T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİT KUATERNİYON MATRİSLERİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİT KUATERNİYON MATRİSLERİ

Melek ERDOĞDU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİT KUATERNİYON MATRİSLERİ

Melek ERDOĞDU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 06/01/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Doç. Dr. Mustafa ALKAN

ÖZET

SPLİT KUATERNİYON MATRİSLERİ

Melek ERDOĞDU

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç.Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Ocak 2015, 97 sayfa

Bu çalışmada elemanları split kuaterniyon olan matrisler incelenmiştir. Öncelikle split kuaterniyon matrisleri tanıtılmış ve bir split kuaterniyon matrisin kompleks adjoint matrisi tanımlanmıştır. Ayrıca, split kuaterniyon matrislerin öz değerlerine ilişkin elde ettiğimiz yeni gelişmeler sunulmuştur. Daha önce tanımlanmamış olan, kompleks split kuaterniyonlar tanıtılıp, kompleks split kuaterniyonlar üzerindeki temel işlemler incelenmiştir. Bununla birlikte, elemanları kompleks split kuaterniyonlar olan matrisler ele alınarak özellikleri sunulmuştur. Son olarak ise, dual split kuaterniyon matrislerinin ana özellikleri incelendikten sonra, dual split kuaterniyon matrislerinin özdeğerlerine ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Split kuaterniyonlar, Split kuaterniyon matrisleri, Kompleks split kuaterniyonlar, Dual split kuaterniyonlar.

JÜRİ: Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Doç. Dr. Mustafa ALKAN

ABSTRACT

SPLIT QUATERNION MATRICES

Melek ERDOĞDU

PhD Thesis in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Ocak 2015, 97 pages

In this study, matrices with split quaternion entries are investigated. Firstly, split quaternion matrices are introduced and complex adjoint matrix of a split quaternion matrix is defined. Moreover, new results about eigenvalues of split quaternion matrices are given. Furthermore, the algebra of complex split quaternions, which has not been defined before, is introduced and fundamental computations of complex split quaternions are investigated. Then, the matrices with complex split quaternions and their properties are discussed. Finally, dual split quaternion matrices are studied and some results about eigenvalues of dual split quaternion matrices are given.

KEYWORDS: Split quaternions, Split quaternion matrices, Complex split quaternions, Dual split quaternions.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Supervisor)

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Assoc. Prof. Dr. Mustafa ALKAN

ÖNSÖZ

Tezimin hazırlanması sırasında, her türlü yardım ve fedakarlığı sağlayan, bilgi, tecrübe ve güler yüzü ile çalışmama ışık tutan, ayrıca bana bu çalışma konusunu vererek kendimi geliştirmeye yönelik adımlar atmamı sağlayan, çalışmamın yöneticisi Sayın Doç. Dr. Mustafa Özdemir' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, lisans üstü eğitimim boyunca, maddi ve manevi desteklerinden dolayı Türk Eğitim Vakfı'na teşekkürü bir borç bilirim.

Bu çalışmamı, ömrüm boyunca beni cesaretlendiren, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme ithaf ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

ÖNSÖZ iii

İÇİNDEKİLER iv

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ v

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 4

2.1. Bilineer Form 4

2.2. Kuadratik Form 6

2.3. Clifford Cebiri 7

2.4. Bazı Önemli Clifford Cebirleri 11

3. SPLİT KUATERNİYONLAR VE MATRİSLERİ 15

3.1. Split Kuaterniyonlar 15

3.1.1 Split kuaterniyonlar üzerindeki işlemler 15

3.1.2. Split kuaterniyonların reel matris temsilleri 18

3.1.3. Minkowski 3-uzayındaki dönme dönüşümlerinin birim timelike split kuaterniyonlarla ifade edilmesi 23

3.2. Split Kuaterniyon Matrisleri 30

3.2.1. Split kuaterniyon matrisleri üzerinde temel işlemler 30

3.2.2. Split kuaterniyon matrislerinin özellikleri 31

3.2.3. Split kuaterniyon matrislerinin kompleks adjoint matrisi 35

3.2.4. Split kuaterniyon matrislerinin özdeğerleri 37

3.2.5. Split kuaterniyon matrislerinin tersinin bulunması 44

4. KOMPLEKS SPLİT KUATERNİYONLAR VE MATRİSLERİ 46

4.1. Kompleks Split Kuaterniyonlar 46

4.1.1. Kompleks split kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler 46
4.1.2. Kompleks split kuaterniyonların temel özellikleri 47
4.1.3. Kompleks split kuaterniyonların reel matris temsilleri 49
4.2. Kompleks Split Kuaterniyon Matrisleri 59
4.2.1. Kompleks split kuaterniyon matrisleri üzerinde temel işlemler 59
4.2.2. Kompleks split kuaterniyon matrislerinin özellikleri 60
4.2.3. Kompleks split kuaterniyon matrisinin kompleks adjoint matrisi 64
4.2.4. Kompleks split kuaterniyon matrislerinin özdeğerleri 69
4.2.5. Kompleks split kuaterniyon matrislerinin tersinin bulunması ... 72
5. DUAL SPLİT KUATERNİYONLAR VE MATRİSLERİ 74
5.1. Dual Sayılar 74
5.2. Dual Split Kuaterniyonlar 74
5.2.1. Dual split kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler 74
5.2.2. Dual split kuaterniyonların dual matris temsilleri 76
5.2.3. Minkowski 3-uzayında vida hareketlerinin birim dual split kuaterniyonlarla ifade edilmesi 81
5.3. Dual Split Kuaterniyon Matrisleri 86
5.3.1. Dual split kuaterniyon matrisleri üzerinde temel işlemler 86
5.3.2. Dual split kuaterniyon matrisinin kuaterniyon matris temsili ... 87
5.3.3. Dual split kuaterniyon matrislerinin özdeğerleri 89
5.3.4. Dual split kuaterniyon matrislerinin tersinin bulunması 92
6. SONUÇ 94
7. KAYNAKLAR
ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$Cl(V,Q)$	: Q kuadratik formu ile V vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiri
$Cl_{p,q}(\mathbb{R}^{p+q})$	: (p,q) işaretli kuadratik form ile $\mathbb{R}^{p+q}$ tarafından üretilen Clifford cebiri
$\mathbb{D}$	: Dual sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	: Kuaterniyonlar kümesi
$\widehat{\mathbb{H}}$	: Split kuaterniyonlar kümesi
$\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$	: Kompleks split kuaterniyonlar kümesi
$\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$	: Dual split kuaterniyonlar kümesi
I_n	: $n \times n$ tipinde birim matris
$M_n(\mathbb{C})$	: $n \times n$ tipinde kompleks matrisler kümesi
$M_n(\widehat{\mathbb{H}})$	: $n \times n$ tipinde split kuaterniyon matrisler kümesi
$M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$	: $n \times n$ tipinde kompleks split kuaterniyon matrisler kümesi
$M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$	: $n \times n$ tipinde dual split kuaterniyon matrisleri kümesi
$M_{m\times n}(\mathbb{C})$	: $m \times n$ tipinde kompleks matrisler kümesi
$M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$	: $m \times n$ tipinde split kuaterniyon matrisler kümesi
$M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$	: $m \times n$ tipinde kompleks split kuaterniyon matrisler kümesi
$M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$	: $m \times n$ tipinde dual split kuaterniyon matrisleri kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
0_n	: $n \times n$ tipinde sıfır matrisi
$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{L}}$	: Lorentz iç çarpımı
$\times_{\mathbb{L}}$	: Lorentz vektörel çarpımı
$\sigma_l(A)$	: A matrisinin sol spektrumu
$\sigma_r(A)$	: A matrisinin sağ spektrumu
χ_A	: A matrisinin kompleks adjoint matrisi

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar; 1843 yılında, İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından kompleks sayıların bir tür genelleştirmesi olan yeni bir sayı sistemi olarak tanıtılmıştır. Kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : \ q_0, \ q_1, \ q_2, \ q_3 \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanmış olup, burada imajiner birimler ise

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ ve } ij = -ji = k, \ jk = -kj = i, \ ki = -ik = j$$

eşitlikleri ile tanımlıdır. Hamilton, kuaterniyonları tanımlamakla iki vektör için bölümün de mümkün olabileceği yeni bir çarpım işlemini vektör cebirine dahil etmiş oldu. Yani kuaterniyonlar keşfedilmiş ilk bölüm cebiridir (Hacısalihoğlu 1983, Kantor ve Solodovnikov 1989).

Kuaterniyonlar çarpmaya göre değişmeli olmadığından, kompleks ve reel sayılardan farklı bazı sonuçlara sahiptir. Bu sebepten kuaterniyon matrisleri üzerine pek çok çalışma vardır. Wolf (1936) reel kuaterniyon elemanlara sahip matrisler için benzerlik kavramını ele almıştır. Lee (1949) kuaterniyon matrislerinin özdeğeri ve köşegenleştirilmesi üzerinde durmuştur. Brenner (1951) ise her kare kuaterniyon matrisinin bir karakteristik kökü olduğunu ve benzer matrislerin aynı karakteristik köke sahip olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca Brenner (1951) Schur's Lemma'nın kuaterniyon matrisleri için de sağlandığını göstermiştir. Ardından, Weigmann (1955) $n \times n$ tipindeki kuaterniyon matrisleri ile $2n \times 2n$ tipindeki kompleks matrisler arasında bir izomorfizma tanımlamış ve bu izomorfizm yardımıyla kuaterniyon matrislerini ele almıştır.

Son zamanlarda, kuaterniyon matrisleri üzerine yapılmış en önemli çalışma ise Zhang'ın (1997) yapmış olduğu kuaterniyon matrisler ile kompleks matrisleri kıyaslayarak incelediği çalışmadır. Ayrıca, bu çalışmada kuaterniyon matrislerine ait iyi bilinen sonuçlar için yeni ispatlar verilmiştir. Baker (1999) Lefschetz sabit nokta teoremini kullanarak, her kare kuaterniyon matrisinin en az bir sağ özdeğerinin olduğunu ispatlamıştır. Diğer taraftan, Huang (2000) ise her $n \times n$ tipindeki bir kare kuaterniyon matrisin herhangi ikisi benzer olmayan n farklı sol özdeğeri var ise köşegenleştirilemeyeceğini göstermiştir. Ardından, Huang ve So (2001) kuaterniyon matrislerinin sol özdeğerlerini daha ayrıntılı bir şekilde incelemiştir.

Kuaterniyonların değişmeli olmaması, kuaterniyon matrisleri için özdeğer problemini özel bir araştırma alanı haline getirmiştir. Örneğin; Baker (1999) kuaterniyon matrislerinin sağ özdeğerlerini topolojik bir yaklaşım ile ele almıştır. Huang ve So (2001) ise kuaterniyon matrislerinin sol özdeğerleri üzerine çalışmıştır. Daha sonra, Zhang'ın (2007) yaptığı birleştirici bir çalışma ile kuaterniyon matrislerinin sağ ve sol özdeğerlerini kıyaslanmış ve bununla birlikte sağ ve sol özdeğerler için Gershgorin teoremini ifade edilmiştir. Zhang'ın (2007) çalışmasının devamı niteliğinde, kompleks matrislerin özdeğerleri ile kuaterniyon matrislerin özdeğerlerinin birlikte incelendiği bir çalışma ise Farid vd (2011) tarafından yapılmıştır.

Kuaterniyonların keşfinden kısa bir süre sonra, James Cockle tarafından Co-kuaterniyonlar kümesi tanıtılmıştır (Cockle 1849). Co-Kuaterniyonlar kümesi, zamanla birim elemanların pozitif ve negatif birimler olarak ikiye bölünüyor olmasından dolayı, split (bölünmüş) kuaterniyonlar olarak adlandırılmıştır. Split kuaterniyonlar, kuaterniyonlara benzer olarak değişmeli olmayan bir cebirdir. Fakat sıfır bölen, nilpotent eleman ve sıfırdan farklı idempotent eleman içerir (Kula 2003, Özdemir 2005).

Split kuaterniyonların geometride pek çok uygulama alanı mevcuttur (Kula 2003). Bunlardan en önemlisi, Öklid uzayında dönmelerin kuaterniyonlar ile ifade edildiği gibi, Minkowski 3-uzayındaki dönmelerin birim timelike split kuaterniyonlar ile ifade edilebilmesidir (Özdemir ve Ergin 2005, Özdemir ve Ergin 2006, Özdemir 2007). Bu ifade edilişi kullanarak Özdemir vd (2014) tarafından, Minkowski 3-uzayında dönme matrislerinin özdeğer ve özvektörleri split kuaterniyonlar yardımı ile incelenmiştir. Kula ve Yaylı (2007) ise split kuaterniyonlar ile yarı Öklid uzayındaki dönme dönüşümlerini ifade etmiştir. Diğer taraftan, Ata ve Yaylı (2009) split kuaterniyonlar ile yarı Öklid projektif uzayları birlikte ele almıştır.

Split kuaterniyon matrisleri yeni gelişen bir çalışma olup, bu alana ait ilk çalışma Alagöz vd (2012) tarafından yapılmıştır. Alagöz vd'nin (2012) çalışmasında split kuaterniyon matrislerinin temel özellikleri ele alınmış ve split kuaterniyon matrislerinin kompleks adjoint matrisi tanımlanmıştır. Ayrıca, split kuaterniyon matrislerin özdeğerleri ise Erdoğdu ve Özdemir (2013a) tarafından incelenmiş ve split kuaterniyon matrisleri için Gershgorin Teoreminin bir tür genelleştirilmesi ifade edilmiştir. Diğer yandan kompleks split kuaterniyonlar ve matrisleri ise Erdoğdu ve Özdemir (2013b) tarafından tanıtılmış ve temel özellikleri ele alınmıştır. Antonuccio (2014) ise bir Lorentz dönüşümün 2×2 tipinde üniter split kuaterniyon matris olarak temsil edilebildiğini göstermiştir.

Dual sayılar, 1873 yılında Clifford tarafından tanıtılmıştır (Clifford 1873). Dual split kuaterniyonlar ise split kuaterniyonların dual sayılar yardımı ile farklı bir tür genişletilmesidir. Bu genelleştirmenin üç boyutlu Minkowski uzayında pek çok uygulama alanı mevcuttur. Örneğin; üç boyutlu Minkowski uzayında vida hareketi dual split kuaterniyonlar yardımı ile incelenmiştir (Kula ve Yaylı 2006). Diğer yandan, Özkaldı ve Gündoğan (2011) tarafından ise üç boyutlu Minkowski uzayında vida hareketleri Lorentz matris çarpımı kullanılarak tartışılmıştır. Ayrıca, dual split kuaterniyonik eğriler üzerine bir çalışma ise Çöken vd (2009) tarafından yapılmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalar hakkında bilgiler, bazı kaynaklardan alıntı yapılarak verilmiştir.

İkinci kısımda, bilineer form ve kuadratik form tanımları verilmiş ve bazı özellikleri ele alınmıştır. Daha sonra cebir ve Clifford cebirin tanımları ifade edilmiş ve bir kuadratik form ile donatılmış n boyutlu vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebirlerine dair örnekler verilmiştir (Kantor ve Solodovnikov 1989). Bununla birlikte, $p + q$ boyutlu reel vektör uzayında (p, q) işaretine sahip kuadratik form tarafından üretilen Clifford cebirleri üzerinde durulmuş ve örneklerle açıklanmıştır.

Ayrıca, nondegenere kuadratik form ile donatılmış reel vektör uzayların üretiği en önemli Clifford cebirleri verilmiştir. Son olarak ise, bir cebirin çift alt cebiri tanımı ile birlikte, bir Clifford cebirinin çift alt cebirinin nasıl bulunacağı bir örnekle açıklanmıştır (Kantor ve Solodovnikov 1989, Gürlebeck ve Sprossing 1997, Aragon vd 1997).

Üçüncü kısımda, split kuaterniyonlara ait temel işlem ve özellikler verilmiştir. Ardından split kuaterniyonların reel matris temsilleri ve özellikleri üzerinde durulmuştur (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2007). Bununla birlikte, Minkowski 3-uzayındaki dönme dönüşümlerinin birim time timelike split kuaterniyonlarla ifade edilişi verilmiştir. Ardından, split kuaterniyon matrisleri tanıtılmış ve split kuaterniyon matrisleri üzerinde tanımlanan temel işlem ve özellikler verilmiştir (Alagöz vd 2012). Daha sonra, bir kare split kuaterniyon matrisin kompleks adjoint matrisi tanımlanmış ve bazı özellikleri ele alınmıştır (Alagöz vd 2012). Ayrıca, split kuaterniyon matrisleri için sağ ve sol özdeğer tanımı verilmiştir. Ek olarak, split kuaterniyon matrislerinin öz değerlerine ilişkin bazı yeni sonuçlar ortaya konulmuştur (Erdoğdu ve Özdemir 2013a). Son olarak ise split kuaterniyon matrislerinin tersinin kompleks adjoint matrisin yardımı ile nasıl bulunacağına dair bir yöntem verilmiş ve bir örnekle açıklanmıştır.

