^4_{,v} + U_{,u}\eta^4_{,v} - U_{,r}\eta^4_{,r} - \frac{U_{,\theta}\eta^4_{,\theta}}{r^2} + \frac{2M_{,\theta}\xi_{,s}}{r^2} + \frac{U_{,\theta u}\eta^1}{r^2} + \frac{U_{,\theta v}\eta^2}{r^2}$$

$$+\frac{U_{,r\theta}\eta^3}{r^2} - \frac{2U_{,\theta}\eta^3}{r^3} + \frac{U_{,\theta\theta}\eta^4}{r^2} = 0$$

$$\eta^2_{,uu} - H_{,u}\eta^2_{,v} - H_{,r}\eta^2_{,r} - \frac{H_{,\theta}\eta^2_{,\theta}}{r^2} + H_{,uu}\eta^1 + H_{,ru}\eta^3 + H_{,\theta u}\eta^4 + 2H_{,u}\eta^1_{,u}$$

$$+2H_{,r}\eta^3_{,u} + 2H_{,\theta}\eta^4_{,\theta} = 0, \tag{3.57}$$

$$\eta^2_{,ru} - H_{,r}\eta^2_{,v} + H_{,u}\eta^1_{,r} + H_{,ru}\eta^1 + H_{,rr}\eta^3 + H_{,r\theta}\eta^4 + H_{,r}\eta^1_{,u} + H_{,r}\eta^3_{,s}$$

$$+H_{,\theta}\eta^4_{,r} = 0, \tag{3.58}$$

$$\eta^2_{,\theta u} - H_{,\theta}\eta^2_{,v} + H_{,u}\eta^1_{,\theta} + H_{,r}\eta^3_{,\theta} + H_{,\theta u}\eta^1 + H_{,r\theta}\eta^3 + H_{,\theta\theta}\eta^4 + H_{,\theta}\eta^1_{,u}$$

$$+H_{,\theta}\eta^4_{,\theta} = 0, \tag{3.59}$$

$$\eta^3_{,uu} - H_{,u}\eta^3_{,v} - H_{,r}\eta^3_{,r} - \frac{H_{,\theta}\eta^3_{,\theta}}{r^2} + H_{,ru}\eta^1 + H_{,rr}\eta^3 + H_{,r\theta}\eta^4$$

$$+2H_{,r}\eta^1_{,u} = 0, \tag{3.60}$$

$$\eta^4_{,uu} - H_{,u}\eta^4_{,v} - H_{,r}\eta^4_{,r} - \frac{H_{,\theta}\eta^4_{,\theta}}{r^2} + \frac{H_{,\theta u}\eta^1}{r^2} + \frac{H_{,r\theta}\eta^3}{r^2} - \frac{2H_{,\theta}\eta^3}{r^3} + \frac{H_{,\theta\theta}\eta^4}{r^2}$$

$$+\frac{H_{,\theta}\eta^1_{,u}}{r^2} = 0, \tag{3.61}$$

olarak bulunur. (3.57) – (3.61) denklemleri, kartezyen koordinatlarda olduğu gibi kısıtlama denklemlerini verecektir. Noether ayar simetrilerinde her sınıfta sabit olarak bulunan üç simetriye karşılık Lie nokta simetrilerinde bu sayı altıdır. Her sınıfta bulunan bu Lie nokta simetrileri $\boldsymbol{k} = \partial_v, \boldsymbol{X}_1 = u\partial_v, \boldsymbol{Y}_1 = \partial_s, \boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v, \boldsymbol{Y}_3 = u\partial_s$ ve $\boldsymbol{Y}_4 = s\partial_s$ şeklindedir. Noether ayar simetrileri hesaplanırken bütün sınıflar ve bu sınıflara ait metrik fonksiyonları verilmiştir. Bu fonksiyonlara karşılık gelen Lie nokta simetrileri Çizelge 3.4 ve Çizelge 3.5'de listelenmiştir.

