T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASAL VE EŞASAL ALTMODÜLLER YARDIMIYLA MODÜL VE HALKA KARAKTERİZASYONLARININ BELİRLENMESİ

Seçil ÇEKEN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2014

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASAL VE EŞASAL ALTMODÜLLER YARDIMIYLA MODÜL VE HALKA KARAKTERİZASYONLARININ BELİRLENMESİ

Seçil ÇEKEN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(Bu tez Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı ile desteklenmiştir.)

2014

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASAL VE EŞASAL ALTMODÜLLER YARDIMIYLA MODÜL VE HALKA KARAKTERİZASYONLARININ BELİRLENMESİ

Seçil ÇEKEN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 25/06/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN
Yrd. Doç. Dr. Sevda BARUT
Yrd. Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ
Yrd. Doç. Dr. Ayhan DİL

ÖZET

ASAL VE EŞASAL ALTMODÜLLER YARDIMIYLA MODÜL VE HALKA KARAKTERİZASYONLARININ BELİRLENMESİ

Seçil ÇEKEN

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mustafa ALKAN
Haziran 2014, 96 sayfa

Bu tezin amacı, eşasal altmodüllerin ve bu altmodüller yardımıyla tanımlanan bazı kavramların, modül ve halka karakterizasyonlarının belirlenmesinde nasıl kullanılabileceklerini ve bilinen modül sınıfları ile olan ilişkilerini araştırmaktır.

Birinci bölümde, halka ve modül kuramına ilişkin tez çalışmamızın sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı önbilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, literatürde eşasal altmodüllere ilişkin yer alan bazı sonuçlar verilmiştir. İkinci bölümden sonra gelen üç bölüm, tamamen özgün olacak şekilde düzenlenmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak değişmesiz halkalar üzerindeki eşasal modüllerin bazı karakterizasyonları verilmiş ve farklı modül sınıfları ile olan ilişkileri araştırılmıştır. Daha sonra, bir modülün eşasal bölüm modüllerinden yararlanılarak bu modülün ekli asalları ile ilgili birtakım sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, eşasal modül kavramı ile dar boyut kavramı arasındaki ilişkiler araştırılmış ve eşasal modül kavramından yararlanılarak max özelliğine sahip olan modüller için birtakım sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, eşasal radikal kavramı ele alınmış ve bu kavramdan yararlanılarak modüller ve halkalar için bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. Bu bölümde halkalardaki m-sistem kavramının modüller için duali olan m^*-sistem kavramı ortaya atılmış ve bir altmodülün eşasal radikali m^*-sistem kümeleri vasıtasıyla karakterize edilmiştir. Bunun yanısıra, bir modülün sokulu ile eşasal radikalinin ne zaman eşit olacağı sorusu ele alınmış ve bir halka üzerindeki her modülün bu eşitliği sağlamasının halka için ne anlama geldiği araştırılmıştır. Ayrıca belirli modüllerin eşasal radikallerinden yararlanılarak, basit halkaların ve sağ Artin halkaların bazı karakterizasyonları verilmiştir.

Beşinci bölümde, aşamalı halkalar üzerinde aşamalı eşasal ve eşasalımsı altmodül kavramları tanımlanmış ve bu altmodüllerin karakterizasyonlarına yer verilmiştir. Ayrıca değişmeli bir aşamalı Noether halka üzerindeki her aşamalı injektif modülün bir aşamalı sekonder gösterime sahip olduğu kanıtlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Eşasal altmodül, bir modülün ekli asalları, eşasal radikal, aşamalı eşasal altmodül, aşamalı eşasalımsı altmodül

JÜRİ: Doç. Dr. Mustafa ALKAN (Danışman)
Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN
Yrd. Doç. Dr. Sevda BARUT

Yrd. Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ
Yrd. Doç. Dr. Ayhan DİL

ABSTRACT

DETERMINATION OF CHARACTERIZATIONS OF MODULES AND RINGS WITH THE AID OF PRIME AND COPRIME SUBMODULES

Seçil ÇEKEN

PhD Thesis in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ALKAN
June 2014, 96 pages

The aim of this thesis is to investigate how the notion of coprime submodules and some other notions defined with the help of coprime submodules are used to determine characterizations of rings and modules and to figure out how these notions effect on some known module classes.

In the first chapter, some preliminary information concerning ring and module theory which will be used in the subsequent chapters is given. In the second chapter, some results concerning coprime submodules in the literature are given. It is organized in a way that after the second chapter, the three chapters are completely original.

In the third chapter, firstly, some characterizations of coprime modules over non-commutative rings are given and some relationships with the different module classes are investigated. Then, by using coprime quotient modules of a module, a number of results concerning attached primes of this module are obtained. Finally, some relationships between the notion of coprime module and the notion of hollow dimension are investigated and a number of results concerning modules with the max property are given by using the notion of coprime module.

In the fourth chapter, the notion of coprime radical is dealt with and some characterizations for rings and modules are obtained by using this notion. In this chapter, the notion of m^*-system which is the dual notion of m-systems in rings for modules is come up with and coprime radical of a submodule is characterized via m^*-system sets. In addition to this, the question that in which cases the coprime radical of a module is equal to the socle of this module is dealt with and the rings over which every module satisfies this equality are investigated. Furthermore, some characterizations of simple rings and right Artinian rings are given by using coprime radicals of certain modules.

In the fifth chapter, the notions of graded coprime and graded coprimary submodules over graded rings are defined and some characterizations of these submodules are given. It is also proved that every graded injective module has a graded secondary representation over a commutative graded Noetherian ring.

KEYWORDS: Coprime submodule, attached primes of a module, coprime radical, graded coprime submodule, graded coprimary submodule

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ALKAN (Supervisor)

Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN
Asst. Prof. Dr. Sevda BARUT
Asst. Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ
Asst. Prof. Dr. Ayhan DİL

ÖNSÖZ

Eşasal altmodüller, asal altmodüllerin dual kavramı olarak, 2001 yılında Yassemi tarafından ortaya atılmıştır. Eşasal altmodüller konusu, son yıllarda birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bu konu ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Yapılan bu çalışmalar, eşasal altmodül kavramının ve bunun yardımıyla tanımlanan bazı kavramların halka ve modüllerin sınıflandırılmasında önemli bir rol oynadığını ve bu altmodül sınıfının topolojik yapılar ile önemli bağlantılarının bulunduğunu ortaya koymuştur. Örneğin, 2002 yılında Annin, değişmeli olmayan halkalar üzerinde ekli asal idealleri çalışmak için eşasal modülleri kullanmıştır. 2010 yılında Abuhlail, bir modülün eşasal altmodüllerinin kümesi üzerinde bazı topolojilerin tanımlı olduğunu göstermiş ve halkaların Zariski topolojisine dual olabilecek bir topolojik uzayın varlığını araştırmıştır. Abuhlail'in bu çalışmasından sonra, eşasal altmodüller kullanılarak, topolojik kavramlar ile cebirsel kavramlar arasında önemli ilişkiler kurulabileceği anlaşılmıştır.

Eşasal modüller ve altmodüller, bugüne kadar genellikle değişmeli halkalar üzerinde ele alınarak çalışılmıştır. Daha genel halka yapıları üzerindeki araştırmalar ise bunlarla karşılaştırıldığında daha az yapılmıştır. Bu tez çalışmasında, eşasal altmodüller ve bu altmodüller yardımıyla tanımlanan bazı kavramlar, daha çok değişmeli olmayan halkalar üzerinde ele alınarak çalışılmış ve bu kavramların modül ve halka karakterizasyonlarının belirlenmesinde nasıl kullanılabilecekleri araştırılmıştır. Ayrıca, aşamalı halkalar üzerinde aşamalı eşasal ve eşasalımsı altmodül kavramları tanımlanmış ve bu yeni kavramların çeşitli özellikleri incelenmiştir. Bu tez çalışmasının, eşasal altmodüller ile aşamalı halkalar ve modüller konularının gelişimine önemli katkılar sağlayacağı ve bu alanlarda yeni araştırmalar yapılmasını teşvik edici nitelikte bir çalışma olacağı inancındayım.

Tez çalışmam sırasında ve bugüne kadar yaptığım tüm çalışmalarda bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşarak zamanını ve desteğini hiç esirgemeyen, akademik gelişimimde büyük katkıları bulunan değerli danışman hocam Doç. Dr. Mustafa Alkan'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerine katkılarından dolayı Glasgow Üniversitesi profesörlerinden Prof. Dr. Patrick F. Smith'e teşekkür ederim.

Tez çalışmamın bir kısmı TÜBİTAK tarafından sağlanan Yurtdışı Doktora Araştırma Burs Programı çerçevesinde ziyaret ettiğim Washington Üniversitesi Matematik Bölümü'nde gerçekleştirilmiştir. Başta Prof. Dr. James Zhang olmak üzere tüm Washington Üniversitesi Matematik Bölümü'ne misafirperverlikleri için teşekkür ederim.

Son olarak, hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman bana destek olan ve beni bugünlere getiren aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\subseteq$	kapsama
$\subsetneq$	kesin olarak kapsama
Mod-R	Sağ R-modüller sınıfı
$Hom_R(M,N)$	M'den N'ye R-modül homomorfizmalarının kümesi
M_R	Sağ R-modül
$_RM$	Sol R-modül
$\oplus_{i\in I}M_i$	M_i modüllerinin dik toplamı
$\Pi_{i\in I}M_i$	M_i modüllerinin dik çarpımı
$M_n(S)$	S halkası üzerindeki $n\times n$ tipinde matrisler halkası
$N\leq M$	N, M'nin altmodülü
$N\leq_e M$	N, M'nin esas altmodülü
$N<<M$	N, M'nin atık altmodülü
$Rad(M)$	M modülünün radikali
Ç$ek\,(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$G\ddot{o}r(f)$	f homomorfizmasının görüntüsü
$E(M)$	M modülünün injektif zarfı
$rad_M(N)$	N'nin M içindeki asal radikali
$Soc(M)$	M modülünün sokulu
$sec(M)$	M modülünün eşasal radikali
$Att(M)$	M modülünün ekli asallarının kümesi
$S^{-1}M$	M modülünün, S çarpımsal kümesine göre yerelleştirmesi
$ann_R(M)$	M modülünün R halkası içindeki sıfırlayanı
$(0:_M I)$	I idealinin M modülü içindeki sıfırlayanı
$h.dim(M)$	M modülünün dar boyutu
$R[x]$	R halkası üzerindeki x değişkenine bağlı polinomların halkası
$U(R)$	R halkasının birimsel elemanlarının kümesi
$Z(R)$	R halkasının merkezi
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
$N(R)$	R halkasının asal radikali
$\pi(R)$	R halkasının tüm asal ideallerinin kümesi
$\mu(R)$	R halkasının tüm minimal asal ideallerinin kümesi
$\sqrt{I}$	I idealinin asal radikali
$h(R)$	Aşamalı R halkasının homojen elemanlarının kümesi
$h(M)$	Aşamalı M modülünün homojen elemanlarının kümesi
$(\sigma)M$	Aşamalı M modülünün σ-süspansiyonu
$\mathbb{N}$	Negatif olmayan tamsayıların kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayıların kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Bu bölümde, halka ve modül kuramının, tez çalışmamızın sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı tanım ve sonuçları verilecektir. Halka ve modül kuramının bu bölümde değinilmeyen temel tanım ve sonuçları için Anderson ve Fuller'in (1992), Kasch'in (1981) ve Matsumara'nın (1986) kitaplarından yararlanılabilir.

Bu tez çalışması boyunca aksi belirtilmedikçe, ele aldığımız tüm halkalar birimli, modüller ise birimsel (unitary) sağ modüller olarak kabul edilecektir ve R birimli bir halka olarak alınacaktır.

"Sıfır bölensiz halka" ifadesi ile değişmeli olması gerekmeyen ve sıfır bölen içermeyen birimli bir halka kastedilecektir. "Tamlık bölgesi" ifadesi ile de birimli, değişmeli ve sıfır bölen içermeyen bir halka kastedilecektir.

Herhangi bir yapı koruyan dönüşüm (homomorfizma) 1-1 ise bu dönüşüme bir monomorfizma, örten ise epimorfizma ve hem 1-1 hem de örten ise izomorfizma denir. M ve N iki R-modül ise M'den N'ye tanımlanan tüm R-modül homomorfizmalarının toplamsal grubunu $Hom_R(M,N)$ ile göstereceğiz. M üzerindeki R-endomorfizmalarının halkasını da $End_R(M)$ ile göstereceğiz.

M bir sağ R-modül ve X, M'nin boştan farklı bir altkümesi olsun. R'nin, $Xr = (0)$ olacak şekildeki r elemanlarının kümesini $ann_R(X)$ ile göstereceğiz. $ann_R(X)$ kümesine *X'in R içindeki sıfırlayanı* denir. X, M'nin bir altmodülü ise $ann_R(X)$, R'nin bir idealidir. Şimdi Y, R'nin boştan farklı bir altkümesi olsun. M'nin, $\{m \in M : mY = (0)\}$ altkümesini $(0 :_M Y)$ ile göstereceğiz. $(0 :_M Y)$ kümesine *Y'nin M içindeki sıfırlayanı* denir. Y, R'nin bir sol ideali ise $(0 :_M Y)$, M'nin bir altmodülüdür. I, R'nin bir ideali ise sıfırlayanları I'yı içeren R-modüller aynı zamanda (R/I)-modül yapısına sahiptirler ve bu modüllerin R-altmodülleri ile (R/I)-altmodülleri aynıdır. Özel olarak, M'nin R-altmodülleri ile $(R/ann_R(M))$-altmodülleri aynı olur. Eğer $ann_R(M) = (0)$ ise bu durumda M'ye *faithful* R-modül denir. Dikkat edilirse $M \neq (0)$ ise M bir faithful $(R/ann_R(M))$-modüldür.

1.1. Esas ve Atık Altmodüller

Bu kesimde, modül teorinin temel taşlarından biri olan esas altmodüllerin ve esas altmodüllerin dual kavramı olan atık altmodüllerin tanımları ve bazı özellikleri verilecektir. Bu kesimde verilen bilgiler Goodearl ve Warfield (2004) ve Anderson ve Fuller (1992) kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 1.1.1 *M bir R-modül ve $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, M'nin altmodüllerinin bir ailesi olsun. $\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ toplamı bir dik toplam ise $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesine M'nin bağımsız altmodüllerinin bir ailesi denir.*

M bir R-modül ve $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, M'nin altmodüllerinin bir ailesi olsun. Dikkat edilirse; $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, M'nin bağımsız altmodüllerinin bir ailesidir ancak ve ancak her $\lambda \in \Lambda$ ve boştan farklı her $F \subseteq \Lambda\backslash\{\lambda\}$ sonlu altkümesi için $N_\lambda \cap (\sum_{i\in F} N_i) = (0)$'dır.

Tanım 1.1.2 *M bir R-modül ve $A \leq M$ olsun. M'nin sıfırdan farklı her C altmodülü için $A \cap C \neq (0)$ ise A'ya M'nin bir esas (essential) altmodülü, M'ye de A'nın bir esas genişlemesi (essential extension) denir ve $A \leq_e M$ ile gösterilir. M'nin sıfırdan farklı her altmodülü M içinde esas ise M'ye düzgün (uniform) modül denir.*

Önerme 1.1.3 *M bir R-modül olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(1) *$K \leq_e M$'dir ancak ve ancak her $0 \neq x \in M$ için öyle bir $r \in R$ vardır ki $0 \neq xr \in K$'dır.*

(2) *$A \leq B \leq M$ olsun. $A \leq_e M$'dir ancak ve ancak $A \leq_e B \leq_e M$'dir.*

(3) *$A \leq_e B \leq M$ ve $A' \leq_e B' \leq M$ ise $A \cap A' \leq_e B \cap B'$ olur.*

(4) *$f : N \longrightarrow M$ bir R-modül homomorfizması ve $A \leq_e M$ ise $f^{-1}(A) \leq_e N$'dir.*

(5) *$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, M'nin bağımsız altmodüllerinin bir ailesi olsun. Her $\alpha \in I$ için $A_\alpha \leq_e B_\alpha \leq M$ ise o zaman $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bağımsız bir ailedir ve $\oplus_{\alpha \in I} A_\alpha \leq_e \oplus_{\alpha \in I} B_\alpha$'dır. Tersine $\oplus_{\alpha \in I} A_\alpha \leq_e \oplus_{\alpha \in I} B_\alpha$ ise her $\alpha \in I$ için $A_\alpha \leq_e B_\alpha$'dır.*

Tanım 1.1.4 *M bir R-modül ve $S \leq M$ olsun. Eğer M'nin her T öz altmodülü için $M \neq S + T$ oluyorsa S'ye, M'nin atık (small) altmodülü denir ve $S << M$ ile gösterilir. M'nin her öz altmodülü atık ise M'ye dar (hollow) modül denir.*

Önerme 1.1.5 *M bir R-modül olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(1) *$K \leq N \leq M$ olsun. $N << M$'dir ancak ve ancak $K << M$ ve $N/K << M/K$'
dır.*

(2) *$H, K \leq M$ olsun. $H + K << M$'dir ancak ve ancak $H << M$ ve $K << M$'dir.*

(3) *$K << M$ ve $f : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması ise $f(K) << N$'dir. Özel olarak, $K << M \leq N$ ise $K << N$'dir.*

(4) *$K_1 \leq M_1 \leq M$, $K_2 \leq M_2 \leq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. $K_1 \oplus K_2 << M$'dir ancak ve ancak $K_1 << M_1$ ve $K_2 << M_2$'dir.*

(5) *$K \leq L \leq M$, $K << M$ ve L, M'nin bir dik toplananı ise $K << L$'dir.*

1.2. Üretme ve Eşüretme Kavramları

Bu kesimde, modül kategorilerinde üretme ve eşüretme kavramları incelenecektir. Bu kesimde verilen bilgiler Anderson ve Fuller (1992) kaynağından alınmıştır.

Tanım 1.2.1 *$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı ve M bir R-modül olsun.*

(1) $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, $\mathcal{U}$ içinde bir modül ailesi olmak üzere, $\oplus_{\alpha\in A}U_\alpha \longrightarrow M \longrightarrow 0$ şeklinde bir epimorfizma varsa M'ye, $\mathcal{U}$ ile üretilmiş modül (ya da $\mathcal{U}$, M'yi üretir) denir. A indis kümesi sonlu ise M'ye, $\mathcal{U}$ ile sonlu üretilmiştir denir. $\mathcal{U} = \{U\}$ ise kısaca U, M'yi üretir denir.

(2) $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, $\mathcal{U}$ içinde bir modül ailesi olmak üzere, $0 \longrightarrow M \longrightarrow \Pi_{\alpha\in A}U_\alpha$ şeklinde bir monomorfizma varsa M'ye, $\mathcal{U}$ ile eşüretilmiş modül (ya da $\mathcal{U}$, M'yi eşüretir) denir. A indis kümesi sonlu ise M'ye, $\mathcal{U}$ ile sonlu eşüretilmiştir denir. $\mathcal{U} = \{U\}$ ise kısaca U, M'yi eşüretir denir.

$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı olsun. $\mathcal{U}$ ile üretilen tüm modüllerin sınıfını $Gen(\mathcal{U})$ ile, $\mathcal{U}$ ile eşüretilen tüm modüllerin sınıfını da $Cog(\mathcal{U})$ ile göstereceğiz. Ayrıca $FGen(\mathcal{U})$ ve $FCog(\mathcal{U})$ ile sırasıyla $\mathcal{U}$ ile sonlu üretilen ve $\mathcal{U}$ ile sonlu eşüretilen modüllerin sınıfını göstereceğiz.

Tanım 1.2.2 *$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı ve M bir R-modül olsun. $Gen(\mathcal{U}) = Gen(M)$ ise M'ye $Gen(\mathcal{U})$ için bir üreteç (generator) denir. $Cog(\mathcal{U}) = Cog(M)$ ise M'ye $Cog(\mathcal{U})$ için bir eşüreteç (cogenerator) denir.*

$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı ve $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ olsun. $\mathcal{U}$ içindeki her modül $\mathcal{U}'$ içindeki bir modüle izomorfik ise $\mathcal{U}'$ sınıfına $\mathcal{U}$'nun bir *temsilciler sınıfı* (class of representatives) denir. Ek olarak $\mathcal{U}'$ içindeki herhangi iki modül birbirine izomorfik değilse $\mathcal{U}'$ sınıfına *fazlalıksız bir temsilciler sınıfı* denir. $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}$'nun bir temsilciler sınıfı ise $Gen(\mathcal{U}) = Gen(\mathcal{U}')$ ve $Cog(\mathcal{U}) = Cog(\mathcal{U}')$ olduğu açıktır.

Önerme 1.2.3 *$\mathcal{U}$, bir $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ temsilciler kümesine sahip ise o zaman,*

(1) $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ $Gen(\mathcal{U})$ için bir üreteçtir.

(2) $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ ve $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ $Cog(\mathcal{U})$ için birer eşüreteçtir.

$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı ve M bir R-modül olsun. Aşağıdaki kümeleri göz önüne alalım.

$$Tr_M(\mathcal{U}) = \sum\{G\ddot{o}r(\theta) : \theta \in Hom_R(U, M), U \in \mathcal{U}\}$$

$$Rej_M(\mathcal{U}) = \bigcap\{\text{Ç}ek(h) : h \in Hom_R(M, U), U \in \mathcal{U}\}$$

Dikkat edilirse; $Tr_M(\mathcal{U})$ ve $Rej_M(\mathcal{U})$ kümeleri M'nin altmodülleridir.

Önerme 1.2.4 *$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı ve M bir R-modül olsun. O zaman,*

(1) $Tr_M(\mathcal{U})$, *M'nin $\mathcal{U}$ ile üretilen en büyük altmodülüdür.*

(2) $Rej_M(\mathcal{U})$, *M/K, $\mathcal{U}$ ile eşüretilecek şekilde M'nin en küçük K altmodülüdür.*

Sonuç 1.2.5 *$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı ve M bir R-modül olsun. O zaman,*

(1) *$\mathcal{U}$, M'yi üretir ancak ve ancak $Tr_M(\mathcal{U}) = M$'dir.*

(2) *$\mathcal{U}$, M'yi eşüretir ancak ve ancak $Rej_M(\mathcal{U}) = (0)$'dır.*

Önerme 1.2.6 *$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı, M ile N birer R-modül ve $f : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması olsun. O zaman, $f(Tr_M(\mathcal{U})) \subseteq Tr_N(\mathcal{U})$ ve $Rej_M(\mathcal{U}) \subseteq Rej_N(\mathcal{U})$ olur.*

Önerme 1.2.7 *$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı, M ile N birer R-modül ve $f : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması olsun. O zaman,*

(1) *f 1-1 ve $Tr_N(\mathcal{U}) \subseteq Gör(f)$ ise $f(Tr_M(\mathcal{U})) = Tr_N(\mathcal{U})$ olur.*

(2) *f örten ve $Çek(f) \subseteq Rej_M(\mathcal{U})$ ise $f(Rej_M(\mathcal{U})) = Rej_N(\mathcal{U})$ olur.*

Önerme 1.2.8 *$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı ve $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ bir modül ailesi olsun. O zaman,*

$$Tr_{(\oplus_{\alpha\in A}M_\alpha)}(\mathcal{U}) = \oplus_{\alpha\in A}Tr_{M_\alpha}(\mathcal{U}) \text{ ve } Rej_{(\oplus_{\alpha\in A}M_\alpha)}(\mathcal{U}) = \oplus_{\alpha\in A}Rej_{M_\alpha}(\mathcal{U})$$

olur.

Önerme 1.2.9 *G, $Gen(\mathcal{U})$ için bir üreteç ve C, $Cog(\mathcal{U})$ için bir eşüreteç olsun. O zaman, $Tr_M(\mathcal{U}) = Tr_M(G)$ ve $Rej_M(\mathcal{U}) = Rej_M(C)$'dir. Özel olarak $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ bir modül ailesi ise,*

$$Tr_M(\bigoplus_{\alpha\in A} U_\alpha) = \sum_{\alpha\in A} Tr_M(U_\alpha) \text{ ve}$$
$$Rej_M(\prod_{\alpha\in A} U_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} Rej_M(U_\alpha) = Rej_M(\bigoplus_{\alpha\in A} U_\alpha)$$

olur.

1.3. Yarı-basit Modüller

Bir modülün belirli altmodüllerinin dik toplamı olarak yazılabilmesi, bu modülün sınıflandırılmasında ve bazı cebirsel özelliklerinin belirlenmesinde büyük önem taşır. Örneğin, her vektör uzayı 1-boyutlu altuzaylarının dik toplamı olarak yazılabilir ve bir vektör uzayının her altuzayı bu vektör uzayının bir dik toplananıdır. Bu kesimde, vektör uzaylarının bu ayrışım özelliklerine benzer özellikler taşıyan bir modül sınıfı olan yarı-basit modüller incelenecektir. Bu kesimde verilen bilgiler Anderson ve Fuller (1992) kaynağından alınmıştır.

Tanım 1.3.1 *M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M'nin kendisinden ve sıfırdan başka bir altmodülü yoksa M'ye basit (simple) modül denir.*

Önerme 1.3.2 *T bir sağ R-modül olsun. T basit modüldür ancak ve ancak I, R'nin bir maksimal sağ ideali olmak üzere $T \simeq R/I$'dır.*

Tanım 1.3.3 *$(T_\alpha)_{\alpha\in A}$, M'nin basit altmodüllerinin bir ailesi olsun. $M = \oplus_{\alpha\in A} T_\alpha$ parçalanışı varsa M'ye yarı-basit (semisimple) modül denir.*

Teorem 1.3.4 *M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *M yarı-basit modüldür.*

(2) *M basit modüller ile üretilir.*

(3) *M basit altmodüllerin toplamıdır.*

(4) *M'nin her altmodülü M'nin bir dik toplananıdır.*

(5) *R-modüllerin her tam dizisi*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

parçalanır.

Tüm basit sağ R-modüllerin sınıfını $\mathcal{B}$ ile göstereceğiz. Teorem 1.3.4'e göre yarı-basit sağ R-modüller sınıfı $Gen(\mathcal{B})$ sınıfıdır.

Tanım 1.3.5 *M bir sağ R-modül olsun. $Soc(M) = Tr_M(\mathcal{B})$ olarak tanımlanan $Soc(M)$ altmodülüne M'nin sokulu (socle) denir.*

Önerme 1.3.6 *M bir sağ R-modül olsun.*

$$Soc(M) = \sum\{K \leq M : K, M\text{'nin basit altmodülü}\} = \bigcap\{L \leq M : L \leq_e M\}$$

olur.

Önerme 1.3.7 *M ve N R-modüller ve $f : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması olsun.*

$$f(Soc(M)) \leq Soc(N)$$

olur.

Önerme 1.3.8 *M bir R-modül ve $K \leq M$ olsun.*

$$Soc(K) = K \cap Soc(M) \text{ ve } Soc(Soc(M)) = Soc(M)$$

olur.

Önerme 1.3.9 *$\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ bir modül ailesi olsun.*

$$Soc(\oplus_{\alpha\in A} M_\alpha) = \oplus_{\alpha\in A} Soc(M_\alpha)$$

olur.

R halkasının tüm maksimal sağ idealleri bir küme oluşturduğundan, Önerme 1.3.2'den dolayı basit sağ R-modüller sınıfının bir temsiciler kümesi vardır.

Önerme 1.3.10 *$\mathcal{F}$ basit sağ R-modüller sınıfının bir temsilciler kümesi ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman,*

$$Soc(M) = Tr_M(\mathcal{F}) = Tr_M(\bigoplus_{T\in\mathcal{F}} T) = \sum_{T\in\mathcal{F}} Tr_M(T)$$

olur.

Tanım 1.3.11 *$\mathcal{F}$ basit sağ R-modüller sınıfının bir temsilciler kümesi ve M bir sağ R-modül olsun. $Tr_M(T) = M$ olacak şekilde bir $T \in \mathcal{F}$ varsa M'ye homojen yarı-basit modül denir.*

Aşağıda tanımı verilen, bir modülün radikali kavramı, sokul kavramının dualidir.

Tanım 1.3.12 *M bir sağ R-modül olsun. $Rad(M) = Rej_M(\mathcal{B})$ olarak tanımlanan $Rad(M)$ altmodülüne M modülünün radikali denir.*

Önerme 1.3.13 *M bir sağ R-modül olsun. O zaman,*

$$Rad(M) = \bigcap\{N \leq M : N, M\text{'nin maksimal altmodülü}\} = \sum\{K \leq M : K << M\}$$

olur.

Tanım 1.3.14 *R halkasının tüm maksimal sağ ideallerinin arakesitine R'nin Jacobson radikali denir. R'nin Jacobson radikali $J(R)$ ile gösterilir.*

Dikkat edilirse; $J(R) = Rad(R_R)$'dir.

Önerme 1.3.15 *M ve N birer R-modül ve $f : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması olsun. O zaman,*

(1) $f(Rad(M)) \leq Rad(N)$*'dir.*

(2) *f bir epimorfizma ve Çek $(f) \leq Rad(M)$ ise $Rad(N) = f(Rad(M))$'dir. Özel olarak $Rad(M/Rad(M)) = (0)$ olur.*

Önerme 1.3.16 *$\mathcal{F}$ basit sağ R-modüller sınıfının bir temsilciler kümesi ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman,*

$$Rad(M) = Rej_M(\prod_{T\in\mathcal{F}} T) = Rej_M(\bigoplus_{T\in\mathcal{F}} T) = \bigcap_{T\in\mathcal{F}} Rej_M(T)$$

olur.

Önerme 1.3.17 *M bir sağ R-modül olsun. M'nin her öz altmodülü bir maksimal altmodül tarafından kapsanıyor ise, $Rad(M) << M$'dir.*

Önerme 1.3.18 *$\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ bir modül ailesi olsun. O zaman,*

$$Rad(\oplus_{\alpha\in A}M_\alpha) = \oplus_{\alpha\in A}Rad(M_\alpha)$$

olur.

1.4. Sonlu Üretilmiş ve Sonlu Eşüretilmiş Modüller

Bu kısımda, sonlu üretilmiş ve sonlu eşüretilmiş modül kavramları ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir. Bu kısımda verilen bilgiler Anderson ve Fuller (1992) kaynağından alınmıştır.

Tanım 1.4.1 *M bir R-modül olsun. M'nin altmodüllerinin her $\mathcal{A}$ altkümesi için $\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} A = M$ olması sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ için $\sum\limits_{B\in\mathcal{F}} B = M$ olmasını gerektiriyorsa, M'ye sonlu üretilmiş (finitely generated) modül denir.*

Önerme 1.4.2 *M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *M sonlu üretilmiştir.*

(2) *$(f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow M)_{\alpha\in A}$ R-modül homomorfizmalarının bir kümesi ve $M = \sum_{\alpha\in A} Gör(f_\alpha)$ ise $M = \sum_{\beta\in F} Gör(f_\beta)$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq A$ altkümesi vardır.*

(3) *R-modüllerin her $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ kümesi ve $f : \oplus_{\alpha\in A}U_\alpha \longrightarrow M$ epimorfizması için sonlu bir $F \subseteq A$ altkümesi ve bir $g : \oplus_{\beta\in F}U_\beta \longrightarrow M$ epimorfizması vardır.*

(4) *M'yi üreten her modül M'yi sonlu üretir.*

(5) *M, sonlu bir üreteç kümesi kapsar.*

Tanım 1.4.3 *M bir R-modül olsun. M'nin altmodüllerinin her $\mathcal{A}$ altkümesi için $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A = (0)$ olması sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ için $\bigcap\limits_{B\in\mathcal{F}} B = (0)$ olmasını gerektiriyorsa, M'ye sonlu eşüretilmiş (finitely cogenerated) modül denir.*

Önerme 1.4.4 *M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *M sonlu eşüretilmiştir.*

(2) *$(f_\alpha : M \longrightarrow U_\alpha)_{\alpha\in A}$ R-modül homomorfizmalarının bir kümesi ve $\cap_{\alpha\in A}Çek(f_\alpha) = (0)$ ise $(0) = \cap_{\beta\in F}Çek(f_\beta)$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq A$ altkümesi vardır.*

(3) *R-modüllerin her $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ kümesi ve $f : M \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ monomorfizması için sonlu bir $F \subseteq A$ altkümesi ve bir $g : M \longrightarrow \prod_{\beta\in F} U_\beta$ monomorfizması vardır.*

Sonuç 1.4.5 *M sonlu eşüretilmiş bir R-modül ise M'yi eşüreten her modül M'yi sonlu eşüretir.*

Teorem 1.4.6 *M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) M sonlu üretilmiştir ancak ve ancak $M/Rad(M)$ sonlu üretilmiştir ve $Rad(M) << M$'dir.

(2) M sonlu eşüretilmiştir ancak ve ancak $Soc(M)$ sonlu eşüretilmiştir ve $Soc(M) \leq_e M$'dir.

Sonuç 1.4.7 *M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) M sonlu üretilmiş ise M'nin bir maksimal altmodülü vardır.

(2) M sonlu eşüretilmiş ise M'nin bir basit altmodülü vardır.

Önerme 1.4.8 *M yarı-basit bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M sonlu eşüretilmiştir.

(2) $M = T_1 \oplus ... \oplus T_n$ olacak şekilde M'nin $T_1, ..., T_n$ basit altmodülleri vardır.

(3) M sonlu üretilmiştir.

Önerme 1.4.9 *M bir R-modül olsun. M sonlu eşüretilmiştir ancak ve ancak $Soc(M)$ sonlu üretilmiştir ve $Soc(M) \leq_e M$'dir.*

Önerme 1.4.10 *M bir R-modül ve $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ olsun. O zaman, M sonlu üretilmiştir (sonlu eşüretilmiştir) ancak ve ancak her bir M_i $(i = 1, ..., n)$ sonlu üretilmiştir (sonlu eşüretilmiştir).*

1.5. Noether ve Artin Modüller

Bu kesimde, bir modülün altmodüllerinin kümesi üzerindeki zincir koşulları vasıtasıyla tanımlanan Noether ve Artin modüllerin bazı özellikleri verilecektir. Bu kesimde verilen bilgiler Anderson ve Fuller (1992) ve Lam (1991) kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 1.5.1 *M bir R-modül olsun. M modülü tüm altmodülleri üzerinde artan (azalan) zincir koşulunu sağlarsa M'ye Noether (Artin) modül denir.*

Tanım 1.5.2 *R halkası sağ (sol) R-modül olarak Noether ise, R'ye sağ (sol) Noether halka denir.*

R halkası sağ (sol) R-modül olarak Artin ise, R'ye sağ (sol) Artin halka denir.

R hem sol hem de sağ Noether (Artin) bir halka ise R'ye Noether (Artin) halka denir.

Aşağıdaki örnek, genel olarak her sol Noether halkanın sağ Noether halka olmadığını göstermektedir.

Örnek 1.5.3 *S Noether ve cisim olmayan bir tamlık bölgesi ve R, S'nin kesirler cismi olsun. O zaman $A = \begin{bmatrix} R & R \\ (0) & S \end{bmatrix}$ halkası sol Noether halkadır ancak sağ Noether halka değildir.*

Aşağıdaki örnek, genel olarak her sol Artin halkanın sağ Artin halka olmadığını göstermektedir.

Örnek 1.5.4 *S ile R iki cisim, $S \subseteq R$ ve R, S üzerinde sonsuz boyutlu olsun. O zaman $A = \begin{bmatrix} R & R \\ (0) & S \end{bmatrix}$ halkası sol Artin halkadır ancak sağ Artin halka değildir.*

Teorem 1.5.5 *Her sağ (sol) Artin halka sağ (sol) Noether halkadır.*

Teorem 1.5.5'in tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Z}$ sağ ve sol Noether bir halkadır ancak $\mathbb{Z}$ sağ ya da sol Artin bir halka değildir.

Aşağıdaki örnek Teorem 1.5.5'in, modüller için genel olarak doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 1.5.6 *p bir asal sayı olmak üzere, $\mathbb{Z}(p^\infty) := \{\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: bir $r \in \mathbb{Z}$ ve bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\alpha = \frac{r}{p^n} + \mathbb{Z}\}$ kümesi, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_\mathbb{Z}$ modülünün bir altmodülüdür. $\mathbb{Z}(p^\infty)$ Artin bir $\mathbb{Z}$-modüldür ancak Noether bir $\mathbb{Z}$-modül değildir.*

Önerme 1.5.7 *M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *M Noether modüldür.*

(2) *M'nin her altmodülü sonlu üretilmiştir.*

(3) *M'nin altmodüllerinin boştan farklı her altkümesinin bir maksimal elemanı vardır.*

Önerme 1.5.8 *M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *M Artin modüldür.*

(2) *M'nin her bölüm modülü sonlu eşüretilmiştir.*

(3) *M'nin altmodüllerinin boştan farklı her altkümesinin bir minimal elemanı vardır.*

Önerme 1.5.9 *$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ bir tam dizi olsun. M Noether (Artin) modüldür ancak ve ancak K ve N Noether (Artin) modüllerdir.*

Önerme 1.5.10 *$M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ olsun. M Noether (Artin) modüldür ancak ve ancak $i \in \{1, ..., n\}$ için her bir M_i Noether (Artin) modüldür.*

Önerme 1.5.11 *M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *$Rad(M) = (0)$'dır ve M Artin modüldür.*

(2) *$Rad(M) = (0)$'dır ve M sonlu eşüretilmiştir.*

(3) *M yarı-basittir ve sonlu üretilmiştir.*

(4) *M yarı-basittir ve Noether'dir.*

(5) *M basit altmodüllerinin sonlu bir dik toplamıdır.*

Sonuç 1.5.12 *Yarı-basit bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *M Artin'dir.*

(2) *M Noether'dir.*

(3) *M sonlu üretilmiştir.*

(4) *M sonlu eşüretilmiştir.*

1.6. Asal, Yarı-asal ve İlkel İdealler

Asal idealler değişmeli halkaların yapısını belirlemede kullanılan en temel araçlardır. Asal idealler aynı zamanda cebirsel geometri ve cebirsel sayılar teorisi alanlarının da en kullanışlı ve vazgeçilmez araçları arasında yer alırlar. Bir afin cebirsel varyetenin koordinat halkasının asal ideallerinin, indirgenmez altvaryetelere karşılık gelmesi, asal ideallerin cebirsel geometrideki önemini gösteren bir sonuçtur. Cebirsel sayılar teorisinde sıkça kullanılan bir halka sınıfı olan Dedekind tamlık bölgelerinin, her öz ideali asal ideallerin bir çarpımı şeklinde yazılabilen halkalar olarak karakterize edilmesi de asal ideallerin cebirsel sayılar teorisindeki önemini ortaya koymaktadır.

Bu kesimde değişmeli olmayan halkalar için tanımlanan (iki-yönlü) asal ideal kavramı ve asal ideallerin bir genellemesi olan yarı-asal ideal kavramı incelenecektir. Ayrıca değişmeli olmayan halka teorisinin temel yapılarından biri olan ilkel ideal kavramının tanımı ve bazı özellikleri verilecektir. Bu kesimde verilen bilgiler Goodearl ve Warfield (2004) kaynağından alınmıştır.

Tanım 1.6.1 *P, R'nin bir öz ideali olsun. Eğer R'nin I ve J gibi iki ideali için $IJ \subseteq P$ iken $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ oluyorsa, o zaman P'ye R'nin bir asal ideali denir. Eğer R'nin sıfır ideali asal ise o zaman R'ye bir asal halka denir.*

Önerme 1.6.2 *R halkasının bir P öz ideali için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *P asal idealdir.*

(2) *I ve J, R'nin P'yi kesin olarak kapsayan iki ideali ise, $IJ \nsubseteq P$'dir.*

(3) *R/P asal halkadır.*

(4) *I ile J, R'nin iki sağ ideali ve $IJ \subseteq P$ ise $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$'dir.*

(5) *I ile J, R'nin iki sol ideali ve $IJ \subseteq P$ ise $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$'dir.*

(6) *$x, y \in R$ ve $xRy \subseteq P$ ise $x \in P$ veya $y \in P$'dir.*

R halkasının tüm öz idealleri arasında maksimal olan bir ideal, R'nin bir maksimal ideali olarak adlandırılır.

Önerme 1.6.3 *R halkasının her maksimal ideali asal idealdir.*

Tanım 1.6.4 *P, R halkasının bir asal ideali olsun. P kendisinden farklı bir asal ideal kapsamıyorsa, P'ye R'nin bir minimal asal ideali denir.*

Önerme 1.6.5 *R halkasının her asal ideali bir minimal asal ideal kapsar.*

Önerme 1.6.6 *R sağ Noether bir halka olsun. O zaman, R'nin sonlu sayıda minimal asal ideali vardır ve $(0) = P_1...P_n$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı ve $P_1, ..., P_n$ minimal asal idealleri vardır.*

Tanım 1.6.7 *I, R halkasının bir ideali olsun. I, R'nin asal ideallerinin bir arakesitine eşit ise I'ya R'nin bir yarı-asal (semiprime) ideali denir. R'nin sıfır ideali yarı-asal bir ideal ise R'ye bir yarı-asal halka denir.*

Teorem 1.6.8 *I, R halkasının bir ideali olsun. I yarı-asal idealdir ancak ve ancak $x \in R$ için $xRx \subseteq I$ ise $x \in I$'dır.*

Önerme 1.6.9 *I, R halkasının bir ideali olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *I yarı-asal idealdir.*

(2) *J, R'nin bir ideali ve $J^2 \subseteq I$ ise $J \subseteq I$'dır.*

(3) *J, R'nin bir sağ ideali ve $J^2 \subseteq I$ ise $J \subseteq I$'dır.*

(4) *J, R'nin bir sol ideali ve $J^2 \subseteq I$ ise $J \subseteq I$'dır.*

Tanım 1.6.10 *$x \in R$ olsun. $x^n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa x'e üstel sıfır (nilpotent) eleman denir. R halkası sıfırdan farklı bir üstel sıfır eleman içermiyorsa, R'ye indirgenmiş (reduced) halka denir.*

$I \subseteq R$ olsun. I'nın her elemanı üstel sıfır ise, I'ya R'nin bir nil altkümesi denir. I, R'nin bir ideali ise I'ya R'nin bir nil ideali denir.