Dördüncü kısımda, split kuaterniyonların kompleks sayılar yardımı ile bir tür genişletilmesi olan, kompleks split kuaterniyonlar tanıtılmış. Daha sonra kompleks split kuaterniyonlara ait temel işlem ve özellikler verilmiştir. Ayrıca, kompleks split kuaterniyonların reel matris temsilleri ifade edilmiştir. Bu matris temsilleri arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur. Bununla birlikte, kompleks split kuaterniyon matrisleri ele alınmış ve temel özellikleri incelenmiştir. Ardından, kompleks split kuaterniyon matrisi için kompleks adjoint matrisi tanımlanmıştır. Ek olarak, kompleks split kuaterniyon matrislerin öz değerlerine ilişkin bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, bir kompleks split kuaterniyon matrisinin tersini bulmak için bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem, bir örnek yardımıyla açıklanmıştır (Erdoğdu ve Özdemir 2013b).

Son kısımda ise, dual split kuaterniyonlar ve matrisleri ele alınmıştır. Öncelikle dual sayılar ve dual split kuaterniyonlara ait temel özellikler ifade edilmiştir (Kula ve Yaylı 2006). Bununla birlikte, dual split kuaterniyonlar ile Minkowski 3-uzayında vida hareketleri ele alınmıştır. Ardından, dual split kuaterniyon matrisleri tanıtılmış ve temel özellikleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca, dual split kuaterniyon matrislerin split kuaterniyon matris temsili ifade edilmiştir. Bu matris temsilini kullanarak, dual split kuaterniyon matrislerin özdeğerleri ile ilgili bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak ise, dual split kuaterniyon matrislerinin tersi bulmak için bir metot verilmiş ve bir örnek yardımı ile açıklanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, bilineer form ve kuadratik form tanımları ile birlikte bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra bazı Clifford cebirlerinin elde edilişine dair örnekler ve tanımı verilmiş olup, en önemli Clifford cebirleri üzerinde durulmuştur (Aragon vd 1997).

2.1. Bilineer Form

Tanım 2.1.1. V, F cismi üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere

$$B : V \times V \to F$$

dönüşümü, her $u, v, w \in V$ ve $\lambda \in F$ için

i. $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$,

ii. $B(u, v + w) = B(u, v) + B(u, w)$,

iii. $B(\lambda u, v) = B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v)$

özelliklerini sağlıyorsa B dönüşümüne bilineer form denir. $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(F)$ olmak üzere, her u, $v \in V$ için

$$B(u, v) = u^T A v = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i v_j$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca her u, $v \in V$ için $B(u, v) = B(v, u)$ ise B'ye simetrik bilineer form denir.

Tanım 2.1.2. $B : V \times V \to \mathbb{R}$ bir bilineer formu olsun. Her sıfırdan farklı $u \in V$ için, $B(u, u) > 0$ ise B'ye pozitif tanımlı bilineer form denir.

Tanım 2.1.3. $B : V \times V \to \mathbb{R}$ bir bilineer formu olsun. Her sıfırdan farklı $u \in V$ için, $B(u, u) < 0$ ise B'ye negatif tanımlı bilineer form denir.

Tanım 2.1.4. $B : V \times V \to \mathbb{R}$ bir bilineer formu ve $v \in V$ olsun. Her sıfırdan farklı $u \in V$ için, $B(u, v) = 0$ olması $v = 0$ olmasını gerektiriyorsa (bir başka deyişle sıfırdan farklı her vektöre dik olan tek vektör sıfır vektörü ise) B'ye nondegenere bilineer form denir.

Örnek 2.1.1. $V = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ olsun ve $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $B_1(u, v) = u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 3u_2v_2$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bilineer formdur. Gerçekten, her $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} B_1(u + v, w) &= (u_1 + v_1)w_1 - (u_1 + v_1)w_2 - (u_2 + v_2)w_1 + 3(u_2 + v_2)w_2 \\ &= u_1w_1 - u_1w_2 - u_2w_1 + 3u_2w_2 + v_1w_1 - v_1w_2 - v_2w_1 + 3v_2w_2 \\ &= B_1(u, w) + B_1(v, w), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_1(u, v+w) &= u_1(v_1+w_1) - u_1(v_2+w_2) - u_2(v_1+w_1) + 3u_2(v_2+w_2) \\
&= u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 3u_2v_2 + u_1w_1 - u_1w_2 - u_2w_1 + 3u_2w_2 \\
&= B_1(u,v) + B_1(u,w), \\
B_1(\lambda u, v) &= \lambda u_1v_1 - \lambda u_1v_2 - \lambda u_2v_1 + 3\lambda u_2v_2 \\
&= u_1\lambda v_1 - u_1\lambda v_2 - u_2\lambda v_1 + 3u_2\lambda v_2 \\
&= B_1(u, \lambda v) = \lambda B_1(u,v)
\end{aligned}
$$

olur.

$$B_1(u,v) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u^T A v$$

biçiminde yazılır. Burada A matrisi simetrik olduğundan B_1 bilineer formu da simetriktir. Ayrıca her $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$B_1(u,u) = u_1^2 - u_1u_2 - u_2u_1 + 3u_2^2 = (u_1 - u_2)^2 + 2u_2^2 > 0$$

olduğundan B_1 pozitif tanımlı bilineer formdur.

Örnek 2.1.2. $V = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ olsun ve $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $B_2(u,v) = -u_1v_1 - u_2v_2$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bilineer formdur ve

$$B_2(u,v) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u^T A v$$

şeklinde yazılabilir. Burada A matrisi simetrik olduğundan B_2 simetrik bilineer formdur ve her $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ için $B_2(u,u) = -u_1^2 - u_2^2 < 0$ olduğundan B_2 negatif tanımlı bilineer formdur.

Örnek 2.1.3. $V = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ olsun ve $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $B_3(u,v) = u_1v_1 - u_2v_2$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bilineer formdur ve

$$B_3(u,v) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u^T A v$$

şeklinde yazılabilir. Burada A matrisi simetrik olduğundan B_3 de simetrik bilineer formdur ve her $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ için $B_3(u,u) = u_1^2 - u_2^2$ olduğundan B_3 ne pozitif ne de negatif tanımlıdır.

Her sıfırdan farklı $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ için $B_3(u,v) = u_1v_1 - u_2v_2 = 0$ olsun. Bu eşitlik yanlızca $v = (0,0)$ için sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

$u = (1, 0)$ için $B_3(u, v) = v_1 = 0$ eşitliği $v = (0, v_2)$ için sağlanır.

$u = (0, 1)$ için $B_3(u, v) = -v_2 = 0$ eşitliği $v = (v_1, 0)$ için sağlanır.

O halde her sıfırdan farklı $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$B_3(u, v) = u_1v_1 - u_2v_2 = 0$$

eşitliği yanlızca $v = (0, 0)$ için sağlandığından B_3 nondegenere simetrik bilineer formdur.

2.2. Kuadratik Form

Tanım 2.2.1. V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$Q : V \to F$$

dönüşümü, her $u \in V$ ve $\lambda \in F$ için

$$Q(\lambda u) = \lambda^2 Q(u)$$

eşitliğini sağlıyorsa Q dönüşümüne kuadratik form denir.

Örnek 2.2.1. $V = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ olsun ve $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$Q(u) = u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir kuadratik formdur.

Gerçekten, her $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$Q(\lambda u) = (\lambda u_1^2) - 2(\lambda u_1)(\lambda u_2) + (\lambda u_2)^2 = \lambda^2(u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2) = \lambda^2 Q(u)$$

olur.

Bir bilineer form verildiğinde; bu bilineer form yardımıyla bir kuadratik form tanımlayabiliriz. $B : V \times V \to F$ bilineer form olmak üzere

$$Q(u) = B(u, u)$$

şeklinde tanımlanan $Q : V \to F$ dönüşümü B bilineer form yardımıyla elde edilen kuadratik formdur.

Tersine bir kuadratik form verildiğinde, bu kuadratik formu kullanarak bir bilineer form elde edebiliriz. $Q : V \to F$ bir kuadratik form olmak üzere

$$B_Q(u, v) = \frac{1}{2}(Q(u + v) - Q(u) - Q(v))$$

şeklinde tanımlanan $B_Q : V \times V \to F$ dönüşümü Q kuadratik formuyla elde edilen bilineer formdur.

Örnek 2.2.2. $V = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ olsun ve $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$B_3(u, v) = u_1 v_1 - u_2 v_2$$

şeklinde tanımlanan bilineer form yardımıyla üretilen kuadratik form

$$Q(u) = B_3(u, u) = u_1^2 - u_2^2$$

olur.

Örnek 2.2.3. $V = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}$ olsun ve $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$Q(u) = u_1^2 + 2u_2^2 + 3u_3^2 + 2u_1 u_2$$

şeklinde tanımlanan kuadratik form tarafından üretilen bilineer form, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned}
B_Q(u, v) &= \frac{1}{2}(Q(u + v) - Q(u) - Q(v)) \\
&= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} (u_1 + v_1)^2 + 2(u_2 + v_2)^2 + 3(u_3 + v_3)^2 + 2(u_1 + v_1)(u_2 + v_2) \\ -(u_1^2 + 2u_2^2 + 3u_3^2 + 2u_1 u_2) - (v_1^2 + 2v_2^2 + 3v_3^2 + 2v_1 v_2) \end{array}\right] \\
&= u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve

$$B_Q(u, v) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u^T A v$$

biçiminde yazılabilir.

2.3. Clifford Cebiri

Tanım 2.3.1. Bir F cismi üzerinde V vektör uzayı verilsin.

$$\cdot\ : V \times V \to V$$

ikili işlemi, her u, v, $w \in V$ ve $\lambda \in F$ için

i. $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$; (birleşme)

ii. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$, (dağılma)

iii. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$; (dağılma)

iv. $\lambda(u \cdot v) = (\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v)$ (skalerle çarpma)

özellikleri sağlıyorsa, bu işlemle birlikte V'ye F cismi üzerinde bir cebir denir.

Uyarı 2.3.1. Bazı kaynaklarda birleşme özelliği cebir tanımına dahil edilmemiştir. Birleşme özelliğini sağlayan cebirler ise birleşmeli cebir olarak adlandırılmıştır.

Örnek 2.3.1. $V = \mathbb{R}^3$ vektörel çarpma işlemiyle birlikte birleşmeli olmayan bir cebirdir.

Örnek 2.3.2. $V = \mathbb{H}$ kuaterniyonlar, kuaterniyon çarpımıyla birlikte bir cebirdir.

Tanım 2.3.2. Bir Q kuadratik formuyla donatılmış bir V vektör uzayı tarafından, her $u,\, v \in V$ için

$$v^2 = Q(v) \tag{2.3.1}$$

$$u \cdot v + v \cdot u = 2B_Q(u, v) \tag{2.3.2}$$

şeklinde tanımlanarak üretilen (birleşmeli) cebire Clifford cebiri denir ve $Cl(V, Q)$ ile gösterilir. Ayrıca (2.3.2) eşitliği temel Clifford özdeşliği olarak adlandırılır.

V, n boyutlu bir vektör uzayı ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ise V'nin bir tabanı olmak üzere $Cl(V, Q)$ cebiri

$$\{1\} \cup \{e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdot ... \cdot e_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$$

kümesi tarafından üretilir ve $boy(Cl(V, Q)) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$' dir.

Örnek 2.3.3. Bir Q kuadratik formuyla donatılmış bir $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayı için $\{e_1,\, e_2,\, e_3\}$ bir taban olmak üzere, $Cl(V, Q)$ Clifford cebiri

$$\{1,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_1e_2,\ e_1e_3,\ e_2e_3,\ e_1e_2e_3\}$$

kümesi tarafından üretilir ve $boy(Cl(V, Q)) = 2^3$'dir.

Uyarı 2.3.2. Bir Q nondegenere kuadratik formuyla donatılmış bir V reel vektör uzayı için $\{e_1,\, e_2, ..., e_n\}$ bir ortonormal baz ise $i \neq j$ için $B_Q(e_i, e_j) = 0$ olacaktır. Bu durumda temel Clifford özdeşliği

$$e_ie_j + e_je_i = 0 \quad (i \neq j)$$

şeklinde olur.

Örnek 2.3.4. $V = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$Q(u) = u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2$$

şeklinde tanımlanan bir kuadratik form olsun. Bu kuadratik form ile donatılmış $\mathbb{R}^2$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebirini bulalım.

$$\{e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1)\}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$' nin bir ortonormal bazı olmak üzere $Cl(\mathbb{R}^2, Q)$

$$\{1,\ e_1,\ e_2,\ e_1e_2\}$$

kümesi tarafından (2.3.1) ve (2.3.2) özelliklerini kullanarak üretilir. O halde

$$e_1^2 = Q(1,0) = 1,$$

$$e_2^2 = Q(0,1) = 1,$$

$$e_1e_2 + e_2e_1 = Q(1,1) - Q(1,0) - Q(0,1) = 1$$

olarak bulunur ve birleşme özelliği kullanılırsa

$$(e_1e_2)^2 = (e_1e_2)(e_1e_2) = e_1(e_2e_1)e_2 = e_1(1 - e_1e_2)e_2 = e_1e_2 - e_1^2e_2^2 = e_1e_2 - 1,$$

$$e_1(e_1e_2) = e_1^2e_2 = e_2,$$

$$(e_1e_2)e_1 = e_1(1 - e_1e_2) = e_1 - e_1^2e_2 = e_1 - e_2,$$

$$e_2(e_1e_2) = (1 - e_1e_2)e_2 = e_2 - e_1e_2^2 = e_2 - e_1,$$

$$(e_1e_2)e_2 = e_1e_2^2 = e_1$$

elde edilir. O halde $Cl(\mathbb{R}^2, Q)$ cebiri

	1	e_1	e_2	e_1e_2
1	1	e_1	e_2	e_1e_2
e_1	e_1	1	e_1e_2	e_2
e_2	e_2	$1 - e_1e_2$	1	$e_2 - e_1$
e_1e_2	e_1e_2	$e_1 - e_2$	e_1	$e_1e_2 - 1$

işlem tablosu ile üretilen birleşmeli cebirdir ve

$$Cl(\mathbb{R}^2, Q) = \left\{ \begin{array}{c} a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_1e_2 : a_i \in \mathbb{R}(i = 0,1,2,3), \\ e_1^2 = e_2^2 = e_1e_2 + e_2e_1 = 1 \end{array} \right\}$$

şeklinde gösterilebilir.

$$boy(Cl(V,Q)) = 2^2 = 4$$

olarak elde edilir. Ayrıca bu cebir nondegenere değildir. Gerçekten, $u = (u_1, u_2)$,

$v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$B_Q(u,v) = \frac{1}{2}(Q(u_1+v_1, u_2+v_2) - Q(u_1,u_2) - Q(v_1,v_2))$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (u_1+v_1)^2 + (u_1+v_1)(u_2+v_2) + (u_2+v_2)^2 \\ -u_1^2 - u_1u_2 - u_2^2 - v_1^2 - v_1v_2 - v_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= u_1(v_1 + \frac{v_2}{2}) + u_2(\frac{v_1}{2} - v_2)$$

olarak bulunur. Her sıfırdan farklı $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ için $B_Q(u,v) = 0$ olsun. Bu durum

$$v = (\frac{4}{5}u_2 - \frac{2}{5}u_1, \frac{4}{5}u_1 + \frac{2}{5}u_2) \neq 0$$

iken sağlandığından bu cebir nondegenere değildir.

$p+q$ boyutlu reel vektör uzayında

$$Q(v) = -v_1^2 - v_2^2 - ... - v_p^2 + v_{p+1}^2 + ... + v_{p+q}^2$$

bir nondegenere kuadratik formdur. Burada (p,q) ikilisine kuadratik formun işareti denir. Bu kuadratik form ile birlikte reel vektör uzayı $\mathbb{R}_p^{p+q}$ ile gösterilir. Bu vektör uzayının ürettiği Clifford cebiri ise

$$Cl(\mathbb{R}_p^{p+q}, Q) = Cl_{p,q}(\mathbb{R}^{p+q}) = Cl(\mathbb{R}_p^{p+q})$$

ile gösterilebilir. Bu şekildeki kuadratik formlar için

$$B_Q(u,v) = -u_1v_1 - u_2v_2 - ... - u_pv_p + u_{p+1}v_{p+1} + ... + u_{p+q}v_{p+q}$$

olur ve $\{e_1, e_2, ..., e_{p+q}\}$, $\mathbb{R}^{p+q}$ için bir ortonormal baz olmak üzere

$$e_ie_j + e_je_i = 2B_Q(e_i, e_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

olur. Böylece $\{e_1, e_2, ..., e_{p+q}\}$ ortonormal bazına ve (p,q) işaretine sahip $\mathbb{R}_p^{p+q}$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiri

$$e_i^2 = -1 \quad (i = 1, 2, ..., p),$$

$$e_i^2 = 1 \quad (i = p+1, ..., p+q),$$

$$e_ie_j + e_je_i = 0, \quad (i \neq j)$$

bağıntılarını sağlayan birleşmeli cebirdir.

Örnek 2.3.5. $V = \mathbb{R}^5$ için $Q(v) = -v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2$ kuadratik formu $(2,3)$ işaretine sahiptir. Bu kuadratik form ile birlikte reel vektör uzayı $\mathbb{R}_2^5$ ile gösterilir ve

$$B_Q(u,v) = -u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 + u_5v_5$$

olur. $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5\}$, $\mathbb{R}^5_2$ için bir ortonormal bazı tarafından üretilen Clifford cebiri

$$e_i^2 = -1 \quad (i = 1, 2),$$

$$e_i^2 = 1 \quad (i = 3, 4, 5),$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad (i \neq j)$$

bağıntılarını sağlayan birleşmeli cebirdir.