Çizelge 3.4. A, B, C, D, Aiv, Biv, Civ ve Div sınıfları için Lie nokta simetrileri

Sınıf	Simetriler	Cebir
A	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1$	$L_6 \supset G_2$
A $Alt\ Durum\ a$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$	$L_7 \supset G_3$
A $Alt\ Durum\ b$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_3$	$L_7 \supset G_3$
B $Alt\ Durum\ a$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_4, \boldsymbol{X}_5$	$L_8 \supset G_4$
B $Alt\ Durum\ b$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_4, \boldsymbol{X}_5$	$L_9 \supset G_5$
C	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_6$	$L_7 \supset G_3$
C $Alt\ Durum\ a$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_6$	$L_7 \supset G_3$
D	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1$	$L_6 \supset G_2$
Aiv	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$	$L_8 \supset G_4$

Devamı sonraki sayfada.

Çizelge 3.4. A, B, C, D, Aiv, Biv, Civ ve Div sınıfları için Lie nokta simetrileri (devam)

Biv	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_7, \boldsymbol{X}_8, \boldsymbol{X}_9, \boldsymbol{X}_{10}, \boldsymbol{Y}_5, \boldsymbol{Y}_6, \boldsymbol{Z}_1$	$L_{14} \supset H_8 \supset G_7$
Civ	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_6, \boldsymbol{Z}_2$	$L_9 \supset H_5 \supset G_4$
Div	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$	$L_7 \supset G_3$

Çizelge 3.4'de verilen Lie nokta simetrilerinin açık şekilleri aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{X}_2 = \partial_u,$$

$$\boldsymbol{X}_3 = m(u\partial_u - v\partial_v) - \partial_\theta,$$

$$\boldsymbol{X}_4 = f(u)_{,u}(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)r\partial_v + f(u)(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)\partial_r$$
$$-r^{-1}f(u)(\sigma sin\theta - \rho cos\theta)\partial_\theta,$$

$f(u) = -usin(q/u)$: *Sınıf B, alt durum a*
$f(u) = -sin(\sqrt{2qu})$: *Sınıf B, alt durum b*

$$\boldsymbol{X}_5 = g(u)_{,u}(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)r\partial_v + g(u)(\sigma cos\theta + \rho sin\theta)\partial_r$$
$$-r^{-1}g(u)(\sigma sin\theta - \rho cos\theta)\partial_\theta,$$

$g(u) = -ucos(q/u)$: *Sınıf B, alt durum a*
$g(u) = -cos(\sqrt{2qu})$: *Sınıf B, alt durum b* (3.62)

$$\boldsymbol{X}_6 = \partial_\theta, \qquad \boldsymbol{X}_7 = u(\sigma\partial_y + \rho\partial_z),$$

$$\boldsymbol{X}_8 = (\rho\sigma z + \sigma y)\partial_y + (\rho\sigma y + \rho z)\partial_z, \qquad \boldsymbol{X}_9 = \sigma\partial_y + \rho\partial_z,$$

$$\boldsymbol{X}_{10} = (\sigma y + \rho z)\partial_v,$$

$$\boldsymbol{Y}_5 = (\sigma y + \rho z)\partial_s, \quad \boldsymbol{Y}_6 = s(\sigma\partial_y + \rho\partial_z),$$

$$\boldsymbol{Z}_1 = 2u\partial_u + y\partial_y + z\partial_z, \qquad \boldsymbol{Z}_2 = 2u\partial_u - v\partial_v + r\partial_r.$$

NGS vektör alanları Çizelge 3.3 ile verilen izometri sınıflarının karşılığı olan Lie nokta simetrileri Çizelge 3.5 ile verilmektedir. Çizelge 3.3 ile verilen izometri sınıflarından *Sınıf 3*, *Sınıf 4* ve *Sınıf 8* önceki çalışmalarda yapılan koordinat dönüşümü Lie nokta simetrilerinde yapılamadığı için hesaplanamamıştır. Kalan sınıflar çizelgede yer almaktadır.