A, R halkasının bir sağ ya da sol ideali olsun. $A^n = (0)$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa A'ya üstel sıfır sağ ya da üstel sıfır sol ideal denir.

Tanım 1.6.11 *R halkasının tüm asal ideallerinin arakesitine R'nin asal radikali denir. R'nin asal radikali $N(R)$ ile gösterilir.*

R halkasının bir I idealinin asal radikali, I'yı kapsayan tüm asal ideallerin arakesiti olarak tanımlanır ve $\sqrt{I}$ ile gösterilir. R değişmeli bir halka ise, $\sqrt{I} = \{x \in R : x^n \in I$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ var$\}$ eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir.

Önerme 1.6.12 *R halkasının asal radikali $N(R)$, R'nin bir nil idealidir.*

Önerme 1.6.13 *R halkasının asal radikali $N(R)$, R'nin tüm minimal asal ideallerinin arakesitine eşittir.*

Önerme 1.6.14 *R sağ Noether bir halka olsun. O zaman $N(R)$, R'nin üstel sıfır bir idealidir ve $N(R)$, R'nin tüm sağ ya da sol üstel sıfır ideallerini kapsar.*

Tanım 1.6.15 *P, R halkasının bir ideali olsun. $P = ann_R(M)$ olacak şekilde bir basit M sağ (sol) R-modülü varsa P'ye R'nin bir ilkel (primitive) sağ (sol) ideali denir. R'nin sıfır ideali sağ (sol) ilkel ideal ise R'ye sağ (sol) ilkel halka denir.*

Önerme 1.6.16 *R halkasının her sağ ya da sol ilkel ideali bir asal idealdir.*

Önerme 1.6.17 *R halkasının her maksimal ideali sağ ve sol ilkel idealdir. R değişmeli halka ise R'nin her ilkel ideali maksimal idealdir.*

Aşağıdaki örnek değişmesiz bir halkada her ilkel idealin maksimal ideal olması gerekmediğini göstermektedir.

Örnek 1.6.18 *(Brown ve Goodearl 2002) k cebirsel kapalı bir cisim olmak üzere, $q \in k\backslash\{0\}$ olsun ve q birimin bir kökü olmasın. k üzerinde x, y ile üretilen ve $yx = qxy$ bağıntısını sağlayan k-cebirini $\mathcal{O}_q(k^2)$ ile gösterelim. (0), $\mathcal{O}_q(k^2)$ halkasının ilkel bir idealidir ancak maksimal ideali değildir.*

Önerme 1.6.19 *R halkası için aşağıdakiler sağlanır.*

(1) *$J(R)$, R'nin tüm maksimal sol ideallerinin arakesitine eşittir.*

(2) *$J(R)$, R'nin tüm sağ ilkel ideallerinin arakesitine eşittir.*

(3) *$J(R)$, R'nin tüm sol ilkel ideallerinin arakesitine eşittir.*

1.7. Yarı-basit Halkaların Yapısı ve Artin Halkalar

Bu kesimde, halka teorisinin temel taşlarından biri olan yarı-basit halkaların yapısı incelenecek ve Artin halkaların bazı karakterizasyonlarına yer verilecektir. Aşağıdaki teorem R halkasının sağ R-modül olarak yarı-basit olması ile sol R-modül olarak yarı-basit olmasının denk olduğunu ifade etmektedir. Bu teoremin $(3) \iff (5)$ ve $(4) \iff (5)$ denklikleri literatürde Weddeburn-Artin Teoremi olarak bilinmektedir. Bu kesimde verilen bilgiler Goodearl ve Warfield (2004) ve Lam (1991) kaynaklarından alınmıştır.

Teorem 1.7.1 *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *Tüm sağ R-modüller yarı-basittir.*

(2) *Tüm sol R-modüller yarı-basittir.*

(3) *R sağ R-modül olarak yarı-basittir.*

(4) *R sol R-modül olarak yarı-basittir.*

(5) *R ya sıfır halkadır ya da $R \simeq M_{n_1}(D_1) \times ... \times M_{n_k}(D_k)$ olacak şekilde n_i pozitif tamsayıları ve D_i bölümlü halkaları vardır.*

Tanım 1.7.2 *Teorem 1.7.1'deki koşulların herhangi birini sağlayan bir halkaya yarı-basit halka denir.*

Tanım 1.7.3 *R sıfırdan farklı bir halka olsun. R'nin kendisinden ve sıfırdan başka bir ideali yoksa R'ye basit halka denir.*

Her basit halka yarı-basit olmak zorunda değildir. Örneğin k, karakteristiği sıfır olan bir cisim olmak üzere k üzerindeki birinci Weyl cebiri $A_1(k)$, yarı-basit olmayan bir basit halkadır (Lam 1991: Sonuç 3.17).

Teorem 1.7.4 *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R sağ Artin halkadır ve $J(R) = (0)$'dır.*

(2) *R sol Artin halkadır ve $J(R) = (0)$'dır.*

(3) *R yarı-basittir.*

Teorem 1.7.5 *R sağ Artin bir halka ise, R sağ Noether halkadır ve $J(R)$ üstel sıfırdır.*

Sonuç 1.7.6 *R sağ Artin bir halka ise $J(R) = N(R)$ eşitliği sağlanır.*

Sonuç 1.7.7 *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R sağ Artin ve yarı-asaldır.*

(2) *R sol Artin ve yarı-asaldır.*

(3) *R yarı-basittir.*

Sonuç 1.7.8 *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R asal ve sağ Artin bir halkadır.*

(2) *R asal ve sol Artin bir halkadır.*

(3) *R basit ve sağ Artin bir halkadır.*

(4) *R basit ve sol Artin bir halkadır.*

(5) *R basit ve yarı-basit bir halkadır.*

(6) *$R \simeq M_n(D)$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı ve bir D bölümlü halkası vardır.*

Önerme 1.7.9 *R sıfırdan farklı bir sağ ya da sol Artin halka ise, R'nin her asal ideali maksimaldir.*

Teorem 1.7.10 *R sağ Artin halkadır ancak ve ancak R sağ Noether'dir, $J(R)$ üstel sıfırdır ve $R/J(R)$ yarı-basittir.*

Önerme 1.7.11 *R sağ Artin bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R basit halkadır.*

(2) *R sağ ve sol ilkel halkadır.*

(3) *R asal halkadır.*

1.8. İnjektif, Projektif ve Düz Modüller

Bu kesimde, çalışmamızın sonraki bölümlerinde sıkça kullanılacak olan modül sınıflarından projektif, injektif ve düz modüllerin tanımları ve bazı özellikleri verilecektir. Bu kesimde verilen bilgiler Anderson ve Fuller (1992), Sharpe ve Vámos (1972) ve Kasch (1981) kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 1.8.1 *M bir R-modül olsun. A ve B R-modüller olmak üzere, her $g : A \longrightarrow B$ R-monomorfizması ve her $h : A \longrightarrow M$ R-homomorfizması için $h = fg$ olacak şekilde bir $f : B \longrightarrow M$ R-homomorfizması bulunabiliyorsa M'ye bir injektif R-modül denir.*

$$
\begin{tikzcd}
& M & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "h"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[ul, dashed, "f"']
\end{tikzcd}
$$

Önerme 1.8.2 *M bir R-modül olsun. M injektif modüldür ancak ve ancak her A modülü için M'den A'ya olan her monomorfizma parçalanır.*

Önerme 1.8.3 *İnjektif modüllerin dik çarpımları ve dik toplananları da injektiftir.*

Tanım 1.8.4 *M bir R-modül olsun. N injektif modülü için $i : M \longrightarrow N$ monomorfizması var ve $Gör(i) \leq_e N$ ise N'ye M'nin injektif zarfı (injective envelope) denir. M modülünün injektif zarfı $E(M)$ ile gösterilir.*

Teorem 1.8.5 *Her R-modül bir injektif zarfa sahiptir ve bu injektif zarf izomorfizma farkı ile tektir.*

Önerme 1.8.6 *M ve N R-modüller olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

1) *M injektiftir ancak ve ancak $M = E(M)$'dir.*

2) *$M \leq_e N$ ise $E(M) = E(N)$'dir.*

3) *$M \leq N$ ve N injektif ise $N = E(M) \oplus E'$ olacak şekilde bir E' sağ R-modülü vardır.*

4) *$\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sağ R-modüllerin bir ailesi olsun. $\oplus_{\alpha \in A} E(M_\alpha)$ injektif ise,*

$$E(\oplus_{\alpha \in A} M_\alpha) = \oplus_{\alpha \in A} E(M_\alpha)$$

olur.

Teorem 1.8.7 *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *İnjektif sağ R-modüllerin her dik toplamı injektiftir*

(2) *$\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sağ R-modüllerin bir ailesi ise,*

$$E(\oplus_{\alpha \in A} M_\alpha) = \oplus_{\alpha \in A} E(M_\alpha)\text{'dır}$$

(3) *R sağ Noether halkadır.*

Teorem 1.8.8 *$\mathcal{B}_0$ basit sağ R-modüller sınıfının fazlalıksız bir temsilciler kümesi olsun. O zaman, $E(\oplus_{T \in \mathcal{B}_0} T)$ modülü Mod-R için bir injektif eşüreteçtir.*

Tanım 1.8.9 *Teorem 1.8.8'deki $E(\oplus_{T\in\mathcal{B}_0}T)$ modülüne Mod-R için bir minimal injektif eşüreteç denir.*

Tanım 1.8.10 *M bir R-modül olsun. Eğer her $m \in M$ ve sıfır bölen olmayan her $r \in R$ için $m = m'r$ koşulunu sağlayan bir $m' \in M$ varsa M'ye bölünebilir (divisible) modül denir.*

Dikkat edilirse; M sağ R-modülü bölünebilirdir ancak ve ancak sıfır bölen olmayan her $r \in R$ için $M = Mr$'dir. Ayrıca, bölünebilir bir modülün her homomorf görüntüsünün bölünebilir modül olduğu da gösterilebilir.

M bir sağ R-modül olsun. M'nin bölünebilir altmodüllerinin herhangi bir toplamı da bölünebilirdir. M_R modülünün tüm bölünebilir altmodüllerinin toplamı $div(M_R)$ ile gösterilecektir.

Önerme 1.8.11 *(Sharpe ve Vámos 1972) Her injektif modül bölünebilirdir.*

Önerme 1.8.12 *(Sharpe ve Vámos 1972) I, R'nin bir ideali ve E injektif bir R-modül olsun. O zaman, $(0:_E I)$ injektif bir (R/I)-modüldür.*

Tanım 1.8.13 *M bir R-modül olsun. A ve B R-modüller olmak üzere, her $g : A \longrightarrow B$ R-epimorfizması ve her $h : M \longrightarrow B$ R-homomorfizması için $h = gf$ olacak şekilde bir $f : M \longrightarrow A$ R-homomorfizması bulunabiliyorsa M'ye bir projektif R-modül denir.*

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & f \swarrow & \downarrow h & & \\ A & \xrightarrow{g} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Önerme 1.8.14 *Projektif modüllerin dik toplamları ve dik toplananları da projektiftir.*

Teorem 1.8.15 *P bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *P projektiftir.*

(2) *P, serbest bir R-modülün bir dik toplananına izomorfiktir.*

(3) *M bir R-modül olmak üzere, her $M \longrightarrow P \longrightarrow (0)$ epimorfizması parçalanır.*

Tanım 1.8.16 *M bir R-modül ve P bir projektif R-modül olsun. $Çek\,(f) << P$ olacak şekilde bir $f : P \longrightarrow M$ epimorfizması varsa (P, f) ikilisine M'nin bir projektif örtüsü (projective cover) denir.*

Her modül projektif örtüye sahip olmak zorunda değildir. Örneğin $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülü projektif örtüye sahip değildir.

Tanım 1.8.17 *A bir sağ R-modül ve U bir sol R-modül olsun. F, tabanı $A \times U = \{(a, u) :$*

$a \in A, u \in U\}$ kümesi olan serbest sağ $\mathbb{Z}$-modülü göstersin.

$$D_1 = \{(a + a', u) - (a, u) - (a', u) : a, a' \in A,\ u \in U\}$$

$$D_2 = \{(a, u + u') - (a, u) - (a, u') : a \in A,\ u, u' \in U\}$$

$$T = \{(as, u) - (a, su) : a \in A,\ u \in U,\ s \in R\}$$

olsun. K, F'nin $D_1 \cup D_2 \cup T$ kümesi ile üretilen $\mathbb{Z}$-altmodülü olmak üzere, F/K $\mathbb{Z}$-modülüne A_R ile $_RU$ modüllerinin R üzerindeki tensör çarpımı denir. A_R ile $_RU$ modüllerinin tensör çarpımı $A \otimes_R U$ ile gösterilir.

Tensör çarpımı ile ilgili daha fazla bilgi Kasch'in (1981) kitabının 10. bölümünde bulunabilir. Şimdi tensör çarpımı vasıtasıyla tanımlanan düz modül kavramını inceleyeceğiz.

Tanım 1.8.18 *U bir sağ R-modül ve M bir sol R-modül olsun. Her $K \leq M$ için*

$$0 \longrightarrow U \otimes_R K \stackrel{1_U \otimes i_K}{\longrightarrow} U \otimes_R M$$

dizisi tam oluyorsa, U'ya M-düz (M-flat) modül denir. Eğer U, her M sol R-modülü için M-düz oluyorsa U'ya düz (flat) modül denir.

Her projektif modül düz modüldür. Ancak bu ifadenin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Q}_\mathbb{Z}$ düz bir modüldür ancak projektif bir modül değildir .

Önerme 1.8.19 *U bir sağ R-modül olsun. U düzdür ancak ve ancak U, R-düzdür.*

Tanım 1.8.20 *Her $r \in R$ için $rr'r = r$ olacak şekilde bir $r' \in R$ varsa R'ye düzenli (regular) halka denir.*

Teorem 1.8.21 *R değişmeli bir halka olsun. O zaman, R düzenli bir halkadır ancak ve ancak R indirgenmiş halkadır ve R'nin her asal ideali maksimaldir.*

Teorem 1.8.22 *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) *Her M sol R-modülü düz sol R-modüldür.*

2) *Her M sağ R-modülü düz sağ R-modüldür.*

3) *R düzenli halkadır.*

Tanım 1.8.23 *M bir sağ R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. R'nin her A sol ideali için $N \cap MA = NA$ ise N'ye M içinde pür altmodül denir.*

Önerme 1.8.24 *M düz bir sağ R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. O zaman; M/N düzdür ancak ve ancak N, M içinde pür altmodüldür.*

1.9. Tam Halkalar

Bu kesimde, hem sağ hem de sol Artin halkaların bir genellemesi olan tam halkaları inceleyeceğiz. Bu kesimde verilen bilgiler Lam (1991) ve Anderson ve Fuller (1992) kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 1.9.1 *Eğer her sağ (sol) R-modül projektif örtüye sahipse, R'ye sağ (sol) tam (perfect) halka denir. Eğer R hem sağ hem de sol tam halka ise R'ye tam halka denir.*

Tanım 1.9.2 *I, R'nin bir altkümesi olsun. I'daki her $a_1, a_2, ...$ dizisi için $a_1a_2...a_n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa I'ya sol T-üstel sıfır (T-nilpotent) denir. I'daki her $a_1, a_2, ..$ dizisi için $a_n...a_2a_1 = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı varsa I'ya sağ T-üstel sıfır denir.*

Dikkat edilirse; her üstel sıfır ideal sağ ve sol T-üstel sıfırdır.

Teorem 1.9.3 *R bir halka ve J, R'nin bir sağ ideali olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *J sağ T-üstel sıfırdır.*

(2) *Herhangi bir M sağ R-modülü için $MJ = M$ ise $M = (0)$'dır.*

(3) *Herhangi bir M sağ R-modülü ve M'nin bir N altmodülü için $MJ + N = M$ ise $N = M$'dir.*

(4) *Herhangi bir N sol R-modülü için $(0 :_N J) = (0)$ ise $N = (0)$'dır.*

Teorem 1.9.4 *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R sağ tam halkadır.*

(2) *R tek üreteçli sol idealler üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar.*

(3) *Her N sol R-modülü tek üreteçli altmodülleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar.*

(4) *$R/J(R)$ yarı-basittir ve $J(R)$ sağ T-üstel sıfırdır.*

(5) *$R/J(R)$ yarı-basittir ve sıfırdan farklı her sağ R-modül bir maksimal altmodül kapsar.*

Teorem 1.7.10 ve Teorem 1.9.4'e göre her sağ ve her sol Artin halka bir tam halkadır.

Önerme 1.9.5 *R sağ tam halka olsun. M_R ve $_RN$ modülleri için $Rad(M_R) << M_R$ ve $Soc(_RN) \leq_e N$'dir.*

1.10. Goldie Teoremleri ve Kesirler Halkası

Yerelleştirme (localization) kavramı değişmeli halka teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Bunun en temel göstergesi bir tamlık bölgesinin kesirler cismi kavramıdır. Sonrasında bir asal ideale göre yerelleştirme kavramı gelir ki bu sayede ele alınan asal ideal tek maksimal ideale dönüştürülüp, birçok problemin ele alınması lokal halka durumuna kısıtlanabilir. Değişmeli halka teorisinin en kullanışlı araçlarından biri olan yerelleştirme kavramının değişmeli olmayan halka teorisinde bir benzerinin yapılması konusu ilk defa 1931 yılında Ore tarafından ele alınmıştır. Ancak değişmeli halka teorisinde olduğu gibi çarpımsal kapalı bir kümeye göre klasik anlamdaki yerelleştirmenin her zaman yapılamadığı görülmüştür (Ore 1931). Ore değişmeli teorideki gibi bir yerelleştirmenin ancak bazı koşulların sağlanması ile gerçekleştirilebileceğini göstermiştir (Ore 1931).

Kesirler cismi kavramının değişmesiz duruma genellenebilmesi için sıfır bölensiz bir halkadan, kesirler kullanılarak inşa edilen bir bölümlü (division) halkaya geçişin mümkün olup olmadığı araştırılmış ve bu durumun her zaman mümkün olmadığı görülmüştür (Goldie 1958, 1960). Bunun üzerine asal halkalar üzerine yoğunlaşılmış ve bu halkalar için kesirler cismi kavramının bir genellemesi elde edilmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda Goldie, asal Noether bir halkanın basit Artin bir kesirler halkasına sahip olduğunu göstermiş ve kesirler halkası basit Artin olan halkaları tümüyle karakterize etmiştir.

Bu kesimde, değişmeli olmayan halka teorisindeki yerelleştirme kavramı ile ilgili olarak, Ore ve Goldie'nin, Goodearl ve Warfield'in (2004) kitabında derlenmiş olan sonuçları verilecektir.

Tanım 1.10.1 *X, R'nin bir altkümesi olsun. $1_R \in X$ ve X çarpımsal kapalı ise X'e çarpımsal küme (multiplicative set) denir.*

Tanım 1.10.2 *X, R halkası içinde çarpımsal bir küme olsun. Her $x \in X$ ve $r \in R$ için $rX \cap xR \neq \emptyset$ oluyorsa "X sağ Ore koşulunu sağlar" denir. Sağ Ore koşulunu sağlayan bir çarpımsal kümeye kısaca sağ Ore küme denir. Sol Ore koşulu ve sol Ore kümeler de simetrik olarak tanımlanır. Hem sağ hem de sol Ore küme olan bir çarpımsal kümeye Ore küme denir.*

Örnek 1.10.3 *Değişmeli bir halka içinde herhangi bir çarpımsal küme Ore kümedir.*

Örnek 1.10.4 *R sağ Noether ve sıfır bölensiz bir halka ise, $R\backslash\{0\}$ bir sağ Ore kümedir.*

Tanım 1.10.5 *R halkası içinde sıfır bölen olmayan bir elemana regüler eleman denir.*

X, R halkasının bir altkümesi olsun. X'in, R içindeki sağ sıfırlayanı $r.ann_R(X) = \{s \in R : Xs = (0)\}$ olarak tanımlanır. X'in, R içindeki sol sıfırlayanı da $l.ann_R(X) = \{r \in R : rX = (0)\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.10.6 *I, R'nin bir sağ (sol) ideali olsun. $I = r.ann_R(X)$ $(l.ann_R(X))$ olacak şekilde bir $X \subseteq R$ varsa, I'ya R içinde bir sağ (sol) sıfırlayan denir.*

Önerme 1.10.7 *R sağ Noether bir halka ve X, R içinde bir sağ Ore küme olsun. Her $x \in X$ için $l.ann_R(x) = (0)$ ise, X'in tüm elemanları R içinde regüler elemanlardır.*

Tanım 1.10.8 *S bir halka, X, R'nin regüler elemanlarından oluşan bir çarpımsal küme ve $R \subseteq S$ olsun. X'in her elemanı S içinde tersinir ise ve S'nin her elemanı, $a \in R$ ve $x \in X$ olmak üzere ax^{-1} şeklinde yazılabiliyorsa, S halkasına R'nin X'e göre sağ kesirler halkası (right ring of fractions) denir. Sol kesirler halkası da $x^{-1}a$ şeklindeki kesirler kullanılarak simetrik olarak tanımlanır.*

Örnek 1.10.9 *R bir tamlık bölgesi olsun. R'nin kesirler cismi, $R\backslash\{0\}$ çarpımsal kümesine göre R'nin sağ ve sol kesirler halkasıdır.*

Teorem 1.10.10 *X, R'nin regüler elemanlarından oluşan bir çarpımsal küme olsun. O zaman, R'nin X'e göre bir sağ kesirler halkası vardır ancak ve ancak X, R içinde bir sağ Ore kümedir.*

Önerme 1.10.11 *X, R'nin regüler elemanlarından oluşan bir sağ Ore küme olsun. S ve T, R'nin X'e göre iki sağ kesirler halkası ise $S \simeq T$'dir.*

X, R'nin regüler elemanlarından oluşan bir sağ Ore küme olsun. R'nin X'e göre sağ kesirler halkası RX^{-1} ile gösterilir. Benzer şekilde Y, R'nin regüler elemanlarından oluşan bir sol Ore küme ise, R'nin Y'ye göre sol kesirler halkası $Y^{-1}R$ ile gösterilir.

Önerme 1.10.12 *X, R'nin regüler elemanlarından oluşan bir sağ ve sol Ore küme olsun. O zaman, $RX^{-1} = X^{-1}R$'dir.*

Tanım 1.10.13 *R'nin tüm regüler elemanlarının kümesine göre bir sağ kesirler halkası varsa, bu halkaya R'nin klasik sağ kesirler halkası denir. Klasik sol kesirler halkası da simetrik olarak tanımlanır.*

Önerme 1.10.12 gösterir ki; R hem klasik sağ kesirler halkasına hem de klasik sol kesirler halkasına sahip ise, bu iki kesirler halkası birbirine eşittir. Bu durumda "R klasik kesirler halkasına sahiptir" denir.

Örnek 1.10.14 *Her değişmeli halka bir klasik kesirler halkasına sahiptir. R bir tamlık bölgesi ise, R'nin klasik kesirler halkası R'nin kesirler cismine eşittir.*

Tanım 1.10.15 *R sıfır bölensiz bir halka olsun. R'nin sıfırdan farklı elemanları bir sağ (sol) Ore küme oluşturuyorsa R'ye sağ (sol) Ore bölge denir.*

Örnek 1.10.16 *Her tamlık bölgesi sağ ve sol Ore bölgedir.*

Tanım 1.10.17 *M bir R-modül olsun. M, sıfır olmayan altmodüllerin sonsuz bir dik toplamını kapsamıyorsa M'ye sonlu düzgün boyutlu modül denir.*

Teorem 1.10.18 *M sıfırdan farklı sonlu düzgün boyutlu bir modül olsun. Bu durumda M düzgün bir altmodül kapsar. Üstelik, öyle bir n pozitif tamsayısı ve $U_i(1 \leq i \leq n)$ düzgün altmodülleri vardır ki $U_1 \oplus .... \oplus U_n \leq_e M$'dir ve bu n tamsayısı tek türlü belirlidir.*

Tanım 1.10.19 *M sıfırdan farklı sonlu düzgün boyutlu bir modül olsun. Teorem 1.10.18'deki n pozitif tamsayısına M'nin düzgün boyutu denir.*

Önerme 1.10.20 *R sıfır bölensiz bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R sağ Ore bölgedir.*

(2) *R_R düzgün modüldür.*

(3) *R_R sonlu düzgün boyutludur.*

Sonuç 1.10.21 *Sağ Noether ve sıfır bölensiz bir halka sağ Ore bölgedir.*

Teorem 1.10.22 *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R'nin regüler elemanlarından oluşan öyle bir X sağ Ore kümesi vardır ki RX^{-1} bölümlü bir halkadır.*

(2) *R'nin bölümlü halka olan bir klasik sağ kesirler halkası vardır.*

(3) *R sağ Ore bölgedir.*

Önerme 1.10.23 *Q, R halkasının sağ Noether olan bir klasik sağ kesirler halkası olsun. O zaman, R_R sonlu düzgün boyutludur ve R sağ sıfırlayanlar üzerinde artan zincir koşulunu sağlar. Ayrıca Q yarı-basit ise R yarı-asal halkadır.*

Tanım 1.10.24 *R_R modülü sonlu düzgün boyutlu ise ve R sağ sıfırlayanlar üzerinde artan zincir koşulunu sağlıyorsa R'ye sağ Goldie halka denir. Eğer ${}_RR$ modülü sonlu düzgün boyutlu ve R sol sıfırlayanlar üzerinde artan zincir koşulunu sağlıyor ise R'ye sol Goldie halka denir.*

Örnek 1.10.25 *Her tamlık bölgesi sağ ve sol Goldie halkadır.*

Örnek 1.10.26 *Her sağ Noether halka sağ Goldie halkadır.*

Önerme 1.10.27 *R yarı-asal sağ Goldie bir halka ve $x \in R$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *x regüler elemandır.*

(2) *$r.ann_R(x) = (0)$'dır.*

(3) *$xR \leq_e R_R$'dir.*

Önerme 1.10.28 *R yarı-asal sağ Goldie bir halka ve I, R'nin bir sağ ideali olsun. O zaman, I esas bir sağ idealdir ancak ve ancak I regüler bir eleman kapsar.*

Sonuç 1.10.29 *R asal sağ (ya da sol) Goldie bir halka olsun. O zaman, R'nin sıfırdan farklı her ideali regüler bir eleman kapsar.*

Teorem 1.10.30 *R halkası yarı-basit bir klasik sağ kesirler halkasına sahiptir ancak ve ancak R yarı-asal sağ Goldie bir halkadır.*

Sonuç 1.10.31 *Her yarı-asal sağ Noether halka yarı-basit bir klasik sağ kesirler halkasına sahiptir.*

Teorem 1.10.32 *R halkası basit Artin bir klasik sağ kesirler halkasına sahiptir ancak ve ancak R asal sağ Goldie bir halkadır.*

Teorem 1.10.30 gösterir ki; R değişmeli bir halka ise, R'nin her P asal ideali için R/P sağ ve sol Goldie halkadır.

Önerme 1.10.33 *X, R içinde bir sağ Ore küme ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman, $t_X(M) = \{m \in M$: bir $x \in X$ için $mx = 0\}$ kümesi M'nin bir altmodülüdür.*

Tanım 1.10.34 *X, R içinde bir sağ Ore küme ve M bir sağ R-modül olsun. $t_X(M)$ altmodülüne M'nin X-burkulmalı (X-torsion) altmodülü denir. $t_X(M) = M$ ise M'ye X-burkulmalı modül, $t_X(M) = (0)$ ise M'ye X-burkulmasız (X-torsion-free) modül denir.*

R yarı-asal sağ Goldie bir halka ve X, R'nin tüm regüler elemanlarının kümesi ise X-burkulmalı ve X-burkulmasız ifadeleri yerine kısaca burkulmalı ve burkulmasız ifadeleri kullanılacaktır.

Önerme 1.10.35 *R yarı-asal sağ Goldie bir halka ve M burkulmasız bir sağ R-modül olsun. O zaman, M bölünebilirdir ancak ve ancak M injektiftir.*

Önerme 1.10.36 *R yarı-asal sağ ve sol Goldie bir halka olsun. O zaman, her sonlu üretilmiş burkulmasız sağ R-modül, sonlu üretilmiş bir serbest sağ R-modülün içine gömülebilir.*

1.11. Sağ ve Sol Sınırlı Halkalar

Bu kesimde, çalışmamızın sonraki bölümlerinde bahsi geçecek olan halka sınıflarından sağ ve sol sınırlı halkaları inceleyeceğiz. Bu kesimde verilen bilgiler Goodearl ve Warfield (2004) kaynağından alınmıştır.

Tanım 1.11.1 *R halkasının her esas sağ (sol) ideali, sağ (sol) ideal olarak esas olan bir ideal kapsıyorsa R'ye sağ (sol) sınırlı halka denir.*

Örnek 1.11.2 *Her değişmeli halka sağ ve sol sınırlıdır.*

Örnek 1.11.3 *Her yarı-basit halka sağ ve sol sınırlıdır.*

Sonuç 1.11.4 *R asal bir halka olsun. O zaman, R sağ (sol) sınırlıdır ancak ve ancak R'nin her esas sağ (sol) ideali sıfırdan farklı bir ideal kapsar.*

Tanım 1.11.5 *R halkasının her asal bölüm halkası sağ (sol) sınırlı ise R'ye sağ (sol) tümden sınırlı halka denir.*

Dikkat edilirse, sağ (sol) tümden sınırlı bir halka sağ (sol) sınırlı bir halka olmak zorunda değildir.

Tanım 1.11.6 *R sağ (sol) Noether ve sağ (sol) tümden sınırlı bir halka ise R'ye sağ (sol) FBN halka denir. Hem sağ hem de sol FBN bir halkaya kısaca FBN halka denir.*

Önerme 1.11.7 *R sağ (sol) FBN bir halka olsun. P, R'nin sağ (sol) ilkel bir ideali ise R/P basit Artin bir halkadır.*

1.12. Lokal ve Yarı-lokal Halkalar

Bu kesimde, halka teoride önemli bir halka sınıfı olan lokal halkaların ve bunların bir genellemesi olan yarı-lokal halkaların tez çalışmamızda kullanılacak olan bazı özellikleri verilecektir. Bu kesimde verilen bilgiler Lam (1991) kaynağından alınmıştır.

Teorem 1.12.1 *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R'nin tek bir maksimal sol ideali vardır.*

(2) *R'nin tek bir maksimal sağ ideali vardır.*

(3) *$R/J(R)$ bölümlü bir halkadır.*

(4) *$R \backslash U(R)$, R'nin bir idealidir.*

(5) *$R \backslash U(R)$, R'nin bir toplamsal altgrubudur.*

(6) *n bir pozitif tamsayı olmak üzere $a_1 + ... + a_n \in U(R)$ ise, $a_i \in U(R)$ olacak şekilde bir i $(1 \leq i \leq n)$ vardır.*

(7) *$a + b \in U(R)$ ise $a \in U(R)$ veya $b \in U(R)$'dir.*

Tanım 1.12.2 *Teorem 1.12.1'deki koşulların herhangi birini sağlayan bir R halkasına lokal halka denir.*

Dikkat edilirse; her bölümlü halka bir lokal halkadır.

R değişmeli bir halka ve p, R'nin bir asal ideali olsun. R'nin, p asal idealindeki yerelleştirmesi olan R_p halkası, tek maksimal ideali pR_p olan bir lokal halkadır.

Örnek 1.12.3 *R bir lokal halka ve $A = R[[x]]$, R üzerinde x değişkenine bağlı kuvvet serilerinin halkası olsun. $J(A)$, sabit terimleri $J(R)$'de olan tüm kuvvet serilerinin kümesidir ve $A/J(A) \simeq R/J(R)$'dir. Buna göre, A da bir lokal halkadır.*

R bir halka ve $e \in R$ olsun. $e^2 = e$ ise e'ye, R'nin bir eşkare (idempotent) elemanı denir.

Önerme 1.12.4 *R bir lokal halka olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(1) *R'nin tek bir maksimal ideali vardır.*

(2) *R'nin, 0_R ve 1_R'den başka eşkare elemanı yoktur.*

Teorem 1.12.5 *R lokal bir halka ise, her projektif R-modül serbest R-modüldür.*

Tanım 1.12.6 *$R/J(R)$ yarı-basit bir halka ise R'ye yarı-lokal (semilocal) halka denir.*

Dikkat edilirse; her lokal halka yarı-lokaldir. Sağ ya da sol Artin halkalar da yarı-lokal halkalardır.

Önerme 1.12.7 *A yarı-lokal bir halka ve n pozitif bir tamsayı olsun. O zaman, $R = M_n(A)$ matris halkası da yarı-lokal bir halkadır.*

Önerme 1.12.8 *Lokal halkaların sonlu bir dik çarpımı yarı-lokal bir halkadır.*

Önerme 1.12.9 *R halkası için aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım.*

(1) *R'nin sonlu sayıda maksimal sağ ideali vardır.*

(2) *R yarı-lokal bir halkadır.*

Genel olarak, (1) $\Longrightarrow$ (2) gerektirmesi doğrudur.

$R/J(R)$ değişmeli bir halka ise, (2) $\Longrightarrow$ (1) gerektirmesi de doğru olur.

Önerme 1.12.9'daki (2) $\Longrightarrow$ (1) gerektirmesi genel olarak doğru değildir. Örneğin bir cisim üzerindeki herhangi bir matris halkası yarı-lokaldir ancak böyle bir halkanın sonsuz çoklukta maksimal sağ ideali bulunabilir (Lam 1991).

1.13. PI Halkalar

Bu kesimde, değişmeli halkalara en yakın halka sınıfı olarak bilinen PI halkaları inceleyeceğiz. Literatürde PI halkaların çok geniş bir teorisi vardır. Bu kesimde, PI halkaların tez çalışmamızın sonraki bölümlerinde kullanılacak olan özelliklerine yer verilecektir. Bu kesimde verilen bilgiler McConnell ve Robson (1987) kaynağından alınmıştır.

$\mathbb{Z}$ üzerinde $x_1, x_2, ...$ değişkenlerine bağlı değişmeli olmayan polinomların halkası $\mathbb{Z} < x_1, x_2, ... >$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.13.1 *$f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z} < x_1, x_2, ... >$ olsun. Her $r_i \in R$ için $f(r_1, ..., r_n) = 0$ oluyorsa "R halkası f polinomunu sağlar" ve "f, R'nin bir polinom özdeşliğidir" denir.*

Tanım 1.13.2 *R halkası $\mathbb{Z} < x_1, x_2, ... >$ içinde en az bir tane monik polinomu sağlıyorsa R'ye PI halka denir.*

Örnek 1.13.3 *Her değişmeli halka PI halkadır. Çünkü değişmeli bir R halkası, $f(t_1, t_2) = t_1t_2 - t_2t_1$ polinom özdeşliğini sağlar.*

Önerme 1.13.4 *PI bir halkanın her althalkası ve her homomorf görüntüsü PI halkadır.*

Önerme 1.13.5 *R halkası değişmeli bir althalkası üzerinde sonlu üretilmiş bir sağ modül ise R bir PI halkadır.*

Örnek 1.13.6 *R değişmeli bir halka ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $M_n(R)$ bir PI halkadır.*

Teorem 1.13.7 *R ilkel bir PI halka ise, R basit Artin bir halkadır.*

Teorem 1.13.8 *R asal bir PI halka ise, R sağ ve sol sınırlı, sağ ve sol Goldie halkadır.*

Teorem 1.13.9 *R Noether bir PI halka ise, R FBN halkadır.*

1.14. Dar Boyut ve Tümlenmiş Modüller

Bu kesimde, düzgün boyut kavramının duali olan dar boyut kavramı incelenecektir. Ayrıca tümlenmiş ve yeterli tümlenmiş modüller ile ilgili bazı sonuçlara yer verilecektir. Bu kesimde verilen bilgiler Clark vd (2006) kaynağından alınmıştır.

İlk olarak, bağımsız altmodüller ailesi kavramının duali olan eşbağımsız altmodüller ailesi kavramının tanımını vereceğiz.

Tanım 1.14.1 *M bir R-modül ve $N_i (i \in I)$ M'nin altmodüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Her $j \in I$ ve $J \subseteq I \backslash \{j\}$ sonlu altkümesi için $N_j + (\cap_{i \in J} N_i) = M$ ise $N_i (i \in I)$ altmodüller ailesine M'nin eşbağımsız (coindependent) altmodüllerinin bir ailesi denir.*

Önteorem 1.14.2 *M bir R-modül, L_1, L_2, L_3, M'nin altmodülleri, $M = L_1 + L_2$ ve $M = (L_1 \cap L_2) + L_3$ olsun. O zaman, $M = (L_1 \cap L_3) + L_2$ olur.*

İspat. $L_1 = L_1 \cap ((L_1 \cap L_2) + L_3) = (L_1 \cap L_2) + (L_1 \cap L_3)$ olur. Buradan da, $M = L_1 + L_2 = (L_1 \cap L_2) + (L_1 \cap L_3) + L_2 = (L_1 \cap L_3) + L_2$ elde edilir. ∎

Sonuç 1.14.3 *M bir R-modül ve $n \geq 2$ pozitif bir tamsayı olmak üzere, $L_i(1 \leq i \leq n)$, M'nin altmodüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Her $1 \leq i \leq n-1$ için $M = (L_1 \cap ... \cap L_i) + L_{i+1}$ ise, $L_i(1 \leq i \leq n)$ ailesi M'nin eşbağımsız altmodüllerinin bir ailesidir.*

İspat. n üzerine tümevarım uygulayalım. $M = (L_1 \cap ... \cap L_{n-1}) + L_n$ olduğu verilmiştir. $1 \leq i \leq n-1$, $J = \{1, ..., n-1\} \backslash \{i\}$ ve $L = \cap_{j \in J} L_j$ olsun. Tümevarım varsayımından dolayı, $M = L + L_i$'dir. Ayrıca $M = (L \cap L_i) + L_n$'dir. Önteorem 1.14.2'den dolayı, $M = (L \cap L_n) + L_i$ olur. Buna göre $L_i(1 \leq i \leq n)$ ailesi M'nin eşbağımsız altmodüllerinin bir ailesidir. ∎

Tanım 1.14.4 *M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M modülü sonsuz elemanlı bir eşbağımsız altmodüller ailesi kapsamıyorsa, M'ye sonlu dar boyutlu modül denir.*

Teorem 1.14.5 *M sonlu dar boyutlu bir R-modül olsun. Bu durumda n =sup$\{k : k \in \mathbb{Z}^+$ ve M, k elemanlı bir eşbağımsız altmodüller ailesine sahip$\}$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır.*

Tanım 1.14.6 *M sonlu dar boyutlu bir R-modül olsun. Teorem 1.14.5'deki n pozitif tamsayısına M'nin dar boyutu denir. M modülünün dar boyutu $h.dim(M)$ ile gösterilir.*

Önerme 1.14.7 *M'nin dar boyutu n'dir ancak ve ancak $H_1, ..., H_n$ dar modüller olmak üzere öyle bir $\varphi : M \longrightarrow H_1 \oplus ... \oplus H_n$ epimorfiması vardır ki Çekφ, M'nin atık altmodülüdür.*

Dikkat edilirse; M dar bir modül ise $h.dim(M) = 1$'dir.

Önerme 1.14.8 *M bir sağ R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(1) $h.dim(M/N) \leq h.dim(M)$'dir.

(2) $M = M_1 \oplus ... \oplus M_k$ ise $h.dim(M) = h.dim(M_1) + ... + h.dim(M_k)$ olur.

(3) $N << M$ ise $h.dim(M/N) = h.dim(M)$'dir. $h.dim(M)$ sonlu ve $h.dim(M/N) = h.dim(M)$ ise $N << M$'dir.

Önerme 1.14.9 *Her Artin modül sonlu dar boyutludur.*

Tanım 1.14.10 *M bir R-modül ve L, M'nin bir altmodülü olsun. $M = N + L$ özelliğine göre minimal olan bir N altmodülüne, L'nin M içindeki bir tümleyeni ya da M'nin bir tümleyen (supplement) altmodülü denir.*

Dikkat edilirse; N, L' nin tümleyenidir ancak ve ancak $M = N + L$ ve $N \cap L << N$'dir.

Tanım 1.14.11 *M bir R-modül olsun. M'nin her altmodülünün bir tümleyeni varsa M'ye tümlenmiş (supplemented) modül denir.*

Tanım 1.14.12 *M bir R-modül olsun. $M = A + B$ olacak şekilde, M'nin A ve B altmodülleri için A'nın B içinde kalan bir tümleyeni varsa M'ye yeterli tümlenmiş (amply supplemented) modül denir.*

Dikkat edilirse; yeterli tümlenmiş modüller tümlenmiş modüllerdir. Ayrıca her Artin modül yeterli tümlenmiş bir modüldür.