2.4. Bazı Önemli Clifford Cebirleri

En önemli Clifford cebirleri, nondegenere kuadratik formlarla donatılmış reel vektör uzayları tarafından üretilen Clifford cebirleridir.

$Cl_{1,0}(\mathbb{R}^1_1)$; $Q(v) = -v^2$ kuadratik formuyla donatılmış $V = \mathbb{R}$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiridir. $\{1,\ e_1\}$ ile

$$e_1^2 = Q(e_1) = -1$$

şeklinde tanımlanarak üretilir. Böylece

$$Cl_{1,0}(\mathbb{R}^1_1) = \left\{ z = a + e_1 b : e_1^2 = -1,\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{C}$$

olur.

$Cl_{0,2}(\mathbb{R}^2)$; $Q(v) = v_1^2 + v_2^2$ kuadratik formuyla donatılmış $V = \mathbb{R}^2$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiridir. Bu cebir; $\{e_1,\ e_2\}$, $\mathbb{R}^2$'nin ortonormal bazı olmak üzere $\{1,\ e_1,\ e_2,\ e_1e_2\}$ tarafından

$$e_1^2 = Q(e_1) = 1,\ e_2^2 = Q(e_2) = 1,\ e_1e_2 + e_2e_1 = 0$$

şeklinde tanımlanarak üretilir. Birleşme özelliği kullanılırsa

$$(e_1e_2)^2 = e_1(e_2e_1)e_2 = e_1(-e_1e_2)e_2 = -e_1^2e_2^2 = -1,$$

$$e_1(e_1e_2) = e_1^2e_2 = e_2,$$

$$(e_1e_2)e_1 = (-e_2e_1)e_1 = -e_2e_1^2 = -e_2,$$

$$e_2(e_1e_2) = e_2(-e_2e_1) = -e_2^2e_1 = -e_1,$$

$$(e_1e_2)e_2 = e_1e_2^2 = e_1$$

elde edilir. O halde $Cl_{0,2}(\mathbb{R}^2)$ Clifford cebiri

	1	e_1	e_2	e_1e_2
1	1	e_1	e_2	e_1e_2
e_1	e_1	1	e_1e_2	e_2
e_2	e_2	$-e_1e_2$	1	$-e_1$
e_1e_2	e_1e_2	$-e_2$	e_1	-1

işlem tablosu ile üretilen birleşmeli cebirdir ve

$$Cl_{0,2}(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{array}{c} a + be_1 + ce_2 + de_1e_2 : e_1^2 = e_2^2 = 1, \\ \\ (e_1e_2)^2 = -1, e_1e_2 + e_2e_1 = 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca

$$1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ e_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ e_2 \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ e_1e_2 \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

eşleşmeleriyle $Cl_{0,2}(\mathbb{R}^2) \cong M_{2\times 2}(\mathbb{R})$'dur.

$Cl_{2,0}(\mathbb{R}_2^2)$; $Q(v) = -v_1^2 - v_2^2$ kuadratik formuyla donatılmış $V = \mathbb{R}^2$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiridir. Bu cebir; $\{e_1,\ e_2\}$, $\mathbb{R}^2$'nin ortonormal bazı olmak üzere $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ tarafından

$$e_1^2 = Q(e_1) = -1,\ e_2^2 = Q(e_2) = -1,\ e_1e_2 + e_2e_1 = 0$$

şeklinde tanımlanarak üretilir. Birleşme özelliğinden faydalanılırsa

$$(e_1e_2)^2 = e_1(e_2e_1)e_2 = e_1(-e_1e_2)e_2 = -e_1^2e_2^2 = -1,$$

$$e_1(e_1e_2) = e_1^2e_2 = -e_2,$$

$$(e_1e_2)e_1 = (-e_2e_1)e_1 = -e_2e_1^2 = e_2,$$

$$e_2(e_1e_2) = e_2(-e_2e_1) = -e_2^2e_1 = e_1,$$

$$(e_1e_2)e_2 = e_1e_2^2 = -e_1$$

olarak bulunur. Bu durumda $Cl_{2,0}(\mathbb{R}_2^2)$ Clifford cebiri

	1	e_1	e_2	e_1e_2
1	1	e_1	e_2	e_1e_2
e_1	e_1	-1	e_1e_2	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_1e_2$	-1	e_1
e_1e_2	e_1e_2	e_2	$-e_1$	-1

işlem tablosu ile üretilen birleşmeli cebirdir ve

$$Cl_{2,0}(\mathbb{R}_2^2) = \left\{ \begin{array}{c} a + be_1 + ce_2 + de_1e_2 : e_1^2 = e_2^2 = (e_1e_2)^2 = -1, \\ \\ e_1e_2 + e_2e_1 = 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bunun yanında

$$e_1 \to i,\ e_2 \to j,\ e_1e_2 \to k$$

eşleşmeleriyle $Cl_{2,0}(\mathbb{R}^2_2) \cong \mathbb{H}$'dur. Burada $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar cebirini temsil etmektedir.

$Cl_{1,1}(\mathbb{R}^2_1)$; $Q(v) = -v_1^2 + v_2^2$ kuadratik formuyla donatılmış $V = \mathbb{R}^2$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiridir. Bu cebir; $\{e_1,\ e_2\}$, $\mathbb{R}^2$'nin ortonormal bazı olmak üzere $\{1,\ e_1,\ e_2,\ e_1e_2\}$ tarafından

$$e_1^2 = Q(e_1) = -1,\ e_2^2 = Q(e_2) = 1,\ e_1e_2 + e_2e_1 = 0$$

şeklinde tanımlanarak üretilir. Birleşme özelliği kullanılırsa

$$(e_1e_2)^2 = e_1(e_2e_1)e_2 = e_1(-e_1e_2)e_2 = -e_1^2e_2^2 = 1,$$

$$e_1(e_1e_2) = e_1^2e_2 = -e_2,$$

$$(e_1e_2)e_1 = (-e_2e_1)e_1 = -e_2e_1^2 = e_2,$$

$$e_2(e_1e_2) = e_2(-e_2e_1) = -e_2^2e_1 = -e_1,$$

$$(e_1e_2)e_2 = e_1e_2^2 = e_1$$

elde edilir. O halde $Cl_{1,1}(\mathbb{R}^2_1)$ Clifford cebiri

	1	e_1	e_2	e_1e_2
1	1	e_1	e_2	e_1e_2
e_1	e_1	-1	e_1e_2	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_1e_2$	1	$-e_1$
e_1e_2	e_1e_2	e_2	e_1	1

işlem tablosu ile üretilen birleşmeli cebirdir ve

$$Cl_{1,1}(\mathbb{R}^2_1) = \left\{ \begin{array}{c} a + be_1 + ce_2 + de_1e_2 : e_1^2 = -1, e_2^2 = (e_1e_2)^2 = 1, \\ \\ e_1e_2 + e_2e_1 = 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca

$$e_1 \to i,\ e_2 \to j,\ e_1e_2 \to k$$

eşleşmeleriyle $Cl_{1,1}(\mathbb{R}^2_1) \cong \widehat{\mathbb{H}}$ olur. Burada $\widehat{\mathbb{H}}$ split kuaterniyonlar cebirini temsil etmektedir.

Tanım 2.4.1. $Cl(V, Q)$ cebirinin çift çarpımlı üreteçleri de bir cebir oluşturur. Bu cebire $Cl(V, Q)$' nun çift alt cebiri denir ve $Cl^+(V, Q)$ ile gösterilir.

Örnek 2.4.1. $Cl_{1,2}(\mathbb{R}^3_1)$; $Q(v) = -v_1^2 + v_2^2 + v_3^3$ kuadratik formuyla donatılmış $V = \mathbb{R}^3$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiridir. Bu cebir, $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$

$\mathbb{R}^3$'nin ortonormal bazı olmak üzere, $\{1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3\}$ tarafından

$$e_1^2 = Q(e_1) = -1,\ e_2^2 = Q(e_2) = 1,\ e_3^2 = Q(e_3) = 1,$$

$$e_1e_2 + e_2e_1 = 0,\ e_1e_3 + e_3e_1 = 0,\ e_2e_3 + e_3e_2 = 0$$

şeklinde tanımlanarak üretilir. Birleşme özelliğini kullanarak

$$(e_1e_2)^2 = e_1(e_2e_1)e_2 = e_1(-e_1e_2)e_2 = -e_1^2e_2^2 = 1,$$

$$(e_1e_3)^2 = e_1(e_3e_1)e_3 = e_1(-e_1e_3)e_3 = -e_1^2e_3^2 = 1,$$

$$(e_2e_3)^2 = e_2(e_3e_2)e_3 = e_2(-e_2e_3)e_3 = -e_2^2e_3^2 = -1,$$

$$e_1(e_1e_2) = e_1^2e_2 = -e_2,$$

$$e_2(e_1e_2) = -e_2^2e_1 = -e_1,$$

$$e_3(e_1e_2) = e_1e_2e_3,$$

$$(e_1e_2)e_1 = (-e_2e_1)e_1 = -e_2e_1^2 = e_2,$$

$$(e_1e_2)e_2 = e_1e_2^2 = e_1,$$

$$(e_1e_2)e_3 = e_1e_2e_3$$

ve benzer şekilde diğer çarpım elemanları elde edilirse $Cl_{1,2}(\mathbb{R}_1^3)$ Clifford cebiri

	1	e_1	e_2	e_3	e_1e_2	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
1	1	e_1	e_2	e_3	e_1e_2	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
e_1	e_1	-1	e_1e_2	e_1e_3	$-e_2$	$-e_3$	$e_1e_2e_3$	$-e_2e_3$
e_2	e_2	$-e_1e_2$	1	e_2e_3	$-e_1$	$-e_1e_2e_3$	e_3	$-e_1e_3$
e_3	e_3	$-e_1e_3$	$-e_2e_3$	1	$e_1e_2e_3$	$-e_1$	$-e_2$	e_1e_2
e_1e_2	e_1e_2	e_2	e_1	$e_1e_2e_3$	1	e_2e_3	e_1e_3	e_3
e_1e_3	e_1e_3	e_3	$-e_1e_2e_3$	e_1	$-e_2e_3$	1	$-e_1e_2$	$-e_2$
e_2e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	$-e_3$	e_2	$-e_1e_3$	e_1e_2	-1	$-e_1$
$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$-e_2e_3$	$-e_1e_3$	e_1e_2	e_3	$-e_2$	$-e_1$	1

işlem tablosu ile üretilen birleşmeli cebirdir. $Cl_{1,2}(\mathbb{R}_1^3)$ cebirinin çift alt cebiri ise

$$Cl_{1,2}^{+}(\mathbb{R}_1^3) = \left\{ \begin{array}{c} a + be_2e_3 + ce_1e_3 + de_1e_2 : (e_2e_3)^2 = -1, (e_1e_3)^2 = (e_1e_2)^2 = 1, \\ \\ e_ie_j + e_je_i = 0;\ i \neq j,\ i,\ j = 1,2,3 \end{array} \right\}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$e_2e_3 \to i, e_1e_3 \to j, e_1e_2 \to k$$

eşleşmeleriyle $Cl_{1,2}^{+}(\mathbb{R}_1^3) \cong \widehat{\mathbb{H}}$ olur.

3. SPLİT KUATERNİYONLAR VE MATRİSLERİ

3.1. Split Kuaterniyonlar

Hamilton'un kuaterniyonları keşfinden kısa bir süre sonra, 1849 yılında, James Cockle split kuaterniyonlar kümesini

$$\widehat{\mathbb{H}} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k; \quad q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanıtmıştır (Cockle 1849). Burada imajiner birim elemanlar

$$i^2 = -1, \ j^2 = k^2 = ijk = 1,$$

$$ij = -ji = k, \ jk = -kj = -i, \ ki = -ik = j$$

eşitliklerini sağlarlar (Inoguchi 1998, Kula 2003).

Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu

$$q = q_0 + q_1 i + (q_2 + q_3 i) j$$

olarak yazabiliriz. Buradan $c_1 = q_0 + q_1 i$ ve $c_2 = q_2 + q_3 i$ kompleks sayılar olmak üzere her split kuaterniyonun

$$q = c_1 + c_2 j$$

olarak tek türlü temsil edildiği görülür.

3.1.1 Split kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler

Split kuaterniyonun skaler kısmı: Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonunun skaler kısmı

$$S_q = q_0$$

olarak tanımlanır. Eğer $S_q = 0$ ise q'ya pure split kuaterniyon adı verilir. Pure split kuaterniyonlar kümesi

$$\widehat{\mathbb{H}}_0 = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{\mathbb{H}} : q_0 = 0\}$$

ile gösterilir.

Split kuaterniyonun vektörel kısmı: Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split quaterniyonunun vektörel kısmı

$$V_q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

şeklinde tanımlanır.

Split kuaterniyonların toplamı: $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ve $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned} p + q &= (S_p + S_q) + (V_p + V_q) \\ &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) i + (p_2 + q_2) j + (p_3 + q_3) k \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Split kuaterniyonların çarpımı: $p = p_0+p_1i+p_2j+p_3k$ ve $q = q_0+q_1i+q_2j+q_3k$ split kuaterniyonlarının çarpımı

$$pq = S_pS_q + \langle V_p, V_q\rangle_{\mathbb{L}} + S_pV_q + S_qV_p + V_p \times_{\mathbb{L}} V_q$$

$$= (p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + (p_1q_0 + p_0q_1 - p_2q_3 + p_3q_2)i$$

$$+ (p_0q_2 + p_2q_0 - p_1q_3 + p_3q_1)j + (p_0q_3 + p_3q_0 - p_2q_1 + p_1q_2)k$$

şeklinde tanımlıdır. Burada, $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{L}}$ ve $\times_{\mathbb{L}}$ sırasıyla Lorentz iç ve vektör çarpımını temsil etmekte olup, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{L}} = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$

$$\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} -i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bahsi geçen Lorentz iç çarpımı ile donatılmış Öklid uzayına Minkowski 3-uzayı adı verilir ve $\mathbb{E}_1^3$ ile gösterilir. Ayrıca pure split kuaterniyonlar kümesi Minkowski 3-uzayı ile özdeşleştirilebilir (Kula 2003, Özdemir ve Ergin 2005, Özdemir ve Ergin 2007, Kula ve Yaylı 2007).

Split kuaterniyonların skalerle çarpımı: $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ split kuaterniyonu ile $\lambda \in \mathbb{R}$ skalerinin çarpımı

$$\lambda q = q\lambda = (\lambda q_0) + (\lambda q_1)i + (\lambda q_2)j + (\lambda q_3)k$$

şeklinde tanımlıdır.

Split kuaterniyonun eşleniği: $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ split kuaterniyonunun eşleniği

$$\overline{q} = S_q - V_q = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$$

olarak tanımlanır.

Split kuaterniyonun normu: $q = q_0+q_1i+q_2j+q_3k$ split kuaterniyonunun normu

$$N_q = \|q\| = \sqrt{|q\overline{q}|} = \sqrt{|q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2|}$$

olarak tanımlanır. Eğer $N_q = 1$ ise q'ya birim split kuaterniyon denir.

Split kuaterniyonun tersi: Eğer $N_q \neq 0$ ise $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ split kuaterniyonunun tersi vardır ve

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{(N_q)^2}$$

şeklindedir.

Split kuaterniyonun karakteri: $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu için

$$I_q = q\overline{q} = \overline{q}q = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

değeri q split kuaterniyonunun karakterini belirler.

Eğer $I_q < 0$, ise q split kuaterniyonuna spacelike;

Eğer $I_q > 0$, ise q split kuaterniyonuna timelike;

Eğer $I_q = 0$, ise q split kuaterniyonuna lightlike (null) adı verilir.

Teorem 3.1.1.1 (Alagöz vd 2012) Her split kuaterniyon 2×2 tipinde kompleks matris olarak temsil edilebilir.

İspat. Bir $q \in \widehat{\mathbb{H}}$ alalım. O halde $q = c_1 + c_2 j$ öyle ki $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ olacak şekilde tek türlü temsil edilir. Şimdi

$$f_q : \widehat{\mathbb{H}} \to \widehat{\mathbb{H}}$$

lineer dönüşümü tanımlayalım öyle ki

$$p \to f_q(p) = pq$$

olsun. Bu dönüşüm bire bir eşlemedir ve

$$f_q(1) = c_1 + c_2 j,$$

$$f_q(j) = j(c_1 + c_2 j)$$

$$= \overline{c_1} j + \overline{c_2} j^2 = \overline{c_2} + \overline{c_1} j,$$

eşitliklerinden, split kuaterniyonlar kümesini, $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$'nin

$$\left\{ \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ \overline{c_2} & \overline{c_1} \end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

alt kümesi olarak tanımlayabiliriz. □

Not edelim ki

$$M : q = c_1 + c_2 j \in \widehat{\mathbb{H}} \to q' = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ \overline{c_2} & \overline{c_1} \end{bmatrix}$$

birebir eşlemedir ve işlemleri korur. Ayrıca

$$(N_q)^2 = \det q'$$

dır (Alagöz vd 2012).

3.1.2. Split kuaterniyonların reel matris temsilleri

Her $q \in \widehat{\mathbb{H}}$ için,

$$g_q : \widehat{\mathbb{H}} \to \widehat{\mathbb{H}}$$

$$g_q(p) = qp$$

lineer dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşüm birebir eşlemedir ve her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu için

$$g_q(1) = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k,$$

$$g_q(i) = -q_1 + q_0 i + q_3 j - q_2 k,$$

$$g_q(j) = q_2 + q_3 i + q_0 j + q_1 k,$$

$$g_q(k) = q_3 - q_2 i - q_1 j + q_0 k$$

eşitlikleri sağlanır. Bu dönüşüm yardımı ile, $\widehat{\mathbb{H}}$ ve

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} : q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

matris cebiri arasında bir izomorfizma tanımlanır. Yukarıda ifade edilen 4×4 tipindeki reel matrise q split kuaterniyonunun sol matris temsili adı verilir ve

$$L(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2007).