Çizelge 3.5. İzometri sınıfları için Lie nokta simetrileri

Sınıf	Simetriler	Cebir
1	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1$	$L_6 \supset G_2$
$1i$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_{11}, \boldsymbol{X}_{12}, \boldsymbol{X}_{13}, \boldsymbol{X}_{14}, \boldsymbol{Y}_7, \boldsymbol{Y}_8$	$L_{12} \supset G_6$
2	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_6$	$L_7 \supset G_3$
$2iAlt\ Durum\ a$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_6$	$L_7 \supset G_3$
$2iAlt\ Durum\ b$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_6$	$L_7 \supset G_3$
$2ii$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_6$	$L_7 \supset G_3$
$2iiiAlt\ Durum\ a$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_6$	$L_7 \supset G_3$
$2iiiAlt\ Durum\ b$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_6$	$L_7 \supset G_3$
5	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_6, \boldsymbol{X}_{15}$	$L_8 \supset G_4$
$5i$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_6, \boldsymbol{X}_{15}$	$L_8 \supset G_4$
$5ii$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_6, \boldsymbol{X}_{15}$	$L_8 \supset G_4$
6	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_6$	$L_8 \supset G_4$
$6i$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_6$	$L_8 \supset G_4$
$6ii$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_6, \boldsymbol{Z}_2$	$N_9 \supset H_5 \supset G_4$
$6iii$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_6$	$L_8 \supset G_4$
$6iv$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_6, \boldsymbol{Z}_3$	$N_9 \supset H_5 \supset G_4$
7	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$	$L_8 \supset G_4$
$7i$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$	$L_8 \supset G_4$
$7ii$	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$	$L_8 \supset G_4$
9	$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_7, \boldsymbol{X}_8, \boldsymbol{X}_9,$ $\boldsymbol{X}_{10}, \boldsymbol{X}_{16}, \boldsymbol{Y}_5, \boldsymbol{Y}_6$	$L_{14} \supset G_8$

Çizelge 3.5'te verilen simetrilerin açık şekilleri aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_{11} = y\partial_v, \quad \boldsymbol{X}_{12} = y\partial_y, \quad \boldsymbol{X}_{13} = u\partial_y, \quad \boldsymbol{X}_{14} = \partial_y, \\
&\boldsymbol{X}_{15} = u\partial_u - v\partial_v, \quad \boldsymbol{X}_{16} = \sigma(u\partial_u - v\partial_v) + \partial_z, \\
&\boldsymbol{Y}_7 = s\partial_y, \quad \boldsymbol{Y}_8 = y\partial_s, \\
&\boldsymbol{Z}_3 = (2+\sigma)u\partial_u - \sigma v\partial_v + 2r\partial_r.
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

pp-dalga uzay-zamanları için simetri denklemleri hem NGS hem de LPS için hesaplandıktan sonra çalışmanın son bölümünde bu simetriler arasındaki ilişkiler aranmıştır.

4. SONUÇ

Genel görelilik teorisinin temel denklemleri olan Einstein alan denklemlerinin çözümlerinin bazı simetri kabulleri altında yapılabilmesi, ele alınan simetri türünü genel görelilik teorisi açısından çok önemli hale getirmektedir. Bununla birlikte; gerek Einstein alan denklemlerinin gerekse uzay-zamana ait Lagrange fonksiyonu ile ilişkili diferansiyel denklemlerin simetrilerinin belirlenmesi, söz konusu denklem sistemlerine çözüm bulabilmek için faydalı olabilir. Lagrange fonksiyoneli kullanılarak oluşturulan Noether simetri denklemlerinden, NGS vektör alanı ve jeodezik denklemlerine ait Lie nokta simetri denklemlerinden ise LPS vektör alanı bulunmaktadır

pp-dalga uzay-zamanı için yapılan NGS sınıflamasında ilk dikkat çeken özellik, bulunan NGS'lere ait her sınıfın en az üç boyutlu bir NGS cebri oluşturmasıdır. Bu cebirdeki NGS vektör alanları

$$\boldsymbol{k} = \partial_v \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{Y}_1 = \partial_s \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v \text{ ve } f = u \tag{4.3}$$

ile verilirler. Buradaki $\boldsymbol{k}$, null KV alanı olup $\boldsymbol{Y}_1$ ve $\boldsymbol{Y}_2$ öz olmayan NGS vektör alanlarıdır. Buna karşılık elde edilen Lie nokta simetrilerinde her sınıf en az altı boyutlu bir LPS cebri oluşturur ve bu cebri oluşturan LPS vektör alanları,

$$\boldsymbol{k} = \partial_v \qquad \boldsymbol{W} = u\partial_v \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{Y}_1 = \partial_s \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{Y}_2 = -s\partial_v \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{Y}_3 = u\partial_s \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{Y}_4 = s\partial_s \tag{4.8}$$