Önerme 1.14.13 *M yeterli tümlenmiş bir modül olsun. O zaman, M'nin her tümleyen altmodülü yeterli tümlenmiş modüldür.*

Önerme 1.14.14 *M bir R-modül, L ile N, M'nin altmodülleri ve L, N'nin M içindeki bir tümleyeni olsun. O zaman,*

$$h.dim(M) = h.dim(M/N) + h.dim(M/L) = h.dim(M/L) + h.dim(L)$$

Önerme 1.14.15 *M tümlenmiş bir R-modül ve n pozitif bir tamsayı olsun. O zaman, M'nin dar boyutu n'dir ancak ve ancak M, n tane dar altmodülün fazlalıksız bir dik toplamı şeklinde yazılabilir.*

Teorem 1.14.16 *R yarı-lokal bir halkadır ancak ve ancak her sonlu üretilmiş sağ R-modül sonlu dar boyutludur.*

1.15. Aşamalı Halkalar ve Modüller

Bu kesimde, tez çalışmamızın beşinci bölümüne temel oluşturan aşamalı halkalar ve modüller ile ilgili bazı temel bilgiler ve sonuçlar verilecektir. Bu kesimde verilen bilgiler Năstăsescu ve Oystaeyen (1983), (2004) kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 1.15.1 *G bir grup ve R bir halka olsun. $\{R_g\}_{g\in G}$, R'nin toplamsal altgruplarının bir ailesi olmak üzere $R = \oplus_{g\in G} R_g$ ise ve her $g, h \in G$ için $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ oluyorsa R'ye G-aşamalı (G-graded) halka (ya da kısaca aşamalı halka) denir.*

$R = \oplus_{g\in G} R_g$ G-aşamalı bir halka olsun. Her $g, h \in G$ için $R_g R_h = R_{gh}$ ise R'ye kuvvetli aşamalı (strongly graded) halka denir.

$R = \oplus_{g\in G} R_g$ G-aşamalı bir halka olsun. $g \in G$ için R_g'nin elemanlarının her birine derecesi g olan bir homojen eleman (ya da kısaca homojen eleman) denir. R'nin tüm homojen elemanlarının kümesi kısaca $h(R)$ ile gösterilir, yani $h(R) = \cup_{g\in G} R_g$'dir.

Bu bölümün geri kalan kısmında aksi belirtilmedikçe, G bir grup olarak alınacaktır ve e, G grubunun birim elemanını gösterecektir.

Örnek 1.15.2 (1) *R bir halka ve G bir grup olsun. $R_e = R$ ve her $g \neq e$ için $R_g =$*

(0) olarak alınırsa, R G-aşamalı bir halka olur. Böylece her R halkası bir G grubu için G-aşamalı halkadır.

(2) R bir halka ve $S := R[x]$ R üzerindeki bir değişkenli polinomlar halkası olsun. $i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $i < 0$ için $S_i = (0)$ ve $i \geq 0$ için $S_i = \{ax^i : a \in R\}$ olarak alınırsa, $S = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ ve her $i, j \in \mathbb{Z}$ için $S_i S_j \subseteq S_{i+j}$ olur. Böylece S $\mathbb{Z}$-aşamalı bir halkadır.

(3) R değişmeli bir halka ve $R[x]$ R üzerindeki bir değişkenli polinomlar halkası olmak üzere $S = \{x^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ kümesi $R[x]$'in çarpımsal kapalı bir altkümesidir. $R[x]$'in S'ye göre yerelleştirmesi olan $S^{-1}R[x] = \{\frac{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}{x^m} : a_0, a_1, ..., a_n \in R,\ n, m \in \mathbb{Z}^+\}$ halkasına Laurent polinomlar halkası denir. Bu halka kısaca $R[x, x^{-1}]$ ile gösterilir. $n \in \mathbb{Z}$ için $\left(R[x, x^{-1}]\right)_n = \{ax^n : a \in R\}$ olmak üzere $R[x, x^{-1}] = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \left(R[x, x^{-1}]\right)_n$ $\mathbb{Z}$-aşamalı bir halkadır.

Önerme 1.15.3 *$R = \oplus_{g \in G} R_g$ G-aşamalı bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) R_e, R'nin bir althalkasıdır ve $1_R \in R_e$'dir.

(2) $g \in G$ için, $r \in R_g$ ve r birimsel bir eleman ise $r^{-1} \in R_{g^{-1}}$'dir.

Tanım 1.15.4 *$R = \oplus_{g \in G} R_g$ G-aşamalı bir halka olsun. Her $g \in G$ için, R_g birimsel bir eleman kapsıyorsa R'ye çapraz çarpım (crossed product) denir.*

Önerme 1.15.5 *Her çapraz çarpım kuvvetli aşamalı bir halkadır.*

Tanım 1.15.6 *$R = \oplus_{g \in G} R_g$ aşamalı bir halka ve I R'nin bir sağ (sol) ideali olsun. $I = \oplus_{g \in G}(I \cap R_g)$ ise I'ya sağ (sol) aşamalı ideal denir.*

Tanım 1.15.7 *$R = \oplus_{g \in G} R_g$ aşamalı bir halka ve P, R'nin aşamalı bir öz ideali olsun. A ve B, R'nin aşamalı idealleri olmak üzere $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P'ye aşamalı asal ideal (ya da kısaca gr-asal ideal) denir. (0), R'nin bir aşamalı asal ideali ise R'ye aşamalı asal halka (ya da kısaca gr-asal halka) denir.*

Önerme 1.15.8 *$R = \oplus_{g \in G} R_g$ aşamalı bir halka ve P, R'nin aşamalı bir öz ideali olsun. P, R'nin aşamalı asal idealidir ancak ve ancak $a, b \in h(R)$ olmak üzere $aRb \subseteq P$ olması $a \in P$ veya $b \in P$ olmasını gerektirir.*

Aşamalı bir halka içinde, her asal idealin gr-asal ideal olduğu açıktır. Ancak aşağıdaki örnek, her gr-asal idealin asal ideal olmadığını gösterir.

Örnek 1.15.9 *(Refai ve Al-Zoubi 2004) $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ ve $G = \mathbb{Z}_2$ olsun. $R_0 = \mathbb{Z}$ ve $R_1 = i\mathbb{Z}$ olmak üzere; $R = R_0 \oplus R_1$ G-aşamalı bir halkadır. $I = 2R$ ideali, R'nin gr-asal bir idealidir ancak asal ideali değildir.*

Tanım 1.15.10 *H bir grup olsun. H'nin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir S altkümesi varsa H'ye sıralı (ordered) grup denir.*

(OH_1) *$e \notin S$'dir.*

(OH_2) *$a \in H$ ise ya $a \in S$'dir ya $a = e$'dir ya da $a^{-1} \in S$'dir.*

(OH_3) *$a, b \in S$ ise $ab \in S$'dir.*

(OH_4) *Her $a \in H$ için $aSa^{-1} \subseteq S$'dir.*

Önerme 1.15.11 (1) *H sıralı bir grup ve S, Tanım 1.15.10'daki (OH_1-OH_4) koşullarını sağlayan küme olsun. $a, b \in H$ olmak üzere, $b < a \iff b^{-1}a \in S$ şeklinde tanımlı $<$ bağıntısı ile, H lineer sıralı bir kümedir ve $a, b \in H$ için $a < b$ ise her $c \in H$ için $ac < bc$'dir.*

(2) *H grubu, üzerinde tanımlı bir $<$ bağıntısı ile lineer sıralı bir küme olsun. $a, b \in H$ için $a < b$ olması her $c \in H$ için $ac < bc$ olmasını gerektiriyorsa, $S = \{x \in H : e_H < x\}$ kümesi Tanım 1.15.10'daki (OH_1-OH_4) koşullarını sağlar, yani H sıralı bir gruptur.*

Örnek 1.15.12 *Her serbest grup bir sıralı gruptur.*

Önerme 1.15.13 *G sıralı bir grup olmak üzere R, G-aşamalı bir halka ve P, R'nin aşamalı bir ideali olsun. P, R'nin bir asal idealidir ancak ve ancak P, R'nin bir gr-asal idealidir.*

Tanım 1.15.14 *$R = \oplus_{g \in G} R_g$ G-aşamalı bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. $\{M_g\}_{g \in G}$, M'nin toplamsal altgruplarının bir ailesi olmak üzere $M = \oplus_{g \in G} M_g$ ise ve her $g, h \in G$ için $M_g R_h \subseteq M_{gh}$ oluyorsa, M'ye G-aşamalı R-modül (ya da kısaca aşamalı R-modül) denir.*

$M = \oplus_{g \in G} M_g$ G-aşamalı bir R-modül olsun. $g \in G$ için M_g'nin elemanlarının her birine derecesi g olan bir homojen eleman (ya da kısaca homojen eleman) denir. M'nin tüm homojen elemanlarının kümesi $h(M)$ ile gösterilir, yani $h(M) = \cup_{g \in G} M_g$'dir.

Dikkat edilirse; R G-aşamalı bir halka ve $M = \oplus_{g \in G} M_g$ G-aşamalı bir R-modül ise her $g \in G$ için M_g bir R_e-modüldür.

Önerme 1.15.15 *$R = \oplus_{g \in G} R_g$ kuvvetli aşamalı bir halka ve $M = \oplus_{g \in G} M_g$ aşamalı bir R-modül olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(1) *$M = (0)$'dır ancak ve ancak $M_h = (0)$ olacak şekilde bir $h \in G$ vardır.*

(2) *I, R'nin aşamalı bir sol ideali ise, $I = RI_e$'dir.*

Tanım 1.15.16 *$R = \oplus_{g \in G} R_g$ G-aşamalı bir halka, $M = \oplus_{g \in G} M_g$ aşamalı bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. $N = \oplus_{g \in G}(N \cap M_g)$ ise, N'ye M'nin aşamalı bir altmodülü denir.*

R G-aşamalı bir halka, $M = \oplus_{g\in G} M_g$ aşamalı bir R-modül ve N, M'nin aşamalı bir altmodülü olsun. O zaman, her $g \in G$ için $(M/N)_g = (M_g + N)/N$ olmak üzere; M/N, G-aşamalı bir R-modüldür.

R G-aşamalı bir halka, $M = \oplus_{g\in G} M_g$ aşamalı bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. N'nin tüm homojen elemanları tarafından üretilen altmodül aşamalı bir altmodüldür ve bu altmodül N^* ile gösterilir. Dikkat edilirse; N^*, N içinde kapsanan en büyük aşamalı altmodüldür ve $N^* = \oplus_{g\in G}(N \cap M_g)$'dir.

Önerme 1.15.17 *$R = \oplus_{g\in G} R_g$ aşamalı bir halka, $M = \oplus_{g\in G} M_g$ aşamalı bir R-modül ve I, R'nin aşamalı bir ideali olsun. O zaman,*

(1) *$ann_R(M)$, R'nin aşamalı bir idealidir.*

(2) *$(0 :_M I)$, M'nin aşamalı bir altmodülüdür.*

(3) *MI, M'nin aşamalı bir altmodülüdür.*

İspat. (1) $x \in ann_R(M)$ olsun. $x = r_{g_1} + ... + r_{g_n}$ olacak şekilde $r_{g_i} \in R_{g_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ homojen elemanları ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Her $m \in h(M)$ için, $0 = mx = mr_{g_1} + ... + mr_{g_n}$ olur. Buradan; her $m \in h(M)$ için $mr_{g_i} = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ elde edilir. M aşamalı R-modül olduğundan bu sonuç, her $i = 1, ..., n$ için $r_{g_i} \in ann_R(M)$ olduğunu gösterir. Böylece $x \in \oplus_{g\in G}(ann_R(M) \cap R_g)$ ve dolayısıyla $ann_R(M) = \oplus_{g\in G}(ann_R(M) \cap R_g)$ olur. Şu halde $ann_R(M)$, R'nin aşamalı bir idealidir.

(2) $m \in (0 :_M I)$ olsun. $m = m_{g_1} + ... + m_{g_n}$ olacak şekilde $m_{g_i} \in M_{g_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ homojen elemanları ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Her $r \in h(I)$ için, $mr = m_{g_1}r + ...+ m_{g_n}r = 0$'dır. Buradan, her $r \in h(I)$ için $m_{g_i}r = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ elde edilir. I aşamalı bir ideal olduğundan, $i = 1, ..., n$ için $m_{g_i} \in (0 :_M I)$ olur. Bu da $m \in \oplus_{g\in G}((0 :_M I) \cap M_g)$ ve dolayısıyla $(0 :_M I) = \oplus_{g\in G}((0 :_M I) \cap M_g)$ olduğunu gösterir. Şu halde $(0 :_M I)$, M'nin aşamalı bir altmodülüdür.

(3) $m \in M$ ve $r \in I$ için $mr \in \oplus_{g\in G}(MI \cap M_g)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $m = m_{g_1} + ... + m_{g_n}$ olacak şekilde $m_{g_i} \in M_{g_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ homojen elemanları ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. I aşamalı bir ideal olduğundan, $r = r_{h_1} + ... + r_{h_t}$ olacak şekilde $r_{h_j} \in I \cap R_{h_j}$ $(1 \leq j \leq t)$ homojen elemanları ve $t \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan, $mr = \sum\limits_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq t} m_{g_i} r_{h_j} \in \oplus_{g\in G}(M_g \cap MI)$ olur. Şu halde MI, M'nin aşamalı bir altmodülüdür. ∎

Tanım 1.15.18 *R aşamalı bir halka, M aşamalı bir R-modül ve A, M'nin aşamalı bir altmodülü olsun. M'nin sıfırdan farklı her C aşamalı altmodülü için $A \cap C \neq (0)$ oluyorsa A'ya M'nin aşamalı esas (ya da kısaca gr-esas) altmodülü denir.*

Önerme 1.15.19 *R aşamalı bir halka, M aşamalı bir R-modül ve N, M'nin aşamalı bir altmodülü olsun. O zaman; N, M'nin bir esas altmodülüdür ancak ve ancak N, M'nin bir gr-esas altmodülüdür.*

İspat. N, M'nin bir esas altmodülü ise N'nin M içinde gr-esas altmodül olduğu açıktır. Tersine; N, M'nin bir gr-esas altmodülü olsun. $0 \neq m \in M$ alalım. $m = m_{g_1} + ... + m_{g_n}$ olacak şekilde $0 \neq m_{g_i} \in M_{g_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ homojen elemanları ve $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. n üzerine tümevarım ile $0 \neq ma \in N$ olacak şekilde bir $a \in h(R)$ bulunduğunu göstereceğiz.

$n = 1$ ise; N, M içinde gr-esas altmodül olduğundan $0 \neq ma \in N$ olacak şekilde bir $a \in h(R)$ bulunur.

$n > 1$ olsun. Tümevarım hipotezinden dolayı, $0 \neq (m_{g_2} + ... + m_{g_n})b = (m - m_{g_1})b \in N$ olacak şekilde bir $b \in h(R)$ vardır.

$m_{g_1}b = 0$ ise; $0 \neq mb = (m - m_{g_1})b \in N$ olur.

$m_{g_1}b \neq 0$ olsun. N, M içinde gr-esas altmodül olduğundan, $0 \neq m_{g_1}bc \in N$ olacak şekilde bir $c \in h(R)$ vardır. $mbc = m_{g_1}bc + ... + m_{g_n}bc$ olur. $bc \in h(R)$ olduğundan son eşitliğin sağ tarafındaki toplam, mbc elemanının homojen elemanlar cinsinden tek türlü yazılımıdır. Buna göre, $m_{g_1}bc \neq 0$ olduğundan $0 \neq mbc \in N$'dir. Şu halde N, M içinde bir esas altmodüldür. ∎

Tanım 1.15.20 *R aşamalı bir halka, M aşamalı bir R-modül ve S, M'nin aşamalı bir altmodülü olsun. Eğer M'nin her T aşamalı öz altmodülü için $M \neq S + T$ oluyorsa S'ye M'nin aşamalı atık (ya da kısaca gr-atık) altmodülü denir.*

R G-aşamalı bir halka ve M aşamalı bir R-modül olsun. M'nin her atık ve aşamalı altmodülünün gr-atık olduğu açıktır. Ancak aşağıdaki örnek her gr-atık altmodülün atık altmodül olmadığını göstermektedir.

Örnek 1.15.21 *k bir cisim olmak üzere $R = k[x]$ polinomlar halkasında (x), R_R'nin gr-atık bir altmodülüdür fakat atık altmodülü değildir.*

Tanım 1.15.22 *R gr-asal bir halka olsun. R'nin her gr-esas sol (sağ) ideali sıfırdan farklı bir aşamalı ideal kapsıyorsa R'ye sol (sağ) aşamalı sınırlı halka denir.*

Tanım 1.15.23 *R aşamalı bir halka olsun. R'nin her P gr-asal ideali için R/P halkası sol (sağ) aşamalı sınırlı ise R'ye sol (sağ) aşamalı tümden sınırlı halka denir.*

Aşağıdaki örnek, her sol aşamalı tümden sınırlı halkanın, sol tümden sınırlı halka olmadığını göstermektedir.

Örnek 1.15.24 *D bölümlü bir halka ve φ, D'nin bir otomorfizması olmak üzere $R = D[x, \varphi]$ yarı-polinom halkasını göz önüne alalım. R sol aşamalı tümden sınırlı bir halkadır, çünkü R'nin her aşamalı sol ideali çift yönlü idealdir. Ancak φ, D'nin bir iç otomorfizması değilse, R sol tümden sınırlı bir halka değildir.*

Tanım 1.15.25 *R aşamalı bir halka olsun. R, sıfırdan farklı aşamalı sol (sağ) ideallerin sonsuz bir dik toplamını kapsamıyorsa ve R, aşamalı sol (sağ) sıfırlayanlar üzerinde artan* *zincir koşulunu sağlıyorsa R'ye sol (sağ) aşamalı Goldie (ya da kısaca sol (sağ) gr-Goldie) halka denir.*

Aşağıdaki örnek, her sol gr-Goldie halkanın sol Goldie halka olmadığını göstermektedir.

Örnek 1.15.26 *k bir cisim olmak üzere, x ve y ile üretilen ve $xy = yx = 0$ bağıntılarını sağlayan k cebiri R'yi göz önüne alalım. $n \geq 0$ için $R_n = kx^n$ ve $m < 0$ için $R_m = ky^m$ olmak üzere $R = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ $\mathbb{Z}$-aşamalı bir halkadır. $R = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ sol gr-Goldie halkadır ancak sol Goldie halka değildir.*

Tanım 1.15.27 *R aşamalı bir halka olsun. Her $x \in h(R)$ için $x = xyx$ olacak şekilde bir $y \in R$ varsa R'ye aşamalı düzenli (ya da kısaca gr-düzenli) halka denir.*

Önerme 1.15.28 *R aşamalı bir halka olsun. R gr-düzenli halkadır ancak ve ancak R'nin her temel sol (ya da sağ) aşamalı ideali homojen bir eşkare eleman tarafından üretilir.*

Tanım 1.15.29 *R gr-düzenli bir halka olsun. R'nin tüm homojen eşkare elemanları merkezil ise, R'ye gr-abelyen düzenli halka denir.*

Her düzenli (abelyen düzenli) aşamalı halkanın gr-düzenli (gr-abelyen düzenli) halka olduğu açıktır. Ancak aşağıdaki örnek, bu ifadenin tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 1.15.30 *k bir cisim olmak üzere, birinci Weyl cebiri $S := A_1(k)$'yı göz önüne alalım. $A_1(k)$, k üzerinde x ve y ile üretilmiş ve $xy - yx = 1$ bağıntısını sağlayan cebirdir.* $\deg(x) = 1$ *ve* $\deg(y) = -1$ *olmak üzere, S aşamalı bir halkadır. S'nin total aşamalı kesirler halkası $Q^g(S)$ gr-abelyen düzenli bir halkadır ancak düzenli bir halka değildir.*

Tanım 1.15.31 *$R = \oplus_{g\in G} R_g$ G-aşamalı bir halka, $M = \oplus_{g\in G} M_g$ ile $M' = \oplus_{g\in G} M'_g$ aşamalı R-modüller ve $f : M \longrightarrow M'$ bir R-modül homomorfizması olsun. Her $h \in G$ için $f(M_h) \subseteq M'_h$ ise f'ye aşamalı homomorfizma denir.*

Tanım 1.15.32 *$R = \oplus_{g\in G} R_g$ G-aşamalı bir halka, $M = \oplus_{g\in G} M_g$ aşamalı bir R-modül ve $\sigma \in G$ olsun. Her $g \in G$ için $((\sigma)M)_g = M_{\sigma g}$ olmak üzere $(\sigma)M = \oplus_{g\in G} ((\sigma)M)_g$ aşamalı R-modülüne M'nin σ-süspansiyonu (σ-suspension) denir.*

Tanım 1.15.33 *$R = \oplus_{g\in G} R_g$ G-aşamalı bir halka ve $M = \oplus_{g\in G} M_g$ sıfırdan farklı aşamalı bir R-modül olsun. M'nin sıfırdan ve kendisinden başka bir aşamalı altmodülü yoksa M'ye aşamalı basit (ya da kısaca gr-basit) modül denir.*

Her basit aşamalı modülün gr-basit olduğu açıktır. Ancak aşağıdaki örnek, her gr-basit modülün basit modül olmadığını gösterir.

Örnek 1.15.34 *k bir cisim olmak üzere $R = k[x, x^{-1}]$ Laurent polinomlar halkasını göz önüne alalım. R_R modülü gr-basit modüldür ancak basit modül değildir.*

Tanım 1.15.35 *$R = \oplus_{g\in G} R_g$ G-aşamalı bir halka ve $M = \oplus_{g\in G} M_g$ aşamalı bir R-modül olsun. M, aşamalı altmodülleri üzerinde artan (azalan) zincir koşulunu sağlıyorsa M'ye aşamalı Noether (Artin) modül (ya da kısaca gr-Noether (gr-Artin) modül)denir.*

Önerme 1.15.36 *R aşamalı bir halka ve M aşamalı bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *M aşamalı Noether'dir.*

(2) *M'nin aşamalı altmodüllerinin boştan farklı her altkümesinin bir maksimal elemanı vardır.*

(3) *M'nin her aşamalı altmodülü sonlu üretilmiştir.*

Önerme 1.15.37 *R aşamalı bir halka ve M aşamalı bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *M aşamalı Artin'dir.*

(2) *M'nin aşamalı altmodüllerinin boştan farklı her altkümesinin bir minimal elemanı vardır.*

(3) *$\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$, M'nin aşamalı altmodüllerinin bir ailesi ise A'nın öyle bir sonlu F altkümesi vardır ki $\cap_{\alpha\in A} M_\alpha = \cap_{\beta\in F} M_\beta$'dır.*

Her Artin aşamalı modülün gr-Artin modül olduğu açıktır. Ancak aşağıdaki örnek her gr-Artin modülün Artin olmadığını gösterir.

Örnek 1.15.38 *k bir cisim olmak üzere $R = k[x, x^{-1}]$ Laurent polinomlar halkasını göz önüne alalım. R_R gr-Artin modüldür ancak Artin modül değildir.*

Her Noether aşamalı modülün gr-Noether olduğu açıktır. Ancak aşağıdaki örnek, her gr-Noether modülün Noether modül olmadığını gösterir.

Örnek 1.15.39 *J sonsuz bir küme olmak üzere $G = \mathbb{Z}^{(J)}$ grubunu göz önüne alalım. k bir cisim olmak üzere $R = k[G]$ grup halkası G-aşamalı bir halkadır. R_R modülü gr-Noether'dir ancak Noether değildir.*

Tanım 1.15.40 *R aşamalı bir halka ve M aşamalı bir R-modül olsun. A ve B aşamalı R-modüller olmak üzere, her $g : A \longrightarrow B$ aşamalı R-monomorfizması ve her $h : A \longrightarrow M$ aşamalı R-homomorfizması için $h = fg$ olacak şekilde bir $f : B \longrightarrow M$ aşamalı R-homomorfizması bulunabiliyorsa M'ye aşamalı injektif (ya da kısaca gr-injektif) R-modül denir.*

$$\begin{tikzcd} & M & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "h"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

Önerme 1.15.41 *R aşamalı bir halka ve M aşamalı bir R-modül olsun. M injektif bir R-modül ise M gr-injektiftir.*

Aşağıdaki örnek, her gr-injektif modülün injektif modül olmadığını gösterir.

Örnek 1.15.42 *k bir cisim olmak üzere $R = k[x, x^{-1}]$ Laurent polinomlar halkasını göz önüne alalım. R_R gr-injektif modüldür ancak injektif modül değildir.*

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Asal ideal kavramının modül teorideki genellemesi olan asal altmodül kavramı, ilk olarak 1965 yılında Feller ve Swokowski tarafından tanımlanmıştır. Literatürde asal altmodüller ile ilgili olarak yer alan ilk çalışmalar Feller ve Swokowski (1965), Karakaş (1972) ve Dauns (1978) tarafından yapılmıştır. Asal altmodüller, son 30 yıl içinde birçok cebirci tarafından çalışılmış ve bu altmodül sınıfı ile ilgili birçok önemli sonuç elde edilmiştir (örn. bkz. Lu 1984, 1989, 1990, 1995, 1997, McCasland ve Moore 1986, 1991, McCasland ve Smith 1993, Man 1999, Man ve Smith 2002, Pusat-Yılmaz ve Smith 2002, Alkan ve Tıraş 2006, 2007, Azizi 2007, Behboodi 2009, Çeken ve Alkan 2011b, 2013a). M bir R-modül olsun. $M \neq (0)$ ve M'nin sıfırdan farklı her N altmodülü için $ann_R(M) = ann_R(N)$ ise M'ye *asal R-modül* denir. M asal bir R-modül ise $ann_R(M)$ idealinin R'nin bir asal ideali olduğu kolayca görülebilir. M'nin bir N altmodülü için M/N bölüm modülü asal R-modül ise N'ye M'nin *asal altmodülü* denir. N, M'nin bir asal altmodülü ve $P = ann_R(M/N)$ ise N'ye P-asal altmodül denir.

Eşasal altmodüller, asal altmodüllerin dual kavramı olarak, 2001 yılında Yassemi tarafından değişmeli halkalar üzerinde tanımlanmıştır. Yassemi değişmeli bir halka üzerindeki eşasal modül tanımını şöyle vermiştir: R değişmeli bir halka ve M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. Her $r \in R$ için, $f_r : M \longrightarrow M$, $f_r(m) = mr$ $(m \in M)$ şeklinde tanımlanan f_r endomorfizması sıfır ya da örten ise, M'ye eşasal R-modül denir. M'nin bir N altmodülü kendi başına eşasal bir R-modül ise, N'ye M'nin eşasal altmodülü denir (Yassemi 2001). Yassemi'nin yaptığı eşasal altmodül tanımı, 2002 yılında Annin tarafından değişmeli olmayan halkalar üzerindeki modüllere de genellenmiştir. Annin bu genellemeyi şöyle vermiştir: R (değişmeli olması gerekmeyen) bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. $M \neq (0)$ ve M'nin her N öz altmodülü için $ann_R(M) = ann_R(M/N)$ ise, M'ye *eşasal* R-modül denir (Annin 2002). Değişmeli bir halka üzerinde Annin'in yaptığı eşasal modül tanımı ile Yassemi'nin yaptığı eşasal modül tanımı denk olmaktadır. Eşasal alt modüller ile ilgili çalışmalar asal alt modüllere göre oldukça yenidir. Son yıllarda yapılan çalışmalar, bu altmodül sınıfının, modül ve halka karakterizasyonlarında önemli bir rol oynadığını göstermiştir (örn. bkz. Annin 2002, 2008, Abuhlail 2010, Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2011, 2012a, 2012b, 2013, Çeken ve Alkan 2011a, 2014, Çeken vd 2013a, 2013b).

M bir sağ R-modül ve P, R'nin bir ideali olsun. $P = ann_R(N)$ ve N asal R-modül olacak şekilde M'nin bir N altmodülü varsa P'ye, M'nin bir *ilgili asalı* (associated prime) denir (Lam 1999). 2002 yılında, Annin değişmesiz halkalar üzerinde, ilgili asal ideallerin dual kavramı olan ekli asal idealleri şöyle tanımlamıştır: M bir sağ R-modül ve Q, R'nin bir ideali olsun. $Q = ann_R(T)$ olacak şekilde M'nin bir T eşasal bölüm modülü varsa Q'ya, M'nin bir *ekli asalı* (attached prime) denir (Annin 2002). M sağ R-modülünün tüm ekli asallarının kümesi $Att(M_R)$ ya da kısaca $Att(M)$ ile gösterilecektir. Dikkat edilirse; $Att((0)) = \emptyset$'dir ve M eşasal bir R-modül ise, $Att(M) = \{ann_R(M)\}$'dir.

Bu bölümde eşasal modüller ve ekli asal idealler için literatürde yer alan bazı sonuçlar verilecektir.

2.1. Eşasal Modüllerin Temel Özellikleri

Önerme 2.1.1 *(Abuhlail 2011) M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. O zaman, M eşasal R-modüldür ancak ve ancak R'nin her I ideali için $MI = (0)$ veya $MI = M$'dir.*

İspat. M eşasal bir R-modül ve I, R'nin bir ideali olsun. $MI \neq M$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $ann_R(M) = ann_R(M/MI)$ olur. Bu da $I \subseteq ann_R(M)$ olmasını gerektirir. Böylece $MI = (0)$'dır.

Tersine, R'nin her I ideali için $MI = (0)$ veya $MI = M$ olduğunu kabul edelim. N, M'nin bir öz altmodülü ve $ann_R(M/N) = I$ olsun. O zaman, $MI \neq M$'dir. Şu halde $MI = (0)$ yani $I \subseteq ann_R(M)$ olmalıdır. Böylece $ann_R(M) = ann_R(M/N)$ olur. ∎

Her basit modülün eşasal modül olduğu açıktır.

Tanım 2.1.2 *(Abuhlail 2011) M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. Her $r \in R$ için $Mr = (0)$ veya $Mr = M$ ise, M'ye bütünüyle eşasal (completely coprime) R-modül denir.*

Dikkat edilirse; bütünüyle eşasal bir modül eşasaldır.

R değişmeli bir halka iken, M'nin eşasal R-modül olması ile bütünüyle eşasal R-modül olması denktir.

Örnek 2.1.3 *(Abuhlail 2011) R bölümlü halka olmayan bir basit halka olsun. O zaman, R_R sağ R-modülü eşasal bir modüldür ancak bütünüyle eşasal bir modül değildir.*

Örnek 2.1.4 *(Abuhlail 2011)* (1) *$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülü eşasal bir modüldür.*

(2) *p bir asal sayı olmak üzere, $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ $\mathbb{Z}$-modülü eşasal bir modüldür.*

M bir sağ R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. Her $f \in End_R(M)$ için $f(N) \subseteq N$ oluyorsa N'ye, M'nin değişmez (fully invariant) altmodülü denir.

Önerme 2.1.5 *(Abuhlail 2011) M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *M eşasal R-modüldür.*

(2) *M'nin her değişmez L öz altmodülü için $ann_R(M) = ann_R(M/L)$'dir.*

(3) *M'nin her L öz altmodülü için M/L eşasal bir modüldür.*

(4) *M'nin her değişmez L öz altmodülü için M/L eşasal bir modüldür.*

(5) *M'nin her değişmez L öz altmodülü için $R/ann_R(M)$ halkası, M/L modülü ile eşüretilir.*

(6) *M'nin her L öz altmodülü için $R/ann_R(M)$ halkası, M/L modülü ile eşüretilir.*

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) Eşasal modül tanımından açıktır.

(2) $\Longrightarrow$ (1) L, M'nin bir öz altmodülü ve $I := ann_R(M/L)$ olsun. O zaman MI, M'nin değişmez bir altmodülüdür ve $I \subseteq ann_R(M/MI) = ann_R(M)$'dir. Buradan, $ann_R(M) = ann_R(M/L)$ olur. Buna göre, M eşasal R-modüldür.

(1) $\Longrightarrow$ (3) L, M'nin bir öz altmodülü ve I, R'nin bir ideali olsun. $N := MI + L \subsetneq M$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $I \subseteq ann_R(M/N) = ann_R(M)$ olur. Buna göre, $MI = (0) \subseteq L$'dir. Önerme 2.1.1'den, M/L eşasal bir modüldür.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Açıktır.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Özel olarak, $L := (0)$ değişmez altmodülü için, $M/L \simeq M$ eşasal bir modüldür.

″Herhangi bir halka üzerindeki bir N modülü halkayı eşüretir ancak ve ancak N bu halka üzerinde faithful modüldür.″ gerçeği kullanılarak, (2) $\Longrightarrow$ (5) ve (1) $\Longrightarrow$ (6) gerektirmeleri elde edilir. ∎

Eşasal modüller ile ilgili bazı basit sonuçları şöyle sıralayabiliriz:

- R basit bir halka ise, R üzerindeki her sağ R-modül eşasaldır.
- R basit halkadır ancak ve ancak R_R eşasal modüldür.
- M bir sağ R-modül olsun. $ann_R(M)$, R'nin bir maksimal ideali ise M eşasal bir R-modüldür: I, R'nin bir ideali olsun. $MI \neq (0)$ ise $ann_R(M) + I = R$'dir. Buradan, $MI = M$ elde edilir. Bu da M'nin eşasal modül olduğunu gösterir. Genel olarak, M eşasal bir R-modül ise $ann_R(M)$, R'nin bir maksimal ideali olmayabilir. Örneğin, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ eşasal bir $\mathbb{Z}$-modüldür ancak $ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}) = (0)$, $\mathbb{Z}$'nin bir maksimal ideali değildir.

Önerme 2.1.6 *(Abuhlail 2011) M eşasal bir sağ R-modül ise $ann_R(M)$, R'nin bir asal idealidir.*

İspat. M eşasal bir R-modül olsun. I ve J, R'nin idealleri olmak üzere $IJ \subseteq ann_R(M)$ olsun. $I \nsubseteq ann_R(M)$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $MI \neq (0)$'dır. M eşasal olduğundan, $MI = M$'dir. Buradan, $M(IJ) = (MI)J = MJ = (0)$ ve dolayısıyla $J \subseteq ann_R(M)$ olur. Bu da $ann_R(M)$'nin, R'nin bir asal ideali olduğunu gösterir. ∎

M eşasal bir sağ R-modül ve $ann_R(M) = P$ ise bu durumda M'ye P-eşasal modül denir.

Önerme 2.1.6'nın tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin, $ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = (0)$, $\mathbb{Z}$'nin bir asal idealidir ancak $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ eşasal bir modül değildir.

Tanım 2.1.7 *(Tuganbaev 2003) M bir sağ R-modül olsun. M'nin her N altmodülü için $N = MI$ olacak şekilde R'nin bir I ideali varsa M'ye çarpımsal (multiplication) modül denir.*

Önerme 2.1.8 *(Tuganbaev 2003) M bir sağ R-modül olsun. M çarpımsal R-modüldür ancak ve ancak M'nin her N altmodülü için $N = Mann_R(M/N)$'dir.*

R değişmeli bir halka ise R_R çarpımsal modüldür.

Aşağıda tanımı verilen eşçarpımsal modül kavramı, çarpımsal modüllerin dual kavramı olarak, 2007 yılında Ansari-Toroghy ve Farshadifar tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.9 *(Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2007) M bir sağ R-modül olsun. M'nin her N altmodülü için $N = (0 :_M I)$ olacak şekilde R'nin bir I ideali varsa M'ye eşçarpımsal (comultiplication) modül denir.*

Önerme 2.1.10 *(Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2007) M bir sağ R-modül olsun. M'nin eşçarpımsal bir R-modül olması için gerek ve yeter koşul M'nin her N altmodülü için $N = (0 :_M ann_R(N))$ olmasıdır.*

Örnek 2.1.11 *(Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2007) p bir asal sayı olsun. $\mathbb{Z}(p^\infty)$, $\mathbb{Z}$-modülü eşçarpımsal bir $\mathbb{Z}$-modüldür. Çünkü $\mathbb{Z}(p^\infty)$ modülünün her altmodülü, $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $(1/p^i + \mathbb{Z})\mathbb{Z}$ şeklindedir ve $(1/p^i + \mathbb{Z})\mathbb{Z} = (0 :_M p^i\mathbb{Z})$ eşitliği sağlanır.*

Örnek 2.1.12 *(Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2007) $M := \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ eşçarpımsal modül değildir. Çünkü $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$'nin bir altmodülüdür ancak $(0 :_M ann_{\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z})) = \mathbb{Z} \neq 2\mathbb{Z}$'dir.*

Önerme 2.1.13 *(Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2007) M eşçarpımsal bir sağ R-modül ise, M'nin her altmodülü de eşçarpımsal R-modüldür.*

Teorem 2.1.14 *(Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2008) R değişmeli bir halka, M sonlu üretilmiş faithful eşçarpımsal bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. O zaman; N, M'nin esas altmodülüdür ancak ve ancak $N = (0 :_M I)$ olacak şekilde R'nin bir I atık ideali vardır.*

Önerme 2.1.15 *(Abuhlail 2011)* (1) *M çarpımsal bir sağ R-modül olsun. O zaman, M eşasal modüldür ancak ve ancak M basit modüldür.*

(2) *M eşçarpımsal bir sağ R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. N, M'nin eşasal bir altmodülüdür ancak ve ancak $ann_R(N)$, R'nin bir asal idealidir.*

İspat. (1) Her basit modülün eşasal olduğu açıktır. Tersine, M çarpımsal modülünün eşasal olduğunu kabul edelim. N, M'nin bir öz altmodülü ve $I := ann_R(M/N)$ olsun. O zaman $N = MI$ ve $MI \neq M$'dir. M eşasal modül olduğundan, $MI = N = (0)$ olmalıdır. Bu da M'nin basit modül olduğunu gösterir.

(2) N, M'nin eşasal bir altmodülü olsun. Önerme 2.1.6'ya göre $ann_R(N)$, R'nin bir asal idealidir. Tersine, $ann_R(N)$, R'nin bir asal ideali olsun. Önerme 2.1.13'den dolayı, N eşçarpımsal bir modüldür. I, R'nin bir ideali olsun. $NI \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. $J := ann_R(NI)$ olsun. $IJ \subseteq ann_R(N)$ ve $ann_R(N)$ asal ideal olduğundan, $J \subseteq ann_R(N)$'dir. Buradan, $N = (0 :_N ann_R(N)) \subseteq (0 :_N J) = (0 :_N ann_R(NI)) = NI$ ve dolayısıyla $N = NI$ olur. Önerme 2.1.1'den, N eşasal bir R-modüldür. ∎

2.2. Modüllerin Ekli Asalları

Değişmesiz halkalar üzerindeki modüllerin ekli asalları ile ilgili olarak literatürde yer alan bazı sonuçları vermeden önce, değişmeli halkalar üzerindeki modüllerin ekli asalları ile ilgili bazı sonuçlara yer vereceğiz. Değişmeli halkalar üzerindeki modüllerin ekli asalları, 1973 yılında Macdonald tarafından aşağıda tanımı verilen sekonder gösterimler yardımıyla tanımlanmıştır.

M bir sağ R-modül ve $f \in End_R(M)$ olsun. $f^n = 0_{End_R(M)}$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa f'ye bir üstel sıfır endomorfizma denir.

Tanım 2.2.1 *(Macdonald 1973) R değişmeli bir halka ve M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. Her $r \in R$ için, $f_r : M \longrightarrow M$, $f_r(m) = mr$ şeklinde tanımlı f_r endomorfizması örten veya üstel sıfır ise, M'ye sekonder (secondary) modül denir. M sekonder bir R-modül ise $P := \sqrt{ann_R(M)}$, R'nin bir asal idealidir ve bu durumda M'ye P-sekonder modül denir.*

Kolayca görülebilir ki; R değişmeli halkasının bir P asal ideali için, herhangi iki P-sekonder modülün toplamı yine P-sekonderdir.

Tanım 2.2.2 *(Macdonald 1973) R değişmeli bir halka ve M bir R-modül olsun. $S_1, ..., S_n$ birer sekonder modül olmak üzere, $M = S_1 + ... + S_n$ ise M'nin bu şekildeki yazılışına M'nin bir sekonder gösterimi denir. M'nin bu şekildeki bir gösterimi için $P_i = \sqrt{ann_R(S_i)}$ $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere eğer*

(i) $P_1, ..., P_n$ idealleri birbirinden farklı ve

(ii) her $i = 1, ..., n$ için $S_i \nsubseteq \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} S_j$

ise o zaman $M = S_1 + ... + S_n$ sekonder gösterimine bir minimal sekonder gösterim denir.

Dikkat edilirse; her sekonder gösterim bir minimal sekonder gösterime indirgenebilir.

R değişmeli bir halka ve M sekonder gösterime sahip bir R-modül olsun. M'nin bir $M = S_1 + ... + S_n$ ($\sqrt{ann_R(S_i)} = P_i, i = 1, ..., n$) minimal sekonder gösterimini alalım. Buna göre n pozitif tamsayısı ile $\{P_1, ..., P_n\}$ kümesi M'nin minimal sekonder gösterimlerinin seçiminden bağımsızdır (Macdonald 1973). Bu kümeyi $Att^*(M)$ ile göstereceğiz. Macdonald (1973) $Att^*(M)$ kümesini M'nin ekli asallarının kümesi olarak adlandırmıştır.