Önerme 3.1.2.1 (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2007) Her $p,\ q \in \widehat{\mathbb{H}}$ ve $r \in \mathbb{R}$ için, aşağıdaki özellikler sağlanır;

i. $L(p + q) = L(p) + L(q)$,

ii. $L(pq) = L(p)L(q)$,

iii. $L(rp) = rL(p)$,

iv. $L(1) = I_4$.

İspat. $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$, $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ herhangi iki split kuaterniyon ve $r \in \mathbb{R}$ olsun.

i.

$$L(p+q)=\begin{bmatrix} p_0+q_0 & -(p_1+q_1) & p_2+q_2 & p_3+q_3 \\ p_1+q_1 & p_0+q_0 & p_3+q_3 & -(p_2+q_2) \\ p_2+q_2 & p_3+q_3 & p_0+q_0 & -(p_1+q_1) \\ p_3+q_3 & -(p_2+q_2) & p_1+q_1 & p_0+q_0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

$$=L(p)+L(q).$$

ii.

$$L(pq)=L\left(\begin{array}{c} p_0q_0-p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+(p_0q_1+p_1q_0-p_2q_3+p_3q_2)i \\ \\ +(p_0q_2+q_0p_2-p_1q_3+q_1p_3)j+(p_0q_3+p_1q_2+q_0p_3-p_2q_1)k \end{array}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

$$=L(p)L(q).$$

iii.

$$L(rp)=\begin{bmatrix} rp_0 & -rp_1 & rp_2 & rp_3 \\ rp_1 & rp_0 & rp_3 & -rp_2 \\ rp_2 & rp_3 & rp_0 & -rp_1 \\ rp_3 & -rp_2 & rp_1 & rp_0 \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

$$=rL(p).$$

iv.

$$L(1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I_4.$$

□

Burada $L(pq) = L(p)L(q)$ eşitliği sağlandığından

$$L : \widehat{\mathbb{H}} \to M$$

dönüşümü homomorfizmdir. Benzer şekilde,

$$f_q : \widehat{\mathbb{H}} \to \widehat{\mathbb{H}}$$

$$f_q(p) = pq$$

lineer dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşüm de birbire eşlemedir. Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{\mathbb{H}}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$f_q(1) = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k,$$

$$f_q(i) = -q_1 + q_0 i - q_3 j + q_2 k,$$

$$f_q(j) = q_2 - q_3 i + q_0 j - q_1 k,$$

$$f_q(k) = q_3 + q_2 i + q_1 j + q_0 k.$$

Bu dönüşüm yardımı ile $\widehat{\mathbb{H}}$ ve

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} : q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

matris cebiri arasında bir izomorfizma tanımlanır. Yukarıda elde edilen 4×4 tipindeki reel matrise q split kuaterniyonun sağ matris temsili adı verilir ve

$$R(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2007).

Önerme 3.1.2.2 (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2007) Her $p,\ q \in \widehat{\mathbb{H}}$ ve $r \in \mathbb{R}$ için, aşağıdaki özellikler sağlanır;

i. $R(p + q) = R(p) + R(q)$,

ii. $R(pq) = R(q)R(p)$,

iii. $R(rp) = rR(p)$,

iv. $R(1) = I_4$.

İspat. $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$, $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ herhangi iki split kuaterniyon ve $r \in \mathbb{R}$ olsun.

i.

$$R(p+q) = \begin{bmatrix} p_0+q_0 & -(p_1+q_1) & p_2+q_2 & p_3+q_3 \\ p_1+q_1 & p_0+q_0 & -(p_3+q_3) & p_2+q_2 \\ p_2+q_2 & -(p_3+q_3) & p_0+q_0 & p_1+q_1 \\ p_3+q_3 & p_2+q_2 & -(p_1+q_1) & p_0+q_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

$$= R(p) + R(q).$$

ii.

$$R(pq) = R\left(\begin{array}{c} p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + (p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2)i \\ +(p_0q_2 + q_0p_2 - p_1q_3 + q_1p_3)j + (p_0q_3 + p_1q_2 + q_0p_3 - p_2q_1)k \end{array} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

$$= R(q)R(p).$$

iii.

$$R(rp) = \begin{bmatrix} rp_0 & -rp_1 & rp_2 & rp_3 \\ rp_1 & rp_0 & -rp_3 & rp_2 \\ rp_2 & -rp_3 & rp_0 & rp_1 \\ rp_3 & rp_2 & -rp_1 & rp_0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} = rR(p).$$

iv.

$$R(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4.$$

$\square$

Tanım 3.1.2.1. (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2007) Her $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \widehat{\mathbb{H}}$ için, $\overrightarrow{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$ vektörüne x split kuaterniyonunun vektör temsili adı verilir.

Teorem 3.1.2.1. (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2007) Her a, b ve x split kuaterniyonları için, aşağıdakiler sağlanır;

i. $\overrightarrow{ax} = L(a)\overrightarrow{x}$,

ii. $\overrightarrow{xb} = R(b)\overrightarrow{x}$,

iii. $\overrightarrow{axb} = L(a)R(b)\overrightarrow{x} = R(b)L(a)\overrightarrow{x}$,

iv. $\det(L(a)) = \det(R(a)) = (I_a)^2$.

İspat. $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ ve $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ herhangi split kuaterniyonlar olsun.
i.

$$\overrightarrow{ax} = \begin{bmatrix} a_0x_0 - a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ a_0x_1 + a_1x_0 - a_2x_3 + a_3x_2 \\ a_0x_2 + a_2x_0 - a_1x_3 + a_3x_1 \\ a_0x_3 + a_1x_2 + a_3x_0 - a_2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = L(a)\overrightarrow{x}.$$

ii.

$$\overrightarrow{xb} = \begin{bmatrix} x_0b_0 - x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 \\ x_0b_1 + x_1b_0 - x_2b_3 + x_3b_2 \\ x_0b_2 + x_2b_0 - x_1b_3 + x_3b_1 \\ x_0b_3 + x_1b_2 + x_3b_0 - x_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = R(b)\overrightarrow{x}.$$

iii.

$$\overrightarrow{axb} = L(a)\overrightarrow{xb} = L(a)R(b)\overrightarrow{x} = R(b)\overrightarrow{ax} = R(b)L(a)\overrightarrow{x}.$$

iv.

$$\det(L(a)) = \det \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \left(a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right)^2 = (I_a)^2,$$

$$\det(R(a)) = \det \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \left(a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right)^2 = (I_a)^2.$$

□

3.1.3. Minkowski 3-uzayında dönme dönüşümünün birim timelike split kuaterniyonlarla ifade edilmesi

Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

şeklinde de temsil edebilir. O halde her split kuaterniyon $\mathbb{E}_2^4$'ün bir elemanı olarak da düşünebilir. Burada $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}^4$ olmak üzere, $\mathbb{E}_2^4$ uzayı

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{E}_2^4} = -u_0 v_0 - u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

iç çarpımıyla donatılmış Öklid uzayını temsil etmekte olup, yarı Öklid uzay olarak da adlandırılır. Her $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_2^4$ için, eğer $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{E}_2^4} > 0$ ise $\mathbf{u}$ vektörüne spacelike, eğer $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{E}_2^4} < 0$ ise $\mathbf{u}$ vektörüne timelike, eğer $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{E}_2^4} = 0$ ise $\mathbf{u}$ vektörüne lightlike (null) adı verilir. Dolayısıyla split kuaterniyonlar yarı Öklid uzayı ile özdeşleşebilir. Benzer şekilde, her $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ pure split kuaterniyon

$$q = (q_1, q_2, q_3)$$

şeklinde temsil edebilir. Dolayısıyla her pure split kuaterniyonu, Minkowski 3-uzayının bir elemanı olarak düşünebiliriz. Bahsi geçen Minkowski 3-uzayı, Lorentz iç çarpımı

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}} = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

ile donatılmış Öklid uzayı olup, $\mathbb{E}_1^3$ ile gösterilir. Her $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^3$ için, eğer $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} > 0$ ise $\mathbf{u}$ vektörüne spacelike, eğer $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} < 0$ ise $\mathbf{u}$ vektörüne timelike, eğer $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} = 0$ ise $\mathbf{u}$ vektörüne lightlike (null) adı verilir. Ayrıca, Minkowski 3-uzayındaki timelike vektörler için, eğer ilk bileşeni pozitif ise future pointing timelike vektör, eğer ilk bileşeni negatif ise past pointing timelike vektör adı verilir. $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^3$ vektörünün normu ise

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}}|}$$

olarak tanımlanır. Bununla birlikte, Lorentz vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \times_{\mathbb{L}} &: \mathbb{E}_1^3 \times \mathbb{E}_1^3 \to \mathbb{E}_1^3 \\ &: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Pure split kuaterniyonlar kümesi ve Minkowski 3-uzayı özdeşleşebildiğinden, Lorentz iç ve vektörel çarpım ile yaptığımız herşeyi pure split kuaterniyonlar ile yapmak mümkün olacaktır (Kula 2003, Özdemir 2007).

Her $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ için, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki açı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

i. Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ future pointing (past pointing) timelike vektörler ise $\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}$ bir spacelike vektör olup

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}} = -\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cosh \theta \text{ ve } \|\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sinh \theta$$

ilişkileri sağlanır. Burada θ ise $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır.
ii. Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}}| < \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

eşitsizliğini sağlayan spacelike vektörler ise $\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}$ bir timelike vektör olup

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\theta \text{ ve } \|\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\theta$$

ilişkileri sağlanır. Burada θ ise $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki açıdır.
iii. Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}}| > \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

eşitsizliğini sağlayan spacelike vektörler ise $\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}$ bir timelike vektör olup

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}} = -\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cosh\theta \text{ ve } \|\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sinh\theta$$

ilişkileri sağlanır. Burada θ ise $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır.
iv. Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}}| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

eşitliğini sağlayan spacelike vektörler ise $\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{v}$ bir lightlike vektördür (Özdemir ve Ergin 2006, Kula ve Yaylı 2007).

Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ spacelike split kuaterniyonu için,

$$0 < q_0^2 < -q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \langle V_q, V_q \rangle_{\mathbb{L}} < 0$$

olduğundan, q split kuaterniyonunun vektörel kısmı bir spacelike vektördür. Fakat bir timelike split kuaterniyonunun vektörel kısmı, spacelike, timelike veya ligthlike olabilir. Bu bilgi split kuaterniyonların polar formda ifade edilişinde önem taşır. Kuaterniyonların polar formda gösterimine benzer olarak, her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu için,

i. q spacelike ise

$$q = N_q(\sinh\theta + \mathbf{u}\cosh\theta)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\sinh\theta = \frac{q_0}{N_q} \text{ ve } \cosh\theta = \frac{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{N_q}$$

olup

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}(q_1 i + q_2 j + q_3 k)$$

ise birim spacelike vektördür.

ii. q timelike ve V_q spacelike vektör ise

$$q = N_q(\cosh\theta + \mathbf{u}\sinh\theta)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\cosh\theta = \frac{q_0}{N_q} \text{ ve } \sinh\theta = \frac{\sqrt{-q_1^2+q_2^2+q_3^2}}{N_q}$$

olup

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{-q_1^2+q_2^2+q_3^2}}(q_1 i + q_2 j + q_3 k)$$

ise birim spacelike vektördür.

iii. q timelike ve V_q timelike vektör ise

$$q = N_q(\cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\cos\theta = \frac{q_0}{N_q} \text{ ve } \sin\theta = \frac{\sqrt{q_1^2-q_2^2-q_3^2}}{N_q}$$

olup

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{q_1^2-q_2^2-q_3^2}}(q_1 i + q_2 j + q_3 k)$$

ise birim timelike vektördür (Özdemir 2005, Özdemir ve Ergin 2006).

Timelike split kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}} = \{q = (q_0, q_1, q_2, q_3) : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R},\ I_q > 0\}$$

ile gösterilir ve split kuaterniyon çarpma işlemi altında bir grup oluşturur. Diğer yandan birim timelike split kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}_1 = \{q = (q_0, q_1, q_2, q_3) : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R},\ I_q > 0 \text{ ve } N_q = 1\}$$

ile gösterilir ve timelike kuaterniyonların bir alt grubu olup yarı Öklid küre

$$S_2^3 = \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{E}_2^4 : \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbb{E}_2^4} = 1\right\}$$

ile özdeşleşebilir. Bu sebepten, kuaterniyonlar ile Öklid uzayındaki dönme dönüşümleri arasındaki ilişkinin bir benzeri, birim timelike split kuaterniyonlar ile Minkowski 3-uzayındaki dönme dönüşümleri arasında vardır. Bir başka deyişle, Minkowski 3-uzayında her dönme dönüşümü birim timelike split kuaterniyonlarla ifade edilebilir. Bahsi geçen, Minkowki 3-uzayındaki dönme dönüşümlerinin kümesi

$$SO(1,2) = \left\{R \in M_3(\mathbb{R}) : I^* R^T I^* R = I \text{ ve } \det R = 1\right\}$$

olarak temsil edilir. Burada

$$I^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisidir. Her $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ için,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}} = \mathbf{u}^T I^* \mathbf{v}$$

eşitliği sağlanır. O halde, her $R \in SO(1,2)$ ve $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ için,

$$\langle R\mathbf{u}, R\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}} = (R\mathbf{u})^T I^* (R\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T R^T I^* R \mathbf{v} = \mathbf{u}^T I^* \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{L}}$$

olduğu görülür. Yani, Minkowski 3-uzayında dönme dönüşümleri, açıları, uzunlukları ve vektörlerin karakterlerini korur. Elbette ki dönme açısının çeşidi (küresel veya hiperbolik) ve dönme ekseninin karakteri dönme dönüşümüne bağlıdır.

Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ birim timelike split kuaterniyonu için,

$$\begin{aligned} R_q &: \mathbb{E}_1^3 \to \mathbb{E}_1^3 \\ &: \mathbf{x} \to R_q(\mathbf{x}) = q\mathbf{x}q^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü lineerdir. Bu dönüşüme karşılık gelen matris ise

$$R_q = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 & 2q_0q_3-2q_1q_2 & -2q_0q_2-2q_1q_3 \\ 2q_1q_2+2q_3q_0 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 & -2q_2q_3-2q_1q_0 \\ 2q_1q_3-2q_2q_0 & 2q_1q_0-2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan $I^* R_q^T I^* R_q = I$ ve $\det R_q = 1$ olduğu açıkça görülür. Yani $R_q \in SO(1,2)$'dir. Tersine $R = (R_{ij}) \in SO(1,2)$ verildiğinde, bu dönme dönüşümüne karşılık gelen $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ birim timelike split kuaterniyonu aşağıda verilen formüller yardımı ile elde edilebilir:

i. Eğer $q_0 \neq 0$ ise

$$q_0^2 = \frac{1}{4}\left(1 + R_{11} + R_{22} + R_{33}\right),$$

$$q_1 = \frac{1}{4q_0}\left(R_{32} - R_{23}\right),$$

$$q_2 = -\frac{1}{4q_0}\left(R_{13} + R_{31}\right),$$

$$q_3 = \frac{1}{4q_0}\left(R_{21} + R_{12}\right).$$

ii. Eğer q_0=0 ise

$$q_2 = -\frac{1}{2q_1}R_{12},$$

$$q_3 = -\frac{1}{2q_1}R_{13},$$

$$q_1^2 = 1 + q_2^2 + q_3^2.$$

Dolayısıyla

$$\varphi : S_2^3 \cong \mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}_1 \to SO(1,2)$$

fonksiyonu bir grup homomorfizmasıdır. Öyle ki φ dönüşümünün kerneli $\{\pm 1\}$'dir. Dolayısıyla $SO(1,2)$ grubu $\mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}_1/\{\pm 1\}$ bölüm grubuna izomorftur. Bir başka deyişle, Minkowski 3-uzayındaki her dönme dönüşümüne karşılık gelen q ve $-q$ olmak üzere iki birim timelike split kuaterniyon vardır. Buradan görülüyor ki Minkowski 3-uzayındaki her dönme dönüşümüne karşılık gelen skaler kısmı pozitif olan bir tek q bir birim timelike split kuaterniyonu vardır. Burada q'nun vektörel kısmının karakteri; dönme açısının ve dönme eksenin karakterinin belirlenmesinde önem taşır.

Teorem 3.1.3.1. (Özdemir ve Ergin 2006) $q = \cosh\theta + \mathbf{u}\sinh\theta$ birim timelike split kuaterniyon olmak üzere, R_q dönüşümü $\mathbf{u}$ spacelike ekseni etrafında 2θ hiperbolik açısı kadar dönmeyi ifade eder.