şeklindedir. Burada $\boldsymbol{W}$, affine kollinasyon vektör alanı, $\boldsymbol{Y}_3$ ve $\boldsymbol{Y}_4$ ise öz LPS vektör alanlarıdır. Bulgular kısmında elde edilen sonuçlardan yapılan gözlem şudur; KV alanlarına ait cebir, hem jeodezik denklemlerinden bulunan LPS vektör alanlarının hem de jeodezik Lagrangian'ı için elde edilen NGS vektör alanlarının birer alt cebridir. Ayrıca, pp-dalga uzay-zamanları için NGS cebri, LPS cebrinin bir alt cebri olarak ortaya çıkmaktadır.

NGS denklemlerinin (2.9) ile verilen şeklinden de görüleceği üzere, bir NGS vektör alanı hem KV alanı hem de HV alanı içerebilir. Fakat HV alanının tek başına bir NGS vektör alanı oluşturmadığı bulunmuştur. Örneğin Sınıf A durumunda hesaplanan bir NGS vektör alanı,

$$\boldsymbol{Y}_3 = 2s\partial_s + \boldsymbol{Z}_1 \tag{4.9}$$

olup burada $\boldsymbol{Z}_1 = 2v\partial_v + r\partial_r + \frac{2}{m}\partial_\theta$ HV alanıdır. Bu HV alanının ne bir NGS ve ne de bir LPS vektör alanı olmadığı dikkat çekicidir. Buna benzer birçok durum mevcuttur ve *A, C, Civ, Div, 1i, 2i, 2ii, 6ii, 6iv, 7i* ve *7ii* sınıflarında gözlenmiştir. Kalan sınıflarda bulunan NGS vektör alanları aynı şekilde LPS vektör alanları olarak da elde edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

ASLAM, A., JAMIL, M. and MYRZAKULOV, R. 2013. Noether Gauge Symmetry for the Bianchi Type I Model in f(T) Gravity. *Phys. Scr.*, 88 (2).

BRINKMANN, H.W. 1925. Einstein Spaces Which are Mapped Conformally on Each Other. *Math. Ann.*, 94 (1): 119-145.

BLUMAN, G.W. and KUMEI, S. 1989. Symmetries and Differential Equations. Springer, New York, 432 p.

CAPOZZIELLO, S. and LAMBIASE, G. 2000a. Higher Order Corrections to the Effective Gravitational Action from Noether Symmetry Approach. *Gen. Relativ. Gravit.*, 32 (2): 295-311.

CAPOZZIELLO, S. and LAMBIASE, G. 2000b. Selection Rules in Minisuperspace Quantum Cosmology. *Gen. Relativ. Gravit.*, 32(4): 673-696.

CAPOZZIELLO, S., MARTIN-MORUNA, P. and RUBANO, C. 2009. Exact f(R)-Cosmological Model Coming From the Request of the Existence of a Noether Symmetry. *AIP Conf. Proc.*, 1122: 213-216.

DE SOUZA, R.C. and KREMER, G.M. 2008. Noether Symmetry for Non-Minimally Coupled Fermion Fields. *Class.Quantum Grav.*, 25(22).

EHLERS, J. and KUNDT, W. 1962. Gravitation: An Introduction to Current Research. John Wiley & Sons, pp. 49-101, New York.

FEYNMAN, R.P. 1970. The Feynman Lectures on Physics. Addison Wesley Longman, USA, 1552 p.

GRON, O. and HERVIK, S. 2007. Einstein's General Theory of Relativity. Springer, New York, 538 p.

HALL, G.S. 2004. Symmetries and Curvature Structure in General Relativity. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 440 p.

HUSSAIN, I., JAMIL, M. and MAHOMED, F.M. 2012. Noether Gauge Symmetry Approach in f(R) Gravity. *Astrophys. Space Sci.*, 337(1): 373-377.

IBRAGIMOV, N.H. 1993. Lie Group Analysis of Differerential Equations, Vol. 1., CRC Press, USA, 448 p.