Önerme 2.2.3 *(Macdonald 1973) R değişmeli bir halka, M sekonder gösterime sahip bir R-modül ve N, M'nin bir öz altmodülü olsun. O zaman, M/N de sekonder gösterime sahip bir modüldür ve $Att^*(M/N) \subseteq Att^*(M)$'dir.*

Önerme 2.2.4 *(Macdonald 1973) R değişmeli bir halka, P, R'nin bir asal ideali ve M sekonder gösterime sahip bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *$P \in Att^*(M)$'dir.*

(2) *M'nin, P-sekonder bir bölüm modülü vardır.*

(3) *M'nin, $\sqrt{ann_R(Q)} = P$ olacak şekilde bir Q bölüm modülü vardır.*

(4) *M'nin öyle bir Q bölüm modülü vardır ki; P, $ann_R(Q)$'yu kapsayan asal ideller arasında minimaldir.*

Ayrıca, $R/ann_R(M)$'nin herhangi bir ilgili asalı $Att^*(M)$ içindedir.

Teorem 2.2.5 *(Annin 2008) R değişmeli bir Noether halka, P, R'nin bir ideali ve M sekonder gösterime sahip bir R-modül olsun. O zaman, $P \in Att(M)$'dir ancak ve ancak $P \in Att^*(M)$'dir.*

İspat. $P \in Att(M)$ olduğunu kabul edelim. $P = ann_R(Q)$ olacak şekilde, M'nin eşasal bir Q bölüm modülü vardır. Önerme 2.1.6'dan P, R'nin bir asal idealidir. Önerme 2.2.4'den, $P \in Att^*(M)$ olduğu görülür.

Tersine, $P \in Att^*(M)$ olsun. Önerme 2.2.4'den dolayı, M'nin P-sekonder bir Q bölüm modülü vardır. $Q \neq QP$ olduğunu göstereceğiz. Aksine, $Q = QP$ olduğunu kabul edelim. R Noether halka olduğundan, $R/ann_R(Q)$'nun ilgili asallarının kümesi $Ass(R/ann_R(Q)) \neq \emptyset$'dir. Önerme 2.2.4'den, $\emptyset \neq Ass(R/ann_R(Q)) \subseteq Att^*(Q) = \{P\}$ olur. Böylece $P \in Ass(R/ann_R(Q))$'dur. Buna göre, $P = ann_R(I/ann_R(Q))$ olacak şekide bir $I/ann_R(Q)$ asal R-modülü vardır. Buradan, $PI \subseteq ann_R(Q)$ ve $Q = QP$ olduğundan, $QI = QPI \subseteq Qann_R(Q) = (0)$ olur. Bu da $I = ann_R(Q)$ olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. Böylece $Q \neq QP$'dir.

Şimdi $Q' = Q/QP$ modülünü göz önüne alalım. Q', M'nin sıfırdan farklı bir bölüm modülüdür. Q' modülünün P-eşasal bir modül olduğunu göstereceğiz. Q', Q'nun sıfırdan farklı bir bölüm modülü olduğundan, P-sekonder bir R-modüldür. Buna göre, $P \subseteq ann_R(Q')$ olması $P = ann_R(Q')$ olmasını gerektirir. Q'', Q' modülünün sıfırdan farklı bir bölüm modülü olsun. $P \subseteq ann_R(Q'')$ olduğu açıktır. Q'' P-sekonder olduğundan, $\sqrt{ann_R(Q'')} = P$ ve dolayısıyla $P = ann_R(Q'')$ olur. Bu da Q' modülünün P-eşasal bir modül olduğunu gösterir. Böylece $P \in Att(M)$ olur. ∎

Önerme 2.2.6 *(Annin 2008) n pozitif bir tamsayı ve M, $M_1, ..., M_n$ sağ R-modüller ol-*

sun. Aşağıdakiler sağlanır.

(1) *N, M'nin bir altmodülü ise, $Att(M/N) \subseteq Att(M) \subseteq Att(N) \cup Att(M/N)$ olur.*

(2) *S, M'nin bir atık altmodülü ise, $Att(M/S) = Att(M)$ olur.*

(3) *$Att(\oplus_{i=1}^{n} M_i) = \cup_{i=1}^{n} Att(M_i)$'dir.*

İspat. (1) $N \neq M$ olduğunu kabul edebiliriz. $Att(M/N) = \emptyset$ ise ilk kapsama açıktır. Bu yüzden, $Att(M) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edebiliriz. $P \in Att(M/N)$ olsun. $P = ann_R(M/T)$ ve $N \subseteq T$ olacak şekilde M/N'nin eşasal bir M/T bölüm modülü vardır. Böylece $P \in Att(M)$'dir.

$Att(M) = \emptyset$ ise, ikinci kapsama açıktır. Bu yüzden, $Att(M) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edebiliriz. $P \in Att(M)$ olsun. $P = ann_R(M/T)$ olacak şekilde M'nin eşasal bir M/T bölüm modülü vardır. İki durumu göz önüne alacağız.

Durum 1: $M = N + T$ ise $M/T = (N+T)/T \simeq N/(N \cap T)$, N'nin P-eşasal bir bölüm modülüdür. Böylece $P \in Att(N)$'dir.

Durum 2: $M \neq N + T$ ise o zaman, $(0) \neq M/(N+T) \simeq \frac{M/T}{(N+T)/T}$, M/T'nin bir bölüm modülü olduğundan, P-eşasal bir modüldür. Diğer taraftan, $M/(N+T) \simeq \frac{M/N}{(N+T)/N}$, M/N'nin P-eşasal bir bölüm modülü olduğundan, $P \in Att(M/N)$'dir.

Sonuç olarak $P \in Att(N) \cup Att(M/N)$ olur ve böylece ikinci kapsama elde edilir.

(2) $Att(M/S) \subseteq Att(M)$ kapsaması (1)'den dolayı doğrudur. $Att(M) = \emptyset$ ise istenen eşitlik sağlanır. Bu yüzden $Att(M) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edebiliriz. $P \in Att(M)$ olsun. $ann_R(M/N) = P$ olacak şekilde, M'nin eşasal bir M/N bölüm modülü vardır. S, M'nin atık altmodülü olduğundan, $M \neq N + S$'dir. $M/(N+S) \simeq \frac{M/N}{(N+S)/N}$, M/N'nin sıfırdan farklı bir bölüm modülü olduğundan, P-eşasal bir modüldür. Diğer taraftan, $M/(N+S) \simeq \frac{M/S}{(N+S)/S}$, M/S'nin P-eşasal bir bölüm modülü olduğundan, $P \in Att(M/S)$'dir. Bu da $Att(M) = Att(M/S)$ olduğunu gösterir.

(3) n üzerinde tümevarım yapılarak, (1)'den elde edilir. ∎

Örnek 2.2.7 *(Annin 2008) Önerme 2.2.6-(1)'deki kapsamaların hepsi aynı anda kesin kapsama olabilir: $R := \mathbb{Z}$, p ve q birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere, $N := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ve $M := E(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ olsun. O zaman,*

$$Att(M/N) = Att\left(\frac{E(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}\right) = \{(0)\},$$

$$Att(M) = \{(0), q\mathbb{Z}\}$$

$$Att(N) \cup Att(M/N) = \{p\mathbb{Z}, q\mathbb{Z}\} \cup \{(0)\} = \{p\mathbb{Z}, q\mathbb{Z}, (0)\}$$

olur.

Aşağıdaki iki örnek, Önerme 2.2.6-(3)'ün sonsuz dik toplamlar ve dik çarpımlar için genel olarak doğru olmadığını gösterir.

Örnek 2.2.8 *(Annin 2008) Sonsuz bir I indis kümesi için genel olarak, $Att(\oplus_{i\in I}M_i) \neq \cup_{i\in I}Att(M_i)$'dir: R bir ayrık değerlendirme halkası olsun. R lokal bir halkadır. R'nin maksimal ideali* m *olsun. O zaman, $Att(R_R) = \{\mathrm{m}\}$'dir. K, R'nin kesirler cismi olsun. K (0)-eşasal bir R-modüldür ve dolayısıyla $Att(K_R) = \{(0)\}$'dır. K, serbest bir R-modülün homomorf görüntüsü olduğundan, Önerme 2.2.6-(1)'den dolayı, sonsuz bir I indis kümesi için, $Att(K_R) \subseteq Att(\oplus_{i\in I}R_R)$'dir. Buna göre, $Att(\oplus_{i\in I}R_R) \neq \cup_{i\in I}Att(R_R) = Att(R_R)'$ dir.*

Örnek 2.2.9 *(Annin 2008) Sonsuz bir I indis kümesi için genel olarak, $Att(\prod_{i\in I} M_i) \neq \bigcup_{i\in I} Att(M_i)$'dir: $R := \mathbb{Z}$ ve $P(\mathbb{Z})$ asal sayılar kümesi olmak üzere, $M_R := \prod_{p\in P(\mathbb{Z})} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olsun. $N_R := \oplus_{p\in P(\mathbb{Z})}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ altmodülünü göz önüne alalım. İlk olarak $ann_R(M/N) = (0)$ olduğunu gösterelim. $0 \neq \alpha \in R$ için, $(\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}, ...)\alpha = (\alpha, \alpha, \alpha, ...)$ elemanının sonsuz çoklukta sıfırdan farklı girdisi vardır. Çünkü α'nın sonlu sayıda asal böleni vardır. Bu nedenle $\alpha \notin N$ ve dolayısıyla $\alpha \notin ann_R(M/N)$'dir. Böylece $ann_R(M/N) = (0)$'dır. Şimdi M/N'nin eşasal bir modül olduğunu gösterelim. $N_R \leq T_R \lneqq M_R$ olmak üzere, $\alpha \in ann_R(M/T)$ olsun. $\alpha = 0$ olduğunu göstereceğiz. Aksine, $\alpha \neq 0$ olduğunu kabul edelim. p_i $(1 \leq i \leq k)$ farklı asal sayılar olmak üzere, $\alpha = p_1^{a_1}...p_k^{a_k}$, α'nın asal çarpanlarına ayrılışı olsun. Buna göre $M\alpha = \prod_{p\neq p_i} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olur. Böylece, $N_R + \prod_{p\neq p_i} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subseteq T_R$ kapsaması elde edilir. Ancak $N_R + \prod_{p\neq p_i} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = M_R$ olduğundan, bu bir çelişkidir. Buna göre $\alpha = 0$ olmalıdır. Bu da M/N'nin (0)-eşasal bir $\mathbb{Z}$-modül olduğunu gösterir. Sonuç olarak; $(0) \in Att(M_R) = Att(\prod_{p\in P(\mathbb{Z})} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$'dir, ancak $(0) \notin \cup_{p\in P(\mathbb{Z})}Att(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, ...\}$ olduğundan $Att(\prod_{p\in P(\mathbb{Z})} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \neq \cup_{p\in P(\mathbb{Z})}Att(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$'dir.*

Önerme 2.2.10 *(Annin 2008) M sıfırdan farklı bir sağ R-modül ve $ann_R(Q_0)$, $\{ann_R(Q) : Q$, M'nin sıfırdan farklı bir bölüm modülü$\}$ kümesinin bir maksimal elemanı olsun. O zaman Q_0 eşasal bir modüldür ve $ann_R(Q_0) \in Att(M_R)$'dir. Özel olarak R sol ya da sağ Noether bir halka ise, $Att(M_R) \neq \emptyset$'dir.*

Aşağıdaki örnek, bir modülün ekli asallarının kümesinin boş küme olabileceğini göstermektedir.

Örnek 2.2.11 *(Abuhlail 2011) R tek asal ideali m olan bir halka olsun. m eşkare bir ideal ise, m_R'nin eşasal bir bölüm modülü yoktur ve dolayısıyla $Att(m_R) = \emptyset$'dir: Aksine bir $J \subsetneq m$ altmodülü için m/J'nin eşasal bir R-modül olduğunu kabul edelim. O zaman $ann_R(m/J)$ asal ideal olacağından $ann_R(m/J) = m$'dir. Buradan, $m = m^2 \subseteq J$ olur ki bu sonuç $J \neq m$ olması ile çelişir. Sonuç olarak, $Att(m_R) = \emptyset$'dir.*

Yukarıda bahsedilen türden bir halka örneği verelim: F bir cisim, p bir asal sayı ve $G = \mathbb{Z}(p^\infty)$ olmak üzere, $R := F[G]$ grup halkasını göz önüne alalım. R, tek asal ideali $m := \sum_{g\in G} R(g-1)$ olan değişmeli bir halkadır ve $m^2 = m$'dir. Yukarıdaki açıklamalara göre $Att(m_R) = \emptyset$ olmalıdır.

Aşağıdaki örnek bir modülün ekli asallarının kümesinin sonsuz bir küme olabileceğini göstermektedir.

Örnek 2.2.12 *(Annin 2008) $R := \mathbb{Z}$ ve $M := \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ olsun. $Att(M) = \{p\mathbb{Z} : p$ bir asal sayı$\}$ olur. Böylece $Att(M)$ sonsuz bir kümedir.*

Teorem 2.2.13 *(Annin 2008) M Artin bir sağ R-modül ise, $Att(M)$ sonlu bir kümedir.*

İspat. $\mathcal{F} := \{N \leq M :\mid Att(M/N) \mid< \infty\}$ kümesini göz önüne alalım. $M \in \mathcal{F}$ olduğundan, $\mathcal{F} \neq \emptyset$'dir. M Artin olduğundan, $\mathcal{F}$ kümesinin bir minimal N_0 elemanı vardır. Önerme 2.2.6-(1)'den, $Att(M) \subseteq Att(N_0) \cup Att(M/N_0)$'dır. Buna göre, $Att(N_0) = \emptyset$ ise $Att(M)$ sonlu bir kümedir. $Att(N_0) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. $P \in Att(N_0)$ olsun. N_0/N_1 P-eşasal olacak şekilde bir $N_1 \lneq N_0$ vardır. $Att(N_0/N_1) = \{P\}$'dir. Önerme 2.2.6-(1)'den,

$$Att(M/N_1) \subseteq Att(N_0/N_1) \cup Att(M/N_0) = \{P\} \cup Att(M/N_0)$$

olur. Buna göre, $Att(M/N_1)$ kümesi sonludur ve dolayısıyla $N_1 \in \mathcal{F}$'dir. Bu ise, N_0'ın minimalliği ile çelişir. O halde $Att(N_0) = \emptyset$ ve dolayısıyla $Att(M)$ sonlu bir kümedir. ∎

Teorem 2.2.13'ün tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin k bir cisim ve M sonsuz boyutlu bir k-uzayı ise, $Att(M_k) = \{(0)\}$ sonlu bir kümedir ancak M Artin bir k-modül değildir.

Önerme 2.2.14 *(Annin 2008) M dar bir sağ R-modül ise $\mid Att(M) \mid\leq 1$'dir.*

İspat. $Att(M) = \emptyset$ ise sonuç açıktır. $Att(M) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edebiliriz.
$P_1, P_2 \in Att(M)$ olsun. $i = 1, 2$ için $P_i = ann_R(M/T_i)$ olacak şekilde, M'nin eşasal M/T_i bölüm modülleri vardır. M dar modül olduğundan $T := T_1 + T_2$, M'nin bir öz altmodülüdür. $Q := M/T$ olsun. Q modülü, M/T_1 ve M/T_2 eşasal modüllerinin sıfırdan farklı bir bölüm modülü olduğundan $ann_R(Q) = P_1 = P_2$ elde edilir. ∎

Önerme 2.2.15 *(Annin 2008) R, idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka ve M dar bir sağ R-modül olsun. O zaman $p := \{r \in R : MrR \neq M\}$ olmak üzere, $Att(M) = \{p\}$'dir.*

İspat. Önerme 2.2.10 ve Önerme 2.2.14'den dolayı, R'nin bir q asal ideali için $Att(M) = \{q\}$'dur. $p = q$ olduğunu gösterelim. $q = ann_R(M/N)$ olacak şekilde M'nin eşasal bir M/N bölüm modülü vardır. $x \in q$ olsun. O zaman, $MxR \subseteq N \neq M$ ve dolayısıyla $x \in p$'dir. Tersine, $x \in p$ ise $MxR \neq M$'dir. M dar modül olduğundan, $MxR + N \neq M$'dir. M/N eşasal modül olduğundan, $ann_R(M/\left(MxR + N\right)) = q$ olur. Buna göre $x \in q$'dur. Böylece $p = q$ elde edilir. ∎

Önerme 2.2.16 *(Annin 2008) M bir sağ R-modül olsun. $\mid Att(M) \mid\leq h.dim(M)$'dir.*

İspat. $h.dim(M) = k < \infty$ olduğunu kabul edebiliriz. $H_1, ..., H_k$ dar modüller olmak üzere, öyle bir $\varphi : M \longrightarrow H_1 \oplus ... \oplus H_k$ epimorfizması vardır ki; $K :=$Ç$ek(\varphi)$, M içinde atık altmodüldür. Önerme 2.2.6-$(2),(3)$ ve Önerme 2.2.14 sırasıyla kullanılarak, şu eşitsizlikler elde edilir: $\mid Att(M) \mid = \mid Att(M/K) \mid = \mid Att(H_1 \oplus ... \oplus H_k) \mid = \mid \cup_{i=1}^{k} Att(H_i) \mid \leq \sum_{i=1}^{k} \mid Att(H_i) \mid \leq k$. Böylece $\mid Att(M) \mid \leq h.dim(M)$ olur. ∎

Teorem 2.2.17 *(Annin 2008) R, idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka ve M sıfırdan farklı bir Artin R-modül olsun. O zaman, her bir M_i/M_{i-1} eşasal modül olacak şekilde bir*

$$(0) \neq M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq ... \subsetneq M_n = M$$

filtrasyonu vardır.

İspat. $\mathcal{F} := \{N \subsetneq M : M/N$ teoremin ifadesinde belirtilen şekilde bir filtrasyona sahiptir$\}$ kümesini gözönüne alalım. Önerme 2.2.10'dan dolayı, M'nin eşasal bir M/N' bölüm modülü vardır. $(0) \neq M/N'$ teoremin ifadesinde belirtilen şekilde bir filtrasyon olduğundan, $N' \in \mathcal{F}$ ve dolayısıyla $\mathcal{F} \neq \emptyset$'dir. M Artin olduğundan, $\mathcal{F}$'nin minimal bir N_0 elemanı vardır. $N_0 = (0)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $N_0 \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. Önerme 2.2.10'dan dolayı, N_0'ın eşasal bir N_0/N_1 bölüm modülü vardır. M/N_0 modülünün teoremin ifadesinde belirtilen şekildeki bir filtrasyonu

$$M/N_0 = M_n/N_0 \supsetneq M_{n-1}/N_0 \supsetneq ... \supsetneq M_1/N_0 \supsetneq N_0/N_0 = (0)$$

olsun. Bu filtrasyon kullanarak,

$$M/N_1 = M_n/N_1 \supsetneq M_{n-1}/N_1 \supsetneq ... \supsetneq M_1/N_1 \supsetneq N_0/N_1 \supsetneq N_0/N_0 = (0)$$

filtrasyonunu elde ederiz. Bu filtrasyon da teoremin ifadesinde belirtilen şekilde bir filtrasyondur. Buna göre, $N_1 \in \mathcal{F}$ olur. Bu ise N_0'ın minimal olması ile çelişir. Böylece $N_0 = (0)$'dır. ∎

Tanım 2.2.18 *(Lam 1999) R bir halka ve M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M'nin her öz altmodülü bir maksimal altmodül içinde kapsanıyorsa M'ye Bass modül denir.*

Teorem 1.9.4'e göre sağ tam bir halka üzerindeki sıfırdan farklı her sağ modül Bass modüldür. Ayrıca Tuganbaev'in (2002) kitabında yer alan Uyarı 21.2 ve Teorem 21.4'e göre, sağ tam bir halkada her asal ideal maksimaldir.

Önerme 2.2.19 *(Annin 2008) $\{M_i : i \in I\}$ sağ R-modüllerin bir ailesi olsun. $\oplus_{i\in I} M_i$ bir Bass modül ise $Att(\oplus_{i\in I} M_i) = \cup_{i\in I} Att(M_i)$ olur.*

İspat. Önerme 2.2.6-(1)'den dolayı, $\cup_{i\in I} Att(M_i) \subseteq Att(\oplus_{i\in I} M_i)$'dir.

Tersine, $p \in Att(\oplus_{i\in I} M_i)$ olsun. $\oplus_{i\in I} M_i$'nin, p-eşasal olan bir $(\oplus_{i\in I} M_i)/Q$ bölüm modülü vardır. $\oplus_{i\in I} M_i$ Bass modül olduğundan, $(\oplus_{i\in I} M_i)/Q$ modülünün maksimal bir altmodülü vardır. Bu maksimal altmodül Q'/Q olsun. Q', $\oplus_{i\in I} M_i$ modülünün bir öz altmodülü olduğundan $M_j \nsubseteq Q'$ olacak şekilde bir $j \in I$ vardır. Q''nün maksimalliğinden, $Q' + M_j = \oplus_{i\in I} M_i$ ve dolayısıyla $(\oplus_{i\in I} M_i)/Q' = (Q' + M_j)/Q' \simeq M_j/(M_j \cap Q')$

olur. $M_j/(M_j \cap Q')$ modülü $(\oplus_{i\in I} M_i)/Q$ modülünün sıfırdan farklı bir homomorf görüntüsü olduğundan, p-eşasal bir modüldür. Böylece $p \in Att(M_j)$ ve dolayısıyla $p \in \cup_{i\in I} Att(M_i)$'
dir. ∎

Önerme 2.2.20 *(Annin 2008) R halkasının tüm maksimal ideallerinin kümesi, $Max(R)$ ile gösterilsin. $Max(R) \subseteq Att(R_R)$'dir. Ayrıca, R değişmeli ya da lokal ya da sağ tam bir halka ise $Max(R) = Att(R_R)$'dir.*

İspat. İlk kapsama için, $m \in Max(R)$ alalım. m çift yönlü ideal olduğundan, $ann_R((R/m)_R) = m$'dir. $(R/m)_R$, R_R'nin m-eşasal bir bölüm modülü olduğundan, $m \in Att(R_R)$'dir.

İkinci kısım için, $p \in Att(R_R)$ olsun. İlk olarak, R'nin değişmeli olduğunu kabul edelim. m, R'nin p'yi kapsayan bir maksimal ideali olsun. R'nin, p-eşasal olan bir R/I bölüm modülü vardır. Buradan, $ann_R(R/I) = I = p$ olur. R/I eşasal olduğundan, $ann_R(R/I) = p = ann_R(R/m) = m$ olur. Böylece $p \in Max(R)$ olur.

Şimdi, R'nin lokal halka olduğunu kabul edelim. m, R'nin maksimal ideali olsun. R_R'nin p-eşasal olan bir R/I bölüm modülü vardır. R/m, R/I eşasal modülünün sıfırdan farklı bir homomorf görüntüsü olduğundan, R/m de p-eşasal bir R-modüldür. Buna göre, $ann_R(R/m) = m = p$ olur. Böylece $p \in Max(R)$'dir.

Son olarak, R'nin sağ tam halka olduğunu kabul edelim. Sağ tam bir halkada her asal ideal maksimal olduğundan, $p \in Max(R)$ olduğu açıktır. ∎

Önerme 2.2.21 *(Annin 2008) R sağ tam bir halka ve M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. O zaman, $\emptyset \neq Att(M) \subseteq Max(R)$'dir.*

İspat. R sağ tam bir halka olduğundan, M'nin bir N maksimal altmodülü vardır. Buna göre, $ann_R(M/N) \in Att(M)$ ve dolayısıyla $Att(M) \neq \emptyset$'dir. R'nin her asal ideali maksimal olduğundan, $Att(M) \subseteq Max(R)$ olduğu açıktır. ∎

Sonuç 2.2.22 *(Annin 2008) R sağ tam bir lokal halka, m, R'nin maksimal ideali ve M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. O zaman, $Att(M) = \{m\}$ olur.*

Önerme 2.2.23 *(Annin 2008) P sıfırdan farklı bir projektif sağ R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *P, basit bir sağ R-modülün projektif örtüsüdür.*

(2) *P'nin her maksimal altmodülü atık altmodüldür.*

(3) *P dar projektif bir sağ R-modüldür.*

R sağ tam bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. M'nin projektif örtüsü $P(M)$ ile, dar projektif sağ R-modüllerin izomorfizma sınıflarının kümesi $HP(R)$ ile ve dar projektif bir P modülünün izomorfizma sınıfı $[P]$ ile gösterilecektir.

Aşağıdaki teorem, R sağ tam bir halka iken dar projektif sağ R-modüllerin izomorfizma sınıfları ile R'nin maksimal idealleri arasında birebir bir eşleme olduğunu göstermektedir.

Teorem 2.2.24 *(Annin 2008) R sağ tam bir halka olsun. O zaman,*

$$\alpha : HP(R) \longrightarrow Max(R),\ \alpha([P]) = Att(P)$$

şeklinde tanımlı bir birebir eşleme vardır. $\{V_1, ..., V_n\}$ basit sağ R-modüllerin bir tam temsilciler kümesi ise $\{P(V_1), ..., P(V_n)\}$ de izomorfizma farkıyla, dar projektif sağ R-modüllerin bir tam temsilciler kümesidir.

İspat. P dar projektif bir sağ R-modül olsun. Önerme 2.2.21 ve Önerme 2.2.14'den dolayı, bir $m \in Max(R)$ için $Att(P) = \{m\}$'dir. α dönüşümünü $\alpha([P]) := m$ olarak tanımlarız.

α'nın örten olduğunu gösterelim. $m \in Max(R)$ olsun. $ann_R((R/m)_R) = m$ bir maksimal ideal olduğundan, $(R/m)_R$ eşasal bir R-modüldür. $m \subseteq I$ olacak şekilde bir I maksimal sağ ideali vardır. $(R/m)_R$ eşasal olduğundan, $ann_R(R/I) = m$'dir. R/I basit sağ R-modül olduğundan, $Att(R/I) = \{m\}$ olur. R sağ tam halka olduğundan, R/I modülünün bir projektif örtüsü vardır. (P, θ), R/I modülünün bir projektif örtüsü olsun. Önerme 2.2.23'den, P dar projektif bir modüldür. Ayrıca Önerme 2.2.6'dan, $Att(P) = Att(P/Çek(\theta)) = Att(R/I) = \{m\}$ olur. Buna göre, $\alpha([P]) = m$'dir. Bu da α'nın örten olduğunu gösterir.

α'nın birebir eşleme olduğunu göstermek için $HP(R)$ ve $Max(R)$'nin aynı eleman sayısına sahip sonlu kümeler olduğunu göstermek yeterlidir. R sağ tam halka olduğundan, $R/J(R)$ yarı-basittir. Dolayısıyla $R/J(R)$'nin basit sağ modüllerinin izomorfizma sınıflarının sayısı sonludur. Bu sayı n olsun. Buna göre, R'nin basit sağ modüllerinin izomorfizma sınıflarının sayısı da n'dir. $\{V_1, ..., V_n\}$ basit sağ R-modüllerin izomorfizma sınıflarının bir tam temsilciler kümesi olsun. Önerme 2.2.23'den dolayı, $\{P(V_1), ..., P(V_n)\}$ kümesi izomorfizma farkıyla, dar projektif sağ R-modüllerin bir tam temsilciler kümesidir. Böylece $| HP(R) |\leq n$ ve $| Max(R) |\geq n$'dir. α'nın örtenliği $| HP(R) |=| Max(R) |= n$ olmasını gerektirir. Buna göre, α birebir eşlemedir. ∎

Sonuç 2.2.25 *(Annin 2008) R sağ tam bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman, $Att(M)$ sonlu bir kümedir.*

İspat. Teorem 2.2.24'ün ispatı sağ tam R halkası için $| Max(R) |< \infty$ olduğunu göstermektedir. Önerme 2.2.21'den, $Att(M) \subseteq Max(R)$'dir. Böylece $| Att(M) |< \infty$ olur. ∎

3. DEĞİŞMESİZ HALKALAR ÜZERİNDEKİ EŞASAL MODÜLLER

Eşasal modüller ve altmodüller, bugüne kadar genellikle değişmeli halkalar üzerinde ele alınarak çalışılmıştır (bkz. Yassemi 2001, Atani 2001, 2002, Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2011, 2012a, 2012b, 2013, Çeken ve Alkan 2011a). Değişmeli olması gerekmeyen halkalar üzerindeki araştırmalar ise bunlarla karşılaştırıldığında literatürde daha az yer almıştır (bkz. Abuhlail 2010, Annin 2002, 2008). Ancak eşasal modüller değişmesiz halkalar üzerinde değişmeli duruma göre oldukça farklılık göstermektedirler. Bu bölümde değişmeli halkalar üzerindeki eşasal modüller için sağlanan bazı sonuçların değişmesiz halkalar üzerindeki modüllere genelleştirmeleri verilecek ve bu genellemelerde gözlenen farklılıklar ortaya konulacaktır. Bunun yanısıra ekli asallar ve değişmeli halkalar üzerindeki eşasal modüller için de bazı yeni sonuçlar verilecektir.

Bu bölüm üç alt başlıktan oluşmaktadır. Birinci kısımda değişmesiz halkalar üzerindeki eşasal modüllerin bazı karakterizasyonları verilerek farklı modül sınıflarıyla olan ilişkileri araştırılacaktır. Ayrıca asal modüller için sağlanan birtakım sonuçların benzerlerinin eşasal modüller için de sağlandığı gösterilecektir. İkinci kısımda bir modülün ekli asalları ile ilgili Annin'in (2008) makalesinde yer alan bazı sonuçlar genelleştirilecek ve eşasal modüller ile ekli asallar arasındaki ilişkiler ile ilgili birtakım sonuçlar verilecektir. Üçüncü kısımda ise eşasal modüller ile dar boyut kavramı arasındaki ilişkiler araştırılacaktır ve eşasal modül kavramından yararlanılarak max özelliğine sahip olan modüller için bazı sonuçlar verilecektir.

3.1. Eşasal Modüllerin Bazı Özellikleri ve Karakterizasyonları

Önteorem 3.1.1 *R, her asal ideali maksimal olan bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(1) *M asal R-modüldür ancak ve ancak M eşasal R-modüldür.*

(2) *R değişmeli halka ise; M eşasal R-modüldür ancak ve ancak M homojen yarı-basit R-modüldür.*

İspat. (1) İlk olarak, M'nin asal R-modül olduğunu kabul edelim. O zaman, $M \neq (0)$'dır ve $P = ann_R(M)$, R'nin bir asal idealidir. Hipotezden dolayı P, R'nin bir maksimal ideali olur. N, M'nin bir öz altmodülü olsun. O zaman, $P \subseteq ann_R(M/N) \subset R$ ve dolayısıyla $P = ann_R(M/N)$ olur. Buna göre M eşasal bir R-modüldür. Tersine, M'nin eşasal bir R-modül olduğunu kabul edelim. O zaman, yine hipotez dolayısıyla $P = ann_R(M)$, R'nin bir maksimal idealidir. M'nin sıfırdan farklı her L altmodülü için $P \subseteq ann_R(L) \subset R$ ve dolayısıyla $P = ann_R(L)$ olur. Buna göre, M asal bir R-modüldür.

(2) M eşasal bir R-modül ise, hipotezden dolayı $MP = (0)$ olacak şekilde bir P maksimal ideali vardır. Bu da M'nin homojen yarı-basit olmasını gerektirir. Diğer taraftan her homojen yarı-basit modülün eşasal modül olduğu açıktır. ∎

Sonuç 3.1.2 *R değişmeli düzenli bir halka ve M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. O zaman, M eşasal R-modüldür ancak ve ancak M homojen yarı-basit R-modüldür.*

İspat. Teorem 1.8.21'den dolayı, değişmeli düzenli bir halkada her asal ideal maksimaldir. Buna göre Önteorem 3.1.1'den istenen sonuç elde edilir. ∎

R değişmeli bir halka, $T \subseteq R$ ve M bir R-modül olsun. Her $r \in T$ için $f_r : M \longrightarrow M$, $f_r(m) = mr$ şeklinde tanımlı f_r endomorfizması birebir ve örten ise *"T'nin tüm elemanları M üzerine birebir ve örten olarak etki eder"* denir.

Önteorem 3.1.3 *(Zöschinger 1990) R değişmeli bir Noether halka, M bir R-modül ve S, R'nin çarpımsal kapalı bir altkümesi olsun. S'nin tüm elemanları M üzerine birebir ve örten olarak etki ediyor ise o zaman; M sekonder R-modüldür ancak ve ancak $S^{-1}M$ sekonder $S^{-1}R$-modüldür.*

Aşağıdaki önermede, değişmeli bir Noether halka üzerindeki eşasal bir modülün yukarıdaki Önteoremde ifade edilen türden yerelleştirmesi ile ilgili bir sonuç vereceğiz.

Önerme 3.1.4 *R değişmeli bir Noether halka, M bir R-modül ve S, R'nin çarpımsal kapalı bir altkümesi olsun. S'nin tüm elemanları M üzerine birebir ve örten olarak etki ediyor ise o zaman; M eşasal R-modüldür ancak ve ancak $S^{-1}M$ eşasal $S^{-1}R$-modüldür.*

İspat. İlk olarak, $ann_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = S^{-1}(ann_R(M))$ olduğunu gösterelim.

$S^{-1}(ann_R(M)) \subseteq ann_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$ olduğu açıktır. $x \in ann_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$ olsun. $x = \frac{r}{s}$ olacak şekilde $r \in R$, $s \in S$ vardır ve her $m \in M$ için $\frac{m}{1}\frac{r}{s} = 0_{S^{-1}M}$'dir. Buna göre, $mrt = 0$ olacak şekilde bir $t \in S$ vardır. S'nin tüm elemanları M üzerine birebir olarak etki ettiğinden dolayı $mr = 0$ olur. Böylece $r \in ann_R(M)$ ve dolayısıyla $x = \frac{r}{s} \in S^{-1}(ann_R(M))$'dir. Bu da $ann_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = S^{-1}(ann_R(M))$ eşitliğininin doğru olduğunu gösterir.

Önteorem 3.1.3'den dolayı; R'nin bir p asal ideali için, M p-sekonderdir ancak ve ancak $S^{-1}M$ $S^{-1}p$-sekonderdir. Ayrıca sekonder modül tanımından görülebilir ki; M p-sekonder bir R-modül ise; M p-eşasaldır ancak ve ancak $ann_R(M)$, R'nin bir asal idealidir. Bu nedenle M p-eşasaldır ancak ve ancak $S^{-1}M$ $S^{-1}p$-eşasaldır. Çünkü $ann_R(M)$, R'nin bir asal idealidir ancak ve ancak $S^{-1}(ann_R(M))$, $S^{-1}R$'nin bir asal idealidir. ∎

Önerme 3.1.5 *R, tüm sağ ilkel faktörleri Artin olan bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) *M basit bir altmodül kapsayan bir asal modüldür.*

(ii) *M maksimal bir altmodül kapsayan eşasal bir modüldür.*

(iii) *M homojen yarı-basit modüldür.*

İspat. $(i) \Longrightarrow (iii)$ L, M asal modülünün basit bir altmodülü olsun. O zaman $P = ann_R(L)$, R'nin bir sağ ilkel idealidir. Hipotezden dolayı R/P Artin bir asal halkadır. Sağ ya da sol Artin bir halkada her asal ideal maksimal olduğundan P, R'nin bir maksimal idealidir. M asal R-modül olduğundan, $ann_R(M) = P$ olacaktır. $ann_R(M)$'nin bir maksimal ideal olması, M'nin homojen yarı-basit olduğunu gösterir.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ K, M eşasal modülünün maksimal bir altmodülü olsun. O zaman $P = ann_R(M/K)$, R'nin bir sağ ilkel idealidir. Hipotezden dolayı R/P Artin bir asal halkadır ve dolayısıyla P, R'nin bir maksimal idealidir. M eşasal olduğundan $ann_R(M) = P$'dir. Bu da M'nin homojen yarı-basit modül olduğunu gösterir.

$(iii) \Longrightarrow (i), (ii)$ gerektirmeleri açıktır. ∎

Sağ tam halkalar Önerme 3.1.5'deki hipotezi sağlar. Buna göre aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.6 *R sağ tam bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman, M eşasal R-modüldür ancak ve ancak M homojen yarı-basit R-modüldür.*

İspat. M homojen yarı-basit ise M'nin eşasal olduğu açıktır. Tersine, M'nin eşasal R-modül olduğunu kabul edelim. Teorem 1.9.4'den, M'nin bir maksimal altmodülü vardır. Böylece Önerme 3.1.5'den, M homojen yarı-basit bir modüldür. ∎

Önteorem 3.1.7 *M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) M eşasal R-modüldür.

(ii) R'nin her A ideali için $MA = (0)$ ya da $M = MA$'dır.

(iii) R'nin, $A \nsubseteq ann_R(M)$ olacak şekildeki her A ideali için $M = MA$'dır.

(iv) R'nin $ann_R(M) \subsetneq A$ olacak şekildeki her A ideali için $M = MA$'dır.

İspat. $(i) \Longleftrightarrow (ii)$ Önerme 2.1.1'in ifadesidir.

$(ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv)$ Açıktır.

$(iv) \Longrightarrow (i)$ N, M'nin bir öz altmodülü ve $C = ann_R(M/N)$ olsun. O zaman, $ann_R(M) \subseteq C$ ve $MC \subseteq N \neq M$'dir. (iv)'den dolayı $C = ann_R(M)$ olmalıdır. Böylece M eşasal R-modüldür. ∎

Önerme 3.1.8 *P, R halkasının bir asal ideali, M bir sağ R-modül, N, M'nin bir altmodülü ve N ile M/N P-eşasal R-modüller olsun. O zaman, M P-eşasal R-modüldür ancak ve ancak $MP = (0)$'dır.*

İspat. Gereklilik kısmı açıktır. Tersine, $MP = (0)$ olduğunu kabul edelim. A, R'nin bir ideali olsun. $A \subseteq P$ ise, $MA = (0)$'dır. $A \nsubseteq P$ olsun. Önteorem 3.1.7'den, $N = NA$ ve $M/N = (M/N)A$'dır. Buna göre,

$$M = MA + N = MA + NA = MA$$

olur. Önteorem 3.1.7'den, M P-eşasal modüldür. ∎

Önerme 3.1.9 *P, R halkasının bir asal ideali ve M P-eşasal bir sağ R-modül olsun. O zaman, M'nin sıfırdan farklı her pür altmodülü P-eşasaldır.*

İspat. N, M'nin sıfırdan farklı bir pür altmodülü olsun. $MP = (0)$ olması $NP = (0)$ olmasını gerektirir. A, R'nin bir ideali olsun. $A \subseteq P$ ise $NA = (0)$'dır. $A \nsubseteq P$ ise o zaman, $M = MA$ ve dolayısıyla $N = N \cap M = N \cap MA = NA$ olur. Önteorem 3.1.7'den, N P-eşasaldır. ∎

Önerme 3.1.10 *A, R halkasının bir ideali, M bir sağ R-modül ve $MA = (0)$ olsun. O zaman, M eşasal R-modüldür ancak ve ancak M eşasal (R/A)-modüldür.*

İspat. M'nin eşasal R-modül olduğunu kabul edelim. O zaman, $M \neq (0)$'dır. B, R'nin $A \subseteq B$ olacak şekilde bir ideali olsun. O zaman, $M(B/A) = MB$'dir. Önteorem 3.1.7'den dolayı $M(B/A) = (0)$ ya da $M(B/A) = M$ olur. Bu da M'nin eşasal (R/A)-modül olduğunu gösterir.

Tersine, M'nin eşasal (R/A)-modül olduğunu kabul edelim. O zaman, $M \neq (0)$'dır. C, R'nin bir ideali olsun. $MC = M(C + A) = M((C + A)/A)$ olması $MC = (0)$ ya da $M = MC$ olmasını gerektirir. Önteorem 3.1.7'den, M eşasal bir R-modüldür. ∎

Önerme 3.1.11 *P, R halkasının bir asal ideali olsun.*

(i) P-eşasal sağ R-modüllerin boş olmayan herhangi bir ailesinin dik toplamı P-eşasaldır.

(ii) X bir sağ R-modül olsun. O zaman, X'in P-eşasal altmodüllerinin boş olmayan herhangi bir ailesinin toplamı P-eşasaldır.

İspat. (i) $M_i (i \in I)$, P-eşasal sağ R-modüllerin boş olmayan bir ailesi ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. $P = \cap_{i \in I} ann_R(M_i) = ann_R(M)$ olduğu açıktır. A, R'nin bir ideali ve $A \nsubseteq P$ olsun. Önteorem 3.1.7'den, her $i \in I$ için $M_i = M_i A$ ve dolayısıyla $M = MA$ olur. Yine Önteorem 3.1.7'den, M P-eşasal modüldür.

(ii) $X_j (j \in J)$, X'in P-eşasal altmodüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. O zaman, $\sum_{j \in J} X_j$ modülü $Y = \bigoplus_{j \in J} X_j$ modülünün bir homomorf görüntüsüdür. (i)'den dolayı Y P-eşasal modüldür. Buna göre $\sum_{j \in J} X_j$ modülü de eşasal olur. ∎

Önerme 3.1.11'e göre bir R halkasının verilen bir P asal ideali için, P-eşasal modüllerin herhangi bir dik toplamı P-eşasaldır. Ancak p ve q farklı asal sayılar ise $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ $\mathbb{Z}$-modülünün eşasal bir modül olmadığı açıktır. Genel olarak P-eşasal modüllerin dik çarpımlarının P-eşasal olup olmadığı bilinmemektedir. Ancak aşağıdaki önerme, Yassemi'nin (2001) makalesinde değişmeli halkalar üzerindeki modüller için ispatlanan Önerme 2.2'yi genellemektedir.