İspat. $\mathbf{u}$ spacelike birim vektör olmak üzere, $q = \cosh\theta + \mathbf{u}\sinh\theta$ birim timelike split kuaterniyon olsun. Bir $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{u}\}$ ortonormal üçlüsü alalım öyle ki

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{u}\rangle_{\mathbb{L}} = 0,\ \ \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle_{\mathbb{L}} = -1 \text{ ve } \mathbf{e}_2 = \mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{e}_1$$

olsun. $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{u}$ vektörlerinin gerdiği düzlemdeki her $\mathbf{x}$ spacelike (timelike) birim vektörü,

$$\mathbf{x} = \cosh\alpha\mathbf{u} + \sinh\alpha\mathbf{e}_1\ \ (\mathbf{x} = \sinh\alpha\mathbf{u} + \cosh\alpha\mathbf{e}_1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada α, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{u}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır. O halde $R_q(\mathbf{u})$ ve $R_q(\mathbf{e}_1)$ vektörlerini hesaplamamız yeterli olacaktır. R_q lineer dönüşümünün tanımını ve $\mathbf{u}^2 = 1$ olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} R_q(\mathbf{u}) &= (\cosh\theta + \mathbf{u}\sinh\theta)\mathbf{u}(\cosh\theta - \mathbf{u}\sinh\theta) \\ &= (\cosh\theta\mathbf{u} + \sinh\theta)(\cosh\theta - \mathbf{u}\sinh\theta) \\ &= \cosh^2\theta\mathbf{u} - \sinh^2\theta\mathbf{u} = \mathbf{u} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer yandan

$$\mathbf{u}\mathbf{e}_1 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_1 \rangle_{\mathbb{L}} + \mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{u} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} + \mathbf{e}_1 \times_{\mathbb{L}} \mathbf{u} = -\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{u} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{L}} + \mathbf{e}_2 \times_{\mathbb{L}} \mathbf{u} = \mathbf{e}_1$$

ilişkileri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
R_q(\mathbf{e}_1) &= (\cosh\theta + \mathbf{u}\sinh\theta)\mathbf{e}_1(\cosh\theta - \mathbf{u}\sinh\theta) \\
&= (\cosh\theta\mathbf{e}_1 + \sinh\theta\mathbf{e}_2)(\cosh\theta - \mathbf{u}\sinh\theta) \\
&= \cosh^2\theta\mathbf{e}_1 + 2\cosh\theta\sinh\mathbf{e}_2 + \sinh^2\theta\mathbf{e}_1 \\
&= \cosh(2\theta)\mathbf{e}_1 + \sinh(2\theta)\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize R_q dönüşümü ile $\mathbf{x}$ vektörünün $\mathbf{u}$ spacelike ekseni boyunca 2θ hiperbolik açısı ile döndürüldüğünü gösterir. $\square$

Örnek 3.1.3.1.

$$q = 2 + \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

birim timelike split kuaterniyonunu ele alalım. q'nun vektörel kısmı spacelike olup, R_q lineer dönüşümüne karşılık gelen dönme matrisi

$$R_q = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -4 \\ 8 & 7 & -4 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu dönüşüm,

$$\cosh\theta = 2 \text{ ve } \sinh\theta = \sqrt{3}$$

olmak üzere, 2θ hiperbolik açısı kadar

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

spacelike eksen boyunca dönmeyi ifade eder.

Teorem 3.1.3.2. (Özdemir ve Ergin 2006) $q = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$ birim timelike split kuaterniyon olmak üzere, R_q dönüşümü $\mathbf{u}$ timelike ekseni boyunca 2θ açısı kadar dönmeyi ifade eder.

İspat. $\mathbf{u}$ timelike birim vektör olmak üzere, $q = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$ birim timelike split kuaterniyon olsun. Bir $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ortonormal üçlüsü alalım öyle ki

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{u}\rangle_{\mathbb{L}} = 0, \;\; \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle_{\mathbb{L}} = 1 \text{ ve } \mathbf{e}_2 = \mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{e}_1$$

olsun. $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{u}$ vektörlerinin gerdiği düzlemdeki her $\mathbf{x}$ timelike (spacelike) birim vektör

$$\mathbf{x} = \cosh\alpha\mathbf{u} + \sinh\alpha\mathbf{e}_1 \;\; (\mathbf{x} = \sinh\alpha\mathbf{u} + \cosh\alpha\mathbf{e}_1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada α, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{u}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır. R_q lineer dönüşümünün tanımını ve $\mathbf{u}^2 = -1$ olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} R_q(\mathbf{u}) &= (\cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta)\mathbf{u}(\cos\theta - \mathbf{u}\sin\theta) \\ &= (\cos\theta\mathbf{u} - \sin\theta)(\cos\theta - \mathbf{u}\sin\theta) \\ &= \cos^2\theta\mathbf{u} + \sin^2\theta\mathbf{u} = \mathbf{u} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\mathbf{e}_1 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_1\rangle_{\mathbb{L}} + \mathbf{u}\times_{\mathbb{L}}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1\mathbf{u} &= \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{u}\rangle_{\mathbb{L}} + \mathbf{e}_1\times_{\mathbb{L}}\mathbf{u} = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2\mathbf{u} &= \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{u}\rangle_{\mathbb{L}} + \mathbf{e}_2\times_{\mathbb{L}}\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

ilişkileri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R_q(\mathbf{e}_1) &= (\cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta)\mathbf{e}_1(\cos\theta - \mathbf{u}\sin\theta) \\ &= (\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2)(\cos\theta - \mathbf{u}\sin\theta) \\ &= \cos^2\theta\mathbf{e}_1 + 2\cos\theta\sin\mathbf{e}_2 - \sin^2\theta\mathbf{e}_1 \\ &= \cos(2\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(2\theta)\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize R_q dönüşümü ile $\mathbf{x}$ vektörünün $\mathbf{u}$ timelike ekseni boyunca 2θ açısı ile döndürüldüğünü gösterir. □

Örnek 3.1.3.2. $q = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ birim timelike split kuaterniyonunun vektörel kısmı timelike olup, R_q lineer dönüşümüne karşılık gelen dönme matrisi

$$R_q = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ve $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eşitliklerinden $\theta = \frac{\pi}{3}$ olduğu görülür. O halde elde edilen dönüşüm, $\frac{2\pi}{3}$ açısı kadar

$$\mathbf{u} = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$$

timelike eksen boyunca dönmeyi ifade eder.

3.2. Split Kuaterniyon Matrisleri

Elemanları split kuaterniyon olan $m \times n$ tipindeki matrisler kümesi $M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$ ile gösterilir. Eğer $m = n$ ise $M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ ile gösterilir. Standart matris toplamı ve çarpımı tanımlıdır ve bu işlemlerle birlikte $M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ birim elemanlı bir halkadır.

3.2.1. Split kuaterniyon matrisleri üzerinde temel işlemler

Split kuaterniyon matrislerini toplamı: $A = (A)_{ij}$, $B = (B)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$ split kuaterniyon matrislerinin toplamı

$$A + B = (A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

olarak tanımlanır.

Split kuaterniyon matrislerinin çarpımı: $A = (A)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$, $B = (B)_{jk} \in M_{n\times p}(\widehat{\mathbb{H}})$ olmak üzere, split kuaterniyon matrislerinin çarpımı

$$AB = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B)_{kj}$$

şeklinde tanımlıdır.

Split kuaterniyon matrisinin skalerle çarpımı: $A = (A)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$ ve $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}$ için, skalerle sağdan ve soldan çarpım sırasıyla

$$A\lambda = (A\lambda)_{ij} = (A)_{ij}\lambda \qquad \text{ve} \qquad \lambda A = (\lambda A)_{ij} = \lambda(A)_{ij}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca $A \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$, $B \in M_{n\times p}(\widehat{\mathbb{H}})$ ve λ, $\mu \in \widehat{\mathbb{H}}$ için,

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B,\ (A\lambda)B = A(\lambda B),\ (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

eşitlikleri sağlanır. Yani $M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$ skalerle sağ ve sol çarpıma göre ayrı ayrı $\widehat{\mathbb{H}}$ üzerinde vektör uzayıdır (Alagöz vd 2012).

Split kuaterniyon matrisinin eşleniği: Her $A = (A)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$ için, A'nın eşleniği

$$\overline{A} = \overline{(A)_{ij}} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$$

olarak tanımlıdır.

Split kuaterniyon matrisinin transpozesi: Her $A = (A)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$ için, A'nın transpozesi (devriği)

$$A^T = (A^T)_{ij} = (A)_{ji} \in M_{n\times m}(\widehat{\mathbb{H}})$$

şeklinde tanımlıdır.

Split kuaterniyon matrisinin eşlenik transpozesi: $A = (A)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$ olmak üzere, A'nın eşlenik transpozesi

$$A^* = (\overline{A})^T \in M_{n\times m}(\widehat{\mathbb{H}})$$

şeklinde tanımlıdır.

Ayrıca her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ kare matrisi için,

Eğer $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris;

Eğer $A = A^*$ ise A matrisine hermityan matris;

Eğer $AA^* = I$ ise A matrisine üniter matris adı verilir.

Split kuaterniyon matrisinin tersi: A, $B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ için, eğer $AB = BA = I$ ise A matrisinin tersi vardır denir ve B matrisine A'nın tersi denir (Alagöz vd 2012).

Her q split kuaterniyonu; c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $q = c_1 + c_2 j$ şeklinde tek türlü yazılabildiğinden, her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ matrisi $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere

$$A = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j$$

şeklinde tek türlü yazılabilir.

3.2.2. Split kuaterniyon matrislerinin özellikleri

Teorem 3.2.2.1 (Alagöz vd 2012) A, $B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ için aşağıdaki özellikler sağlanır;

i. $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$,

ii. $(AB)^* = B^*A^*$,

iii. Eğer A ve B matrislerinin tersi var ise $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

iv. Eğer A matrisinin tersi var ise $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

İspat. i. özellik eşlenik ve transpoze tanımları gereği açıkça görülür.

ii. A, $B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ olsun. O halde $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere,

$$A = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j \text{ ve } B = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 j$$

şeklinde tek türlü yazabiliriz. Buradan

$$AB = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j)(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 j)$$

$$= (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_2}) + (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1})j$$

$$\overline{AB} = \overline{(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_2}) + (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1})j}$$

$$= \overline{(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_2})} - (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1})j$$

$$= (\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1} + \overline{\mathbf{A}_2}\mathbf{B}_2) - (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1})j$$

$$(AB)^* = (\overline{AB})^T$$

$$= (\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1} + \overline{\mathbf{A}_2}\mathbf{B}_2)^T - (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1})^T j$$

$$= \left[(\overline{\mathbf{B}_1})^T(\overline{\mathbf{A}_1})^T + (\mathbf{B}_2)^T(\overline{\mathbf{A}_2})^T\right] - \left[(\mathbf{B}_2)^T(\mathbf{A}_1)^T + (\overline{\mathbf{B}_1})^T(\mathbf{A}_2)^T\right] j$$

eşitliklerini elde ederiz. Diğer yandan,

$$B^* = (\overline{B})^T = (\overline{\mathbf{B}_1} - \mathbf{B}_2 j)^T = (\overline{\mathbf{B}_1})^T - (\mathbf{B}_2)^T j,$$

$$A^* = (\overline{A})^T = (\overline{\mathbf{A}_1} - \mathbf{A}_2 j)^T = (\overline{\mathbf{A}_1})^T - (\mathbf{A}_2)^T j$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$B^*A^* = \left[(\overline{\mathbf{B}_1})^T(\overline{\mathbf{A}_1})^T + (\mathbf{B}_2)^T(\overline{\mathbf{A}_2})^T\right] - \left[(\mathbf{B}_2)^T(\mathbf{A}_1)^T + (\overline{\mathbf{B}_1})^T(\mathbf{A}_2)^T\right] j$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $(AB)^* = B^*A^*$ olduğu görülür.

iii. Eğer A ve B matrislerinin tersi var ise

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n \text{ ve } B^{-1}B = BB^{-1} = I_n$$

eşitlikleri sağlanır. Bu iki eşitlikten

$$A(BB^{-1})A^{-1} = I_n \Rightarrow (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$$

$$B^{-1}(A^{-1}A)B = I_n \Rightarrow (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$$

elde edilir. Yani AB matrisinin de tersi vardır ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ olarak bulunur.

iv. Eğer A matrisinin tersi var ise

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan ii. özelliği ve $I_n^* = I_n$ özelliğini kullanırsak

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A^* = I_n$$

olduğu görülür. Dolayısıyla A^* matrisinin tersi vardır ve $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$'dir. $\square$

Örnek 3.2.2.1. (Alagöz vd 2012)

$$A = \begin{bmatrix} i & j \\ 0 & k \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} i & k \\ 0 & j \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrislerini ele alalım. A matrisinin tersi ve eşleniği sırasıyla

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix} \text{ ve } \overline{A} = \begin{bmatrix} -i & -j \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada A ve B split kuaterniyon matrisleri için

$$(\overline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \text{ ve } \overline{(A^{-1})} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \Longrightarrow (\overline{A})^{-1} \neq \overline{(A^{-1})},$$

$$(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ -1 & k \end{bmatrix} \text{ ve } (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix} \Longrightarrow (A^T)^{-1} \neq (A^T)^{-1}$$

$$\overline{(AB)} = \begin{bmatrix} -1 & 1+j \\ 0 & -i \end{bmatrix} \text{ ve } \overline{A}\ \ \overline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1-j \\ 0 & i \end{bmatrix} \Longrightarrow \overline{(AB)} \neq \overline{A}\ \ \overline{B},$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1-j & i \end{bmatrix} \text{ ve } (B)^T(A)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1+j & -i \end{bmatrix} \Longrightarrow (AB)^T \neq (B)^T(A)^T$$

olduğu görülür.

Bu örnek ile aşağıdaki sonucu elde edilir.

Sonuç 3.2.2.1. (Alagöz vd 2012) $A \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$ ve $B \in M_{n\times s}(\widehat{\mathbb{H}})$ için aşağıdaki özellikler sağlanır;

i. $\left(\overline{A}\right)^{-1} \neq \overline{(A^{-1})}$ (genel olarak),

ii. $\left(A^T\right)^{-1} \neq \left(A^{-1}\right)^T$ (genel olarak),

iii. $\overline{AB} \neq \overline{A}\,\overline{B}$ (genel olarak),

iv. $(AB)^T \neq B^T A^T$ (genel olarak).

Teorem 3.2.2.2. (Alagöz vd 2012) $A, B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ olmak üzere, eğer $AB = I_n$ ise $BA = I_n$' dır.

İspat. $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $A = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j$, $B = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 j \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ olsun. $AB = I_n$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$AB = (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_2}) + (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1})j = I_n$$

olduğundan

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_2} = I_n$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1} = 0_n$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada I_n, $n \times n$ tipinde birim matrisi ve 0_n, ise $n \times n$ tipinde sıfır matrisini temsil etmektedir. Bu iki eşitlik kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \overline{\mathbf{B}_2} & \overline{\mathbf{B}_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix}$$

blok matris eşitliği elde edilir. Bu teorem kompleks matrisler için doğru olduğundan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \overline{\mathbf{B}_2} & \overline{\mathbf{B}_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitliği açarsak

$$\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_2} = I_n$$

$$\mathbf{B}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_1} = 0_n$$

eşitliklerini elde ederiz. Buradan

$$I_n = (\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_2}) + (\mathbf{B}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_1})j = BA$$

olduğu görülür ve ispat biter. □

Değişmeli olmayan girdilere sahip bir A matrisinin sağ

$$AB = I$$

ve sol

$$BA = I$$

olmak üzere iki tersi olabilir. Teorem 3.2.2.2 gösteriyor ki, split kuaterniyonlar değişmeli olmamasına rağmen $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ matrisinin tersinin olması için sağ veya sol tersinin olması yeterlidir. Çünkü sağ (sol) ters var ise sol (sağ) ters de mevcuttur ve her zaman birbirine eşittir.

3.2.3. Split kuaterniyon matrislerinin kompleks adjoint matrisi

Tanım 3.2.3.1. (Alagöz vd 2012) $A = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ öyle ki $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olsun. $2n \times 2n$ tipindeki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} \end{bmatrix}$$

kompleks matrise, A matrisinin kompleks adjoint matrisi adı verilir ve χ_A ile gösterilir.

Örnek 3.2.3.1. (Alagöz vd 2012)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i+j+k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisini ele alalım. Bu matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} j$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. O halde A matrisinin kompleks adjoint matrisi

$$\chi_A = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Diğer yandan

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i-j-k & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan A^* matrsisinin kompleks adjoint matrisi

$$\chi_{A^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 1 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1+i & 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada

$$(\chi_A)^* = (\overline{\chi_A})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan, $\chi_{A^*} \neq (\chi_A)^*$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.3.1. (Alagöz vd 2012) Her A, $B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ için aşağıdaki özellikler sağlanır;

i. $\chi_{I_n} = I_{2n}$,

ii. $\chi_{A+B} = \chi_A + \chi_B$,

iii. $\chi_{AB} = \chi_A \chi_B$,

iv. Eğer A matrisinin tersi var ise $(\chi_A)^{-1} = \chi_{A^{-1}}$,

v. $\chi_{A^*} \neq (\chi_A)^*$ (genel olarak).