ISLAM, J.N. 2001. An Introduction to Mathematical Cosmology. Cambridge University Press, Cambridge, 262 p.

JAMIL, M., MAHOMED, F.M. and MOMENI, D. 2011. Noether Symmetry Approach in f(R)-Tachyon Model. *Phys. Lett. B*, 702 (5): 315-319.

JAMIL, M., ALI, S., MOMENI, D. and MYRZAKULOV, R. 2012. Bianchi Type I in Generalized Saez-Ballester theory via Noether Gauge Symmetry. *Eur. Phys. J. C*, 72(4).

JORDAN, P., EHLERS, J. und KUNDT, W. 1960. Exact Solutions of the Field Equations of the General Theory of Relativity (reprinted). *Gen. Relativ. Gravit*, 2: 2192-2280.

KEANE, A.J. and TUPPER, B.O.J. 2004. Conformal Symmetry Classes for PP-Wave Spacetimes. *Class.Quantum Grav.*, 21(8): 2037-2064.

KUCUKAKCA, Y. and CAMCI, U. 2012. Noether Gauge Symmetry for f(R) Gravity in Palatini Formalism. *Astrophys. Space Sci.*, 338(1): 211-216.

KWEYAMA, M.C., GOVINDER, K.S. and MAHARAJ, S. D. 2011. Noether and Lie Symmetries for Charged Perfect Fluids. *Class.Quantum Grav.*, 28(10).

MAARTENS, R. and MAHARAJ, S.D. 1991. Conformal Symmetries of PP-Waves. *Class.Quantum Grav.*, 8(3): 503-514.

NOETHER, E. 1918. Invariante Variationsprobleme. *Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, pp. 235-257.

OLVER, P.J. 1986. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer, New York, 497p.

PODOLSKY, J. and VESELY, K. 1998. Chaotic Motion in PP-Wave Spacetimes. *Class.Quantum Grav.*, 15(11): 3505-3521.

RYAN, M.P. and SHEPLEY C.S. 1975. Homogeneous Relativistic Cosmologies. Princeton University Press, New Jersey, 320 p.

SK, N. and SANYAL, A.K. 2012. Revisiting Noether Gauge Symmetry for f(R) Theory of Gravity. *Astrophys. Space Sci.*, 342(2): 549-555.

SANYAL, A.K., MODAK, B., RUBANO, C. and PIEDIPALUMBO, E. 2005. Noether Symmetry in the Higher Order Gravity Theory. *Gen. Relativ. Gravit.*, 37(2): 407-417.

SIPPEL, R. and GOENNER, H. 1986. Symmetry Classes of pp-Waves. *Gen. Relativ. Gravit.*, 18(12): 1229-1243.

STEPHANI, H. 1989. Differential Equations: Their Solution Using Symmetries. Cambridge University Press, USA, 260 p.

STEPHANI, H., KRAMER, D., MACCALLUM, M., HOENSELAERS, C. and HERLT, E. 2009. Exact Solutions of Einstein’s Field Equations. Cambridge University Press, Cambridge, 732 p.

TSAMPARLIS, M. and PALIATHANASIS, A. 2010a. Lie Symmetries of Geodesic Equations and Projective Collineations. *Nonlinear Dyn.*, 62(1-2): 203-214.

TSAMPARLIS, M. and PALIATHANASIS, A. 2010b. Lie and Noether Symmetries of Geodesic Equations and Collineation. *Gen. Relativ. Gravit.*, 42(12): 2957-2980.

TSAMPARLIS, M. and PALIATHANASIS, A. 2011. Two Dimensional Dynamical Systems Which Admit Lie and Noether Symmetries. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 44(17): 175202.

TSAMPARLIS, M. 2013. Geometrization of Lie and Noether Symmetries with Applications in Cosmology. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 453.

WEYL, H. 1952. Symmetry. Princeton University Press, New Jersey, 176 p.

ÖZGEÇMİŞ

AYDIN YILDIRIM 1984 yılında Antalya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2002 yılında girdiği İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Mühendisliği Bölümü'nden 2008 yılında Fizik Mühendisi olarak mezun oldu. 2011 yılından beri Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.