Önerme 3.1.12 *Her $a \in R$ için RaR idealinin sol ideal olarak sonlu üretilmiş olduğunu* *kabul edelim. P, R'nin bir asal ideali ve $M_i (i \in I)$ P-eşasal sağ R-modüllerin bir ailesi olsun. O zaman, $\Pi_{i \in I} M_i$ sağ R-modülü P-eşasaldır.*

İspat. $M = \Pi_{i \in I} M_i$ olsun. $MP = (0)$ olur. A, R'nin $A \nsubseteq P$ olacak şekilde bir ideali ve $a \in A \backslash P$ olsun. $RaR = Ra_1 + ... + Ra_k$ olacak şekilde $a_j \in RaR (1 \leq j \leq k)$ elemanları ve bir k pozitif tamsayısı vardır. Hipotezden dolayı, her $i \in I$ için $M_i = M_i(RaR)$ olur. $m_i \in M_i$ olmak üzere $m = (m_i) \in M$ olsun. Her $i \in I$ için, $m_i \in M_i RaR = M_i a_1 + ... + M_i a_k$'dır. Buna göre,

$$m_i = x_{i1} a_1 + ... + x_{ik} a_k$$

olacak şekilde $x_{ij} \in M_i (1 \leq j \leq k)$ vardır. Buradan,

$$m = (x_{i1}) a_1 + ... + (x_{ik}) a_k \in MRaR \subseteq MA$$

olur. Böylece R'nin, $A \nsubseteq P$ olacak şekildeki her A ideali için $M = MA$'dır. Önteorem 3.1.7'den dolayı M P-eşasal bir R-modüldür. ∎

P, R halkasının bir asal ideali, M bir sağ R-modül ve K ile L, M'nin öz altmodülleri olsun. M/K ve M/L modülleri P-eşasal modüller ise $M/(K \cap L)$ modülününün ne zaman P-eşasal olacağını araştıracağız.

Önerme 3.1.13 *P, R halkasının bir asal ideali, n pozitif bir tamsayı ve $L_i (1 \leq i \leq n)$, M'nin eşbağımsız altmodüllerinin bir ailesi olsun. Her i $(1 \leq i \leq n)$ için M/L_i P-eşasal modül ise, $M/(\cap_{i=1}^{n} L_i)$ modülü de P-eşasaldır.*

İspat. n üzerine tümevarım uygulayalım. $n = 1$ için sonuç açıktır. $n \geq 2$ olsun ve sonuç $n-1$ tane eşbağımsız altmodül için sağlansın. $L = L_1 \cap ... \cap L_{n-1}$ altmodülünü göz önüne alalım. Tümevarım hipotezinden dolayı M/L P-eşasal modüldür. $L_i (1 \leq i \leq n)$ altmodülleri eşbağımsız olduğundan $M = L + L_n$ olur. $M/L = (L + L_n)/L \simeq L_n/(L \cap L_n)$ ve M/L_n P-eşasal modüllerdir ve $(M/(L \cap L_n)) P = (0)$'dır. Önerme 3.1.8'den dolayı $M/(\cap_{i=1}^{n} L_i)$ modülü de P-eşasaldır. ∎

Önerme 3.1.14 *R asal bir sağ ya da sol Goldie halka olsun. O zaman, sıfırdan farklı her bölünebilir sağ R-modül eşasal R-modüldür.*

İspat. X sıfırdan farklı bir bölünebilir sağ R-modül ve $A = ann_R(X)$ olsun. $A \neq (0)$ ise A, R'nin bir esas sağ ve sol idealidir. Sonuç 1.10.29'a göre A, R'nin bir c regüler elemanını kapsar. Bu durumda $X = Xc \subseteq XA = (0)$ çelişkisi bulunur. O halde $A = (0)$ olmalıdır. B, R'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. O zaman B, R'nin bir d regüler elemanını kapsar. Buna göre, $X = Xd \subseteq XB$ ve dolayısıyla $X = XB$ olur. Önteorem 3.1.7'den, X eşasal bir R-modüldür. ∎

Sonuç 3.1.15 *R asal bir sağ ya da sol Goldie halka olsun. O zaman, sıfırdan farklı her injektif sağ R-modül eşasaldır.*

İspat. Önerme 3.1.14 ve Önerme 1.8.11'den elde edilir. ∎

Önerme 3.1.16 *R bir Dedekind bölgesi olsun. O zaman, eşasal bir R-modül homojen yarı-basit veya bölünebilir bir R-modüldür.*

İspat. M eşasal bir R-modül olsun. M'nin homojen yarı-basit olmadığını kabul edelim. O zaman, R'nin her P maksimal ideali için $MP \neq (0)$'dır. R Krull boyutu 1 olan bir tamlık bölgesi ve M eşasal R-modül olduğundan, R'nin sıfırdan farklı her Q asal ideali için $MQ = M$ olmalıdır.

$0 \neq a \in R$ olsun. $aR = P_1 ... P_n$ olacak şekilde P_i $(1 \leq i \leq n)$ maksimal idealleri vardır. Buradan, $Ma = MaR = MP_1 ... P_n = M$ olur. Bu da M'nin bölünebilir R-modül olduğunu gösterir. ∎

Aşağıdaki örnek, Önerme 3.1.16'da, halkanın Dedekind olması koşulunun kaldırılamayacağını ve Önerme 3.1.14'ün tersinin genel olarak doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.17 *M sıfırdan farklı bölünebilir bir $\mathbb{Z}$-modül olsun. $m \in M$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ olmak üzere, $mf(x) = mf(0)$ skaler çarpımı ile, M aynı zamanda bir $\mathbb{Z}[x]$-modüldür. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ olsun. O zaman,*

$$Mf(x) = \begin{cases} (0) & f(0) = 0 \textit{ ise} \\ M & f(0) \neq 0 \textit{ ise} \end{cases}$$

olur. Bu da M'nin eşasal $\mathbb{Z}[x]$-modül olduğunu gösterir. Ancak, $0 \neq x \in \mathbb{Z}[x]$ için $Mx = (0) \neq M$ olduğundan, M bölünebilir $\mathbb{Z}[x]$-modül değildir.

$\mathbb{Z}[x]$'in maksimal idealleri kümesinin, $\{(p, f(x)) : p$ bir asal sayı ve $f(x)$, p moduna göre indirgenmez bir polinom$\}$ kümesi olduğu bilinmektedir. Buna göre, $\mathbb{Z}[x]$'in her Q maksimal ideali için $Q \cap \mathbb{Z} \neq (0)$'dır. P, $\mathbb{Z}[x]$'in bir maksimal ideali olsun. $P \cap \mathbb{Z}$'den, sıfırdan farklı bir a elemanı alalım. O zaman, $0 \neq Ma = M \subseteq MP$ ve böylece $M = MP \neq$
(0)'dır. Bu da M'nin homojen yarı-basit $\mathbb{Z}[x]$-modül olmadığını gösterir.

Önerme 3.1.18 *P, R halkasının bir asal ideali, R/P sağ ya da sol Goldie bir halka ve X, sıfırdan farklı bir injektif sağ R-modül olsun. O zaman; X, P-eşasal bir altmodül kapsar ancak ve ancak $xP = (0)$ olacak şekilde bir $0 \neq x \in X$ vardır.*

İspat. Gereklilik kısmı açıktır. Tersine, $xP = (0)$ olacak şekilde bir $0 \neq x \in X$ bulunduğunu kabul edelim. $Y := (0 :_X P)$, X'in $YP = (0)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir altmodülüdür. Önerme 1.8.12'den, Y injektif bir sağ (R/P)-modüldür. Sonuç 3.1.15'den, Y eşasal (R/P)-modüldür. Önerme 3.1.10'dan dolayı, Y eşasal bir R-modül olur. $ann_R(Y) = P$ olduğu da açıktır. Böylece Y, X'in P-eşasal bir altmodülüdür. ∎

Aşağıdaki teorem Yassemi'nin (2001) makalesindeki Teorem 1.3'ün bir genellemesidir.

Teorem 3.1.19 *R, her asal faktörü sol sınırlı sol Goldie olan bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman, M eşasal R-modüldür ancak ve ancak $Q = ann_R(M)$, R'nin bir asal idealidir ve M bölünebilir bir sağ (R/Q)-modüldür.*

İspat. M'nin eşasal R-modül olduğunu kabul edelim. O zaman, $Q = ann_R(M)$ R'nin bir asal idealidir. Hipotezden, R/Q sol sınırlı sol Goldie bir halkadır. Bu halkayı $\overline{R}$ ile gösterelim. $\overline{c}$, $\overline{R}$'nin regüler bir elemanı olsun. $\overline{R}$ sol sınırlı bir asal halka olduğundan, $\overline{R}\overline{c}$ esas sol ideali içinde kapsanan sıfırdan farklı bir $\overline{A}$ ideali vardır. $\overline{A} = A/Q$ olacak şekilde, R'nin Q'yu kesin olarak kapsayan bir A ideali vardır. Önteorem 3.1.7'den, $M = MA \subseteq M(Rc + Q) = Mc$ olur. Böylece $\overline{R}$-modül M için, $M = M\overline{c}$ eşitliği sağlanır. Bu da M'nin bölünebilir bir sağ $\overline{R}$-modül olduğunu gösterir. Yeterlilik kısmı Önerme 3.1.10 ve Önerme 3.1.14'den elde edilir. ∎

Aşağıdaki teorem Yassemi'nin (2001) makalesindeki Teorem 2.3'ün bir genellemesidir.

Teorem 3.1.20 *R, her asal faktörü sağ ve sol sınırlı, sağ ve sol Goldie olan bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman, M asal ve eşasal R-modüldür ancak ve ancak $Q = ann_R(M)$, R'nin bir asal idealidir ve M burkulmasız bir injektif sağ (R/Q)-modüldür.*

İspat. M asal ve eşasal bir R-modül olsun. O zaman, McCasland ve Smith'in (1993) makalesindeki Önerme 2.2 ve Önteorem 2.6'ya göre, $Q = ann_R(M)$, R'nin bir asal idealidir ve M burkulmasız bir sağ (R/Q)-modüldür. Teorem 3.1.19'dan dolayı da M bölünebilir bir sağ (R/Q)-modüldür. Böylece Önerme 1.10.35'den, M injektif sağ (R/Q)-modüldür. Yeterlilik kısmı Önerme 3.1.10, Sonuç 3.1.15 ve McCasland ve Smith'in (1993) makalesindeki Önerme 2.1'den elde edilir. ∎

Önerme 3.1.21 *R, her asal faktörü sağ ve sol sınırlı, sağ ve sol Goldie olan bir halka ve M eşasal bir sağ R-modül olsun. M'nin her homomorf görüntüsü düz ise, o zaman M yarı-basit modüldür.*

İspat. Önerme 1.8.24'den dolayı, M'nin her altmodülü pürdür. $P = ann_R(M)$ olsun. Önerme 3.1.9'dan dolayı M'nin sıfırdan farklı her altmodülü P-eşasaldır. Buna göre M ve M'nin sıfırdan farklı her altmodülü asaldır. L, M'nin sıfırdan farklı bir altmodülü olsun. Teorem 3.1.20'den dolayı, L injektif bir sağ (R/P)-modüldür. Buna göre L, M'nin bir dik toplananıdır. Bu da M'nin yarı-basit R-modül olduğunu gösterir. ∎

Sonuç 3.1.22 *R, her asal faktörü sağ ve sol sınırlı, sağ ve sol Goldie olan düzenli bir halka olsun. O zaman, her eşasal sağ R-modül yarı-basit modüldür.*

İspat. Teorem 1.8.22'den dolayı, her sağ R-modül düzdür. Böylece, Önerme 3.1.21'e göre her eşasal sağ R-modül yarı-basittir. ∎

R bir PI halka ise Teorem 1.13.8'den dolayı R'nin her asal faktörü sağ ve sol sınırlı, sağ ve sol Goldie halkadır. Bu nedenle, Teorem 3.1.19, Teorem 3.1.20 ve Önerme 3.1.21'deki koşulları sağlayan ve değişmeli halkalardan çok daha geniş olan bir halka sınıfı vardır.

Önerme 3.1.23 *M bir sağ R-modül ve $N_i(i \in I)$, M'nin eşasal altmodüllerinin bir zinciri olsun. O zaman $N = \cup_{i\in I} N_i$, M'nin eşasal bir altmodülüdür.*

İspat. $N \neq (0)$ olduğu açıktır. her bir $i \in I$ için $P_i = ann_R(N_i)$ olsun. Her $i, j \in I$ için $N_i \subseteq N_j$ veya $N_j \subseteq N_i$'dir ve bu durumda sırasıyla $P_j \subseteq P_i$ veya $P_i \subseteq P_j$ olur. A, R'nin bir ideali ve $NA \neq (0)$ olsun. O zaman, $N_k A \neq (0)$ olacak şekilde bir $k \in I$ vardır ve bu durumda $N_k = N_k A \subseteq NA$ olur. $i \in I$ olsun. $P_i \subseteq P_k$ ise, $A \nsubseteq P_k$ olması $A \nsubseteq P_i$ olmasını gerektirir ve böylece $N_i = N_i A \subseteq NA$ olur. Diğer taraftan, $P_i \nsubseteq P_k$ ise, $N_i \subseteq N_k$ ve dolayısıyla $N_i \subseteq NA$ olur. Böylece her $i \in I$ için $N_i \subseteq NA$'dır. Bu da $N = NA$ olduğunu gösterir. Önteorem 3.1.7'den dolayı, N eşasal bir modüldür. ∎

L, M'nin eşasal bir altmodülü olsun. M'nin L'yi kesin kapsayan bir eşasal altmodülü yoksa L'ye M'nin bir *maksimal eşasal* altmodülü denir.

Sonuç 3.1.24 *M sıfırdan farklı bir modül olsun. O zaman, M'nin her eşasal altmodülü M'nin bir maksimal eşasal altmodülü içinde kapsanır.*

İspat. Önerme 3.1.23'den ve Zorn Önteoreminden elde edilir. ∎

McCasland ve Smith'in (1993) makalesinde yer alan Teorem 4.2'de sıfırdan farklı her Noether modülün sonlu sayıda minimal asal altmodül kapsadığı kanıtlanmıştır. Aşağıdaki teorem bu sonucun dualidir ve Ansari-Toroghy ve Farshadifar'ın (2012a) makalesindeki Sonuç 2.6'yı genellemektedir.

Teorem 3.1.25 *Sıfırdan farklı her Artin modül sonlu sayıda maksimal eşasal altmodül kapsar.*

İspat. M sıfırdan farklı bir Artin R-modül olsun. M'nin sonlu sayıda maksimal eşasal altmodül kapsamadığını kabul edelim. M'nin her U basit altmodülü eşasal bir altmodüldür ve Sonuç 3.1.24'den dolayı U, maksimal bir eşasal altmodül içinde kapsanır. $\Psi = \{0 \neq N \leq M : N$ sonlu sayıda maksimal eşasal altmodül kapsamaz$\}$ kümesini göz önüne alalım. $M \in \Psi$ ve dolayısıyla $\Psi \neq \varnothing$'dir. Buna göre Ψ'nin bir N minimal elemanı vardır. N'nin eşasal altmodül olmadığı açıktır. Önteorem 3.1.7'den dolayı, $NA \neq (0)$ ve $NA \neq N$ olacak şekilde R'nin bir A ideali vardır. $L = (0 :_N A)$ olsun. L, N'nin $LA = (0)$ olacak şekilde bir altmodülüdür ve dolayısıyla $L \neq N$'dir. $L \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. N'nin seçiminden dolayı, L sonlu sayıda maksimal eşasal altmodül kapsar. n bir pozitif tamsayı olmak üzere $\{L_1, ..., L_n\}$, L'nin maksimal eşasal altmodüllerinin kümesi olsun. Yine N'nin seçiminden dolayı NA, sonlu sayıda maksimal eşasal altmodül kapsar. t bir pozitif tamsayı olmak üzere $\{K_1, ..., K_t\}$, NA'nın maksimal eşasal altmodüllerinin kümesi olsun. H, N'nin bir maksimal eşasal altmodülü olsun. Önteorem 3.1.7'den dolayı $HA = (0)$ veya $HA = H$'dır. $HA = (0)$ ise $H \subseteq L$'dir ve böylece $H \subseteq L_i$ olacak şekilde bir i $(1 \leq i \leq n)$ vardır. Buna göre $H = L_i$ olur. Diğer taraftan $H = HA$ ise, $H \subseteq NA$'dır ve böylece $H \subseteq K_j$ olacak şekilde bir j $(1 \leq j \leq t)$ vardır. Bu durumda $H = K_j$ olur. Buna göre N'nin her maksimal eşasal altmodülü $\{L_1, ..., L_n, K_1, ..., K_t\}$ kümesine aittir. Böylece N en fazla $n + t$ tane maksimal eşasal altmodüle sahip olur ki bu bir çelişkidir. $L = (0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $H = K_j$ olacak şekilde bir j

$(1 \leq j \leq t)$ vardır ve bu da N'nin sonlu sayıda maksimal eşasal altmodüle sahip olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. ∎

3.2. Eşasal Modüller ve Ekli Asal İdealler

Bu kısımda, sıfırdan farklı bir M modülünün ekli asallarının kümesi $Att(M)$'nin hangi koşullar altında boş kümeden farklı olduğunu araştıracağız ve $Att(M)$ kümesinin sonluluğu ile ilgili bazı sonuçlar vereceğiz.

Aşağıdaki önerme, Annin'in (2008) makalesindeki Sonuç 3.6'nın bir genellemesidir.

Önerme 3.2.1 *R yarı-lokal bir halka olsun. O zaman, her Bass R-modül sonlu sayıda ekli asala sahiptir.*

İspat. M bir Bass R-modül ve P, M'nin bir ekli asalı olsun. O zaman, M/N bölüm modülü P-eşasal olacak şekilde M'nin bir N öz altmodülü vardır. L, M'nin $N \subseteq L$ olacak şekilde bir maksimal altmodülü olsun. $P = ann_R(M/N) = ann_R(M/L)$ olacağından P, R'nin bir sağ ilkel idealidir. Böylece, M'nin her ekli asalı R'nin bir sağ ilkel idealidir. R yarı-lokal bir halka olduğundan, $R/J(R)$'nin sonlu sayıda sağ ilkel ideali vardır (Lam 1990: Teorem 3.5). $R/J(R)$ ile R üzerindeki basit sağ modüller aynıdır (Lam 1990: Önerme 4.8). Buna göre, R'nin sonlu sayıda sağ ilkel ideali vardır. Şu halde M sonlu sayıda ekli asala sahiptir. ∎

Önerme 3.2.2 *M sıfırdan farklı bir sağ R-modül ve P, $\Psi = \{A \leq R : A$, R'nin bir ideali ve $M \neq MA\}$ kümesinin bir maksimal elemanı olsun. O zaman; P, M'nin bir ekli asal idealidir ve M/MP P-eşasal bir modüldür. Ayrıca MP, M/L P-eşasal modül olacak şekildeki tüm L öz altmodüllerinin arakesitidir.*

İspat. B ve C, R'nin P'yi kesin olarak kapsayan idealleri olsun. O zaman $M = MB$ ve $M = MC$ olur. Buradan, $MBC = MC = M$ ve dolayısıyla $BC \nsubseteq P$'dir. Bu da P'nin bir asal ideal olduğunu gösterir. Ayrıca $(M/MP)B = (MB + MP)/MP = MB/MP = M/MP$ olcağından Önteorem 3.1.7'den dolayı M/MP eşasal bir modüldür. M/MP'nin P-eşasal olduğu açıktır. Böylece P, M'nin bir ekli asalıdır. M'nin bir N öz altmodülü için M/N P-eşasal bir modül ise $MP \subseteq N$ olacağından, $MP \subseteq \bigcap_{M/L\ P\text{-eşasal}} L$ olur. M/MP P-eşasal bir modül olduğundan, $\bigcap_{M/L\ P\text{-eşasal}} L \subseteq MP$ olduğu açıktır. Böylece MP, M/L P-eşasal modül olacak şekildeki tüm L öz altmodüllerinin arakesitidir. ∎

Tanım 3.2.3 *(Nicholson ve Yousif 2003) M bir sağ R-modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M'nin altmodüllerinin bir ailesi olsun. Her $i, j \in I$ için $N_k \subseteq N_i \cap N_j$ olacak şekilde bir $k \in I$ varsa, $\{N_i\}_{i \in I}$ altmodüller ailesine ters aile (inverse family) denir.*

M modülünün her L altmodülü ve $N_i (i \in I)$ ters altmodüller ailesi için $L + (\cap_{i \in I} N_i) = \cap_{i \in I}(L + N_i)$ oluyorsa, "M modülü $AB5^*$ koşulunu sağlar" denir. $AB5^*$ koşulunu

sağlayan modüllere kısaca $AB5^*$ modül denir.

Örnek 3.2.4 *(Nicholson ve Yousif 2003)* (1) *Her Artin modül $AB5^*$ koşulunu sağlar. Altmodülleri lineer sıralı olan modüller $AB5^*$ koşulunu sağlar. $AB5^*$ bir modülün her altmodülü ve her homomorf görüntüsü $AB5^*$ modüldür.*

(2) *$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü $AB5^*$ koşulunu sağlamaz.*

M bir sağ R-modül ve P, M'nin bir ekli asalı olsun. Önerme 3.2.2'de gördük ki; belirli koşullar altında MP, M/K P-eşasal modül olacak şekildeki K öz altmodülleri arasında tek minimal altmodüldür. Aşağıdaki teorem, benzer bir minimallik özelliğinin, $AB5^*$ koşulunu sağlayan modüller için de geçerli olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.5 *M, $AB5^*$ koşulunu sağlayan bir sağ R-modül, N, M'nin bir öz altmodülü ve M/N P-eşasal bir modül olsun. O zaman, $\mathcal{S} = \{H \leq M : H \subseteq N$ ve M/H P-eşasal modül$\}$ kümesinin bir L minimal elemanı vardır.*

İspat. $N \in \mathcal{S}$ olduğu açıktır. $K_i (i \in I)$, $\mathcal{S}$ içinde bir zincir ve $K = \cap_{i \in I} K_i$ olsun. K, M'nin bir altmodülüdür ve $K \subseteq N$'dir. Ayrıca her $i \in I$ için $MP \subseteq K_i$ olması $MP \subseteq K$ olmasını gerektirir. A, R'nin P'yi kesin olarak kapsayan bir ideali olsun. O zaman, her $i \in I$ için $M/K_i = (M/K_i)A$ ve dolayısıyla $MA + K_i = M$'dir. Böylece,

$$M = \cap_{i \in I}(MA + K_i) = MA + \cap_{i \in I} K_i = MA + K$$

ve dolayısıyla, $M/K = (M/K)A$ olur. Önteorem 3.1.7'den, M/K P-eşasal modüldür. Böylece $K \in \mathcal{S}$ olur. Zorn Önteoremine göre $\mathcal{S}$ kümesinin bir L minimal elemanı vardır. ∎

Teorem 3.2.5'de $L = MP$ olup olmadığı bilinmemektedir. Fakat $MP \subseteq L$ olduğu açıktır.

Önerme 3.2.6 *M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) M/N eşasal modül olacak şekilde M'nin bir N öz altmodülü vardır.

(ii) M'nin öyle bir L öz altmodülü ve R'nin öyle bir P asal ideali vardır ki P, $M \neq MA + L$ olacak şekildeki A idealleri arasında maksimaldir.

İspat. $(i) \implies (ii)$ $Q = ann_R(M/N)$ olsun. Q, R'nin bir asal idealidir ve $M \neq MQ + N$'dir. B, R'nin Q'yu kesin olarak kapsayan bir ideali olsun. Hipotezden dolayı $M/N = (M/N)B$ ve dolayısıyla $M = MB + N$ olur. Bu da (ii)'yi kanıtlar.

$(ii) \implies (i)$ L ve P'nin belirtilen özelliklere sahip olduklarını kabul edelim. $K = MP + L$ olsun. K, M'nin bir öz altmodülüdür ve $(M/K)P = (0)$'dır. C, R'nin P'yi kesin olarak kapsayan bir ideali olsun. O zaman, $M = MC + L \subseteq MC + K \subseteq M$ olacağından $M = MC + K$ ve dolayısıyla $M/K = (M/K)C$ olur. Önteorem 3.1.7'den dolayı, M/K eşasal bir modüldür. ∎

Sonuç 3.2.7 *R, idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka olsun. O zaman sıfırdan farklı her sağ (ya da sol) R-modül M bir ekli asala sahiptir.*

İspat. $M \neq M(0)$ olduğundan, $\Psi = \{A \leq R : A, R$'nin bir ideali ve $M \neq MA\} \neq \emptyset$'dir. Dolayısıyla Ψ kümesinin bir P maksimal elemanı vardır. Önerme 3.2.2'den dolayı M/MP eşasal modüldür. ∎

Sonuç 3.2.7 farklı yollarla genellenebilir. R, idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka ise R, asal idealleri üzerinde de artan zincir koşulunu sağlar ve R'nin her A öz ideali için $Q_1...Q_n \subseteq A \subseteq Q_1 \cap ... \cap Q_n$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı ve $Q_i(1 \leq i \leq n)$ asal idealleri vardır (Smith 1981: Önteorem 1).

Teorem 3.2.8 *R, asal idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka ve M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. R'nin her A öz ideali için $Q_1...Q_n \subseteq A \subseteq Q_1 \cap ... \cap Q_n$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısının ve $Q_i(1 \leq i \leq n)$ asal ideallerinin bulunduğunu kabul edelim. O zaman;*

(i) M eşasal R-modüldür ancak ve ancak R'nin her P asal ideali için $MP = (0)$ ya da $MP = M$'dir.

(ii) $Att(M) \neq \emptyset$'dir.

İspat. (i) Gereklilik kısmı Önteorem 3.1.7'den açıktır. Tersine R'nin her P asal ideali için $MP = (0)$ ya da $MP = M$ olduğunu kabul edelim. A, R'nin bir öz ideali olsun. Hipotezden dolayı, $Q_1...Q_n \subseteq A \subseteq Q_1 \cap ... \cap Q_n$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı ve $Q_i(1 \leq i \leq n)$ asal idealleri vardır. $MQ_j = (0)$ olacak şekilde bir j $(1 \leq j \leq n)$ varsa, $MA = (0)$ olur. Diğer durumda her $1 \leq i \leq n$ için $M = MQ_i$'dir. Buna göre,

$$M = MQ_n = MQ_{n-1}Q_n = ... = MQ_1...Q_n \subseteq MA \subseteq M$$

ve böylece $M = MA$ olur. O halde R'nin her A ideali için $MA = (0)$ veya $MA = M$'dir. Önteorem 3.1.7'den dolayı M eşasal bir modüldür.

(ii) Hipotezden dolayı, $P_1...P_t = (0)$ olacak şekilde bir t pozitif tamsayısı ve P_i $(1 \leq i \leq t)$ asal idealleri vardır. Her $1 \leq i \leq n$ için $M = MP_i$ ise, $M = MP_t = MP_{t-1}P_t$
$= ... = MP_1...P_t = (0)$ çelişkisi elde edilir. Buna göre $M \neq MP_i$ olacak şekilde bir i $(1 \leq i \leq t)$ vardır. P, R'nin $M \neq MQ$ olacak şekildeki asal idealleri arasında maksimal olan bir asal ideali olsun. $M \neq MP$'dir. T, R'nin P'yi kesin olarak kapsayan bir asal ideali olsun. P'nin seçiminden dolayı $M = MT$'dir. Buna göre $M/MP = (M/MP)(T/P)$ olur. (i)'den dolayı M/MP, eşasal bir (R/P)-modüldür. Önerme 3.1.10'dan, M/MP eşasal bir R-modüldür. $P \subsetneq ann_R(M/MP)$ olsaydı; P'nin seçiminden dolayı $Mann_R(M/MP)$ $= M$ ve buradan da $M = MP$ çelişkisi çıkardı. O halde $ann_R(M/MP) = P$ ve dolayısıyla P, M'nin bir ekli asalıdır. Böylece $Att(M) \neq \emptyset$'dir. ∎

Önerme 3.2.9 *A, R halkasının sağ T-üstel sıfır bir ideali olsun. O zaman, sıfırdan farklı her sağ R-modül bir ekli asala sahiptir ancak ve ancak sıfırdan farklı her sağ (R/A)-modül bir ekli asala sahiptir.*

İspat. İlk olarak sıfırdan farklı her sağ R-modülün bir ekli asala sahip olduğunu kabul edelim. M sıfırdan farklı bir sağ (R/A)-modül olsun. O zaman, M sıfırdan farklı bir sağ R-modüldür. Hipotezden dolayı, M/N eşasal R-modül olacak şekilde, M'nin bir N öz altmodülü vardır. Önerme 3.1.10'dan, M/N eşasal (R/A)-modüldür. Tersine sıfırdan farklı her sağ (R/A)-modülün bir ekli asala sahip olduğunu kabul edelim. X sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. Teorem 1.9.3'den, $X \neq XA$'dır ve böylece X/XA sıfırdan farklı bir sağ (R/A)-modüldür. Hipotezden dolayı, X/Y eşasal (R/A)-modül olacak şekilde X'in XA'yı kapsayan bir Y öz altmodülü vardır. Önerme 3.1.10'dan , X/Y eşasal bir R-modüldür. ∎

Aşağıdaki sonuç, Sonuç 3.2.7'nin bir genellemesidir.

Sonuç 3.2.10 *A, R'nin sağ T-üstel sıfır bir ideali ve R/A, idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka olsun. O zaman sıfırdan farklı her sağ R-modül bir ekli asala sahiptir.*

İspat. Önerme 3.2.2'den, sıfırdan farklı her sağ (R/A)-modülün bir ekli asalı vardır. Önerme 3.2.9'dan dolayı da sıfırdan farklı her sağ R-modül bir ekli asala sahiptir. ∎

3.3. Eşasal Altmodüller ve Dar Boyut

Teorem 3.3.1 *M bir sağ R-modül ve $Att(M) \neq \emptyset$ olsun. M/N_i eşasal bir R-modül ve $ann_R(M/N_i) = P_i$ olmak üzere P_i $(i \in I)$, M'nin farklı ekli asallarının bir ailesi olsun. O zaman, $N_i(i \in I)$ altmodülleri eşbağımsızdır.*

İspat. Kanıtı, I sonlu bir küme iken yapmak yeterlidir. n bir pozitif tamsayı olmak üzere, $I = \{1, ..., n\}$ olsun. $n = 1$ ise, sonuç açıktır. $n \geq 2$ olduğunu kabul edelim. Genelliği kaybetmeden $P_i \nsubseteq P_j, (1 \leq i < j \leq n)$ olduğunu kabul edebiliriz. $M \neq N_1 + N_2$ olduğunu kabul edelim. $N_1 \subseteq N_1 + N_2$ olması $P_1 \subseteq ann_R(M/\left(N_1 + N_2\right)) = P_2$ olmasını gerektirir, çünkü M/N_2 P_2-eşasaldır. Bu çelişki $M = N_1 + N_2$ olduğunu gösterir. $M \neq (N_1 \cap N_2) + N_3$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$P_1 \cap P_2 \subseteq ann_R(M/(N_1 \cap N_2)) \subseteq ann_R(M/((N_1 \cap N_2) + N_3)) = P_3,$$

olur ki bu da $P_1 \subseteq P_3$ veya $P_2 \subseteq P_3$ olmasını gerektirir. Bu çelişki $M = (N_1 \cap N_2) + N_3$ olmasını gerektirir. Bu şekilde devam edilerek, her $1 \leq i \leq n-1$ için $M = (N_1 \cap ... \cap N_i) + N_{i+1}$ olduğu görülür. Sonuç 1.14.3'den dolayı $N_i(i \in I)$ altmodülleri eşbağımsızdır. ∎

Aşağıdaki sonuç dar boyut tanımından ve Teorem 3.3.1'den direkt olarak elde edilir. Bu sonuç Annin'in (2008) makalesindeki Önerme 2.19'da da verilmiştir. Ancak burada, farklı bir yolla elde edilmiştir.

Sonuç 3.3.2 *M dar boyutu n olan bir sağ R-modül olsun. O zaman, M'nin en fazla n tane ekli asal ideali vardır.*

Genel olarak, sonlu dar boyutlu bir modülün ekli asala sahip olup olmadığı bilinmemektedir.

Sonuç 3.3.2 göstermektedir ki; dar boyut, bir modülün ekli asallarının sayısı için bir sınır belirlenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Aşağıdaki teoremde projektif örtüye sahip sonlu üretilmiş bir modülün ekli asallarının sayısı için daha ileri bir sonuç vereceğiz.

Teorem 3.3.3 *M projektif örtüye sahip sonlu üretilmiş bir sağ R-modül olsun. O zaman, $\mid Att(M) \mid \leq h.dim(R_R)$'dir.*

İspat. (P, f), M'nin bir projektif örtüsü olsun. Ç$ek(f) << P$ ve $P/$Ç$ek(f)$ sonlu üretilmiş olduğundan, P de sonlu üretilmiştir. P projektif olduğundan, $F = P \oplus A$ olacak şekilde sonlu üretilmiş bir F serbest sağ R-modülü ve F'nin bir A altmodülü vardır. Önteorem 2.2.6-(3)'den dolayı, $Att(F) = Att(R_R)$'dir. $P/$Ç$ek(f)$ modülünü $\overline{P}$ ile gösterelim. Önteorem 2.2.6'nın (1) ve (2) şıkları, $Att(M) = Att(\overline{P}) \subseteq Att(F) = Att(R_R)$ olmasını gerektirir. Önerme 2.2.16'dan, $\mid Att(R_R) \mid \leq h.dim(R_R)$'dir. Böylece $\mid Att(M) \mid \leq h.dim(R_R)$ olur. ∎

Tanım 3.3.4 *(Smith 2011) M bir sağ R-modül olsun. M'nin tüm maksimal altmodüllerinin kümesi, M'nin eşbağımsız altmodüllerinin bir ailesi ise, $''M$ max özelliğine sahiptir$''$ denir.*

M'nin tüm basit altmodüllerinin kümesi, M'nin bağımsız altmodüllerinin bir ailesi ise, $''M$ min özelliğine sahiptir$''$ denir.

$M/Rad(M)$ modülünün her maksimal altmodülü bir dik toplanan ise, $''M$ dik toplam özelliğine sahiptir$''$ denir.

Şimdi, ekli asal idealleri kullanarak, max özelliğine sahip modüllere ilişkin bazı sonuçlar vereceğiz. Bunun için ilk olarak, max özelliğine sahip modüllere ilişkin Smith'in (2011) makalesinde yer alan bazı sonuçları ifade edeceğiz.

Önteorem 3.3.5 *(Smith 2011) R, her sağ ilkel faktörü Artin olan bir halka ve U ile V iki basit sağ R-modül olsun. Bu durumda, U ile V'nin birbirine izomorfik olması için gerek ve yeter koşul $ann_R(U) = ann_R(V)$ olmasıdır.*

Önteorem 3.3.6 *(Smith 2011) M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *M max özelliğine sahiptir.*

(2) *M'nin her N altmodülü için M/N modülü max özelliğine sahiptir.*

(3) *$M/Rad(M)$ max özelliğine sahiptir.*

Önteorem 3.3.7 *(Smith 2011) R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R yarı-lokal halkadır.*

(2) *Her sol R-modül dik toplam özelliğine sahiptir.*

(3) ${}_R R$ *modülü dik toplam özelliğine sahiptir.*

(4) *Her sağ R-modül dik toplam özelliğine sahiptir.*

(5) R_R *modülü dik toplam özelliğine sahiptir.*

Önteorem 3.3.8 *(Smith 2011) M bir sağ R-modül olsun. M max özelliğine sahiptir ancak ve ancak M'nin herhangi K ve L maksimal altmodülleri için $M/K \simeq M/L$ olması $K = L$ olmasını gerektirir.*

Önteorem 3.3.9 *(Smith 2011) R değişmeli bir halka ve F sıfırdan farklı bir serbest R-modül olsun. O zaman, F max özelliğine sahiptir ancak ve ancak $F \simeq R$'dir.*

Önteorem 3.3.10 *(Smith 2011) M dik toplam özelliğine sahip bir R-modül olsun. O zaman, M max özelliğine sahiptir ancak ve ancak $M/Rad(M)$ min özelliğine sahiptir.*

Şimdi, ekli asal idealleri kullanarak, max özelliğine sahip modüllere ilişkin elde ettiğimiz sonuçları verelim.

Önerme 3.3.11 *R bir lokal halka, M sıfırdan farklı sonlu üretilmiş ve projektif örtüye sahip olan bir sağ R-modül olsun. M max özelliğine sahip ise M'nin tek bir maksimal altmodülü vardır.*

İspat. R lokal halka olduğundan, $h.dim(R_R) = 1$'dir. Teorem 3.3.3'den dolayı, $Att(M)$ tek elemanlı bir kümedir. Buna göre, M'nin herhangi N ve K maksimal altmodülleri için, $ann_R(M/N) = ann_R(M/K)$ olur. Önteorem 3.3.5'den, $M/N \simeq M/K$ ve Önteorem 3.3.8'den de, $N = K$ olduğu görülür. Böylece M'nin tek bir maksimal altmodülü vardır. ∎

Aşağıdaki önerme, R değişmeli bir lokal halka ise Önerme 3.3.11'in sonlu üretilmiş olmayan modüller için de geçerli olduğunu göstermektedir.

Önerme 3.3.12 *R değişmeli bir lokal halka ve M, projektif örtüye sahip olan sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M max özelliğine sahip ise $M \simeq R/I$ olacak şekilde R'nin bir I ideali vardır. Sonuç olarak, M'nin tek bir maksimal altmodülü vardır.*

İspat. (P, f), M'nin bir projektif örtüsü olsun. O zaman, $M \simeq P/\text{Ç}ek(f)$ ve $\text{Ç}ek(f) << P$'
dir. Önteorem 3.3.6'dan dolayı, $P/Rad(P)$ ve dolayısıyla P max özelliğine sahiptir. R lokal halka olduğundan, Teorem 1.12.5'e göre, P serbest R-modül olmalıdır. Önteorem 3.3.9'dan dolayı, $P \simeq R$ olur. Böylece $M \simeq R/I$ olacak şekilde bir I ideali vardır. ∎

Teorem 3.3.13 *R, her sağ ilkel faktörü Artin olan bir halka ve M, max özelliğine sahip bir sağ R-modül olsun. $Att(M)$ sonlu bir küme ise M'nin sonlu sayıda maksimal altmodülü vardır.*

İspat. M'nin bir maksimal altmodüle sahip olduğunu kabul edebiliriz. $Att(M)$ sonlu bir küme olduğundan, $ann_R(M/N_i) \neq ann_R(M/N_j)$ olacak şekilde sonlu sayıda N_i $(i \in I)$

maksimal altmodülleri vardır. M'nin, N ve L maksimal altmodülleri için $ann_R(M/N) = ann_R(M/L)$ olduğunu kabul edelim. Önteorem 3.3.5'den dolayı, $M/N \simeq M/L$ olur. M max özelliğine sahip olduğu için, Önteorem 3.3.8'den dolayı $N = L$ olmalıdır. Buna göre, M sonlu sayıda maksimal altmodüle sahiptir. ∎

Önerme 3.3.14 *R yarı-lokal bir halka ve M sonlu üretilmiş bir sağ R-modül olsun. $M/Rad(M)$ min özelliğine sahip ise M'nin sonlu sayıda maksimal altmodülü vardır.*

İspat. R yarı-lokal bir halka olduğundan Önteorem 3.3.7'den dolayı, her sağ R-modül dik toplam özelliğine sahiptir. Önteorem 3.3.10'a göre, M max özelliğine sahiptir. R yarı-lokal ve M sonlu üretilmiş olduğundan Teorem 1.14.16'ya göre, M sonlu dar boyutludur. Bu durumda Sonuç 3.3.2'den dolayı, $Att(M)$ sonlu bir küme olmalıdır. Teorem 3.3.13'e göre, M'nin sonlu sayıda maksimal altmodülü vardır. ∎

Aşağıdaki önerme McCasland ve Smith'in (1993) makalesindeki Önerme 1.4-(ii)'nin dualidir.

Önerme 3.3.15 *P, R halkasının bir asal ideali ve M P-eşasal bir sağ R-modül olsun. O zaman, M'nin sıfırdan farklı her tümleyen altmodülü P-eşasaldır.*

İspat. L, M içinde sıfırdan farklı bir tümleyen altmodül olsun. L, M'nin bir N altmodülünün tümleyeni olsun. A, R'nin $A \not\subseteq P$ olacak şekildeki bir ideali olsun. Önteorem 3.1.7'den, $M = MA$ olur. Buradan,

$$M = MA = (N + L)A = NA + LA \subseteq N + LA \subseteq M$$

ve böylece $M = N + LA$ elde edilir. L, N'nin M içindeki bir tümleyeni olduğundan $L = LA$ olur. Böylece $A \not\subseteq P$ olacak şekildeki her A ideali için $L = LA$'dır. Buna göre $P = ann_R(L)$ olur. Önteorem 3.1.7'den, L P-eşasal bir modüldür. ∎

Önteorem 3.3.16 *P, R halkasının bir asal ideali ve M, P-eşasal yeterli tümlenmiş bir sağ R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) M dar modüldür.

(ii) M iki eşasal öz altmodülün toplamına eşit değildir.

(iii) M iki P-eşasal tümleyen altmodülün toplamına eşit değildir.