İspat. $A = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j$, $B = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 j \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ olsun öyle ki $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2 \in M_n(\mathbb{C})$.

i. $I_n = I_n + 0_n j$ olduğundan tanım gereği

$$\chi_{I_n} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$$

olduğu görülür.

ii. $A + B = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) + (\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2)j$ olduğundan

$$\chi_{A+B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2} & \overline{\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \overline{\mathbf{B}_2} & \overline{\mathbf{B}_1} \end{bmatrix}$$

$$= \chi_A + \chi_B$$

olarak elde edilir.

iii. $AB = (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_2}) + (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1})j$ olduğundan tanım gereği

$$\chi_{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_2} & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1} \\ \overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1}} & \overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_2} & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1} \\ \overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2} + \overline{\mathbf{A}_2}\mathbf{B}_1 & \overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1} + \overline{\mathbf{A}_2}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \overline{\mathbf{B}_2} & \overline{\mathbf{B}_1} \end{bmatrix} = \chi_A \, \chi_B$$

olarak elde edilir.

iv. A matrisinin tersi var ise

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

eşitliği yazılabilir. i. ve iii. özellik kullanılırsa

$$I_{2n} = \chi_{I_n} = \chi_A \chi_{A^{-1}} = \chi_{A^{-1}} \chi_A$$

olduğu görülür. O halde χ_A matrisinin de tersi vardır ve

$$(\chi_A)^{-1} = \chi_{A^{-1}}$$

olarak elde edilir.

iv. Örnek 3.2.3.1 ile bu eşitliğin her zaman sağlanmadığı görülür. □

3.2.4. Split kuaterniyon matrislerinin özdeğerleri

Tanım 3.2.4.1. (Alagöz vd 2012) $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ ve $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}$ olsun. Eğer

$$Ax = \lambda x$$

eşitliğini sağlayan en az bir sıfırdan farklı x split kuaterniyon kolon vektörü varsa λ'ya A'nın sol özdeğeri denir. A'nın sol özdeğerleri kümesi

$$\sigma_l(A) = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{H}} : Ax = \lambda x, \; x \neq 0\}$$

ile gösterilir ve A'nın sol spektrumu olarak adlandırılır. Eğer

$$Ax = x\lambda$$

eşitliğini sağlayan en az bir sıfırdan farklı x split kuaterniyon kolon vektörü varsa λ'ya A'nın sağ özdeğeri denir. A'nın sağ özdeğerleri kümesi

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{H}} : Ax = x\lambda, \; x \neq 0\}$$

ile gösterilir ve A'nın sağ spektrumu olarak adlandırılır.

Örnek 3.2.4.1. (Alagöz vd 2012)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisini ele alalım. Bu matrisin sol özdeğerlerinden ($Ax = \lambda x$ denklem sistemini $x \neq 0$ için sağlayan λ değerlerinden) bazılarının kümesi

$$\{\pm 1\} \subseteq \sigma_l(A)$$

olarak elde edilir. Sağ özdeğerlerinden ($Ax = x\lambda$ denklem sistemini $x \neq 0$ için sağlayan λ değerlerinden) bazılarının kümesi

$$\{\pm 1, \ \pm j, \ \pm k\} \subseteq \sigma_r(A)$$

olarak bulunur. Bu örnekle sol özdeğerlerden $\lambda = \pm 1$'nin aynı zamanda sağ özdeğer olduğu görülüyor.

Örnek 3.2.4.2. (Alagöz vd 2012)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisini ele alalım. Bu matrisin sol özdeğerlerinden ($Ax = \lambda x$ denklem sistemini $x \neq 0$ için sağlayan λ değerlerinden) bazılarının kümesi

$$\{\pm k\} \subseteq \sigma_l(A)$$

olarak elde edilir. Fakat $\lambda = \pm k$, A'nın sağ özdeğerlerinden değildir. Yani $\lambda = \pm k$ için, $Ax = x\lambda$ denklem sisteminin sıfırdan farklı bir x split kuaterniyon kolon vektörü için çözümü yoktur.

Teorem 3.2.4.1. (Alagöz vd 2012) $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ olmak üzere aşağıdakiler denktir;

i. A matrisinin tersi vardır,

ii. $Ax = 0$ sıfır tek çözüme sahiptir,

iii. $|\chi_A| \neq 0$ yani χ_A matrisinin tersi vardır,

iv. A'nın özdeğerleri sıfırdan farklıdır. Daha açıkçası, eğer bazı $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}$ ve sıfırdan farklı split kuaterniyon x vektörü için $Ax = \lambda x$ veya $Ax = x\lambda$ ise $\lambda \neq 0$'dır.

İspat. i. $\Leftrightarrow$ **ii.** Açıkça görülür.

ii. $\Rightarrow$ **iii.** $A = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ ve $x = x_1 + x_2 j$ split kuaterniyon kolon vektörü olsun. Burada $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2 \in M_n(\mathbb{C})$ ve x_1, x_2 kompleks kolon vektörlerdir.

$$Ax = (\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 \overline{x_2}) + (\mathbf{A}_1 x_2 + \mathbf{A}_2 \overline{x_1}) j$$

olduğundan, $Ax = 0$ eşitliği

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 \overline{x_2} = 0,\ \ \mathbf{A}_1 x_2 + \mathbf{A}_2 \overline{x_1} = 0$$

eşitliklerine denk olacaktır. Bu iki eşitlik kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$Ax = 0 \ \Leftrightarrow \chi_A (x_1, \overline{x_2})^T = 0$$

olduğu görülür. Kabul gereği $Ax = 0$ eşitliği sadece $x = 0$ çözüme sahip olduğundan $\chi_A(x_1, \overline{x_2})^T = 0$ eşitliği de sadece sıfır çözüme sahiptir. Burada χ_A matris kompleks matris olduğundan $|\chi_A| \neq 0$' dır. Bir başka deyişle χ_A matrisin tersi vardır.

ii. $\Rightarrow$ **iv.** $Ax = 0$ sadece $x = 0$ çözüme sahip olsun. Kabul edelim ki $\lambda = 0$, A matrisinin bir özdeğeri olsun. O halde en az bir sıfırdan farklı x için $Ax = 0x = 0$ olacaktır. Kabul gereği $Ax = 0$ sadece $x = 0$ çözümüne sahip olduğundan bir çelişki elde ederiz. O halde A matrisinin tüm özdeğerleri sıfırdan farklıdır.

iv. $\Rightarrow$ **ii.** A matrisinin tüm özdeğerleri sıfırdan farklı olsun. Eğer $Ax = 0 = \lambda x$ ise kabul gereği $x = 0$ olmalıdır.

iii. $\Rightarrow$ **ii.** $A = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ matrisinin kompleks adjointinin tersi var ise bir $2n \times 2n$ kompleks matrisi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}$$

vardır öyle ki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_4 \in M_n(\mathbb{C})$'dır. Bu eşitliği açarsak

$$\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_2} = I_n,\ \ \mathbf{B}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_1} = 0_n$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu iki eşitlik kullanılırsa

$$(\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_2}) + (\mathbf{B}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_1})j = I_n$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik, $B = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 j \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ olarak alırsa

$$BA = I_n$$

eşitliğine denktir. Teorem 3.2.2.2 gereğince $AB = I_n$ eşitliği de sağlanır. O halde A matrisinin de tersi vardır. $\square$

Split kuaterniyonlar değişmeli olmadığından determinant tanımı split kuaterniyon matrisleri için genelleştirilemez. Bu sebepten Teorem 3.2.4.1'den yola çıkarak split kuaterniyon matrisleri için bir determinant fonksiyonu tanımlanabilir. Bu determinant fonksiyonu, kompleks matrisin determinatını hesaplayabildiğimizden aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.4.2. (Alagöz vd 2012) $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ ve χ_A ise A matrisinin kompleks adjoint matrisi olsun. A matrisinin q determinantı

$$|A|_q = |\chi_A|$$

olarak tanımlıdır. Burada $|\chi_A|$ ise χ_A matrisinin determinantıdır.

Teorem 3.2.4.2. (Alagöz vd 2012) A, $B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır;

i. A'nın tersi vardır $\Leftrightarrow |A|_q \neq 0$.

ii. $|AB|_q = |A|_q |B|_q$, sonuç olarak A^{-1} var ise $|A^{-1}|_q = (|A|_q)^{-1}$' dir.

iii. P ve Q elementer matrisleri için $|PAQ|_q = |A|_q$'dır.

İspat. i. Teorem 3.2.4.1 gereği açıkça görülür.

ii. Teorem 3.2.3.1' den $\chi_{AB} = \chi_A \chi_B$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$|AB|_q = |\chi_{AB}| = |\chi_A \chi_B| = |\chi_A| \, |\chi_B| = |A|_q \, |B|_q$$

olduğu görülür. Eğer A matrisinin tersi var ise

$$1 = |I_n|_q = \left|AA^{-1}\right|_q = |A|_q \left|A^{-1}\right|$$

eşitliğinden $|A^{-1}|_q = (|A|_q)^{-1}$ elde edilir.

iii. P ve Q elementer matrisleri için $|P|_q = |Q|_q = 1$ olduğundan açıkça görülür. □

Teorem 3.2.4.3. (Erdoğdu ve Özdemir 2013a) Her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ için

$$\sigma_r(A) \cap \mathbb{C} = \sigma(\chi_A),$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$\sigma(\chi_A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \chi_A v = \lambda v, \ v \neq 0\}$$

A matrisinin kompleks adjoint matrisinin, yani χ_A matrisinin spektrumudur.

İspat. $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$, A matrisinin bir sağ özdeğeri olsun. A matrisi $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere

$$A = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j$$

şeklinde tek türlü yazılabilir. Ayrıca $\lambda \in \mathbb{C}$, A matrisinin sağ özdeğeri olduğundan en az bir sıfırdan farklı $x = x_1 + x_2 j$ split kuaterniyon kolon vektörü için

$$Ax = x\lambda$$

eşitliği sağlanır. Burada x_1 ve x_2 sıfırdan farklı kompleks kolon vektörleridir. Bu eşitliği açarsak

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j)(x_1 + x_2 j) = (x_1 + x_2 j)\lambda$$

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_1 x_2 j + \mathbf{A}_2 j x_1 + \mathbf{A}_2 j x_2 j = x_1\lambda + x_2 j\lambda$$

$$(\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 \overline{x_2}) + (\mathbf{A}_1 x_2 + \mathbf{A}_2 \overline{x_1}) j = x_1\lambda + x_2\overline{\lambda} j$$

elde ederiz. Bu eşitlik ise

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 \overline{x_2} = \lambda x_1,$$

$$\mathbf{A}_1 x_2 + \mathbf{A}_2 \overline{x_1} = \overline{\lambda} x_2$$

eşitliklerine denktir. İlk eşitlik ve ikinci eşitliğin eşleniği blok matrisler olarak

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \overline{x_2} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Sonuç olarak A nın kompleks sağ özdeğerleri kümesinin keyfi bir λ elemanı aynı zamanda χ_A matrisinin özdeğeridir. Yani

$$\sigma_r(A) \cap \mathbb{C} \subseteq \sigma(\chi_A)$$

olduğu elde edilir. $\sigma_r(A) \cap \mathbb{C} \supseteq \sigma(\chi_A)$ olduğu ise yukarıdaki işlemler tersine yapıldığında kolayca görülür. Sonuç olarak $\sigma_r(A) \cap \mathbb{C} = \sigma(\chi_A)$ eşitliği elde edilir. $\square$

Bu teorem ile her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ split kuaterniyon matrisinin sağ özdeğerin varlığını ispat etmiş olduk. Fakat sağ özdeğerlerinin sayısı hakkında kesin bir şey söylemek için bu teorem yeterli değildir. Bununla birlikte sağ özdeğerlerin sayısı hakkında kısmen bilgi sahibi olduk. Yani, $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ matrisinin en fazla $2n$ tane farklı kompleks sağ özdeğeri vardır. Ayrıca teoremin ispatı ile A matrisinin kompleks sağ özdeğerine karşılık gelen özvektör ile χ_A matrisinin özvektörü arasındaki ilişki de görülüyor.

Teorem 3.2.4.4. (Erdoğdu ve Özdemir 2013a) $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2 \in M_n(\mathbb{C})$ ve λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 j \in \widehat{\mathbb{H}}$ değeri $A = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ matrisinin sol özdeğeridir ancak ve ancak x_1, $x_2 \in \mathbb{C}^n$ vektörleri vardır öyle ki

$$\max\{\|x_1\|_\infty, \|x_2\|_\infty\} > 0$$

ve

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1 - \lambda_1 I_n) & (\mathbf{A}_2 - \lambda_2 I_n) \\ (\overline{\mathbf{A}_2} - \overline{\lambda_2} I_n) & (\overline{\mathbf{A}_1} - \overline{\lambda_1} I_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Burada, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ kompleks kolon vektörü için

$$\|y\|_\infty = \max\{\|y_i\| : i = 1, 2, ..., n\}$$

olarak tanımlıdır.

İspat. $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2 \in M_n(\mathbb{C})$ ve λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $A = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ ve $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 j \in \widehat{\mathbb{H}}$ olsun. $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}$ değeri A matrisinin sol özdeğeridir ancak ve ancak en az bir sıfırdan farklı $x = x_1 + x_2 j$ split kuaterniyon kolon vektörü $(\max\{\|x_1\|_\infty, \|x_2\|_\infty\} > 0)$ için

$$\Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 j)(x_1 + x_2 j) = (\lambda_1 + \lambda_2 j)(x_1 + x_2 j).$$

Bu eşitlik açılırsa

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_1 x_2 j + \mathbf{A}_2 j x_1 + \mathbf{A}_2 j x_2 j = \lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2 j + \lambda_2 j x_1 + \lambda_2 j x_2 j$$

$$(\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 \overline{x_2}) + (\mathbf{A}_1 x_2 + \mathbf{A}_2 \overline{x_1}) j = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 \overline{x_2} + (\lambda_1 x_2 + \lambda_2 \overline{x_1}) j$$

$$(\mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 \overline{x_2} - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 \overline{x_2}) + (\mathbf{A}_1 x_2 + \mathbf{A}_2 \overline{x_1} - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 \overline{x_1}) j = 0$$

elde edilir. Elde edilen eşitlik ise

$$(\mathbf{A}_1 - \lambda_1 I_n)\, x_1 + (\mathbf{A}_2 - \lambda_2 I_n)\, \overline{x_2} = 0,$$

$$(\mathbf{A}_1 - \lambda_1 I_n)\, x_2 + (\mathbf{A}_2 - \lambda_2 I_n)\, \overline{x_1} = 0$$

olarak ifade edilir. İlk eşitlik ve ikinci eşitliğin eşleniği blok matrisler olarak

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1 - \lambda_1 I_n) & (\mathbf{A}_2 - \lambda_2 I_n) \\ (\overline{\mathbf{A}_2} - \overline{\lambda_2} I_n) & (\overline{\mathbf{A}_1} - \overline{\lambda_1} I_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir ve ispat biter. □

Bu teorem, her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ split kuaterniyon matrisinin sol özdeğerin hangi şartlar altında var olduğunu gösterir. Ayrıca teoremin ispatı ile eğer A matrisinin sol özdeğeri var ise nasıl elde edileceği de görülüyor.

Klasik Gershgorin Teoremi; $n \times n$ tipindeki kompleks matrisler için, özdeğerleri içine alan diskleri ifade eder. Gershgorin Teoreminin, $n \times n$ tipindeki split kuaterniyon matrisleri için nasıl genelleştirileceğini vermeden önce, Klasik Gershgorin Teoremini hatırlayalım.

Klasik Gershgorin Teoremi: $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ve A matrisinin özdeğerleri kümesi ise $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ olmak üzere, her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için

$$\lambda_i \in G(A) = \bigcup_{j=1}^{n} \{z \in C : |z - a_{jj}| \leq R_j\}$$

sağlanır. Burada $R_i = \sum\limits_{j=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$ dır.

Teorem 3.2.4.5. (Sol özdeğerler için Gershgorin Teoremi) (Erdoğdu ve Özdemir 2013a) $A = (a_{ij}) \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ olmak üzere

$$\sigma_l(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{q \in \widehat{\mathbb{H}} : \|q - a_{ii}\| \leq R_i\}$$

sağlanır. Burada $R_i = \sum\limits_{j=1, i\neq j}^{n} \|a_{ij}\|$.

İspat. $A = (a_{ij}) \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$, $\lambda \in \sigma_l(A)$ ve λ özdeğerine karşılık gelen özvektör ise $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ olsun. O halde $Ax = \lambda x$ eşitliği sağlanır. Kabul edelim ki x vektörünün x_i bileşeni, her j için

$$\|x_i\| \geq \|x_j\|$$

eşitsizliğini sağlasın ve $\|x_i\| > 0$ olsun. Diğer yandan, λx_i değeri Ax vektörünün i. bileşenine eşittir. Yani

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$(\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{j=1, i\neq j}^{n} a_{ij} x_j$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin her iki tarafının normunu alırsak,

$$\|(\lambda - a_{ii}) x_i\| = \left\| \sum_{j=1, i\neq j}^{n} a_{ij} x_j \right\|$$

$$\|(\lambda - a_{ii})\| \|x_i\| \leq \sum_{j=1, i\neq j}^{n} \|a_{ij} x_j\|$$

$$\|(\lambda - a_{ii})\| \|x_i\| \leq \sum_{j=1, i\neq j}^{n} \|a_{ij}\| \|x_i\|$$

$$\|(\lambda - a_{ii})\| \leq \sum_{j=1, i\neq j}^{n} \|a_{ij}\| = R_i$$

olarak bulunur. Buradan

$$\sigma_l(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{q \in \widehat{\mathbb{H}} : \|q - a_{ii}\| \leq R_i\}$$

olduğu görülür. $\square$

Aşağıdaki örnekle, bu tür bir genelleştirmenin split kuaterniyon matrislerinin sağ özdeğerler için her zaman mümkün olmayacağı görülür.