İspat. $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$ Açıktır.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ M'nin dar modül olmadığını kabul edelim. O zaman $M = N + L$ olacak şekilde N ve L öz altmodülleri vardır. L', N'nin M içinde $L' \subseteq L$ olacak şekilde bir tümleyeni olsun. $M = N + L'$ olur. N', L''nün M içinde $N' \subseteq N$ olacak şekilde bir tümleyeni olsun. $M = N' + L'$ olur. N' ve L', M'nin öz altmodülleridir. Böylece $N' \neq (0)$ ve $L' \neq (0)$'dır. Önerme 3.3.15'den dolayı, N' ve L' P-eşasal modüllerdir. Bu ise (iii) ile çelişir. Buna göre M dar modül olmalıdır. ∎

Aşağıdaki teorem Ansari-Toroghy ve Farshadifar'ın (2012a) makalesindeki Teorem 6.12'yi genellemektedir.

Teorem 3.3.17 *P, R halkasının bir asal ideali ve M sonlu dar boyutlu yeterli tümlenmiş P-eşasal bir sağ R-modül olsun. O zaman M, dar P-eşasal altmodüllerin sonlu bir toplamına eşittir.*

İspat. M'nin dar boyutu n olsun. n üzerine tümevarım uygulayalım. $n = 1$ ise M dar modüldür. $n \geq 2$ olduğunu ve teoremin dar boyutu n'den küçük olan modüller için doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda M dar değildir. Önteorem 3.3.16'dan dolayı $M = K + L$ olacak şekilde, M'nin K ve L P-eşasal tümleyen öz altmodülleri vardır. Önerme 1.14.13'den dolayı K ve L yeterli tümlenmiş modüllerdir ve Önerme 1.14.14'den dolayı da K ve L'nin dar boyutları n'den küçüktür. Tümevarım hipotezinden dolayı K ve L dar P-eşasal altmodüllerin sonlu bir toplamına eşittir. Böylece M de dar P-eşasal altmodüllerin sonlu bir toplamı şeklinde yazılabilir. ∎

Sonuç 3.3.18 *P, R halkasının bir asal ideali ve M Artin bir sağ R-modül olsun. O zaman M'nin her P-eşasal altmodülü dar P-eşasal altmodüllerin sonlu bir toplamıdır.*

İspat. Artin modüller yeterli tümlenmiş ve sonlu dar boyutlu olduğundan, ifade edilen sonuç Teorem 3.3.17'den elde edilir. ∎

4. ASAL RADİKALİN DUAL KAVRAMI: EŞASAL RADİKAL

Bir altmodülün asal radikali kavramı, ilk olarak 1986 yılında McCasland ve Moore tarafından tanımlanmıştır. M bir R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. M'nin N'yi kapsayan tüm asal altmodüllerinin arakesitine N'nin M içindeki asal radikali denir ve $rad_M(N)$ (ya da $rad(N)$) ile gösterilir. M içinde N'yi kapsayan bir asal altmodül bulunmuyorsa, $rad_M(N) = M$ olarak tanımlanır (McCasland ve Moore 1986). R değişmeli bir halka ve I, R'nin bir ideali ise I'nın asal radikalinin, $\{r \in R : \exists n \in \mathbb{Z}^+, r^n \in I\}$ kümesine eşit olduğu bilinmektedir. Bu durumu modüller için genellemek üzere, R değişmeli bir halka alınarak, herhangi bir M R-modülü için M'nin bir N altmodülünün M içindeki zarfı tanımlanmıştır: $E_M(N) = \{mr \in M : r \in R, m \in M$ ve $\exists k \in \mathbb{Z}^+$, $mr^k \in N\}$ kümesine N'nin M içindeki zarfı denir. $E_M(N)$ genel olarak M'nin bir altmodülü değildir. Bu nedenle M'nin $E_M(N)$ tarafından üretilen $E_M(N)R$ altmodülü ile çalışılır. Burada $N \subseteq E_M(N)R \subseteq rad_M(N)$ kapsaması her zaman sağlanmaktadır. Eğer $E_M(N)R = rad_M(N)$ ise bu durumda $''N$ radikal formülünü sağlıyor$''$ denir. Eğer M'nin her altmodülü radikal formülünü sağlıyor ise o zaman $''M$ radikal formülünü sağlıyor$''$ denir. Ayrıca, eğer R üzerindeki her modül radikal formülünü sağlıyor ise bu durumda da $''R$ (halka olarak) radikal formülünü sağlıyor$''$ denir (McCasland ve Moore 1991). Buna göre her değişmeli halka kendisi üzerinde modül olarak düşünüldüğünde radikal formülünü sağlar. Fakat her değişmeli halka (halka olarak) radikal formülünü sağlamak zorunda değildir. Son 20 yıl içinde radikal formülünü sağlayan modül sınıflarının belirlenmesi, radikal formülünü sağlayan değişmeli halkaların karakterizasyonu ve bazı modül sınıflarının radikal formülünü sağlamasından yararlanılarak, halkanın özelliklerinin elde edilmesi konularında pek çok çalışma yapılmıştır. Son yıllarda yapılan çalışmalardan elde edilen bazı önemli sonuçlar şöyledir: 1996'da Krull boyutu sıfır olan değişmeli bir halka üzerindeki her modülün radikal formülünü sağladığı gösterilmiştir (Sharif vd 1996). Leung ve Man (1997), radikal formülünü sağlayan Noether değişmeli halkaları karakterize etmişler ve bu karakterizasyondan yararlanarak bir Noether tamlık bölgesinin radikal formülünü sağlaması ile Dedekind halka olmasının denk olduğu göstermişlerdir. Pusat-Yılmaz ve Smith (2002), değişmeli bir halka üzerindeki yarı-Artin bir modülün radikal formülünü sağladığını ve cisim olmayan bir Noether tamlık bölgesinin Krull boyutunun 1 olması ile bu halka üzerindeki tüm burkulmalı modüllerin radikal formülünü sağlamasının denk olduğunu göstermişlerdir. Azizi (2007), Noether olmayan değişmeli halkalar üzerinde radikal formülünü çalışmış ve Krull boyutu 1 olan aritmetik halkaların radikal formülünü sağladığını göstermiştir. Son olarak, Saraç ve Tıraş (2013), değişmeli halkalar üzerinde radikal formülünü sağlayan modüllerin sınıfını, Artin modüllerin sınıfından, sekonder gösterime sahip olan modüllerin sınıfına genişletmişlerdir.

Yukarıda bazılarını sıraladığımız çalışmalar, asal radikal kavramının, halka ve modül karakterizasyonlarının belirlenmesinde ne kadar önemli olduğunu ortaya koymaktadır. Bu bölümde asal radikalin dual kavramı olan eşasal radikal kavramı ele alınacak ve bu kavramdan yararlanılarak modül ve halkalar için yeni karakterizasyonlar verilecektir.

Bu bölüm üç alt başlıktan oluşmaktadır. Birinci kısımda, ilk olarak eşasal radikalin temel özellikleri verilecek ve bir modülün sokulu ile eşasal radikali arasındaki ilişkiler incelenecektir. Daha sonra, halkalardaki m-sistem kavramının modüller için duali olan

m^*-sistem kavramı tanımlanarak, bir altmodülün eşasal radikali m^*-sistem kümeleri vasıtasıyla karakterize edilecektir. İkinci kısımda, belirli modül sınıfları içerisinde yer alan modüllerin eşasal radikalleri belirlenecektir. Bunun yanısıra, radikal formüle benzer olarak, bir modülün sokulu ile eşasal radikalinin ne zaman eşit olacağı sorusu ele alınacak ve bir halka üzerindeki her modülün bu eşitliği sağlamasının halka için ne anlama geldiği araştırılacaktır. Ayrıca belirli modüllerin eşasal radikallerinden yararlanılarak, basit halkaların ve sağ Artin halkaların yeni karakterizasyonları verilecektir. Üçüncü kısımda ise eşasal radikal modüller üzerinde durularak bu modüller için bazı sonuçlar verilecektir.

4.1. Eşasal Radikalin Bazı Özellikleri ve Karakterizasyonları

Tanım 4.1.1 *M bir sağ R-modül olsun. M'nin tüm eşasal altmodüllerinin toplamına M'nin eşasal radikali denir ve $sec(M_R)$ ya da $sec(M)$ ile gösterilir. M'nin eşasal altmodülü yoksa $sec(M) = (0)$ olarak tanımlanır. $M = sec(M)$ ise M'ye eşasal radikal modül denir.*

Örnek 4.1.2 (1) $sec(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = (0)$*'dır.*

(2) $sec(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Q}$*'dur.*

Şimdi, eşasal radikal kavramı ile ilgili, tezin üçüncü bölümünde yer alan bilgiler yardımıyla elde edilen bazı sonuçları ifade edelim:

- A, R halkasının bir öz ideali, M bir sağ R-modül ve $MA = (0)$ olsun. Önerme 3.1.10'a göre, $sec(M_R) = sec(M_{R/A})$'dır.
- Her basit modül eşasal modül olduğundan, herhangi bir M modülü için $Soc(M) \subseteq sec(M)$'dir.
- R sağ tam bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. Sonuç 3.1.6'ya göre, $sec(M) = Soc(M)$'dir.
- R, her asal faktörü sağ ve sol sınırlı, sağ ve sol Goldie olan düzenli bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. Sonuç 3.1.22'ye göre, $sec(M) = Soc(M)$'dir. Özel olarak, R düzenli bir PI halka ise $sec(M) = Soc(M)$'dir.
- Herhangi bir M modülü için, $sec(M) = Soc(M)$ eşitliği genel olarak doğru değildir. Örneğin; p bir asal sayı olmak üzere, $sec(\mathbb{Z}(p^\infty)) = \mathbb{Z}(p^\infty)$ fakat $Soc(\mathbb{Z}(p^\infty)) = (0 :_M p\mathbb{Z})$'dir. Yani, $sec(\mathbb{Z}(p^\infty)) \neq Soc(\mathbb{Z}(p^\infty))$'dur.
- M bir sağ R-modül olsun. R'nin bir Q asal ideali için M'nin tüm Q-eşasal altmodüllerinin toplamını $sec_Q(M)$ ile gösterelim. M'nin Q-eşasal altmodülü yoksa $sec_Q(M) = (0)$ olarak tanımlayalım. Önerme 3.1.11-(ii)'den dolayı, $sec_Q(M) = (0)$'
dır ya da $sec_Q(M)$ Q-eşasal bir modüldür. R'nin her Q asal ideali için $sec_Q(M)Q = (0)$ olacağından, $sec(M)N(R) = (0)$'dır. Buna göre,

$$sec(M) = \sum_{P\in\pi(R)} sec_P(M) \subseteq \sum_{Q\in\mu(R)} (0 :_M Q) \subseteq (0 :_M N(R))$$

olur, burada $\pi(R)$, R'nin tüm asal ideallerinin kümesini ve $\mu(R)$ de R'nin tüm minimal asal ideallerinin kümesini göstermektedir.

- M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. Sonuç 3.1.24'den dolayı M'nin her eşasal altmodülü bir maksimal eşasal altmodül tarafından kapsanır. Buna göre, M eşasal altmodül kapsayan bir sağ R-modül ise

$$sec(M) = \sum_{L \in \mathcal{M}} L$$

olur; burada $\mathcal{M}$, M'nin tüm maksimal eşasal altmodüllerinin kümesidir.

Şimdi herhangi bir modülün eşasal radikalinin temel özelliklerini verelim.

Önerme 4.1.3 *M bir sağ R-modül ve $N = sec(M)$ olsun. O zaman, R'nin her A ideali için, $N = NA + (0 :_N A)$'dır.*

İspat. $N = (0)$ ise istenen eşitliğin sağlandığı açıktır. $N \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. A, R'nin bir ideali olsun. $N = \sum_{i \in I} L_i$ olacak şekilde, M'nin $L_i (i \in I)$ eşasal altmodülleri vardır. $i \in I$ olsun. Önteorem 3.1.7'den dolayı $L_i A = (0)$'dır veya $L_i = L_i A \subseteq NA$'dır. İlk durumda $L_i \subseteq (0 :_N A)$, ikinci durumda $L_i \subseteq NA$ olur. Böylece $N = NA + (0 :_N A)$ eşitliği elde edilir. ∎

Önteorem 4.1.4 *M bir sağ R-modül ve N ile L, M'nin altmodülleri olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(1) $Soc(M) \subseteq sec(M)$.

(2) $N \subseteq L$ *ise* $sec(N) \subseteq sec(L)$*'dir.*

(3) $sec(sec(N)) = sec(N)$.

(4) $sec(N) + sec(L) \subseteq sec(N + L)$.

(5) $sec(N \cap L) = sec(sec(N) \cap sec(L))$.

(6) $\varphi : M \longrightarrow M'$ *bir R-modül homomorfizması ise* $\varphi(sec(M)) \subseteq sec(M')$ *olur.*

İspat. $(1) - (5)$ Açıktır.

(6) Eşasal bir modülün sıfırdan farklı her homomorf görüntüsü eşasal olduğundan $\varphi(sec(M)) \subseteq sec(M')$ olur. ∎

Önteorem 4.1.5 *$\mathcal{S}$ tüm eşasal sağ R-modüllerin sınıfı ve M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) $sec(M) = Tr_M(\mathcal{S})$.

(2) *M eşasal radikal modüldür ancak ve ancak M eşasal modüller tarafından üretilir.*

(3) $\varphi : M \longrightarrow N$ *bir R-modül monomorfizması ve* $sec(N) \subseteq Gör(\varphi)$ *ise,* $\varphi(sec(M)) = sec(N)$*'dir.*

(4) $(M_i)_{i\in I}$ *sağ R-modüllerin bir ailesi olsun.* $sec(\oplus_{i\in I} M_i) = \oplus_{i\in I} sec(M_i)$*'dir.*

İspat. (1) Eşasal bir modülün sıfırdan farklı her homomorf görüntüsü de eşasal olduğundan, $sec(M) = Tr_M(\mathcal{S})$ olur.

$(2) - (4)$ Sonuç 1.2.5, Önerme 1.2.7, Önerme 1.2.8 ve (1)'in sonuçlarıdır. ∎

Önteorem 4.1.5-(4) dik olmayan toplamlar için genel olarak geçerli değildir. Örneğin $M := \mathbb{Z}(p^\infty)$ $\mathbb{Z}$-modülü için $M = \sum_{k=1}^{\infty}(0 :_M p^k\mathbb{Z})$ olduğu bilinmektedir. M eşasal bir modül olduğundan $sec(M) = sec(\sum_{k=1}^{\infty}(0 :_M p^k\mathbb{Z})) = M$'dir. Fakat $\sum_{k=1}^{\infty} sec((0 :_M p^k\mathbb{Z})) = (0 :_M p\mathbb{Z}) \neq sec(\sum_{k=1}^{\infty}(0 :_M p^k\mathbb{Z}))$'dir.

Bu kısımda vereceğimiz sonuçların büyük bir bölümünde tüm sağ ilkel faktörleri Artin olan halkaları göz önüne alacağız. Önerme 1.11.7'ye göre sağ FBN halkalar; Teorem 1.13.7'ye göre de PI halkalar (özel olarak değişmeli halkalar) tüm sağ ilkel faktörleri Artin olan halkalardır. Yarı-lokal halkaların da bu özelliği sağladığı açıktır.

Önteorem 4.1.6 *R, tüm sağ ilkel faktörleri Artin olan bir halka ve M eşasal bir sağ R-modül olsun. O zaman, M yarı-basittir ya da $Rad(M) = M$'dir.*

İspat. Bu önteorem, Önerme 3.1.5'in direkt bir sonucudur. ∎

Önerme 4.1.7 *R, tüm sağ ilkel faktörleri Artin olan bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman, $sec(M) = T \oplus L$ olacak şekilde, M'nin yarı-basit bir T altmodülü ve $Rad(L) = L$ olan bir L altmodülü vardır.*

İspat. M'nin eşasal bir altmodül kapsadığını kabul edebiliriz. $sec(M) = \sum_{i\in I} N_i$ olacak şekilde $(N_i)_{i\in I}$ eşasal altmodüller ailesi vardır. Her $i \in I$ için N_i yarı-basit ise $sec(M) = Soc(M)$ olur ve böylece istenen eşitlik sağlanır. En az bir $j \in I$ için N_j'nin yarı-basit olmadığını kabul edelim ve $J = \{j \in I : N_j \text{ yarı-basit değil}\}$ kümesini göz önüne alalım. $S = Soc(M)$ ve $L = \sum_{j\in J} N_j$ olsun. Önteorem 4.1.6'dan dolayı, $sec(M) = S + L$'dir. $L = Rad(L)$ olduğu açıktır. Ayrıca, $S = T \oplus (S \cap L)$ olacak şekilde S'nin bir T altmodülü vardır. Böylece $sec(M) = T \oplus L$ olur. ∎

Sonuç 4.1.8 *R, tüm sağ ilkel faktörleri Artin olan bir halka ve M Noether bir sağ R-modül olsun. O zaman, $sec(M) = Soc(M)$'dir.*

İspat. M modülünün her altmodülü sonlu üretilmiştir. Sonlu üretilmiş modüller en az bir tane maksimal altmodül kapsadığından, M'nin her L altmodülü için $Rad(L) \neq L$'dir. Önerme 4.1.7'ye göre $sec(M) = Soc(M)$ olur. ∎

M bir sağ R-modül olsun. M'nin, $G/Rad(M) = Soc(M/Rad(M))$ olacak şekildeki G altmodülünü $soc/Rad(M)$ ile göstereceğiz.

Önerme 4.1.7 gösterir ki; tüm sağ ilkel faktörleri Artin olan bir halka üzerindeki bir M sağ R-modülü için $Rad(M) = (0)$ ise $sec(M) = Soc(M)$'dir. Aşağıdaki önerme ise bu sonucu genellemektedir.

Önerme 4.1.9 *R, tüm sağ ilkel faktörleri Artin olan bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman, $Soc(M) \subseteq sec(M) \subseteq soc/Rad(M)$ olur.*

İspat. Önteorem 4.1.4-(1)'den, $Soc(M) \subseteq sec(M)$'dir. $J = Rad(M)$ olsun. $Rad(M/J) = (0)$ olduğundan $sec(M/J) = Soc(M/J)$'dir. Önteorem 4.1.4-(6) ve Önerme 4.1.7'den aşağıdaki kapsamayı elde ederiz.

$$(sec(M) + J)/J \subseteq sec(M/J) = Soc(M/J) = soc/Rad(M)/J.$$

Böylece $sec(M) \subseteq soc/Rad(M)$ olur. ∎

Değişmeli halka teorisinde çarpımsal kapalı kümeler asal idealler ile yakından ilişkilidir. Değişmeli bir halkadaki bir asal idealin tümleyeni çarpımsal kapalıdır ve verilen herhangi bir çarpımsal kapalı S kümesi için, S ile ayrık olan ve bu özelliği sağlayan idealler arasında maksimal olan bir ideal her zaman asal idealdir (Matsumara 1986). Değişmesiz halka teorisinde ise m-sistem kümeleri çarpımsal kapalı kümelerin değişmesiz halkalardaki karşılığıdır. S, R halkasının boştan farklı bir altkümesi olsun. Her $a, b \in S$ için $arb \in S$ olacak şekilde bir $r \in R$ varsa, S'ye m-sistem kümesi denir. $P \subseteq R$ ideali asaldır ancak ve ancak $R \backslash P$ bir m-sistem kümesidir. Verilen bir S m-sistem kümesi için S ile ayrık olan ve bu özelliği sağlayan idealler arasında maksimal olan bir ideal her zaman asal idealdir (Lam 1991). Aşağıdaki tanımda halkalardaki m-sistem kümelerinin modüller için duali olan m^*-sistem kümelerini tanımlayacağız. Sonraki iki önermede ise, yukarıda m-sistem kümeleri için ifade ettiğimiz sonuçların benzerlerini m^*-sistem kümeleri için kanıtlayacağız.

Tanım 4.1.10 *M bir sağ R-modül ve $S \subsetneq M \backslash \{0\}$ olsun. Eğer R'nin her A ideali ve M'nin tüm K, L altmodülleri için, $(0 :_{K \cap L} A) \cup S \neq M$ ve $(K \cap L)A \cup S \neq M$ olması $(K \cap L) \cup S \neq M$ olmasını gerektiriyorsa S'ye m^*-sistem denir.*

Önerme 4.1.11 *M bir sağ R-modül ve Q, M'nin bir altmodülü olsun. O zaman, Q M'nin eşasal bir altmodülüdür ancak ve ancak $M \backslash Q$ bir m^*-sistemdir.*

İspat. Q, M'nin eşasal bir altmodülü ve $S = M \backslash Q$ olsun. O zaman $S \neq M \backslash \{0\}$'dır. A, R'nin bir ideali ve K ile L, M'nin altmodülleri olmak üzere, $(0 :_{K \cap L} A) \cup S \neq M$ ve $(K \cap L)A \cup S \neq M$ olsun. $(K \cap L) \cup S = M$ olduğunu varsayalım. O zaman, $Q \subseteq K \cap L$'dir. Q eşasal olduğundan, $QA = (0)$ veya $QA = Q$'dur. $QA = (0)$ ise, $Q \subseteq (0 :_{K \cap L} A)$ ve dolayısıyla $(0 :_{K \cap L} A) \cup S = M$ olur ki bu bir çelişkidir. $QA = Q$ ise, $Q \subseteq (K \cap L)A$ ve dolayısıyla $(K \cap L)A \cup S = M$ olur ki bu da bir çelişkidir. O halde $(K \cap L) \cup S \neq M$ olmaldır. Böylece S bir m^*-sistemdir.

Tersine, $S = M \backslash Q$ kümesinin M içinde bir m^*-sistem olduğunu kabul edelim. $S \neq M \backslash \{0\}$ olduğundan $Q \neq (0)$'dır. Q'nun eşasal olmadığını varsayalım. O zaman $QA \neq (0)$ ve $QA \neq Q$ olacak şekilde R'nin bir A ideali vardır. m^*-sistem tanımında,

$K = Q$ ve $L = Q$ alalım. O zaman $(0 :_{K\cap L} A)\cup S = (0 :_Q A)\cup S \neq M$ ve $(K\cap L)A\cup S = QA \cup S \neq M$ olur. Fakat $(K \cap L) \cup S = Q \cup S = M$ olduğundan, bu iki eşitsizlik S'nin m^*-sistem olması ile çelişir. O halde Q eşasal olmalıdır. ∎

Önerme 4.1.12 *M bir sağ R-modül ve $S \subsetneq M\backslash\{0\}$ bir m^*-sistem olsun. $K \cup S = M$ özelliğini sağlayan $K \leq M$ altmodülleri arasında minimal olan bir Q altmodülü M'nin eşasal bir altmodülüdür.*

İspat. $S \neq M\backslash\{0\}$ olduğundan, $Q \neq (0)$'dır. Q'nun eşasal olmadığını kabul edelim. O zaman, $QA \neq (0)$ ve $QA \neq Q$ olacak şekilde, R'nin bir A ideali vardır. Q'nun minimalliğinden dolayı, $(0 :_Q A)\cup S = (0 :_{Q\cap M} A)\cup S \neq M$ ve $QA\cup S = (Q\cap M)A\cup S \neq M$'dir. S m^*-sistem olduğundan, $(Q \cap M) \cup S = Q \cup S \neq M$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde Q, M'nin eşasal bir altmodülüdür. ∎

Sonuç 4.1.13 *M bir sağ R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. O zaman, ya $sec(N) = (0)$'dır ya da*
$sec(N) = \sum\{Q \leq N : Q, Q \cup S = M$ özelliğine göre minimal olacak şekilde bir S m^*-sistemi var$\}$ eşitliği sağlanır.

İspat. Önerme 4.1.11 ve Önerme 4.1.12'nin sonucudur. ∎

R halkasındaki bir I ideali için, $\sqrt{I} = \{s \in R : s$'yi kapsayan her m-sistemin I ile kesişimi boş kümeden farklıdır$\}$ eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir. Bir sonraki teorem halka teorisindeki bu sonucun modüller için dual versiyonudur.

Tanım 4.1.14 *M bir sağ R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. N'nin eşasal bir altmodülü varsa, $\sqrt[s]{N}$ kümesi,*

$$\sqrt[s]{N} = \{x \in N : x \notin S \text{ ve } N \cup S = M \text{ olacak şekilde bir } S\ m^*\text{-sistemi var}\}$$

olarak tanımlanır. N'nin eşasal bir altmodülü yoksa, $\sqrt[s]{N} = (0)$ olarak tanımlanır.

Teorem 4.1.15 *M bir sağ R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. O zaman, $\sqrt[s]{N} = sec(N)$'dir.*

İspat. N eşasal bir altmodül kapsamıyorsa $\sqrt[s]{N} = sec(N) = (0)$'dır. $\sqrt[s]{N} \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. $x \in \sqrt[s]{N}$ olsun. O zaman, $x \notin S$ ve $N \cup S = M$ olacak şekilde bir S m^*-sistemi vardır. $\Psi = \{Q \subseteq N : Q \cup S = M\}$ kümesini göz önüne alalım. $N \in \Psi$ olduğundan $\Psi \neq \varnothing$'dir. Ψ ters kapasama bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir. $\{Q_i\}_{i\in\Lambda}$, Ψ içinde bir zincir olsun. $\cap_{i\in\Lambda}Q_i \in \Psi$'dir ve $\cap_{i\in\Lambda}Q_i$, Ψ kümesi için bir üst sınırdır. Zorn Önteoreminden dolayı Ψ kapsama bağıntısına göre bir minimal elemana sahiptir. Bu eleman Q olsun. Önerme 4.1.12'ye göre Q, N'nin bir eşasal altmodülüdür ve $x \in Q$'dur. Böylece $\sqrt[s]{N} \subseteq sec(N)$ olur.

Q, N'nin bir eşasal altmodülü olsun. Önerme 4.1.11'den dolayı $S = M\backslash Q$ bir m^*-sistemdir. Her $x \in Q$ için $x \notin S$ ve $N \cup S = M$ 'dir. Böylece $Q \subseteq \sqrt[s]{N}$ ve dolayısıyla $sec(N) \subseteq \sqrt[s]{N}$ olur. ∎

4.2. Bazı Modüllerin Eşasal Radikalleri

Ansari-Toroghy ve Farshadifar'ın (2013) makalesinde, değişmeli bir halka üzerinde sonlu üretilmiş eşçarpımsal bir modülün eşasal radikali için aşağıdaki sonuç verilmiştir.

Teorem 4.2.1 *(Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2013) R değişmeli bir halka ve M sonlu üretilmiş eşçarpımsal bir R-modül olsun. O zaman,*

$$sec(M) = (0 :_M \sqrt{ann_R(M)})$$

olur.

Aşağıdaki önermede, değişmeli bir halka üzerinde faithful Noether olan bir eşçarpımsal modülün eşasal radikali için daha ileri bir karakterizasyon vereceğiz.

Önerme 4.2.2 *R değişmeli bir halka ve M faithful Noether eşçarpımsal bir R-modül olsun. O zaman,*

$$sec(M) = Soc(M) = (0 :_M J(R))$$

olur.

İspat. M Noether R-modül olduğundan, Sonuç 4.1.8'e göre, $sec(M) = Soc(M)$'dir. $Soc(M) \subseteq (0 :_M J(R))$ olduğu açıktır. Teorem 2.1.14'den dolayı, M'nin her N_i esas altmodülü için, $N_i = (0 :_M I_i)$ olacak şekilde R'nin bir I_i atık ideali vardır. Buna göre, $\Lambda = \{i : N_i \leq_e M\}$ olmak üzere, $Soc(M) = \cap_{i\in\Lambda} N_i = \cap_{i\in\Lambda}(0 :_M I_i) = (0 :_M \sum_{i\in\Lambda} I_i)$ olur. $\sum_{i\in\Lambda} I_i \leq J(R)$ olduğundan, $(0 :_M J(R)) \subseteq (0 :_M \sum_{i\in\Lambda} I_i) = Soc(M)$ kapsaması elde edilir. Böylece $sec(M) = Soc(M) = (0 :_M J(R))$ olur. ∎

Tanım 4.2.3 *(Maani-Shirazi ve Smith 2007) P, R'nin bir asal ideali ve M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. M'nin her N öz altmodülü için,*

$$P^n \subseteq ann_R(M) \subseteq (N :_R M) \subseteq P$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa M'ye P-eşasalımsı (P-coprimary) modül denir. R'nin bir P asal ideali için M, P-eşasalımsı modül ise M'ye eşasalımsı modül denir.

$M_1, ..., M_n$ birer eşasalımsı modül olmak üzere eğer $M = M_1 + ... + M_n$ ise, M'ye eşasalımsı ayrışıma sahiptir denir. M'nin bu şekildeki bir gösterimi için her bir $M_i (1 \leq i \leq n)$ P_i-eşasalımsı olmak üzere eğer,

(i) $P_1, ..., P_n$ asal idealleri birbirinden farklı ve

(ii) Her i $(1 \leq i \leq n)$ için $M \neq M_1 + ... + M_{i-1} + M_{i+1} + ... + M_n$

ise o zaman M normal bir eşalımsı ayrışıma sahiptir denir.

Eşasalımsı modül tanımından görülebilir ki; M, P-eşasalımsı bir modül ise $\sqrt{ann_R(M)} = P$'dir.

Eşasal bir modülün eşasalımsı olduğu tanımlardan açıktır.

Şimdi, eşasalımsı ayrışıma sahip modüllerin eşasal radikalleri için bazı karakterizasyonlar vereceğiz.

Önteorem 4.2.4 *(Maani-Shirazi ve Smith 2007) P, R'nin bir asal ideali ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman M, P-eşasalımsı modüldür ancak ve ancak R'nin her A ideali için, $A \nsubseteq P$ ise, $M = MA$'dır, $A \subseteq P$ ise, $MA^h = (0)$ olacak şekilde bir h pozitif tamsayısı vardır.*

Önerme 4.2.5 *R, sıfırdan farklı her asal ideali maksimal olan bir asal halka ve M, eşasal bir altmodül kapsayan eşasalımsı bir sağ R-modül olsun. O zaman $sec(M)$, M'nin eşasal bir altmodülüdür.*

İspat. P, R'nin bir asal ideali olmak üzere; M, P-eşasalımsı bir sağ R-modül olsun. $M \neq (0)$'dır. İlk olarak, $ann_R(M) = (0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\sqrt{ann_R(M)} = P = (0)$ olur. A, R'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Önteorem 4.2.4'den, $M = MA$ olur. Bu da M'nin eşasal modül olduğunu gösterir. Şimdi, $ann_R(M) \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. K, M'nin bir eşasal altmodülü olsun. O zaman, $(0) \neq P \subseteq ann_R(K)$ ve P maksimal ideal olduğundan, $ann_R(K) = P$ olur. Buna göre, M'nin tüm eşasal altmodüllerinin sıfırlayanları P'ye eşittir. Buradan, $ann_R(sec(M)) = P$ bir maksimal ideal olduğundan $sec(M)$, M'nin eşasal bir altmodülüdür. ∎

Önerme 4.2.6 *P, R'nin bir maksimal ideali, M bir sağ R-modül ve N, M'nin, eşasal bir altmodül içeren P-eşasalımsı bir altmodülü olsun. O zaman $sec(N)$, M'nin eşasal bir altmodülüdür ve $sec(N) = sec((0 :_N P)) = (0 :_N P)$'dir.*

İspat. İlk olarak, $sec(N) = sec((0 :_N P))$ olduğunu gösterelim. $sec((0 :_N P)) \subseteq sec(N)$ olduğu açıktır. K, N'nin Q-eşasal bir altmodülü olsun. O zaman, $\sqrt{ann_R(N)} = P \subseteq Q$ ve P maksimal ideal olduğundan, $P = Q$ olur. Buradan, $K \subseteq (0 :_N Q) = (0 :_N P)$ ve dolayısıyla $sec(N) \subseteq sec((0 :_N P))$ elde edilir. Böylece $sec(N) = sec((0 :_N P))$ olur. Ayrıca N'nin her eşasal altmodülünün sıfırlayanı P'ye eşit olduğundan $sec(N)$, M'nin P-eşasal bir altmodülüdür.
$sec(N) = sec((0 :_N P)) \subseteq (0 :_N P)$ olduğundan, $P \subseteq ann_R((0 :_N P)) \subseteq ann_R(sec(N)) = P$ ve dolayısıyla $ann_R((0 :_N P)) = P$ elde edilir. P, R'nin bir maksimal ideali olduğundan $(0 :_N P)$, N'nin eşasal bir altmodülüdür. Böylece $sec(N) = sec((0 :_N P)) = (0 :_N P)$ olur. ∎

Teorem 4.2.7 *R, sıfırdan farklı her asal ideali maksimal olan bir halka ve M, eşasalımsı ayrışıma sahip olan bir sağ R-modül olsun. her bir i $(1 \leq i \leq n)$ için M_i, M'nin P_i-eşasalımsı altmodülü olmak üzere; $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$, M'nin bir normal eşasalımsı ayrışımı ve $ann_R(M) \neq (0)$ ise, ya $sec(M) = (0)$'dır ya da bir t $(1 \leq t \leq n)$ için, $sec(M) = \oplus_{i=1}^{t}(0 :_M P_i)$'dir.*

İspat. $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$ toplamının bir dik toplam olduğunu gösterelim. Hipotezden dolayı, her i $(1 \leq i \leq n)$ için P_i, R'nin bir maksimal idealidir ve dolayısıyla $P_i + \bigcap_{i \neq j} P_j = R$'dir.

Buna göre her i $(1 \leq i \leq n)$ için, $ann_R(M_i) + \bigcap_{i \neq j} ann_R(M_j) = R$ olur. Böylece,

$$M_i \cap (\sum_{i \neq j} M_j) = \left(M_i \cap (\sum_{i \neq j} M_j) \right) \left(ann_R(M_i) + \bigcap_{i \neq j} ann_R(M_j) \right) = (0)$$

elde edilir. Önteorem 4.1.5-(4)'den, $sec(M) = \oplus_{i=1}^{n} sec(M_i)$ olur. Her i $(1 \leq i \leq n)$ için, M_i modülü eşasal bir altmodül kapsamıyorsa, $sec(M) = (0)$ olur. Gerekirse yeniden sıralama yapılarak, $i = 1, ..., t$ $(1 \leq t \leq n)$ için her bir M_i modülünün eşasal bir altmodül kapsadığını kabul edebiliriz. Önerme 4.2.6'dan, her bir i $(1 \leq i \leq t)$ için $sec(M_i) = (0 :_M P_i)$'dir. Böylece $sec(M) = \oplus_{i=1}^{t} (0 :_M P_i)$ olur. ∎

Aşağıdaki teorem, tüm sağ ilkel faktörleri Artin olan bir halka üzerindeki Noether bir modülün eşasal radikalinin ve maksimal eşasal altmodüllerinin karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 4.2.8 *R, tüm sağ ilkel faktörleri Artin olan bir halka ve M bir Noether sağ R-modül olsun. $sec(M) \neq (0)$ ise o zaman, R'nin öyle $P_1, ..., P_n$ maksimal idealleri vardır ki M'nin tüm maksimal eşasal altmodülleri $(0 :_M P_1), ..., (0 :_M P_n)$ altmodülleridir, bu durumda $Soc(M) = sec(M) = \bigoplus_{i=1}^{n} (0 :_M P_i)$ olur.*

İspat. $sec(M) \neq (0)$ olsun. İlk olarak M'nin her eşasal altmodülünün R'nin bir P maksimal ideali için $(0 :_M P)$ şeklinde bir eşasal altmodül içinde kapsandığını gösterelim. Q, M'nin eşasal bir altmodülü ve $ann_R(Q) = P$ olsun. M Noether modül olduğundan Q sonlu üretilmiştir ve dolayısıyla Q bir X maksimal altmodülü kapsar. $ann_R(Q/X) = P'$ olsun. Hipotezden dolayı R/P' Artin bir halkadır. Buna göre P', R'nin bir maksimal idealidir. Q eşasal bir R-modül olduğundan $P = P'$ olur. Böylece P, R'nin bir maksimal idealidir ve $Q \subseteq (0 :_M P)$'dir. $ann_R((0 :_M P)) = P$ ve P maksimal ideal olduğundan $(0 :_M P)$, M'nin bir eşasal altmodülüdür.

Diğer taraftan, Sonuç 4.1.8'e göre, $sec(M)$ yarı-basit bir modüldür. $sec(M)$ Noether ve yarı-basit olduğundan Artin bir modül olmalıdır. Teorem 3.1.25'den dolayı, M'nin sonlu sayıda maksimal eşasal altmodülü vardır. Böylece $Soc(M) = sec(M) = \sum_{i=1}^{n} (0 :_M P_i)$ olacak şekilde, R'nin $P_1, ..., P_n$ maksimal idealleri vardır. Şimdi bu toplamın bir dik toplam olduğunu gösterelim. P_i'ler farklı maksimal idealler olduğundan,

$$(0 :_M P_i) \cap (\sum_{i \neq j} (0 :_M P_j)) = \left((0 :_M P_i) \cap (\sum_{i \neq j} (0 :_M P_j)) \right) \left(P_i + \bigcap_{i \neq j} P_j \right) = (0)$$

olur. Bu da $sec(M) = Soc(M) = \bigoplus_{i=1}^{n} (0 :_M P_i)$ olduğunu gösterir.

Şimdi bir P maksimal ideali için $(0 :_M P)$, M'nin başka bir maksimal eşasal altmodülü olsun. O zaman $(0 :_M P) \subseteq sec(M)$ ve $ann_R((0 :_M P)) = P$ olur. $ann_R(sec(M)) = \bigcap_{i=1}^{n} P_i \subseteq P$ olduğundan, $P_i \subseteq P$ olacak şekilde bir i $(1 \leq i \leq n)$ vardır. P_i maksimal ideal olduğundan $P_i = P$ elde edilir. Böylece M'nin tüm maksimal eşasal altmodülleri $(0 :_M P_1), ..., (0 :_M P_n)$ altmodülleridir. ∎

Önerme 4.2.9 *R, tüm sağ ilkel faktörleri Artin olan sağ Noether bir halka olsun. O zaman, serbest bir sağ R-modülün her M altmodülü için $sec(M) = Soc(M)$'dir.*

İspat. F serbest bir sağ R-modül ve M, F'nin bir altmodülü olsun. Sonuç 4.1.8'den dolayı $sec(R_R) = Soc(R_R)$'dir. F, R_R'nin kopyalarının bir dik toplamı olduğundan Önteorem 4.1.5-(4)'den, $sec(F) = Soc(F)$'dir. Buna göre, $sec(M) \subseteq Soc(F) \cap M = Soc(M)$ ve böylece $sec(M) = Soc(M)$ olur. ∎

Önerme 4.2.10 *R asal bir sağ ya da sol Goldie halka ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman, $div(M_R) \subseteq sec(M_R)$'dir.*

İspat. Önerme 3.1.14'e göre, M'nin sıfırdan farklı her bölünebilir altmodülü eşasaldır. Böylece $div(M_R) \subseteq sec(M_R)$ olur. ∎

Teorem 4.2.11 *R, her asal faktörü sol sınırlı, sol Goldie olan bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman, $sec(M) = \sum\limits_{P \in \pi(R)} div((0 :_M P)_{R/P})$ olur, burada $\pi(R)$, R'nin tüm asal ideallerinin kümesini göstermektedir.*

İspat. İlk olarak, $sec(M) = (0)$ olduğunu kabul edelim. $P \in \pi(R)$ için $div((0 :_M P)_{R/P}) \neq (0)$ ise Önerme 3.1.14'den dolayı, $div((0 :_M P)_{R/P})$ eşasal bir sağ (R/P)-modüldür. Önerme 3.1.10'a göre, $div((0 :_M P)_{R/P})$ eşasal bir sağ R-modüldür. Bu da $sec(M) = (0)$ olması ile çelişir. O halde $sec(M) = (0)$ ise $\sum\limits_{P \in \pi(R)} div((0 :_M P)_{R/P}) = (0)$ olur.

$sec(M) \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. L, M'nin eşasal bir altmodülü olsun. Teorem 3.1.19'a göre $Q = ann_R(L)$, R'nin bir asal idealidir ve L bölünebilir bir sağ (R/Q)-modüldür. Böylece $L \subseteq div((0 :_M Q)_{R/Q})$ ve dolayısıyla $sec(M) \subseteq \sum\limits_{P \in \pi(R)} div((0 :_M P)_{R/P})$ olur.

Şimdi, bir P asal ideali için $D = div((0 :_M P)_{R/P})$ olsun. $D \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. $DP = (0)$'dır ve ayrıca $P \subsetneq A$ olacak şekilde her A ideali için $D = DA$'dır. Buna göre $P = ann_R(D)$'dir. Teorem 3.1.19'a göre, D eşasal bir R-modüldür ve dolayısıyla $D \subseteq sec(M)$'dir. Bu da $sec(M) = \sum\limits_{P \in \pi(R)} div((0 :_M P)_{R/P})$ olduğunu gösterir. ∎

Sonuç 4.2.12 *R, Krull boyutu 1 olan bir Noether tamlık bölgesi ve M bir R-modül olsun. O zaman K, M'nin yarı-basit bir altmodülü olmak üzere, $sec(M) = Soc(M) + div(M) = K \oplus div(M)$ şeklinde yazılabilir.*

İspat. Önerme 4.2.10'dan, $Soc(M) + div(M) \subseteq sec(M)$'dir. R'nin sıfırdan farklı her asal ideali maksimaldir. Buna göre, sıfırdan farklı her $P \in \pi(R)$ için $div((0 :_M P)_{R/P}) =$

$(0 :_M P)$ olur. Ayrıca $(0 :_M P) = (0)$'dır ya da $(0 :_M P)$ basit R-modüldür. Teorem 4.2.11'den dolayı, $sec(M) \subseteq Soc(M) + div(M)$ olur. $S = Soc(M)$ ve $D = div(M)$ ise, $S = (S \cap D) \oplus K$ olacak şekilde S'nin bir K altmodülü vardır. Böylece $sec(M) = K \oplus D$ olur. ∎

Teorem 4.2.11 injektif modüller için daha da genelleştirilebilir. Bu genellemeyi vermek için ilk olarak bazı önteoremler ispatlayacağız.

Önteorem 4.2.13 *X injektif bir sağ R-modül olsun. O zaman, her n pozitif tamsayısı ve $A_i (1 \leq i \leq n)$ idealleri için $(0 :_X \cap_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n (0 :_X A_i)$ eşitliği sağlanır.*

İspat. $x \in (0 :_X \cap_{i=1}^n A_i)$ olsun. $\varphi : R/(\cap_{i=1}^n A_i) \longrightarrow X$,

$$\varphi(r + \cap_{i=1}^n A_i) = xr \ (r \in R)$$

dönüşümünü tanımlayalım. φ dönüşümü iyi tanımlıdır ve bir R-modül homomorfizmasıdır. Diğer taraftan, $\alpha : R/(\cap_{i=1}^n A_i) \longrightarrow \oplus_{i=1}^n (R/A_i)$

$$\alpha(r + \cap_{i=1}^n A_i) = (r + A_1, ..., r + A_n) \ (r \in R)$$

ile tanımlı α dönüşümünün bir monomorfizma olduğu açıktır. X injektif sağ R-modül olduğundan, $\varphi = \theta\alpha$ olacak şekilde bir $\theta : \oplus_{i=1}^n (R/A_i) \longrightarrow X$ homomorfizması vardır. Özel olarak,
$x = \varphi(1 + \cap_{i=1}^n A_i) = \theta(1 + A_1, ..., 1 + A_n) = \theta(1 + A_1, 0, ..., 0) + ... + \theta(0, ..., 1 + A_n) \in \sum_{i=1}^n (0 :_X A_i)$ olur. Buna göre, $(0 :_X \cap_{i=1}^n A_i) \subseteq \sum_{i=1}^n (0 :_X A_i)$ kapsaması elde edilir. Ters kapsama açıktır. ∎

Önteorem 4.2.14 *P, R halkasının bir asal ideali ve R/P sağ ya da sol Goldie bir halka olsun. M sıfırdan farklı bir injektif sağ R-modül ise, $sec_P(M) = (0 :_M P)$ olur.*

İspat. $sec_P(M) \subseteq (0 :_M P)$ olduğu açıktır. $(0 :_M P) \neq (0)$ olduğunu kabul edebiliriz. Önerme 1.8.12'ye göre, $(0 :_M P)$ injektif bir sağ (R/P)-modüldür. Sonuç 3.1.15'den dolayı $(0 :_M P)$ eşasal (R/P)-modüldür. Önerme 3.1.10'a göre, $(0 :_M P)$ P-eşasal R-modüldür. Böylece $(0 :_M P) \subseteq sec_P(M)$ olur. ∎

Önteorem 4.2.15 *R, her asal faktörü sağ ya da sol Goldie olan bir halka, X sıfırdan farklı bir injektif sağ R-modül ve $A = ann_R(X)$ olsun. O zaman, $A \not\subseteq Q$ olacak şekildeki her Q asal ideali için $(0 :_X Q) = (0)$'dır.*

İspat. Q, R'nin bir asal ideali ve $A \not\subseteq Q$ olsun. Önerme 1.8.12'ye göre, $Y = (0 :_X Q)$ injektif bir sağ (R/Q)-modüldür. Bu da Y'nin bölünebilir bir sağ (R/Q)-modül olmasını gerektirir. Sonuç 1.10.29'a göre, $(A+Q)/Q$ ideali regüler bir eleman kapsadığından, $Y = Y((A + Q)/Q) = Y(A + Q) = (0)$ olur. ∎

Sıfırdan farklı bir X injektif sağ R-modülü için, R'nin $ann_R(X)$'i kapsayan tüm minimal asal ideallerinin kümesini $\mu_X(R)$ göstereceğiz.

Şimdi injektif modüller için Teorem 4.2.11'in daha genel halini verelim.

Teorem 4.2.16 *R, her asal faktörü sağ ya da sol Goldie olan bir halka ve X sıfırdan farklı bir injektif sağ R-modül olsun. O zaman,*

$$sec(X) = \sum_{P \in \mu(R)} (0 :_X P) = \sum_{Q \in \mu_X(R)} (0 :_X Q)$$

olur. Ayrıca bir n pozitif tamsayısı ve $Q_i (1 \leq i \leq n)$ asal idealleri için $\mu_X(R) = \{Q_1, ..., Q_n\}$ ise, $sec(X) = (0 :_X \cap_{i=1}^{n} Q_i)$ olur.

İspat. $sec(X) \subseteq \sum_{P \in \mu(R)} (0 :_X P)$ olduğunu bu bölümün başında belirtmiştik. Diğer taraftan, Önteorem 4.2.14'e göre, her $P \in \mu(R)$ için $(0 :_X P) = (0)$ ya da $(0 :_X P)$ eşasal bir R-modüldür. Böylece her $P \in \mu(R)$ için $(0 :_X P) \subseteq sec(X)$ olur. Önteorem 4.2.15'den,

$$sec(X) = \sum_{P \in \mu(R)} (0 :_X P) = \sum_{Q \in \pi_X(R)} (0 :_X Q)$$

eşitliği sağlanır. Teoremin son kısımında ifade edilen sonuç, Önteorem 4.2.13'den elde edilir. ∎

Sonuç 4.2.17 *R sağ ya da sol Noether halka ve X sıfırdan farklı bir injektif sağ R-modül olsun. O zaman, $sec(X) = (0 :_X N(R))$ olur.*

İspat. Teorem 4.2.16'nın direkt bir sonucudur. ∎

Sonuç 4.2.18 *R sağ Noether bir halka ve M, R'nin bir minimal injektif eşüreteci olsun. $sec(M) = Soc(M)$ ise $N(R) = J(R)$'dir.*

İspat. R sağ Noether bir halka olsun. Teorem 1.8.8'e göre, $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ basit sağ R-modüller sınıfının fazlalıksız bir temsilciler kümesi olmak üzere, $M = E(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda)$'dır. Sonuç 4.2.17'den,

$$sec(M) = (0 :_M N(R)) = Soc(M) = Soc(E(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda)) = Soc(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$$

olur. Faith'in (1995) makalesindeki 7. Teorem kullanılarak;
$ann_R(sec(M)) = ann_R((0 :_M N(R))) = N(R) = ann_R(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} ann_R(S_\lambda) = J(R)$ eşitlikleri elde edilir. Böylece $N(R) = J(R)$ olur. ∎

R halkasının her maksimal sağ (sol) ideali çift yönlü bir ideal ise R'ye sağ (sol) quasi-duo halka denir. Aşağıdaki teoremde, injektif bir modülün eşasal radikalini kullanarak sağ quasi-duo Artin halkaların bir karakterizasyonunu vereceğiz.

Teorem 4.2.19 *R sağ Noether ve sağ quasi-duo bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) *R sağ Artin halkadır.*

(2) *Her sağ R-modül M için $sec(M) = Soc(M)$'dir.*

(3) *Her injektif sağ R-modül M için $sec(M) = Soc(M)$'dir.*

(4) *R'nin minimal injektif eşüreteci M için $sec(M) = Soc(M)$'dir.*

(5) *Her basit sağ R-modül M için $sec(E(M)) = M$'dir.*

(6) *R'nin her Q maksimal ideali için $sec(E(R/Q)) = R/Q$'dur.*

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) Sonuç 3.1.6'ya göre, sağ tam bir halka üzerindeki her sağ R-modül M için $sec(M) = Soc(M)$'dir. Her sağ Artin halka sağ tam halka olduğundan her sağ R-modül M için $sec(M) = Soc(M)$'dir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) Açıktır.

(4) $\Longrightarrow$ (5) Teorem 1.8.8'e göre, $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ basit sağ R-modüller sınıfının fazlalıksız bir temsilciler kümesi olmak üzere, $M = E(\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda)$'dır. R sağ Noether olduğundan, hipotezden ve Önteorem 4.1.5-(4)'den dolayı

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Soc(E(S_\lambda)) = Soc(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E(S_\lambda)) = Soc(E(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda)) = sec(E(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda))$$

$$= sec(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E(S_\lambda)) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} sec(E(S_\lambda))$$

elde edilir. Bu da her $\lambda \in \Lambda$ için $Soc(E(S_\lambda)) = S_\lambda = sec(E(S_\lambda))$ olmasını gerektirir. Böylece her basit sağ R-modül M için $sec(E(M)) = M$'dir.

(5) $\Longrightarrow$ (6) R sağ quasi-duo halka olduğundan, R'nin her Q maksimal ideali için R/Q basit sağ R-modüldür. (5)'den dolayı $sec(E(R/Q)) = R/Q$'dur.

(6) $\Longrightarrow$ (1) P, R'nin bir asal ideali olsun. $P \subseteq Q$ olacak şekilde, R'nin bir Q maksimal sağ ideali vardır. $M = E(R/Q)$ sağ R-modülünü gözönüne alalım. R sağ quasi-duo halka olduğundan, Q bir idealdir ve dolayısıyla $R/Q \subseteq (0 :_M Q)$'dur. Bu da $(0 :_M P) \neq (0)$ olmasını gerektirir. Önteorem 4.2.14'den dolayı, $(0 :_M P)$ P-eşasal bir R-modüldür. Buna göre hipotezden dolayı, $(0 :_M P) \subseteq sec(E(R/Q)) = R/Q$ olur. Buradan, $(0 :_M P) = R/Q$ ve dolayısıyla $P = Q$ eşitliği elde edilir. Böylece, R'nin her asal ideali maksimal idealdir. Bu da $N(R) = J(R)$ olmasını ve her P asal ideali için R/P'nin basit halka olmasını gerektirir. R sağ quasi-duo halka olduğundan, her P asal ideali için R/P basit sağ R-modül olur. R sağ Noether halka olduğundan $N(R)$, R'nin üstel sıfır bir idealidir. Ayrıca R'nin sonlu sayıda $P_1, ..., P_n$ minimal asal ideali vardır. $R/J(R)$'yi, $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} R/P_i$ R-modülü içine gömebiliriz. Böylece $R/J(R)$ yarı-basit modüldür. Sonuç olarak; R sağ Noether bir halka, $J(R)$ üstel sıfır bir ideal ve $R/J(R)$ yarı-basit bir halkadır. Teorem 1.7.10'a göre, R sağ Artin halkadır. ∎

Teorem 4.2.20 *R asal, sol sınırlı, sağ ve sol Goldie bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(*i*) *R basit halkadır.*

(ii) *Öyle bir serbest sağ R-modül F ve F'nin bir M altmodülü vardır ki $sec(M) \neq (0)$'dır.*

(iii) $sec(R_R) \neq (0)$*'dır.*

İspat. $(i) \Longrightarrow (ii)$ ve $(i) \Longrightarrow (iii)$ gerektirmeleri açıktır çünkü bu durumda sıfırdan farklı tüm sağ R-modüller eşasaldır. $(iii) \Longrightarrow (ii)$ gerektirmesi de açıktır.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ F serbest bir sağ R-modül ve M, F'nin $sec(M) \neq (0)$ olan bir altmodülü olsun. L, M'nin bir eşasal altmodülü olsun. $L \neq (0)$'dır ve L, F serbest R-modülünün bir altmodülü olduğundan, öyle bir $\varphi : F \longrightarrow R$ homomorfizması vardır ki $\varphi(L) \neq (0)$'dır. $P = ann_R(L)$ olsun. O zaman, $\varphi(L)P = (0)$'dır. R asal halka olduğundan $P = (0)$ olur. Teorem 3.1.19'a göre, L bölünebilir bir sağ R-modüldür ve dolayısıyla $\varphi(L)$, R'nin sıfırdan farklı bölünebilir bir sağ idealidir. B, R'nin tüm bölünebilir sağ ideallerinin toplamını göstersin. C, bölünebilir bir sağ ideal ve $r \in R$ ise, rC'nin bölünebilir bir sağ ideal olduğu açıktır. Buna göre $rC \subseteq B$'dir. Böylece B, R'nin sıfırdan farklı çift yönlü bir idealidir. Ayrıca B_R modülünün bölünebilir olduğu açıktır. Önerme 1.10.35'e göre, B injektif bir sağ R-modüldür. Ayrıca, $B = eR$ olacak şekilde bir $e \in R$ eşkare elemanı vardır. Buna göre $(1-e)B = (0)$ ve dolayısıyla $e = 1$ olur. Böylece $B = R$'dir ve dolayısıyla R_R modülü bölünebilirdir. D, R'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Sonuç 1.10.29'a göre, D regüler bir eleman kapsar. Bu da $R = RD = D$ olmasını gerektirir. Böylece R basit halkadır. ∎

Sonuç 4.2.21 *R, basit olmayan asal, sol sınırlı sağ ve sol Goldie bir halka olsun. O zaman,*

(i) *Bir F serbest sağ R-modülünün her M altmodülü için $sec(M) = (0)$'dır.*

(ii) *Her sonlu üretilmiş burkulmasız sağ R-modül M için $sec(M) = (0)$'dır.*

İspat. (i) Teorem 4.2.20'nin direkt bir sonucudur.

(ii) Önerme 1.10.36'ya göre, M sonlu üretilmiş bir burkulmasız sağ R-modül ise M, serbest bir sağ R-modül içine gömülebilir. (i)'ye göre, $sec(M) = (0)$ olur. ∎

4.3. Eşasal Radikal Modüller

Önteorem 4.3.1 *M bir sağ R-modül ve $sec(M) \neq (0)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) *$Att(sec(M)) \neq \emptyset$'dir.*

(2) *$Att(sec(M))$ sonlu bir küme ise $sec(M)$, M'nin eşasal altmodüllerinin sonlu bir toplamı şeklinde yazılabilir.*

İspat. (1) her bir K_i, M'nin eşasal bir altmodülü olmak üzere, $sec(M) = \sum_{i \in I} K_i$ yazalım. Bu toplamın fazlalıksız olduğunu ve her $i \neq j$ için $ann_R(K_i) \neq ann_R(K_j)$ olduğunu kabul edebiliriz. $j \in I$ olsun. Bu durumda,

$$sec(M)/(\sum_{i\neq j} K_i) = (K_j + \sum_{i\neq j} K_i)/\sum_{i\neq j} K_i \simeq K_j/(K_j \cap (\sum_{i\neq j} K_i))$$

$K_j/(K_j \cap (\sum_{i\neq j} K_i))$ modülü, K_j eşasal modülünün sıfırdan farklı bir homomorf görüntüsü olduğundan, eşasal bir modüldür. Bu da $Att(sec(M)) \neq \emptyset$ olduğunu gösterir.

(2) $Att(sec(M))$ sonlu bir küme olsun. her bir K_i, M'nin eşasal bir altmodülü olmak üzere, $sec(M) = \sum_{i\in I} K_i$ şeklinde yazalım. Her $i \neq j$ için $ann_R(K_i) \neq ann_R(K_j)$ olduğunu ve her $j \in I$ için $sec(M) \neq \sum_{i\neq j} K_i$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda, I sonsuz bir küme ise (1)'in ispatından dolayı, $Att(sec(M))$ sonlu bir küme olamaz. Şu halde, I sonlu bir küme olmalıdır. ∎

Teorem 4.3.2 *M yeterli tümlenmiş eşasal radikal bir sağ R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) M, dar eşasal altmodüllerin sonlu bir toplamı şeklinde yazılabilir.

(ii) M sonlu dar boyutludur.

İspat. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Önerme 1.14.8'in sonucudur.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ M sonlu dar boyutlu olduğundan, Önerme 2.2.16'ya göre, $Att(M)$ sonlu bir kümedir. Önteorem 4.3.1'e göre, M sonlu sayıda eşasal altmodülün bir toplamı şeklinde yazılabilir. her bir K_i, M'nin P_i-eşasal altmodülü ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $M = \sum_{i=1}^{n} K_i$ olsun. Bu toplamın fazlalıksız olduğunu kabul edebiliriz. $K_2+...+K_n$'nin, M içinde $K_1' \subseteq K_1$ olacak şekilde bir K_1' tümleyeni vardır. K_1', K_1 içinde de tümleyen bir altmodüldür. Önerme 3.3.15'den, K_1' P_1-eşasal modüldür. Önerme 1.14.14'e göre $h.dim(M/K_1') + h.dim(K_1') = h.dim(M)$ olduğundan, K_1' sonlu dar boyutludur. Ayrıca K_1', M'nin tümleyen bir altmodülü olduğundan, Önerme 1.14.13'e göre, K_1' yeterli tümlenmiş bir modüldür. Teorem 3.3.17'ye göre K_1', dar P_1-eşasal altmodüllerin sonlu bir toplamıdır ve $M = K_1' + K_2 + ... + K_n$'dir. Benzer şekilde $K_1' + K_3 + ... + K_n$'nin, $K_2' \subseteq K_2$ olacak şekilde bir K_2' tümleyeni vardır öyle ki K_2' dar P_2-eşasal altmodüllerin sonlu bir toplamıdır. Bu şekilde devam edilerek sonlu adım sonra, her bir K_i' dar P_i-eşasal altmodüllerin sonlu bir toplamı olmak üzere, $M = K_1'+...+K_n'$ şeklinde yazılır. Böylece, M sonlu sayıda dar eşasal altmodülün bir toplamıdır. ∎

Tanım 4.3.3 *P, R'nin bir asal ideali, M bir sağ R-modül ve K, M'nin P-eşasal bir altmodülü olsun. K, kendisinden başka bir P-eşasal bir altmodül kapsamıyorsa, K'ye M'nin bir minimal P-eşasal altmodülü denir.*

K, M'nin bir minimal Q-eşasal altmodülü olacak şekilde, R'nin bir Q asal ideali varsa, K'ye M'nin bir minimal eşasal altmodülü denir.

K, M'nin, $ann_R(H) = P$ olacak şekildeki H altmodülleri arasında minimal ise, K'ye M'nin bir P-minimal altmodülü denir.

Tanım 4.3.4 *(Clark vd 2006) M bir sağ R-modül olsun. Mod-R içinde, $M << L$ olacak şekilde bir L sağ R-modülü varsa, M'ye Mod-R içinde bir atık (small) modül (ya da kısaca atık modül) denir.*

Önerme 4.3.5 *(Clark vd 2006) M bir sağ R-modül olsun. M, Mod-R içinde atık bir modüldür ancak ve ancak M, $E(M)$ içinde bir atık altmodüldür.*

Teorem 4.3.6 *P, R'nin bir asal ideali, M bir sağ R-modül ve K, M'nin bir altmodülü olsun. Aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım.*

(i) K, M'nin bir P-minimal altmodülüdür.

(ii) K, M'nin bir minimal P-eşasal altmodülüdür.

(iii) K, M'nin bir dar P-eşasal altmodülüdür.

Genel olarak, $(i) \Longrightarrow (ii)$ gerektirmesi sağlanır.

K, M'nin yeterli tümlenmiş bir altmodülü ise, $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$ gerektirmeleri sağlanır.

R Dedekind bölgesi ise $(iii) \Longrightarrow (ii)$ gerektirmesi sağlanır.

İspat. $(i) \Longrightarrow (ii)$ K, M'nin bir P-minimal altmodülü olsun. $ann_R(K) = P$ ve dolayısıyla $K \neq (0)$'dır. I, R'nin bir ideali ve $A = ann_R(KI)$ olsun. $KI \neq K$ ise K, P-minimal olduğundan, $P \subsetneq A$ olur. Buna göre, $IA \subseteq P$ olması $I \subseteq P$ olmasını gerektirir. Böylece $KI = (0)$ olur. Bu da K'nın P-eşasal olduğunu gösterir. K'nın minimal P-eşasal olduğu da açıktır.

Şimdi, K'nın yeterli tümlenmiş bir altmodül olduğunu kabul edelim.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ L, K'nın bir öz altmodülü olsun. $N + L = K$ olacak şekilde K'nın bir N altmodülü bulunduğunu kabul edelim. H, L'nin K içinde $H \subseteq N$ olacak şekide bir tümleyeni olsun. O zaman Önerme 3.3.15'den dolayı H, K'nın P-eşasal bir altmodülüdür. K'nın minimalliğinden, $H = K$ ve dolayısıyla $N = K$ elde edilir. Böylece K dar P-eşasal modüldür.

Şimdi R'nin bir Dedekind bölgesi olduğunu kabul edelim.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$ K'nın bir P-eşasal öz altmodülü bulunduğunu kabul edelim. Bu P-eşasal altmodül G olsun. Teorem 3.1.19'dan dolayı, G bölünebilir bir (R/P)-modüldür. R/P Dedekind bölge olduğundan, G injektif (R/P)-modüldür. K dar modül olduğundan G Mod-R içinde atık bir modüldür. G, K içinde (R/P)-altmodül olarak da atık altmodüldür. Buna göre G, Mod-(R/P) içinde bir atık modüldür. Bu ise, Önerme 4.3.5'den dolayı, G'nin (R/P)-modül olarak injektif olması ile çelişir. Buna göre K, M'nin bir minimal P-eşasal altmodülüdür. ∎

Sonuç 4.3.7 *R bir Dedekind bölgesi ve M sonlu dar boyutlu yeterli tümlenmiş eşasal radikal bir sağ R-modül olsun. O zaman, M sonlu sayıda minimal eşasal altmodülün bir toplamı şeklinde yazılabilir.*

İspat. Teorem 4.3.2'ye göre, her bir K_i $(1 \leq i \leq n)$, M'nin dar P_i-eşasal altmodülü olmak üzere, $M = \sum_{i=1}^{n} K_i$ şeklinde yazılabilir. Teorem 4.3.6'dan, her bir K_i, M'nin bir minimal P_i-eşasal altmodülüdür. Böylece M sonlu sayıda minimal eşasal altmodülün bir toplamı şeklinde yazılabilir. ∎

5. AŞAMALI EŞASAL, EŞASALIMSI ALTMODÜLLER ve AŞAMALI SEKONDER GÖSTERİMLER

Tez çalışmamızın bu bölümü aşamalı halkalar ve modüller üzerinedir. Bu bölüm üç alt başlıktan oluşmaktadır. Birinci kısımda aşamalı modüllerin aşamalı eşasal altmodülleri ele alınacaktır. Aşamalı eşasal altmodül tanımı, ilk olarak Ansari-Toroghy ve Farshadifar'ın (2012c) makalesinde değişmeli halkalar üzerinde verilmiştir. Bu çalışmada ise bu tanım herhangi bir birimli halka üzerindeki modüllere genelleştirilerek verilecektir. Bu bölümün ilk kısmında, aşamalı eşasal altmodüllerin birtakım özellikleri incelenecek ve bu altmodüller farklı biçimlerde karakterize edilecektir. İkinci kısımda aşamalı eşasalımsı altmodül ve aşamalı eşasalımsı ayrışım kavramları tanımlanacak ve bu kavramlar üzerine bazı sonuçlar verilecektir. Üçüncü kısımda ise değişmeli aşamalı halkalar üzerindeki aşamalı injektif modüllerin aşamalı sekonder gösterimleri araştırılacaktır.

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe, G bir grup ve $R = \oplus_{g \in G} R_g$ G-aşamalı bir halka olacaktır. e, G grubunun birim elemanını gösterecektir.

5.1. Aşamalı Eşasal Altmodüller

Tanım 5.1.1 *M aşamalı bir sağ R-modül olsun. $M \neq (0)$ ve M'nin her N aşamalı öz altmodülü için $ann_R(M) = ann_R(M/N)$ ise, M'ye aşamalı eşasal (ya da kısaca gr-eşasal) modül denir.*

K, M'nin aşamalı bir altmodülü olsun. K, kendi başına gr-eşasal bir R-modül oluyorsa K'ye, M'nin gr-eşasal altmodülü denir.

Gr-eşasal modül tanımı kullanılarak gösterilebilir ki; M gr-eşasal bir R-modül ise $ann_R(M)$, R'nin gr-asal bir idealidir. Bu durumda M'ye gr-P-eşasal modül denir.

Önerme 5.1.2 *M sıfırdan farklı aşamalı bir sağ R-modül olsun. O zaman, M gr-eşasal R-modüldür ancak ve ancak R'nin her I aşamalı ideali için $MI = (0)$ veya $MI = M$'dir.*

İspat. M'nin gr-eşasal bir R-modül olduğunu kabul edelim. I, R'nin aşamalı bir ideali olsun. $MI \neq M$ olduğunu kabul edelim. MI, M'nin aşamalı bir öz altmodülü olduğundan $ann_R(M) = ann_R(M/MI)$ olur. Bu da $I \subseteq ann_R(M)$ olmasını gerektirir. Böylece $MI = (0)$'dır.

Tersine, R'nin her I aşamalı ideali için $MI = (0)$ veya $MI = M$ olduğunu kabul edelim. N, M'nin aşamalı bir öz altmodülü olsun. O zaman, $ann_R(M/N) = I$, R'nin aşamalı bir idealidir ve $MI \subseteq N$'dir. $N \neq M$ olduğundan $MI \neq M$'dir. O halde $MI = (0)$ yani $I \subseteq ann_R(M)$ olmalıdır. Böylece $ann_R(M) = ann_R(M/N)$ olur. ∎

Yukarıdaki önermeyi kullanarak, gr-eşasal modüller ile ilgili aşağıda sıralanan sonuçları elde ederiz.

- Değişmeli aşamalı bir R halkası üzerindeki aşamalı bir M modülü gr-eşasaldır ancak ve ancak her $r \in h(R)$ için $Mr = (0)$ veya $Mr = M$'dir.

- Her gr-basit modül gr-eşasaldır.
- Eşasal ve aşamalı bir modülün gr-eşasal olduğu açıktır. Ancak her gr-eşasal modül eşasal olmayabilir. Örneğin k bir cisim olmak üzere, $R = k[x, x^{-1}]$ Laurent polinomlar halkası için R_R gr-eşasal modüldür ancak eşasal değildir (Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2012c).

Aşamalı bir R halkasının tüm homojen birimsel elemanlarının kümesi $U^{gr}(R)$ ile gösterilecektir.

Teorem 5.1.3 *$M = \oplus_{g\in G}M_g$ aşamalı bir sağ R-modül olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(1) M gr-eşasal R-modül ise, $M_g \neq (0)$ olacak şekildeki her $g \in G$ için M_g eşasal R_e-modüldür.

(2) R kuvvetli aşamalı bir halka ve her $g \in G$ için M_g eşasal R_e-modül olsun. O zaman, M gr-eşasal R-modüldür.

(3) R bir çapraz çarpım, $U^{gr}(R) \subseteq Z(R)$ ve M_e eşasal bir R_e-modül ise, her $g \in G$ için M_g eşasal R_e-modüldür.

(4) R aşamalı bir tamlık bölgesi, M burkulmasız aşamalı bir R-modül ve N, M'nin eşasal bir altmodülü olsun. N sıfırdan farklı bir homojen eleman içeriyor ise N^*, M'nin gr-eşasal altmodülüdür.

İspat. (1) J, R_e'nin bir ideali olsun. O zaman, $I = \oplus_{g\in G}R_gJ$, R'nin aşamalı bir idealidir. M gr-eşasal olduğundan $MI = (0)$ veya $MI = M$ olmalıdır. $g \in G$ ve $M_g \neq (0)$ olsun. $MI = (0)$ ise, $M_gJ = M_gR_eJ \subseteq MI = (0)$ ve dolayısıyla $M_gJ = (0)$ olur. $MI = M$ ise, $M_gJ = M_g$ elde edilir. Böylece M_g eşasal R_e-modüldür.

(2) $M \neq (0)$ olduğu açıktır. $I = \oplus_{g\in G}I_g$, R'nin aşamalı bir ideali olsun. O zaman I_e, R_e'nin bir idealidir. Önerme 1.15.15-(2)'den dolayı $I = RI_e$'dir. Buna göre, $MI = MRI_e = MI_e = \oplus_{g\in G}(M_gI_e)$ olur. $M_gI_e = (0)$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, Önerme 1.15.15-(1)'e göre $MI = (0)$'dır. Her $g \in G$ için $M_gI_e \neq (0)$ ise, $M_gI_e = M_g$ olur. Bu da $MI = M$ olmasını gerektirir.

(3) R kuvvetli aşamalı bir halka olduğundan Önerme 1.15.15-(1)'e göre, her $g \in G$ için $M_g \neq (0)$'dır. I, R_e'nin bir ideali ve $g \in G$ olsun. O zaman, $M_eI = (0)$ veya $M_eI = M_e$ olur. R çapraz çarpım olduğundan, $R_{g^{-1}}$ bir x tersinir elemanı kapsar. $M_eI = (0)$ ise, $M_gI = M_gxx^{-1}I \subseteq M_ex^{-1}I = M_eIx^{-1} = (0)$ ve dolayısıyla $M_gI = (0)$ olur. $M_eI = M_e$ ise, $M_g = M_gxx^{-1} \subseteq M_ex^{-1} = M_eIx^{-1} = M_ex^{-1}I \subseteq M_gI$ ve dolayısıyla $M_gI = M_g$ olur. Buna göre M_g eşasal bir R_e-modüldür.

(4) Hipotezden dolayı, $N^* \neq (0)$'dır. $0 \neq r \in h(R)$ olsun. M burkulmasız olduğundan, $N^*r \neq (0)$'dır. $x \in N^*$ olsun. her bir i $(1 \leq i \leq t)$ için $x_{g_i} \in N \cap M_{g_i}$ ve $x_{g_i} \neq 0$ olmak üzere, $x = x_{g_1} + ... + x_{g_t}$ şeklinde yazabiliriz. $Nr = N$ olduğundan, $n_{h_{ij}} \in h(M)$ ve $n_{h_{i1}} + ... + n_{h_{it_i}} \in N$ olmak üzere, $x_{g_i} = (n_{h_{i1}} + ... + n_{h_{it_i}})r$ şeklinde yazabiliriz. Buna göre, $x_{g_i} = n_{h_{ij}}r$ ve $k \neq j$ için $n_{h_{ik}}r = 0$ olacak şekilde bir j $(1 \leq j \leq t_i)$ vardır.

M burkulmasız olduğundan, $k \neq j$ için $n_{h_{ik}} = 0$'dır. Böylece $n_{h_{ij}} \in h(N)$ ve dolayısıyla her i $(1 \leq i \leq t)$ için $x_{g_i} \in N^*r$'dir. Bu da $N^*r = N^*$ olduğunu gösterir. Buna göre N^*, M'nin gr-eşasal bir altmodülüdür. ∎

Önerme 5.1.4 *M aşamalı bir sağ R-modül, A, R'nin aşamalı bir ideali ve $MA = (0)$ olsun. O zaman, M gr-eşasal R-modüldür ancak ve ancak M gr-eşasal (R/A)-modüldür.*

İspat. M gr-eşasal R-modül olsun. O zaman, $M \neq (0)$'dır. B/A R/A'nın aşamalı bir ideali olsun. O zaman, $B = A + (\oplus_{g \in G}(B \cap R_g))$ olur. Buna göre B, R'nin aşamalı bir idealidir. Ayrıca, $M(B/A) = MB$'dir. Buna göre, $M(B/A) = (0)$ veya $M(B/A) = M$ olur. Bu da M'nin gr-eşasal (R/A)-modül olduğunu gösterir.

Tersine M'nin gr-eşasal (R/A)-modül olduğunu kabul edelim. O zaman, $M \neq (0)$'dır. C, R'nin aşamalı bir ideali olsun. O zaman $(C+A)/A$, R/A halkasının aşamalı bir idealidir. $MC = M(C+A) = M((C+A)/A)$ olduğundan, $MC = M$ veya $MC = (0)$ olur. Buna göre, M gr-eşasal bir R-modüldür. ∎

R asal bir sağ Goldie halka olsun. O zaman, Önerme 1.10.28'den dolayı R'nin her esas sağ ideali regüler bir eleman kapsar. 2000 yılında, Goodearl ve Stafford bu önermenin aşamalı versiyonunu kanıtlamışlardır.

Teorem 5.1.5 *(Goodearl ve Stafford, 2000) G bir Abel grubu ve R G-aşamalı, gr-asal, sağ gr-Goldie bir halka olsun. O zaman, R'nin her esas aşamalı sağ ideali homojen bir regüler eleman kapsar.*

Tanım 5.1.6 *(Năstăsescu ve Oystaeyen 1983) M aşamalı bir sağ R-modül olsun. R'nin her c homojen regüler elemanı için $M = Mc$ oluyorsa, M'ye aşamalı bölünebilir (ya da kısaca gr-bölünebilir) modül denir.*

Her bölünebilir aşamalı modülün gr-bölünebilir olduğu açıktır. Ancak aşağıdaki örnek gösterir ki; her gr-bölünebilir modül bölünebilir modül değildir.

Örnek 5.1.7 *k bir cisim olmak üzere, $R = k[x, x^{-1}]$ Laurent polinomlar halkasını göz önüne alalım. R_R modülü gr-bölünebilirdir fakat bölünebilir değildir.*

Teorem 5.1.8 *G bir Abel grubu ve R G-aşamalı bir halka olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(1) R, gr-asal sağ ya da sol gr-Goldie bir halka ise, sıfırdan farklı her gr-bölünebilir sağ R-modül (0)-gr-eşasaldır.

(2) R sol aşamalı tümden sınırlı bir halka, R'nin her P gr-asal ideali için R/P sol gr-Goldie bir halka ve M aşamalı bir sağ R-modül olsun. O zaman, M gr-eşasal R-modüldür ancak ve ancak $Q = ann_R(M)$, R'nin gr-asal bir idealidir ve M gr-bölünebilir bir sağ (R/Q)-modüldür.

İspat. (1) X sıfırdan farklı bir gr-bölünebilir sağ R-modül ve $A = ann_R(X)$ olsun. $A \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. O zaman A, R'nin gr-esas sağ ve sol idealidir. Önerme

1.15.19'a göre A, R'nin sağ ve sol esas idealidir. Teorem 5.1.5'den dolayı A, homojen regüler bir eleman kapsar. Bu eleman c olsun. Bu durumda, $X = Xc \subseteq XA = (0)$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $A = (0)$ olmalıdır. B, R'nin sıfırdan farklı bir aşamalı ideali olsun. R gr-asal halka olduğundan B, R'nin esas sağ ve sol idealidir. Teorem 5.1.5'den dolayı, B homojen regüler bir eleman kapsar. Bu eleman d olsun. Bu durumda, $X = Xd \subseteq XB$ ve dolayısıyla $X = XB$ olur. Bu da X'in (0)-gr-eşasal bir R-modül olduğunu gösterir.

(2) M gr-eşasal bir R-modül ve $Q = ann_R(M)$ olsun. Q'nun, R'nin gr-asal bir ideali olduğunu Tanım 5.1.1'den hemen sonra belirtmiştik. $\overline{R} := R/Q$ olsun. Hipotezden dolayı, $\overline{R}$ sol gr-sınırlı, sol gr-Goldie halkadır. $\overline{c}$, $\overline{R}$'nin homojen regüler bir elemanı olsun. O zaman, $\overline{R}\overline{c}$ gr-esas sol ideali sıfırdan farklı bir aşamalı ideal kapsar. Bu ideal $\overline{A}$ olsun. $\overline{A} = A/Q$ olacak şekilde R'nin bir A aşamalı ideali vardır. Buna göre, $M = MA \subseteq M(Rc + Q) = Mc$ ve dolayısıyla $M = Mc$ olur. Bu da $M = M\overline{c}$ olmasını gerektirir. Böylece M gr-bölünebilir sağ $\overline{R}$-modüldür.

Tersine $Q = ann_R(M)$, R'nin bir gr-asal ideali ve M gr-bölünebilir bir sağ (R/Q)-modül olsun. Önerme 5.1.4 ve (1)'den dolayı, M gr-eşasal R-modüldür. ∎

Önteorem 5.1.9 *R, gr-asal idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan aşamalı bir halka ve M sıfırdan farklı bir aşamalı sağ R-modül olsun. R'nin her I aşamalı öz ideali için* $Q_1...Q_n \subseteq I \subseteq Q_1 \cap ... \cap Q_n$ *olacak şekilde* $Q_i(1 \leq i \leq n)$ *gr-asal ideallerinin bulunduğunu kabul edelim. O zaman,*

(i) *M gr-eşasal R-modüldür ancak ve ancak R'nin her P gr-asal ideali için* $MP = (0)$ *ya da* $MP = M$*'dir.*

(ii) *M'nin gr-eşasal bir bölüm modülü vardır.*

İspat. (i) Gereklilik kısmı açıktır. Tersine R'nin her P gr-asal ideali için $MP = (0)$ ya da $MP = M$ olduğunu kabul edelim. I, R'nin aşamalı bir öz ideali olsun. Hipotezden dolayı, $Q_1...Q_n \subseteq I \subseteq Q_1 \cap ... \cap Q_n$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $Q_i(1 \leq i \leq n)$ gr-asal idealleri vardır. $MQ_i = (0)$ olacak şekilde bir i $(1 \leq i \leq n)$ varsa, $MI = (0)$ olur. Diğer durumda her i $(1 \leq i \leq n)$ için $M = MQ_i$'dir. Buna göre,

$$M = MQ_n = MQ_{n-1}Q_n = ... = MQ_1...Q_n \subseteq MI \subseteq M$$

ve böylece $M = MI$ olur. O halde R'nin her I aşamalı ideali için $MI = (0)$ veya $MI = M$'dir. Buna göre M gr-eşasal R-modüldür.

(ii) Hipotezden dolayı $P_1...P_n \subseteq ann_R(M) \subseteq P_1 \cap ... \cap P_n$ olacak şekilde $P_i(1 \leq i \leq n)$ gr-asal idealleri vardır. Bu da $MP_1...P_n = (0)$ olmasını gerektirir. Her i $(1 \leq i \leq n)$ için $MP_i = M$ ise, $(0) = MP_1...P_n = ... = MP_n = M$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $M \neq MP_i$ olacak şekilde bir i $(1 \leq i \leq t)$ vardır. Hipotezden dolayı, $M \neq MQ$ olacak şekildeki gr-asal Q idealleri arasında maksimal olan bir P gr-asal ideali vardır. $M \neq MP$'dir. T, R'nin gr-asal bir ideali ve $P \subsetneq T$ olsun. P'nin seçiminden dolayı,

$M = MT$'dir. Böylece $M/MP = (M/MP)(T/P)$ olur. (1)'e göre, M/MP gr-eşasal (R/P)-modüldür. Önerme 5.1.4'den dolayı, M/MP gr-eşasal R-modüldür. ∎

R, aşamalı idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka ise Jianliang vd'nin (2002) makalesindeki Önerme 1.1'e göre, Önteorem 5.1.9'da R halkası üzerinde verilen koşullar sağlanır.

Tanım 5.1.10 *M sıfırdan farklı bir aşamalı R-modül olsun. M'nin her aşamalı öz altmodülü gr-atık ise M'ye aşamalı dar (ya da kısaca gr-dar) modül denir.*

Dar ve aşamalı bir modülün gr-dar olduğu açıktır. Ancak aşağıdaki örnek gr-dar bir modülün dar modül olmayabileceğini göstermektedir.

Örnek 5.1.11 *k bir cisim olmak üzere, $R = k[x]$ polinomlar halkasını göz önüne alalım. R'nin her aşamalı öz ideali $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, (x^n) şeklindedir. Buna göre R_R gr-dar modüldür ancak dar modül değildir.*

Teorem 5.1.12 *M gr-dar bir R-modül olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(1) *T_1 ve T_2, M'nin gr-eşasal bölüm modülleri ise $ann_R(T_1) = ann_R(T_2)$'dir.*

(2) *R, gr-asal idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan aşamalı bir halka olsun. R'nin her I aşamalı öz ideali için $Q_1...Q_n \subseteq I \subseteq Q_1 \cap ... \cap Q_n$ olacak şekilde $Q_i (1 \leq i \leq n)$ gr-asal ideallerinin bulunduğunu kabul edelim. O zaman, M'nin gr-eşasal bir bölüm modülü vardır ve M'nin her T gr-eşasal bölüm modülü için $ann_R(T) = P = \{\sum_{g \in G} r_g \in R : \forall g \in G, Mr_gR \neq M\}$ eşitliği sağlanır.*

İspat. (1) $T_1 \simeq M/N_1$ ve $T_2 \simeq M/N_2$ olacak şekilde, M'nin N_1 ve N_2 aşamalı öz altmodülleri vardır. $ann_R(T_1) = P_1$ ve $ann_R(T_2) = P_2$ olsun. M gr-dar olduğundan $N_1 + N_2$, M'nin bir aşamalı öz altmodülüdür. $M/(N_1 + N_2)$, hem M/N_1 modülünün hem de M/N_2 modülünün aşamalı bir homomorf görüntüsüdür. Buna göre, $ann_R(M/(N_1 + N_2)) = ann_R(M/N_1) = P_1$ ve $ann_R(M/(N_1 + N_2)) = ann_R(M/N_2) = P_2$ olur. Böylece $P_1 = P_2$ elde edilir.