Örnek 3.2.4.3.

$$A = \begin{bmatrix} i & 1+j \\ -1+j & -i \end{bmatrix} \in M_2(\widehat{\mathbb{H}})$$

matrisini ele alalım. A matrisinin kompleks adjoint matrisi

$$\chi_A = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 1 \\ 1 & 0 & -1 & i \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Teorem 3.2.4.3 gereği,

$$\sigma_r(A) \cap \mathbb{C} = \{-\sqrt{-1-2i},\ \sqrt{-1-2i},\ -\sqrt{-1+2i},\ \sqrt{-1+2i}\}$$

olarak bulunur. Burada

$$G(A) = \{q \in \widehat{\mathbb{H}} : \|q - i\| \leq 0\} \cup \{q \in \widehat{\mathbb{H}} : \|q + i\| \leq 0\}$$

olarak elde edilir. $\lambda_1 = -\sqrt{-1-2i}$ özdeğeri için

$$\|\lambda_1 - i\| = \left\| -\sqrt{-1-2i} - i \right\| \cong 0.8318 \nleq 0$$

$$\|\lambda_1 + i\| = \left\| -\sqrt{-1-2i} + i \right\| \cong 2.404\,2 \nleq 0$$

olduğu görülür. Bir başka değişle $\lambda_1 \notin G(A)$' dır.

3.2.5. Split kuaterniyon matrislerinin tersinin bulunması

$A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ matrisinin tersi var ise Teorem 3.2.4.1 gereği χ_A matrisinin tersi vardır. Eğer χ_A matrisinin tersi

$$(\chi_A)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}$$

şeklinde ise Teorem 3.2.4.1'in ispatı gereği A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 j$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.2.5.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & j \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisini ele alalım. A matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix} j$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

olduğundan A matrisinin kompleks adjoint matrisi

$$\chi_A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $|A|_q = |\chi_A| = -2 \neq 0$ olduğundan Teorem 3.2.4.2. gereği A matrisin tersi vardır. χ_A matrisinin tersi ise

$$(\chi_A)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 1+i & 1-i \\ 0 & -2i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Buradan

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

4. KOMPLEKS SPLİT KUATERNİYONLAR VE MATRİSLERİ

4.1. Kompleks Split kuaterniyonlar

Kompleks Split kuaterniyonlar kümesi

$$\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}} = \{Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k : Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3 \in \mathbb{C}\}$$

olarak tanımlanır. Birimlerin çarpımı ise, aşağıdaki tabloya göre belirlenir;

	1	i	j	k	$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}i$	$\mathbf{i}j$	$\mathbf{i}k$
1	1	i	j	k	$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}i$	$\mathbf{i}j$	$\mathbf{i}k$
i	i	-1	k	$-j$	$\mathbf{i}i$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{i}k$	$-\mathbf{i}j$
j	j	$-k$	1	$-i$	$-\mathbf{i}j$	$\mathbf{i}k$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{i}i$
k	k	j	i	1	$-\mathbf{i}k$	$-\mathbf{i}j$	$-\mathbf{i}i$	$-\mathbf{i}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}i$	$\mathbf{i}j$	$\mathbf{i}k$	-1	$-i$	$-j$	$-k$
$\mathbf{i}i$	$\mathbf{i}i$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{i}k$	$-\mathbf{i}j$	$-i$	1	$-k$	j
$\mathbf{i}j$	$\mathbf{i}j$	$-\mathbf{i}k$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{i}i$	j	$-k$	1	$-i$
$\mathbf{i}k$	$\mathbf{i}k$	$\mathbf{i}j$	$\mathbf{i}i$	$\mathbf{i}$	k	j	i	1

.

Burada i, j, k split kuaterniyon birimlerini ve $\mathbf{i}$ ise kompleks birimi temsil etmektedir (Erdoğdu ve Özdemir 2013b).

4.1.1. Kompleks split kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler

Kompleks split kuaterniyonun skaler kısmı: Her $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$ kompleks split kuaterniyonunun skaler kısmı

$$S_Q = Q_0$$

olarak tanımlanır. Eğer $S_Q = 0$ ise Q'ya pure kompleks split kuaterniyon adı verilir.

Kompleks split kuaterniyonun vektörel kısmı: Her $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$ kompleks split kuaterniyonunun vektörel kısmı

$$V_Q = Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$$

olarak tanımlanır. Eğer $V_Q = 0$ ise Q bir kompleks sayı belirtir.

Kompleks split kuaterniyonların toplamı: $P = P_0 + P_1 i + P_2 j + P_3 k$, $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$ kompleks split kuaterniyonlarının toplamı

$$P + Q = (P_0 + Q_0) + (P_1 + Q_1)i + (P_2 + Q_2)j + (P_3 + Q_3)k$$

olarak tanımlanır.

Kompleks split kuaterniyonların çarpımı: $P = P_0 + P_1 i + P_2 j + P_3 k$, $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$ kompleks split kuaterniyonlarının çarpımı

$$PQ = S_P S_Q + S_P V_Q + V_P S_Q - P_1 Q_1 + P_2 \overline{Q_2} + P_3 \overline{Q_3}$$

$$+ (P_3 \overline{Q_2} - P_2 \overline{Q_3})i + (P_3 \overline{Q_1} - P_1 Q_3)j + (P_1 Q_2 - P_2 \overline{Q_1})k$$

şeklinde tanımlıdır.

Kompleks split kuaterniyonun skalerle çarpımı: $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$ kompleks split kuaterniyonu ile $\lambda \in \mathbb{R}$ skalerinin çarpımı

$$\lambda Q = Q\lambda = (\lambda Q_0) + (\lambda Q_1)i + (\lambda Q_2)j + (\lambda Q_3)k$$

olarak tanımlıdır.

Kompleks split kuaterniyonun kuaterniyon eşleniği: $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$ kompleks split kuaterniyonun kuaterniyon eşleniği

$$\overline{Q} = S_Q - V_Q = Q_0 - Q_1 i - Q_2 j - Q_3 k$$

şeklinde tanımlıdır.

Kompleks split kuaterniyonun kompleks eşleniği: $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$ kompleks split kuaterniyonun kompleks eşleniği

$$Q^c = \overline{Q_0} + \overline{Q_1} i + \overline{Q_2} j + \overline{Q_3} k$$

olarak tanımlıdır.

Kompleks split kuaterniyonun total eşleniği: $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$ kompleks split kuaterniyonun total eşleniği

$$(\overline{Q})^c = \overline{(Q^c)} = \overline{Q_0} - \overline{Q_1} i - \overline{Q_2} j - \overline{Q_3} k$$

olarak tanımlanır.

4.1.2. Kompleks split kuaterniyonların özellikleri

Teorem 4.1.2.1. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b) Her P, $Q \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ ve $c \in \mathbb{C}$ için, aşağıdakiler sağlanır;

i. $ic = ci$,

ii. $jc = \bar{c}j$,

iii. $kc = \bar{c}k$,

iv. $Q = \overline{Q}$ ancak ve ancak $Q \in \mathbb{C}$,

v. $Q = Q^c$ ancak ve ancak $Q \in \widehat{\mathbb{H}}$,

vi. Eğer $P \in \mathbb{R}$ ise $PQ = QP$.

İspat. $P = P_0 + P_1 i + P_2 j + P_3 k$, $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ ve $c = c_1 + c_2 \mathbf{i} \in \mathbb{C}$ olsun.

i. $ic = i(c_1 + c_2 \mathbf{i}) = c_1 i + c_2 \mathbf{i} i = (c_1 + c_2 \mathbf{i})i = ci$.

ii. $jc = j(c_1 + c_2\mathbf{i}) = c_1 j - c_2\mathbf{i}j = (c_1 - c_2\mathbf{i})j = \bar{c}j.$

iii. $kc = k(c_1 + c_2\mathbf{i}) = c_1 k - c_2\mathbf{i}k = (c_1 - c_2\mathbf{i})k = \bar{c}k.$

iv. $Q = \overline{Q} \Leftrightarrow Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k = Q_0 - Q_1 i - Q_2 j - Q_3 k \Leftrightarrow V_Q = 0 \Leftrightarrow Q = S_Q = Q_0 \in \mathbb{C}.$

v. $Q = Q^c \Leftrightarrow Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k = \overline{Q_0} + \overline{Q_1} i + \overline{Q_2} j + \overline{Q_3} k \Leftrightarrow$ her $i = 0, 1, 2, 3$ için $Q_i \in \mathbb{R}$' dir. $\Leftrightarrow Q \in \widehat{\mathbb{H}}.$

vi. Eğer $P \in \mathbb{R}$ ise

$$PQ = P(Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) = (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k)P = QP.$$

□

Kompleks split kuaterniyonlar değişmeli olmadığından, aşağıdaki örnekte ifade edilen bazı temel özelliklerin her zaman sağlanmağı görülür.

Örnek 4.1.2.1. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b) $Q = (1+\mathbf{i}) + (1+\mathbf{i})j$ ve $P = (1+\mathbf{i})j$ kompleks split kuaterniyonlarını alalım.

$$Q\overline{Q} = -2 + 2\mathbf{i} + (2 - 2\mathbf{i})j \text{ ve } \overline{Q}Q = -2 + 2\mathbf{i} + (-2 + 2\mathbf{i})j \Rightarrow Q\overline{Q} \neq \overline{Q}Q,$$

$$Q^cQ = (2 - 2\mathbf{i}) + (2 - 2\mathbf{i})j \text{ ve } QQ^c = (2 + 2\mathbf{i}) + (2 + 2\mathbf{i})j \Rightarrow Q^cQ \neq QQ^c,$$

$$(\overline{Q})^cQ = (2 + 2\mathbf{i}) + (2 + 2\mathbf{i})j \text{ ve } Q(\overline{Q})^c = (2 - 2\mathbf{i}) + (-2 + 2\mathbf{i})j \Rightarrow (\overline{Q})^cQ \neq Q(\overline{Q})^c,$$

$$PQ = 2 + 2j \text{ ve } QP = 2 + (2\mathbf{i})j \Rightarrow PQ \neq QP,$$

$$\overline{(QP)} = 2 - (2\mathbf{i})j \text{ ve } \overline{P}\,\overline{Q} = 2 - 2j \Rightarrow \overline{(QP)} \neq \overline{P}\,\overline{Q},$$

$$(QP)^c = 2 - (2\mathbf{i})\,j \text{ ve } P^cQ^c = 2 + 2j \Rightarrow (QP)^c \neq P^cQ^c,$$

$$(\overline{QP})^c = 2 + (2\mathbf{i})\,j \text{ ve } \overline{P}^c\overline{Q}^c = 2 - 2j \Rightarrow (\overline{QP})^c \neq \overline{P}^c\overline{Q}^c.$$

Teorem 4.1.2.2. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b) Her kompleks split kuaterniyon bir 4×4 kompleks matris olarak temsil edilebilir.

İspat. $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$ bir kompleks split kuaterniyon olsun. Şimdi

$$f_Q : \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$$

lineer dönüşümünü tanımlayalım öyle ki

$$P \to f_Q(P) = PQ.$$

Bu dönüşüm bire bir eşlemedir ve

$$f_Q(1) = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k,$$

$$f_Q(i) = i(Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) = -Q_1 + Q_0 i - Q_3 j + Q_2 k,$$

$$f_Q(j) = j(Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) = \overline{Q_2} - \overline{Q_3} i + \overline{Q_0} j - \overline{Q_1} k,$$

$$f_Q(k) = k(Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) = \overline{Q_3} + \overline{Q_2} i + \overline{Q_1} j + \overline{Q_0} k.$$

Bu eşitliklerden, kompleks split kuaterniyonlar kümesi, $M_4(\mathbb{C})$'nin

$$\widetilde{\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}} = \left\{ \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ -Q_1 & Q_0 & -Q_3 & Q_2 \\ \overline{Q_2} & -\overline{Q_3} & \overline{Q_0} & -\overline{Q_1} \\ \overline{Q_3} & \overline{Q_2} & \overline{Q_1} & \overline{Q_0} \end{bmatrix} : Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

alt kümesi olarak yazılabilir. □

4.1.3. Kompleks split kuaterniyonların reel matris temsilleri

$Q_0 = a_0 + \mathbf{i}b_0$, $Q_1 = a_1 + \mathbf{i}b_1$, $Q_2 = a_2 + \mathbf{i}b_2$ ve $Q_3 = a_3 + \mathbf{i}b_3 \in \mathbb{C}$ olmak üzere, her $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ iki farklı şekilde gösterilebilir.

Kompleks form: $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \widehat{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$Q = a + \mathbf{i}b$$

şeklindeki gösterime Q'nun kompleks formda gösterimi adı verilir.

Reel form: $n = 0, 1, 2, 3$ için $a_n,\ b_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$Q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + b_0 \mathbf{i} + b_1 \mathbf{i} i + b_2 \mathbf{i} j + b_3 \mathbf{i} k$$

şeklindeki gösterime Q'nun reel formda gösterimi adı verilir.

Her $Q \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ için,

$$G_Q : \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$$

$$G_Q(P) = QP$$

lineer dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşüm birebir eşlemedir ve $Q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + b_0\mathbf{i} + b_1\mathbf{i}i + b_2\mathbf{i}j + b_3\mathbf{i}k = a + \mathbf{i}b \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ için,

$$G_Q(1) = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + b_0\mathbf{i} + b_1\mathbf{i}i + b_2\mathbf{i}j + b_3\mathbf{i}k,$$

$$G_Q(i) = -a_1 + a_0 i + a_3 j - a_2 k - b_1\mathbf{i} + b_0\mathbf{i}i + b_3\mathbf{i}j - b_2\mathbf{i}k,$$

$$G_Q(j) = a_2 + a_3 i + a_0 j + a_1 k + b_2\mathbf{i} + b_3\mathbf{i}i + b_0\mathbf{i}j + b_1\mathbf{i}k,$$

$$G_Q(k) = a_3 - a_2 i - a_1 j + a_0 k + b_3\mathbf{i} - b_2\mathbf{i}i - b_1\mathbf{i}j + b_0\mathbf{i}k,$$

$$G_Q(\mathbf{i}) = -b_0 - b_1 i + b_2 j + b_3 k + a_0\mathbf{i} + a_1\mathbf{i}i - a_2\mathbf{i}j - a_3\mathbf{i}k,$$

$$G_Q(\mathbf{i}i) = b_1 - b_0 i + b_3 j - b_2 k - a_1\mathbf{i} + a_0\mathbf{i}i - a_3\mathbf{i}j + a_2\mathbf{i}k,$$

$$G_Q(\mathbf{i}j) = b_2 + b_3 i - b_0 j - b_1 k - a_2\mathbf{i} - a_3\mathbf{i}i + a_0\mathbf{i}j + a_1\mathbf{i}k,$$

$$G_Q(\mathbf{i}k) = b_3 - b_2 i + b_1 j - b_0 k - a_3\mathbf{i} + a_2\mathbf{i}i - a_1\mathbf{i}j + a_0\mathbf{i}k,$$

eşitlikleri sağlanır. Bu dönüşüm yardımı ile $\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ ve

$$\mathcal{M}=\left\{\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 & -b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & -b_1 & -b_0 & b_3 & -b_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & b_2 & b_3 & -b_0 & b_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & b_3 & -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ b_0 & -b_1 & b_2 & b_3 & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 & a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 & -a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 & -a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} : a_n,\ b_n \in \mathbb{R},\ n{=}0,1,2,3\right\}$$

matris cebiri arasında bir izomorfizma tanımlanır. Yukarıda tanımlanan 8×8 tipindeki reel matrise Q kompleks split kuaterniyonun sol matris temsili adı verilir ve

$$\mathcal{L}(Q) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 & -b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & -b_1 & -b_0 & b_3 & -b_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & b_2 & b_3 & -b_0 & b_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & b_3 & -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ b_0 & -b_1 & b_2 & b_3 & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 & a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 & -a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 & -a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir. Bu temsil a ve b split kuaterniyonlarının sol matris temsilleri cinsinden

$$\mathcal{L}(Q) = \begin{bmatrix} L(a) & -L(b_*) \\ L(b) & L(a_*) \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Burada

$$a_* = a_0 + a_1 i - a_2 j - a_3 k \text{ ve } b_* = b_0 + b_1 i - b_2 j - b_3 k$$

şeklindedir.

Önerme 4.1.3.1. Her p ve q split kuaterniyonları ve kompleks formda verilen $Q = a + \mathbf{i}b$ ve $P = c + \mathbf{i}d$ kompleks split kuaterniyonları için, aşağıdakiler sağlanır;

i. $(p_*)_* = p$,

ii. $(p+q)_* = p_* + q_*$,

iii. $p_*\mathbf{i} = \mathbf{i}p$, $p\mathbf{i} = \mathbf{i}p_*$,

iv. $(pq)_* = p_* q_*$,

v. $QP = (ac - b_* d) + \mathbf{i}(bc + a_* d)$.