(2) Önteorem 5.1.9'dan dolayı M'nin gr-eşasal bir bölüm modülü vardır. T, M'nin gr-Q-eşasal bir bölüm modülü olsun. $T \simeq M/N$ olacak şekilde, M'nin bir N aşamalı öz altmodülü vardır. $Q = P$ olduğunu göstereceğiz. $x = \sum_{g \in G} x_g \in Q$ olsun. Q aşamalı ideal olduğundan, her $g \in G$ için $x_g \in Q$'dur. Buna göre, her $g \in G$ için $Mx_gR \subseteq N \neq M$ olur. Bu da $x \in P$ olduğunu gösterir. Tersine $x = \sum_{g \in G} x_g \in P$ ise, her $g \in G$ için $Mx_gR \neq M$'dir. M gr-dar olduğundan, her $g \in G$ için, $Mx_gR + N \neq M$ olur. M/N gr-Q-eşasal olduğundan, $ann_R(M/N) = ann_R(M/(Mx_gR + N)) = Q$'dur. Böylece her $g \in G$ için $x_g \in Q$ olur. Bu da $x \in Q$ ve dolayısıyla $Q = P$ olduğunu gösterir. ∎

M sıfırdan farklı bir aşamalı R-modül ve L, M'nin aşamalı bir altmodülü olsun. L, M'nin gr-eşasal altmodülü ise ve L'yi kesin olarak kapsayan başka bir gr-eşasal altmodül yoksa L'ye, M'nin bir maksimal gr-eşasal altmodülü denir. $(N_i)_{i \in I}$, M'nin gr-eşasal altmodüllerinin bir zinciri olsun. Önerme 3.1.23'deki aşamasız halka durumunda yapılan kanıttaki yöntemler kullanılarak, $\cup_{i \in I} N_i$'nin M'nin gr-eşasal bir altmodülü olduğu gösterilebilir. Bu sonuç ve Zorn Önteoremi kullanılarak, M'nin her gr-eşasal altmodülünün M'nin bir maksimal gr-eşasal altmodülü içinde kapsandığı görülür.

Teorem 5.1.13 *Sıfırdan farklı her gr-Artin R-modül sonlu sayıda maksimal gr-eşasal altmodül kapsar.*

İspat. M sıfırdan farklı bir gr-Artin R-modül olsun. M'nin sonlu sayıda maksimal gr-eşasal altmodül kapsamadığını kabul edelim. M'nin her U gr-basit altmodülü gr-eşasal bir altmodüldür ve dolayısıyla U, maksimal bir gr-eşasal altmodül içinde kapsanır.

$\Psi = \{(0) \neq N \leq M :$ N aşamalı altmodül ve N sonlu sayıda maksimal gr-eşasal altmodül kapsamaz$\}$ kümesini göz önüne alalım. $M \in \Psi$ ve dolayısıyla $\Psi \neq \varnothing$'dir. Buna göre Ψ'nin bir N minimal elemanı vardır. N'nin gr-eşasal altmodül olmadığı açıktır. Bu yüzden, $NA \neq (0)$ ve $NA \neq N$ olacak şekilde R'nin bir A aşamalı ideali vardır. $L = (0 :_N A)$ olsun. L, N'nin aşamalı bir altmodülüdür. Ayrıca L, N'nin $LA = (0)$ olacak şekilde bir altmodülüdür ve dolayısıyla $L \neq N$'dir. $L \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. N'nin seçiminden dolayı, L sonlu sayıda maksimal gr-eşasal altmodül kapsar. n bir pozitif tamsayı olmak üzere $\{L_1, ..., L_n\}$, L'nin tüm maksimal gr-eşasal altmodüllerinin kümesi olsun. Yine N'nin seçiminden dolayı NA, sonlu sayıda maksimal gr-eşasal altmodül kapsar. t bir pozitif tamsayı olmak üzere $\{K_1, ..., K_t\}$, NA'nın tüm maksimal gr-eşasal altmodüllerinin kümesi olsun. H, N'nin bir maksimal gr-eşasal altmodülü olsun. O zaman, $HA = (0)$ veya $HA = H$'dır. $HA = (0)$ ise $H \subseteq L$'dir ve böylece $H \subseteq L_i$ olacak şekilde bir i $(1 \leq i \leq n)$ vardır. Buna göre $H = L_i$ olur. Diğer taraftan $H = HA$ ise, $H \subseteq NA$'dır ve böylece $H \subseteq K_j$ olacak şekilde bir j $(1 \leq j \leq t)$ vardır. Bu durumda $H = K_j$ olur. Buna göre N'nin her maksimal gr-eşasal altmodülü $\{L_1, ..., L_n, K_1, ..., K_t\}$ kümesine aittir. Böylece N en fazla $n + t$ tane maksimal gr-eşasal altmodüle sahip olur ki bu bir çelişkidir. $L = (0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $H = K_j$ olacak şekilde bir j $(1 \leq j \leq t)$ vardır ve bu da N'nin sonlu sayıda maksimal gr-eşasal altmodüle sahip olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. ∎

5.2. Aşamalı Eşasalımsı Altmodüller

Bu kısımda, gr-eşasal modüllerin bir genellemesi olan gr-eşasalımsı modüller tanımlanacak ve bu modül sınıfının bazı özellikleri araştırılacaktır.

Tanım 5.2.1 *P, R'nin bir gr-asal ideali ve M sıfırdan farklı bir aşamalı sağ R-modül olsun. M'nin her N aşamalı öz altmodülü için,*

$$P^n \subseteq ann_R(M) \subseteq (N :_R M) \subseteq P$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa M'ye aşamalı P-eşasalımsı (ya da kısaca gr-P-eşasalımsı) modül denir. R'nin bir P gr-asal ideali için, M gr-P-eşasalımsı ise, M'ye gr-eşasalımsı modül denir.

$M_1, ..., M_n$ birer gr-eşasalımsı modül olmak üzere eğer $M = M_1 + ... + M_n$ ise, M'ye gr-eşasalımsı ayrışıma sahiptir denir. M'nin bu şekildeki bir gösterimi için her bir $M_i (1 \leq i \leq n)$ gr-P_i-eşasalımsı olmak üzere eğer,

(i) $P_1, ..., P_n$ gr-asal idealleri birbirinden farklı ve

(ii) Her i $(1 \leq i \leq n)$ için $M \neq M_1 + ... + M_{i-1} + M_{i+1} + ... + M_n$ ise o zaman M normal bir gr-eşalımsı ayrışıma sahiptir denir.

Gr-eşasal bir modülün gr-eşasalımsı olduğu açıktır.

Gr-eşasalımsı bir modülün her aşamalı bölüm modülünün de gr-eşasalımsı olduğu tanımlar kullanılarak gösterilebilir.

Önteorem 5.2.2 *P, R'nin bir gr-asal ideali ve M sıfırdan farklı bir aşamalı sağ R-modül olsun. O zaman, M gr-P-eşasalımsıdır ancak ve ancak R'nin her A aşamalı öz ideali için $A \nsubseteq P$ ise $MA = M$'dir, $A \subseteq P$ ise $MA^h = (0)$ olacak şekilde bir $h \in \mathbb{Z}^+$ vardır.*

İspat. Gr-eşasalımsı modül tanımından açıktır. ∎

Gr-eşasalımsı modül tanımı kullanılarak gösterilebilir ki; R aşamalı halkasının bir P gr-asal ideali için herhangi iki gr-P-eşasalımsı modülün toplamı yine gr-P-eşasalımsıdır. Buna göre, M aşamalı modülü gr-eşasalımsı bir ayrışıma sahip ise, M normal bir gr-eşalımsı ayrışıma sahiptir.

Tanım 5.2.3 *M aşamalı bir R-modül ve N, M'nin aşamalı bir altmodülü olsun. R'nin her I aşamalı ideali için $NI = MI \cap N$ oluyorsa, N'ye aşamalı pür altmodül denir.*

Önerme 5.2.4 *P, R'nin bir gr-asal ideali, M aşamalı bir R-modül ve N, M'nin sıfırdan farklı bir aşamalı pür öz altmodülü olsun. O zaman, M gr-P-eşasalımsı modüldür ancak ve ancak N ve M/N gr-P-eşasalımsı modüllerdir.*

İspat. M gr-P-eşasalımsı modül olsun. O zaman, $P^h \subseteq ann_R(M)$ olacak şekilde bir $h \in \mathbb{Z}^+$ vardır. A, R'nin aşamalı bir ideali olsun. $A \subseteq P$ ise, $NA^h = (0)$'dır. $A \nsubseteq P$ ise, $NA = MA \cap N = M \cap N = N$ olur. Böylece N gr-P-eşasalımsı modüldür. M gr-P-eşasalımsı olduğundan, M'nin sıfırdan farklı aşamalı bölüm modülü M/N de gr-P-eşasalımsı modüldür.

Tersine N ve M/N gr-P-eşasalımsı modüller olsun. O zaman, $P^{h_1} \subseteq ann_R(N)$ ve $P^{h_2} \subseteq ann_R(M/N)$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $h = max\{h_1, h_2\}$ olsun. O zaman, $MP^h \subseteq N$ ve $(0) = NP^h = MP^h \cap N = MP^h$ olur. A, R'nin aşamalı bir ideali olsun. $A \subseteq P$ ise, $MA^h = (0)$'dır. $A \nsubseteq P$ ise, $NA = N$ ve $MA + N = M$ olur. Buradan, $MA + NA = MA + N = M = MA + (MA \cap N) = MA$ olur. Bu da M'nin gr-P-eşasalımsı bir modül olduğunu gösterir. ∎

Tanım 5.2.5 *(Jianliang vd 2002) M sıfırdan farklı aşamalı bir sağ R-modül olsun. M'nin sıfırdan farklı her N aşamalı altmodülü için $ann_R(N) = ann_R(M)$ ise M'ye aşamalı asal (ya da kısaca gr-asal) modül denir.*

K, M'nin aşamalı bir altmodülü ve M/K gr-asal bir modül ise, K'ye M'nin aşamalı asal (ya da kısaca gr-asal) bir altmodülü denir. Bu tanımlar kullanılarak gösterilebi-

lir ki; K, M'nin gr-asal bir altmodülü ise, $P = ann_R(M/K)$, R'nin gr-asal bir idealidir. Bu durumda K'ye, M'nin gr-P-asal altmodülü denir.

Aşamalı asal altmodüller ile ilgili daha fazla bilgi Jianliang vd'nin (2002), Atani'nin (2006) ve Oral vd'nin (2011) makalelerinde bulunabilir.

Teorem 5.2.6 *$R = \oplus_{g\in G} R_g$ aşamalı halkasının her a homojen elemanı için aR aşamalı sağ idealinin, merkezil bir homojen eleman tarafından üretildiğini kabul edelim. $M = \oplus_{g\in G} M_g$ aşamalı bir sağ R-modül olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(1) *M gr-eşasalımsı bir R-modül ve N, M'nin sıfırdan farklı bir gr-P-asal altmodülü ise N gr-P-eşasalımsıdır.*

(2) *N, M'nin gr-P-eşasalımsı bir altmodülü ve K, M'nin gr-asal bir altmodülü ise o zaman $N \cap K$ gr-P-eşasalımsı modüldür.*

(3) *M gr-eşasalımsı ayrışıma sahip bir modül ve N, M'nin gr-asal bir altmodülü ise N gr-eşasalımsı ayrışıma sahiptir.*

İspat. (1) M gr-Q-eşasalımsı bir modül olsun. O zaman, $ann_R(M/N) = P \subseteq Q$'dur ve $Q^h \subseteq ann_R(M) \subseteq P$ olacak şekilde bir $h \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buna göre, $Q = P$ olur.

$P^h \subseteq ann_R(M) \subseteq ann_R(N)$ olacak şekilde bir $h \in \mathbb{Z}^+$ vardır. A, R'nin aşamalı bir ideali olsun. $A \subseteq P$ ise $NA^h = (0)$'dır. $A \nsubseteq P$ olsun. $a \in A\backslash P$ olacak şekilde bir $a \in h(R)$ vardır. Hipotezden dolayı, $aR = bR = Rb$ olacak şekilde bir $b \in h(R) \cap Z(R)$ vardır. Buna göre $M = M(RaR) = Mb$ olur. $n \in N$ olsun. $n = mb$ olacak şekilde bir $m = \sum_{i=1}^{t} m_{g_i} \in M$ $(0 \neq m_{g_i} \in M_{g_i})$ vardır. N aşamalı altmodül olduğundan, her $1 \leq i \leq t$ için $m_{g_i} b \in N$'dir. $i \in \{1, ..., t\}$ olsun. $m_{g_i} bR = m_{g_i} Rb \subseteq N$ ve dolayısıyla $b \in ann_R((N + m_{g_i} R)/N)$'dir. $N + m_{g_i} R \neq N$ ise, $ann_R((N + m_{g_i} R)/N) = P$ ve dolayısıyla $b \in P$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $N + m_{g_i} R = N$ yani $m_{g_i} \in N$ olmalıdır. Bu da $n \in Nb \subseteq N(RaR) \subseteq NA$ olduğunu gösterir. Böylece $N = NA$ olur. Bu da N'nin gr-P-eşasalımsı modül olduğunu gösterir.

(2) Gr-asal altmodül tanımı kullanılarak gösterilebilir ki; $N \cap K$, N'nin gr-asal bir altmodülüdür. (1)'den dolayı $N \cap K$ gr-P-eşasalımsıdır.

(3) her bir S_i gr-P_i-eşasalımsı modül olmak üzere $M = \sum_{i=1}^{k} S_i$, M'nin normal bir gr-eşasalımsı ayrışımı olsun. N, M'nin gr-P-asal bir altmodülü olsun. O zaman, $S_i \nsubseteq N$ olacak şekilde bir i $(1 \leq i \leq k)$ vardır. Genelliği kaybetmeden $S_1 \nsubseteq N$ olduğunu kabul edebiliriz. $P = P_1$ olduğunu göstereceğiz. $y_h \in S_1\backslash N$ olacak şekilde bir $y_h \in h(M)$ vardır. $P_1^{n_1} \subseteq ann_R(S_1)$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $y_h P_1^{n_1} = (0) \subseteq N$ ve N gr-P-asal olduğundan $P_1 \subseteq P$ olur. $c \in P\backslash P_1$ olacak şekilde bir c homojen elemanı bulunduğunu kabul edelim. $RcR \nsubseteq P_1$ ve S_1 gr-P_1-eşasalımsı olduğundan, $S_1 = S_1(RcR) \subseteq M(RcR)$ $= M(cR) \subseteq N$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $P_1 = P$ olmalıdır. Benzer şekilde, $j \neq 1$ için $S_j \nsubseteq N$ ise, $P = P_1 = P_j$ olur ki bu da M'nin gr-eşasalımsı ayrışımının normal olması ile çelişir. O halde $2 \leq j \leq n$ için $S_j \subseteq N$'dir. Buna göre $N = N \cap (S_1 + \sum_{j=2}^{k} S_j) = \sum_{j=2}^{k} S_j + (N \cap S_1)$ olur. (2)'den dolayı $N \cap S_1$ gr-P_1-eşasalımsıdır. Böylece N gr-

eşasalımsı ayrışıma sahiptir. ∎

Sonuç 5.2.7 *R gr-abelyen düzenli bir halka ve M gr-eşasalımsı ayrışıma sahip olan aşamalı bir sağ R-modül olsun. O zaman, M'nin her gr-asal altmodülü gr-eşasalımsı bir ayrışıma sahiptir.*

İspat. R gr-abelyen düzenli bir halka olduğundan, Önerme 1.15.28'e göre, Teorem 5.2.6'daki koşullar sağlanır. Bu da sonucu kanıtlar. ∎

5.3. Aşamalı İnjektif Modüller İçin Aşamalı Sekonder Gösterimler

Bu kısımda, değişmeli aşamalı halkalar üzerindeki gr-injektif modüllerin gr-sekonder gösterimlerini araştıracağız.

Tanım 5.3.1 *(Refai ve Al-Zoubi 2004) R değişmeli aşamalı bir halka ve I, R'nin aşamalı bir ideali olsun. I'nın aşamalı radikali $Gr(I)$ ile gösterilir ve $Gr(I) = \{x = \sum_{g\in G} x_g \in R$: Her $g \in G$ için $x_g^{n_g} \in I$ olacak şekilde bir $n_g \in \mathbb{Z}^+$ var$\}$ olarak tanımlanır.*

Dikkat edilirse; $r \in h(R)$ olduğunda, $r \in Gr(I)$'dır ancak ve ancak $r^n \in I$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

Tanım 2.2.2'nin aşamalı versiyonu, Sharp (1986) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 5.3.2 *(Sharp 1986) R değişmeli aşamalı bir halka ve M sıfırdan farklı bir aşamalı bir R-modül olsun. Her $r \in h(R)$ için $f_r : M \longrightarrow M$, $f_r(m) = mr$ şeklinde tanımlı f_r endomorfizması örten veya üstel sıfır ise M'ye aşamalı sekonder (ya da kısaca gr-sekonder) modül denir.*

M gr-sekonder bir R-modül ise $Gr(ann_R(M)) = P$, R'nin gr-asal bir idealidir. Bu durumda M'ye gr-P-sekonder modül denir.

$S_1, ..., S_n$ birer gr-sekonder modül olmak üzere, eğer $M = S_1 + ... + S_n$ ise M'nin bu şekildeki yazılışına M'nin bir gr-sekonder gösterimi denir.

Değişmeli aşamalı bir halka üzerindeki her gr-eşasal modülün gr-sekonder olduğu açıktır.

Önerme 5.3.3 *R aşamalı bir tamlık bölgesi ve M sekonder gösterime sahip olan burkulmasız aşamalı bir R-modül olsun. O zaman, M gr-sekonder gösterime sahiptir.*

İspat. İlk olarak göstereceğiz ki; N_1 ve N_2, M'nin altmodülleri ise $(N_1+N_2)^* = N_1^*+N_2^*$ olur. $N_1^* + N_2^* \subseteq (N_1 + N_2)^*$ olduğu açıktır. $x \in h((N_1 + N_2)^*)$ olsun. $x = n_1 + n_2$ olacak şekilde $n_1 \in N_1$ ve $n_2 \in N_2$ vardır. x homojen bir eleman olduğundan n_1 ve n_2, x ile aynı dereceden homojen elemanlardır. Böylece $n_1 \in N_1^*$, $n_2 \in N_2^*$ ve dolayısıyla $x \in N_1^* + N_2^*$ olur.

$S_1, ..., S_k$ birer sekonder modül olmak üzere $M = S_1 + ... + S_k$, M'nin bir sekonder gösterimi olsun. O zaman, $M = S_1^* + ... + S_k^*$ olur. Teorem 5.1.3-(4)'ün ispatıyla aynı şekilde gösterilebilir ki; Her i $(1 \leq i \leq k)$ için $S_i^* = (0)$ veya S_i^*, M'nin gr-sekonder bir altmodülüdür. Bu da M'nin gr-sekonder bir gösterime sahip olduğunu gösterir. ∎

Tanım 5.3.4 *(Refai ve Al-Zoubi 2004) R değişmeli aşamalı bir halka ve I, R'nin aşamalı bir öz ideali olsun. $a, b \in h(R)$ için $ab \in I$ olması $a \in I$ veya $b \in Gr(I)$ olmasını gerektiriyorsa I'ya, R'nin aşamalı asalımsı (ya da kısaca gr-asalımsı) bir ideali denir.*

I, R'nin gr-asalımsı bir ideali ise $Gr(I) = P$, R'nin gr-asal bir idealidir. Bu durumda I'ya G-P-asalımsı ideal denir.

Eğer I aşamalı ideali, R'nin gr-asalımsı ideallerinin sonlu bir arakesiti olarak yazılabiliyorsa I'ya aşamalı asalımsı G-ayrışıma sahip bir ideal denir. $Q_1, ..., Q_n$ birer gr-asalımsı ideal ve $1 \leq i \leq n$ için $Gr(Q_i) = P_i$ olmak üzere $I = Q_1 \cap ... \cap Q_n$, I'nın bir aşamalı asalımsı G-ayrışımı olsun. Eğer,

(i) $P_1, ..., P_n$ aşamalı asal idealleri birbirinden farklı ve

(ii) her $j = 1, ..., n$ için $Q_j \not\supseteq \cap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} Q_i$

ise o zaman $I = Q_1 \cap ... \cap Q_n$ aşamalı asalımsı G-ayrışımına, I'nın bir minimal aşamalı asalımsı G-ayrışımı denir. I aşamalı ideali bir aşamalı asalımsı G-ayrışıma sahip ise I'ya R'nin G-ayrışabilir bir aşamalı ideali denir.

Tanımlar kullanılarak gösterilebilir ki; R'nin her G-ayrışabilir aşamalı ideali bir minimal aşamalı asalımsı G-ayrışıma sahiptir.

Teorem 5.3.5 *(Refai ve Al-Zoubi 2004) R değişmeli gr-Noether bir halka olsun. O zaman, R'nin her aşamalı öz ideali aşamalı asalımsı G-ayrışıma sahiptir.*

Aşağıdaki iki önteorem sırasıyla Sharp'ın (1976) makalesindeki Önteorem 2.1 ve Önteorem 2.2'nin aşamalı versiyonlarıdır. Bu önteoremler, bir M aşamalı modülünün σ-süspansiyonu $(\sigma)M$ kavramı kullanılarak kanıtlanmıştır.

Önteorem 5.3.6 *$R = \oplus_{g \in G} R_g$ değişmeli aşamalı bir halka, Q, R'nin gr-P-asalımsı bir ideali ve $E = \oplus_{g \in G} E_g$ gr-injektif bir R-modül olsun. O zaman $(0 :_E Q)$ modülü ya sıfırdır ya da E'nin gr-P-sekonder bir altmodülüdür.*

İspat. $(0 :_E Q) \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. $a \in h(R)$ olsun. $a \in R_\sigma$ olacak şekilde bir $\sigma \in G$ vardır.

$a \in P$ ise $a^n \in Q$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buna göre, $(0 :_E Q)a^n = (0)$ olur.

$a \notin P$ ise $(0 :_E Q) = (0 :_E Q)a$ olduğunu göstereceğiz. $x \in (0 :_E Q)$ derecesi δ olan bir homojen eleman olsun. $\phi : (\delta^{-1})(R/Q) \longrightarrow E$, $\phi(b + Q) = xb$ $(b + Q \in R/Q)$

dönüşümünü tanımlayalım. ϕ'nin bir R-modül homomorfizması olduğu açıktır. $\tau \in G$ için $b + Q \in (\delta^{-1})(R/Q)_\tau$ olsun. $b = b_{\delta^{-1}\tau} + q$ olacak şekilde $b_{\delta^{-1}\tau} \in R_{\delta^{-1}\tau}$ ve $q \in Q$ vardır. $xb = x(b_{\delta^{-1}\tau} + q) = xb_{\delta^{-1}\tau} \in E_\tau$ olur. Buna göre, ϕ aşamalı bir R-modül homomorfizmasıdır. $f_a : (\delta^{-1})\,(R/Q) \longrightarrow (\sigma\delta^{-1})\,(R/Q)$, $f_a(y+Q) = ya+Q$ $(y+Q \in R/Q)$ dönüşümünü tanımlayalım. f_a'nın bir R-modül homomorfizması olduğu açıktır. $\tau \in G$ için $y + Q \in (\delta^{-1})\,(R/Q)_\tau$ olsun. $y = y_{\delta^{-1}\tau} + q'$ olacak şekilde $y_{\delta^{-1}\tau} \in R_{\delta^{-1}\tau}$ ve $q' \in Q$ vardır. Buna göre, $ya+Q = (y_{\delta^{-1}\tau}+q')a+Q = ay_{\delta^{-1}\tau}+Q \in (\sigma\delta^{-1})\,(R/Q)_\tau$ olur. Böylece f_a bir aşamalı R-modül homomorfizmasıdır. $y = \Sigma_{i=1}^{m} y_{g_i}$, $(y_{g_i} \neq 0)$ olmak üzere, $y + Q \in$Ç$ek(f_a)$ olsun. O zaman, $ya = \Sigma_{i=1}^{m} y_{g_i}a \in Q$ olur. Q aşamalı ideal olduğundan, her i $(1 \leq i \leq m)$ için $y_{g_i}a \in Q$'dur. Q gr-P-asalımsı olduğundan her i $(1 \leq i \leq m)$ için $y_{g_i} \in Q$ ve dolayısıyla $y \in Q$ olur. Böylece f_a aşamalı bir R-monomorfizmasıdır. Buna göre aşağıdaki diyagramı elde ederiz.

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \phi\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\delta^{-1})\,(R/Q) & \xrightarrow{f_a} & (\sigma\delta^{-1})\,(R/Q) \end{array}$$

E gr-injektif modül olduğundan, bu diyagram bir $\psi : (\sigma\delta^{-1})\,(R/Q) \longrightarrow E$ aşamalı R-modül homomorfizması ile $\psi f_a = \phi$ olacak şekilde tamamlanabilir. Böylece $x = \phi(\overline{1})$ $= \psi f_a(\overline{1}) = \psi(\overline{1}a) = \psi(\overline{1})a$ eşitliği elde edilir. $\psi(\overline{1}) \in (0 :_E Q)$ olduğundan, $x \in (0 :_E Q)a$ olur. $(0 :_E Q)$ homojen elemanlar tarafından üretildiğinden, $(0 :_E Q) = (0 :_E Q)a$ eşitliği elde edilir. ∎

$I_1, ..., I_n$ R'nin idealleri ve M bir R-modül olsun. $\sum_{i=1}^{n}(0 :_M I_i) = (0 :_M \bigcap_{i=1}^{n} I_i)$ eşitliği her zaman doğru değildir. Ancak M injektif bir R-modül ise Önteorem 4.2.13'den dolayı bu eşitlik doğrudur. Şimdi, Önteorem 4.2.13'ün aşamalı versiyonunu inceleyeceğiz.

Önteorem 5.3.7 *$R = \oplus_{g\in G}R_g$ değişmeli aşamalı bir halka, $I_1, ..., I_n$ R'nin aşamalı idealleri ve $E = \oplus_{g\in G}E_g$ gr-injektif bir R-modül olsun. O zaman,*

$$\sum_{i=1}^{n}(0 :_E I_i) = (0 :_E \textstyle\bigcap_{i=1}^{n} I_i)$$

olur.

İspat. $x \in (0 :_E \cap_{i=1}^{n} I_i)$ derecesi σ olan bir homojen eleman olsun. $\pi : (\sigma^{-1})R \longrightarrow (\sigma^{-1})\,(R/\cap_{i=1}^{n} I_i)$ ve her bir $i = 1, ..., n$ için $\pi_i : (\sigma^{-1})R \longrightarrow (\sigma^{-1})\,(R/I_i)$ doğal aşamalı homomorfizmalar olsun. $f : (\sigma^{-1})\,(R/\cap_{i=1}^{n} I_i) \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n}(\sigma^{-1})\,(R/I_i)$, $f(\pi(a)) = (\pi_1(a), ..., \pi_n(a))$, $(a \in R)$ şeklinde tanımlı bir f R-monomorfizması vardır. $\tau \in G$ için $\pi(a) = a + \cap_{i=1}^{n} I_i \in (\sigma^{-1})\,(R/\cap_{i=1}^{n} I_i)_\tau$ ise, $a = r_{\sigma^{-1}\tau} + y$ olacak şekilde $r_{\sigma^{-1}\tau} \in R_{\sigma^{-1}\tau}$ ve $y \in \cap_{i=1}^{n} I_i$ vardır. Buna göre, $(\pi_1(a), ..., \pi_n(a)) = (r_{\sigma^{-1}\tau} + y + I_1, ..., r_{\sigma^{-1}\tau} + y + I_n) = (r_{\sigma^{-1}\tau} + I_1, ..., r_{\sigma^{-1}\tau} + I_n) \in \oplus_{i=1}^{n}(\sigma^{-1})\,(R/I_i)_\tau = (\oplus_{i=1}^{n}(\sigma^{-1})\,(R/I_i))_\tau$ olur. Böylece f aşamalı bir R-modül homomorfizmasıdır.

Ayrıca, $\varphi : (\sigma^{-1})\,(R/\cap_{i=1}^{n} I_i) \longrightarrow E$, $\varphi(\pi(a)) = xa$ $(a \in R)$ şeklinde tanımlı bir R-modül homomorfizması da vardır. $\tau \in G$ için $a + \cap_{i=1}^{n} I_i \in (\sigma^{-1})\,(R/\cap_{i=1}^{n} I_i)_\tau$

ise, $a = s_{\sigma^{-1}\tau} + z$ olacak şekilde $s_{\sigma^{-1}\tau} \in R_{\sigma^{-1}\tau}$ ve $z \in \cap_{i=1}^n I_i$ vardır. Buna göre, $xa = x(s_{\sigma^{-1}\tau} + z) = xs_{\sigma^{-1}\tau} \in E_\tau$ olur. Böylece φ aşamalı bir R-modül homomorfizmasıdır. E gr-injektif olduğundan,

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \varphi \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\sigma^{-1})\,(R/\cap_{i=1}^n I_i) & \xrightarrow{f} & \oplus_{i=1}^n(\sigma^{-1})\,(R/I_i) \end{array}$$

diyagramı bir $\psi : \oplus_{i=1}^n(\sigma^{-1})\,(R/I_i) \longrightarrow E$, aşamalı R-modül homomorfizması ile $\psi f = \varphi$ olacak şekilde tamamlanabilir. Buna göre, $x = \varphi(\pi(1)) = \psi f(\pi(1)) \in Gör(\psi)$'dır. Ayrıca, $Gör(\psi) \subseteq \Sigma_{i=1}^n(0 :_E I_i)$ olduğu açıktır. Bu sonuç $(0 :_E \cap_{i=1}^n I_i) \subseteq \Sigma_{i=1}^n(0 :_E I_i)$ olduğunu gösterir. Diğer kapsama her zaman sağlandığından $(0 :_E \cap_{i=1}^n I_i) = \Sigma_{i=1}^n(0 :_E I_i)$ eşitliği elde edilir. ∎

Teorem 5.3.8 *R, sıfır ideali aşamalı asalımsı G-ayrışıma sahip olan bir değişmeli aşamalı halka ve E gr-injektif bir R-modül olsun. O zaman, E gr-sekonder bir gösterime sahiptir.*

Daha açık olarak; $i = 1, ..., n$ için her bir Q_i aşamalı G-P_i-asalımsı ideal olmak üzere, $(0) = Q_1 \cap ... \cap Q_n$ sıfır idealin bir minimal aşamalı asalımsı G-ayrışımı ise,

$E = (0 :_E Q_1) + ... + (0 :_E Q_n)$ olur, burada $i = 1, ..., n$ için $(0 :_E Q_i)$ modülü ya sıfırdır ya da gr-P_i-sekonder modüldür.

İspat. Önteorem 5.3.7'ye göre, $E = (0 :_E 0) = (0 :_E \cap_{i=1}^n Q_i) = \sum_{i=1}^n (0 :_E Q_i)$ olur. Önteorem 5.3.6'dan dolayı $1 \leq i \leq n$ için $(0 :_E Q_i)$ ya sıfırdır ya da gr-P_i-sekonderdir. Böylece E gr-sekonder bir gösterime sahiptir. ∎

Sharp'ın (1976) makalesinde yer alan Teorem 2.3'de, değişmeli Noether bir halka üzerindeki her injektif modülün bir sekonder gösterime sahip olduğu kanıtlanmıştır. Aşağıdaki sonuç bu teoremin aşamalı versiyonudur.

Sonuç 5.3.9 *R değişmeli gr-Noether bir halka ve E gr-injektif bir R-modül olsun. O zaman, E bir gr-sekonder gösterime sahiptir.*

İspat. Teorem 5.3.5'e göre, R'nin sıfır ideali aşamalı asalımsı G-ayrışıma sahiptir. Teorem 5.3.8'den dolayı, E gr-sekonder bir gösterime sahiptir. ∎

6. KAYNAKLAR

ABUHLAIL, J. 2010. Zariski topologies for coprime and second submodules. *Algebra Colloquium*, baskıda.

ALKAN, M. and TIRAŞ, Y. 2006. Projective modules and prime submodules. *Czechoslovak Math. J.*, 56 (2): 601-611.

ALKAN, M. and TIRAŞ, Y. 2007. On prime submodules. *Rocky Mountain J. Math.*, 37 (3): 709-722.

ANDERSON, W and FULLER, K.R. 1992. Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.

ANNIN, S. 2002. Associated and attached primes over noncommutative rings. Ph.D. Thesis, University of California, 108 p.

ANNIN, S. 2008. Attached primes over noncommutative rings. *Journal of Pure and Applied Algebra,* 212 (3): 510-521.

ANSARI-TOROGHY, H. and FARSHADIFAR, F. 2007. The dual notion of multiplication modules. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11 (4): 1189-1201.

ANSARI-TOROGHY, H. and FARSHADIFAR, F. 2008. Comultiplication modules and related results. *Honam Mathematical J.*, 30 (1): 91-99.

ANSARI-TOROGHY, H. and FARSHADIFAR, F. 2011. The dual notions of some generalizations of prime submodules. *Communications in Algebra*, 39 (7): 2396-2416.

ANSARI-TOROGHY, H. and FARSHADIFAR, F. 2012a. On the dual notion of prime submodules. *Algebra Colloq.*, 19 (1): 1109-1116.

ANSARI-TOROGHY, H. and FARSHADIFAR, F. 2012b. On the dual notion of prime submodules II. *Mediterr. J. Math.*, 9 (2): 327-336.

ANSARI-TOROGHY, H. and FARSHADIFAR, F. 2012c. On graded second modules. *Tamkang Journal of Mathematics*, 43 (4): 499-505.

ANSARI-TOROGHY, H. and FARSHADIFAR, F. 2013. On the dual notion of prime radicals of submodules. *Asian-European J. Math*, 6 (2): 136-146.

ATANI, S.E. 2001. On secondary modules over Dedekind domains. *Southeast Asian Bull. Math.,* 25 (1): 1-6.

ATANI, S.E. 2002. Submodules of secondary modules. *Int. J. Math. Math. Sci.,* 31 (6): 321-327.

ATANI, S.E. 2006. On graded prime submodules. *Chiang Mai J. Sci.,* 33 (1): 3-7.

AZIZI, A. 2007. Radical formula and prime submodules. *J. Algebra*, 307 (1): 454-460.

BEHBOODI, M. 2009. On the prime radical and Baer's lower nilradical of modules. *Acta Math. Hungar.*, 122 (3): 293-306.

BROWN, K.A. and GOODEARL, K.R. 2002. Lectures On Algebraic Quantum Groups. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona.

CLARK, J., LOMP, C., VANAJA, N. and WISBAUER, R. 2006. Lifting Modules. Basel: Birkhäuser Verlag.

ÇEKEN, S. and ALKAN, M. 2011a. Dual of Zariski topology for modules. *Book Series: AIP Conference Proceedings*, 1389 (1): 357-360.

ÇEKEN, S. and ALKAN, M. 2011b. On radical formula over free modules with two generators. *Book Series: AIP Conference Proceedings*, 1389 (1): 333-336.

ÇEKEN S., ALKAN, M. and SMITH, P.F. 2013a. Second modules over noncommutative rings. *Communications in Algebra*, 41 (1): 83-98.

ÇEKEN S., ALKAN, M. and SMITH, P.F. 2013b. The dual notion of the prime radical of a module. *Journal of Algebra*, 392: 255-265.

ÇEKEN, S. and ALKAN, M. 2013a. On prime submodules and primary decompositions in two-generated free modules. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 17 (1): 133-142.

ÇEKEN, S. and ALKAN, M. 2013b. On graded second and coprimary modules and graded secondary representations. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, baskıda.

ÇEKEN, S. and ALKAN, M. 2014. On second submodules. *American Mathematical Society Contemporary Mathematics Series,* baskıda.

DAUNS, J. 1978. Prime modules. *J. Reine Angew. Math.,* 298: 156-181.

FAITH, C. 1995. Rings whose modules have maksimal submodules, *Publicacions Matematiques*, 39: 201-214.

FELLER, E.H. and SWOKOWSKI, E.W. 1965. Prime modules. *Canad. J. Math.* 17: 1041-1052.

GOLDIE, A.W. 1958. The structure of prime rings under ascending chain conditions. *Proc. London Math. Soc.,* 3 (8): 589-608.

GOLDIE, A.W. 1960. Semiprime rings with maximum condition. *Proc. London Math. Soc.,* 3 (10): 201-220.

GOODEARL, K.R. and WARFIELD, R.B. 2004. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. London Math. Soc. Student Texts 16, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

GOODEARL, K.R. and STAFFORD, J.T. 2000. The graded version of Goldie's theorem. Algebra and Its Applications, Contemp. Math., Athens, OH, 1999, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 259: 237-240.

JIANLIANG, T., ZHONG., Y. and FUCHANG, C. 2002. Injectivity and graded injectivity. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics,* 26 (4): 685-691.

KARAKAŞ, H.I. 1972. On Noetherian modules. *METU J. Pure Appl. Sci.,* 5:165-168.

KASCH, F. 1981. Modules and Rings. Academic Press Inc. London.

LAM, T.Y. 1991. A First Course in Noncommutative Rings. Springer-Verlag, New York.

LAM, T.Y. 1999. Lectures On Modules and Rings. Springer-Verlag, New York.

LEUNG, K.H. and MAN, S.H. 1997. On commutative Noetherian rings which satisfy the radical formula. *Glasgow Math. J.*, 39 (3): 285-293.

LU, C-P. 1984. Prime submodules of modules. *Comment. Math. Univ. St. Paul*, 33 (1): 61-69.

LU, C-P. 1989. M-radicals of submodules in modules. *Mathematica Japonica*, 34 (2): 211-219.

LU, C-P. 1990. M-radicals of submodules in modules II. *Mathematica Japonica*, 35 (5): 991-1001.

LU, C-P. 1995. Spectra of modules. *Communications in Algebra,* 23 (10): 3741-3752.

LU, C-P. 1997. Unions of prime submodules. *Houston J. Math.,* 23 (2): 203-213.

MAANI-SHIRAZI, M. and SMITH, P.F. 2007. Uniqueness of coprimary decompositions. *Turk. J. Math.,* 31 (1): 53-64.

MACDONALD, I.G. 1973. Secondary representation of modules over a commutative ring. *Symposia Mathematica,* 11: 23-43.

MAN, S.H. 1999. On commutative rings which satisfy the generalized radical formula. *Comm. Algebra,* 27 (8): 4075-4088.

MAN, S.H. and SMITH, P.F. 2002. On chain of prime submodules. *Israel J. Math.,* 127: 131-155.

MATSUMARA, H. 1986. Commutative Ring Theory. Cambridge University Press, Cambridge.

MCCASLAND, R.L. and MOORE, M.E. 1986. On radicals of submodules of finitely generated modules. *Canad. Math. Bull.,* 29 (1): 37-39.

MCCASLAND, R.L. and MOORE, M.E. 1991. On radicals of submodules. *Comm. Algebra,* 19 (5): 1327-1341.

MCCASLAND, R.L. and SMITH., P.F. 1993. Prime submodules of Noetherian modules. *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 23 (3): 1041-1062.

MCCONNELL, J.C. and ROBSON, J.C. 1987. Noncommutative Noetherian Rings. Wiley-Interscience, Chichester.

NASTASESCU, C. and OYSTAEYEN, V.F. 1983. Graded Ring Theory. Mathematical Library 38, North Holand, Amsterdam.

NASTASESCU, C. and OYSTAEYEN, V.F. 2004. Methods of Graded Rings. LNM 1836. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

NICHOLSON, W.K. and YOUSIF, M.F. 2003. Quasi-Frobenius Rings. Cambridge Tracts in Mathematics. Vol. 158. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

ORAL, K.H., TEKİR, Ü. and AĞARGÜN, A.G. 2011. On graded prime and primary submodules. *Turk. J. Math.* 35 (2): 159-167.

ORE, O. 1931. Linear equations in noncommutative fields. *Ann. Math*., 32: 463-477.

PUSAT-YILMAZ, D. and SMITH, P.F. 2002. Modules which satisfy the radical formula. *Acta Math. Hungar*. 95 (1-2): 155-167.

REFAI, M. and AL-ZOUBI, K. 2004. On graded primary ideals. *Turk. J. Math.* 28 (3): 217-229.

SARAÇ, B. and TIRAŞ, Y. 2013. On modules which satisfy the radical formula. *Turk. J. Math.*, 37 (2): 195-201.

SHARIF, H., SHARIFI, Y. and NAMAZI, S. 1996. Rings satisfying the radical formula. *Acta Math. Hungar*., 71: 103-108.

SHARP, R.Y. 1976. Secondary representations for injective modules over commutative noetherian rings. *Proc. Edinburgh Math. Soc.,* 20 (2): 143-151.

SHARP, R.Y. 1986. Asymptotic behavior of certain sets of attached prime ideals. *J. London Math. Soc.,* 34 (2): 212-218.

SHARPE, D.W. and VAMOS, P. 1972. Injective Modules. Cambridge University Press, London.

SMITH, P.F. 1981. Injective modules and prime ideals. *Communications in Algebra*, 9 (9): 989-999.

SMITH, P.F. 2004. Radical submodules and uniform dimension of modules. *Turk J. Math.,* 28 (3): 255-270.

SMITH, P.F. 2011. Modules with coindependent maksimal submodules. *Journal of Algebra and Its Applications*, 10 (1): 73-99.

TUGANBAEV, A.A. 2002. Rings Close to Regular. Mathematics and its Applications, 545. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

TUGANBAEV, A.A. 2003. Multiplication modules over noncommutative rings. *Sb. Math., 194 (11-12)*: 1837-1864.

YASSEMI, S. 2001. The dual notion of prime submodules. *Archivum Mathematicum,* 37 (4): 273-278.

ZÖSCHINGER, H. 1990. Moduln mit Koprimarzerlegung. *Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl., S. B.* 2: 5-25.

ÖZGEÇMİŞ

Seçil Çeken, 1983 yılında Hatay'da doğdu. İlk öğrenimini Hatay'da, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2003 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında mezun oldu. 2007 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Yüksek lisans öğrenimini 2009 yılında tamamlayarak aynı yıl Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora öğrenimine başladı. Halen aynı birimde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.