İspat. $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$, $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{\mathbb{H}}$, ve $Q = a + \mathbf{i}b$, $P = c + \mathbf{i}d \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ olsun.

i.

$$(p_*)_* = (p_0 + p_1 i - p_2 j - p_3 k)_* = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k = p.$$

ii.

$$(p+q)_* = ((p_0+q_0) + (p_1+q_1)i + (p_2+q_2)j + (p_3+q_3)k)_*$$

$$= (p_0+q_0) + (p_1+q_1)i - (p_2+q_2)j - (p_3+q_3)k$$

$$= p_* + q_*.$$

iii.

$$p_*\mathbf{i} = (p_0 + p_1 i - p_2 j - p_3 k)\mathbf{i} = p_0\mathbf{i} + p_1 i\mathbf{i} - p_2 j\mathbf{i} - p_3 k\mathbf{i}$$

$$= \mathbf{i}(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k) = \mathbf{i}p,$$

$$p\mathbf{i} = (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k)\mathbf{i} = p_0\mathbf{i} + p_1 i\mathbf{i} + p_2 j\mathbf{i} + p_3 k\mathbf{i}$$

$$= \mathbf{i}(p_0 + p_1 i - p_2 j - p_3 k) = \mathbf{i}p_*.$$

iv.

$$\begin{aligned}(pq)_* = p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + (p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2)i \\ - (p_0q_2 + q_0p_2 - p_1q_3 + q_1p_3)j - (p_0q_3 + p_1q_2 + q_0p_3 - p_2q_1)k \\ = (p_0 + p_1i - p_2j - p_3k)(q_0 + q_1i - q_2j - q_3k) = p_*q_*.\end{aligned}$$

v.

$$\begin{aligned}QP &= (a + \mathbf{i}b)(c + \mathbf{i}d) = ac + a\mathbf{i}d + \mathbf{i}bc + \mathbf{i}b\mathbf{i}d \\ &= ac + \mathbf{i}a_*d + \mathbf{i}bc - b_*d = (ac - b_*d) + \mathbf{i}(bc + a_*d).\end{aligned}$$

□

Teorem 4.1.3.1. Her Q, $P \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ ve $r \in \mathbb{R}$ için, aşağıdakiler sağlanır;

i. $\mathcal{L}(Q + P) = \mathcal{L}(Q) + \mathcal{L}(P)$,

ii. $\mathcal{L}(QP) = \mathcal{L}(P)\mathcal{L}(Q)$,

iii. $\mathcal{L}(rQ) = r\mathcal{L}(Q)$,

iv. $\mathcal{L}(1) = I_8$.

İspat. $Q = a + \mathbf{i}b$ ve $P = c + \mathbf{i}d$ kompleks formda verilmiş iki kompleks split kuaterniyon ve $r \in \mathbb{R}$ olsun.

i.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Q + P) &= \mathcal{L}((a + c) + \mathbf{i}(b + d)) \\ &= \begin{bmatrix} L(a + c) & -L((b + d)_*) \\ L(b + d) & L((a + c)_*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(a) + L(c) & -L(b_*) - L(d_*) \\ L(b) + L(d) & L(a_*) + L(c_*) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L(a) & -L(b_*) \\ L(b) & L(a_*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L(c) & -L(d_*) \\ L(d) & L(c_*) \end{bmatrix} = \mathcal{L}(Q) + \mathcal{L}(P).\end{aligned}$$

ii.

$$\mathcal{L}(QP) = \mathcal{L}((ac - b_*d) + \mathbf{i}(bc + a_*d))$$

$$\mathcal{L}(QP)=\begin{bmatrix} L(ac-b_*d) & -L((bc+a_*d)_*) \\ L(bc+a_*d) & L((ac-b_*d)_*) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L(ac-b_*d) & -L(b_*c_*+ad_*) \\ L(bc+a_*d) & L(a_*c_*-bd_*) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} L(a)L(c)-L(b_*)L(d) & -L(b_*)L(c_*)-L(a)L(d_*) \\ L(b)L(c)+L(a_*)L(d) & L(a_*)L(c_*)-L(b)L(d_*) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} L(a) & -L(b_*) \\ L(b) & L(a_*) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L(c) & -L(d_*) \\ L(d) & L(c_*) \end{bmatrix}=\mathcal{L}(Q)\mathcal{L}(P).$$

iii.

$$\mathcal{L}(rQ)=\mathcal{L}(ra+\mathbf{i}rb)=\begin{bmatrix} L(ra) & -L(rb_*) \\ L(rb) & L(ra_*) \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} L(a) & -L(b_*) \\ L(b) & L(a_*) \end{bmatrix}=r\mathcal{L}(Q).$$

iv.

$$\mathcal{L}(1)=\begin{bmatrix} L(1) & -L(0) \\ L(0) & L(1) \end{bmatrix}=I_8.$$

□

Her $Q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k+b_0\mathbf{i}+b_1\mathbf{i}i+b_2\mathbf{i}j+b_3\mathbf{i}k=a+\mathbf{i}b\in\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ için,

$$F_Q:\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$$

$$F_Q(P)=QP$$

lineer dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşüm birebir eşlemedir ve

$$F_Q(1)=a_0+a_1i+a_2j+a_3k+b_0\mathbf{i}+b_1\mathbf{i}i+b_2\mathbf{i}j+b_3\mathbf{i}k,$$

$$F_Q(i)=-a_1+a_0i-a_3j+a_2k-b_1\mathbf{i}+b_0\mathbf{i}i-b_3\mathbf{i}j+b_2\mathbf{i}k,$$

$$F_Q(j)=a_2-a_3i+a_0j-a_1k-b_2\mathbf{i}+b_3\mathbf{i}i-b_0\mathbf{i}j+b_1\mathbf{i}k,$$

$$F_Q(k)=a_3+a_2i+a_1j+a_0k-b_3\mathbf{i}-b_2\mathbf{i}i-b_1\mathbf{i}j-b_0\mathbf{i}k,$$

$$F_Q(\mathbf{i})=-b_0-b_1i-b_2j-b_3k+a_0\mathbf{i}+a_1\mathbf{i}i+a_2\mathbf{i}j+a_3\mathbf{i}k,$$

$$F_Q(\mathbf{i}i)=b_1-b_0i+b_3j-b_2k-a_1\mathbf{i}+a_0\mathbf{i}i-a_3\mathbf{i}j+a_2\mathbf{i}k,$$

$$F_Q(\mathbf{i}j) = b_2 - b_3 i + b_0 j - b_1 k + a_2\mathbf{i} - a_3\mathbf{i}i + a_0\mathbf{i}j - a_1\mathbf{i}k,$$

$$F_Q(\mathbf{i}k) = b_3 + b_2 i + b_1 j + b_0 k + a_3\mathbf{i} + a_2\mathbf{i}i + a_1\mathbf{i}j + a_0\mathbf{i}k$$

eşitlikleri sağlanır. Bu dönüşüm yardımı ile, $\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ ve

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 & -b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -b_1 & -b_0 & -b_3 & b_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & -b_2 & b_3 & b_0 & b_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & -b_3 & -b_2 & -b_1 & b_0 \\ b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 & a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ b_2 & -b_3 & -b_0 & -b_1 & a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 & -b_0 & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} : a_n,\ b_n \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,3 \right\}$$

matris cebiri arasında bir izomorfizm tanımlanır. Yukarıda ifade edilen 8×8 tipindeki reel matrise Q kompleks split kuaterniyonunun sağ matris temsili adı verilir ve

$$\mathcal{R}(Q) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 & -b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -b_1 & -b_0 & -b_3 & b_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & -b_2 & b_3 & b_0 & b_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & -b_3 & -b_2 & -b_1 & b_0 \\ b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 & a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ b_2 & -b_3 & -b_0 & -b_1 & a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 & -b_0 & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir. Bu temsil a ve b split kuaterniyonlarının sağ matris temsilleri türünden

$$\mathcal{R}(Q) = \begin{bmatrix} R(a) & -R(b)I_* \\ R(b)I_* & R(a) \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Burada

$$I_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Önerme 4.1.3.2. Her p split kuaterniyonu için, aşağıdakiler sağlanır;

i. $I_*R(p) = R(p_*)I_*,\ R(p)I_* = I_*R(p_*)$,

ii. $I_*R(p)I_* = R(p_*)$,

iii. $I_*R(p_*)I_* = R(p)$.

İspat. $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k,\ q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \widehat{\mathbb{H}}$ olsun.
i.

$$I_* R(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ -p_2 & p_3 & -p_0 & -p_1 \\ -p_3 & -p_2 & p_1 & -p_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & p_3 & p_0 & p_1 \\ -p_3 & -p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = R(p_*) I_*$$

$$R(p) I_* = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & -p_0 & -p_1 \\ p_3 & p_2 & p_1 & -p_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & p_3 & p_0 & p_1 \\ -p_3 & -p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} = I_* R(p_*).$$

ii.

$$I_* R(p) I_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & p_3 & p_0 & p_1 \\ -p_3 & -p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} = R(p_*).$$

iii.

$$I_* R(p_*) I_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & p_3 & p_0 & p_1 \\ -p_3 & -p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} = R(p).$$

□

Teorem 4.1.3.2. Her Q, $P \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ ve $r \in \mathbb{R}$ için, aşağıdakiler sağlanır;

i. $\mathcal{R}(Q+P) = \mathcal{R}(Q) + \mathcal{R}(P)$,

ii. $\mathcal{R}(PQ) = \mathcal{R}(Q)\mathcal{R}(P)$,

iii. $\mathcal{R}(rQ) = r\mathcal{R}(Q)$,

iv. $\mathcal{R}(1) = I_8$.

İspat. $Q = a + \mathbf{i}b$ ve $P = c + \mathbf{i}d$ kompleks formda verilmiş herhangi iki kompleks split kuaterniyon ve $r \in \mathbb{R}$ olsun.

i.

$$\mathcal{R}(Q+P) = \mathcal{R}((a+c) + \mathbf{i}(b+d))$$

$$= \begin{bmatrix} R(a+c) & -R(b+d)I_* \\ R(b+d)I_* & R(a+c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(a)+R(c) & -R(b)I_*-R(d)I_* \\ R(b)I_*+R(d)I_* & R(a)+R(c) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R(a) & -R(b)I_* \\ R(b)I_* & R(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R(c) & -R(d)I_* \\ R(d)I_* & R(c) \end{bmatrix} = \mathcal{R}(Q) + \mathcal{R}(P).$$

ii.

$$\mathcal{R}(QP) = \mathcal{R}((ac - b_*d) + \mathbf{i}(bc + a_*d))$$

$$= \begin{bmatrix} R(ac - b_*d) & -R(bc + a_*d)I_* \\ R(bc + a_*d)I_* & R(ac - b_*d) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R(c)R(a) - R(d)R(b_*) & -R(c)R(b)I_* - R(d)R(a_*)I_* \\ R(c)R(b)I_* + R(d)R(a_*)I_* & R(c)R(a) - R(d)R(b_*) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R(c) & -R(d)I_* \\ R(d)I_* & R(c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(a) & -R(b)I_* \\ R(b)I_* & R(a) \end{bmatrix} = \mathcal{R}(P)\mathcal{R}(Q).$$

iii.

$$\mathcal{R}(rQ) = \mathcal{R}(ra + \mathbf{i}rb)$$

$$\mathcal{R}(rQ) = \begin{bmatrix} R(ra) & -R(rb)I_* \\ R(rb)I_* & R(ra) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rR(a) & -rR(b)I_* \\ rR(b)I_* & rR(a) \end{bmatrix}$$

$$= r \begin{bmatrix} R(a) & -R(b)I_* \\ R(b)I_* & R(a) \end{bmatrix} = r\mathcal{R}(Q).$$

iv.

$$\mathcal{R}(1) = \begin{bmatrix} R(1) & -R(0)I_* \\ R(0)I_* & R(1) \end{bmatrix} = I_8.$$

□

Tanım 4.1.3.1. $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ ve $y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k$ split kuaterniyonlar olmak üzere, kompleks formda verilmiş her $X = x + \mathbf{i}y$ kompleks split kuaterniyonu için,

$$\overrightarrow{X} = (x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3)^T$$

vektörüne X kompleks split kuaterniyonunun vektör temsili adı verilir.

Teorem 4.1.3.3. a, b, c, d, x ve y split kuaterniyon olmak üzere, kompleks formda verilmiş $Q = a + \mathbf{i}b$, $P = c + \mathbf{i}d$ ve $X = x + \mathbf{i}y$ kompleks split kuaterniyonları için, aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

i. $\overrightarrow{QX} = \mathcal{L}(Q)\overrightarrow{X}$,

ii. $\overrightarrow{XP} = \mathcal{R}(P)\overrightarrow{X}$,

iii. $\overrightarrow{QXP} = \mathcal{L}(Q)\mathcal{R}(P)\overrightarrow{X} = \mathcal{R}(P)\mathcal{L}(Q)\overrightarrow{X}$,

iv. $\det(\mathcal{L}(Q)) = (I_{aa_*+b_*b})^2$ ve $\det(\mathcal{R}(Q)) = (I_{a^2+b_*b})^2$.

İspat. a, b, c, d, x ve y split kuaterniyon olmak üzere, $Q = a + \mathbf{i}b$, $P = c + \mathbf{i}d$ ve $X = x + \mathbf{i}y$ kompleks formda verilmiş herhangi kompleks split kuaterniyonlar olsun. Burada a, b, c, d, x ve y split kuaterniyonları

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k,$$

$$c = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k,\ \ d = d_0 + d_1 i + d_2 j + d_3 k,$$

$$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k,\ y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k$$

şeklinde verilsin.

i.

$$\overrightarrow{QX} = \begin{bmatrix} a_0x_0 - a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b_0y_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 \\ a_0x_1 + a_1x_0 - a_2x_3 + a_3x_2 - b_0y_1 - b_1y_0 - b_2y_3 + b_3y_2 \\ a_0x_2 - a_1x_3 + a_2x_0 + a_3x_1 - b_0y_2 + b_1y_3 + b_2y_0 + b_3y_1 \\ a_0x_3 + a_1x_2 - a_2x_1 + a_3x_0 - b_0y_3 - b_1y_2 - b_2y_1 + b_3y_0 \\ a_0y_0 - a_1y_1 - a_2y_2 - a_3y_3 + b_0x_0 - b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\ a_0y_1 + a_1y_0 + a_2y_3 - a_3y_2 + b_0x_1 + b_1x_0 - b_2x_3 + b_3x_2 \\ a_0y_2 - a_1y_3 - a_2y_0 - a_3y_1 + b_0x_2 - b_1x_3 + b_2x_0 + b_3x_1 \\ a_0y_3 + a_1y_2 + a_2y_1 - a_3y_0 + b_0x_3 + b_1x_2 - b_2x_1 + b_3x_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 & -b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & -b_1 & -b_0 & b_3 & -b_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & b_2 & b_3 & -b_0 & b_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & b_3 & -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ b_0 & -b_1 & b_2 & b_3 & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 & a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 & -a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 & -a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathcal{L}(Q)\overrightarrow{X}.$$

ii.

$$\overrightarrow{XP} = \begin{bmatrix} x_0c_0 - x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 - y_0d_0 + y_1d_1 + y_2d_2 + y_3d_3 \\ x_0c_1 + x_1c_0 - x_2c_3 + x_3c_2 - y_0d_1 - y_1d_0 - y_2d_3 + y_3d_2 \\ x_0c_2 - x_1c_3 + x_2c_0 + x_3c_1 - y_0d_2 + y_1d_3 + y_2d_0 + y_3d_1 \\ x_0c_3 + x_1c_2 - x_2c_1 + x_3c_0 - y_0d_3 - y_1d_2 - y_2d_1 + y_3d_0 \\ x_0d_0 - x_1d_1 - x_2d_2 - x_3d_3 + y_0c_0 - y_1c_1 + y_2c_2 + y_3c_3 \\ x_0d_1 + x_1d_0 + x_2d_3 - x_3d_2 + y_0c_1 + y_1c_0 - y_2c_3 + y_3c_2 \\ x_0d_2 - x_1d_3 - x_2d_0 - x_3d_1 + y_0c_2 - y_1c_3 + y_2c_0 + y_3c_1 \\ x_0d_3 + x_1d_2 + x_2d_1 - x_3d_0 + y_0c_3 + y_1c_2 - y_2c_1 + y_3c_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_0 & -c_1 & c_2 & c_3 & -d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_0 & -c_3 & c_2 & -d_1 & -d_0 & -d_3 & d_2 \\ c_2 & -c_3 & c_0 & c_1 & -d_2 & d_3 & d_0 & d_1 \\ c_3 & c_2 & -c_1 & c_0 & -d_3 & -d_2 & -d_1 & d_0 \\ d_0 & -d_1 & -d_2 & -d_3 & c_0 & -c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_0 & d_3 & -d_2 & c_1 & c_0 & -c_3 & c_2 \\ d_2 & -d_3 & -d_0 & -d_1 & c_2 & -c_3 & c_0 & c_1 \\ d_3 & d_2 & d_1 & -d_0 & c_3 & c_2 & -c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathcal{R}(P)\overrightarrow{X}.$$

iii.

$$\overrightarrow{QXP} = \mathcal{L}(Q)\overrightarrow{XP} = \mathcal{L}(Q)\mathcal{R}(P)\overrightarrow{X} = \mathcal{R}(P)\overrightarrow{QX} = \mathcal{R}(P)\mathcal{L}(Q)\overrightarrow{X}.$$

iv.

$$\det(\mathcal{L}(Q)) = \det\begin{bmatrix} L(a) & -L(b^*) \\ L(b) & L(a^*) \end{bmatrix} = \det(L(a)L(a_*) + L(b_*)L(b))$$

$$= \det(L(aa_* + b_*b)) = (I_{aa_*+b_*b})^2,$$

$$\det(\mathcal{R}(Q)) = \det\begin{bmatrix} R(a) & -R(b)I_* \\ R(b)I_* & R(a) \end{bmatrix} = \det(R(a)R(a) + R(b)I_*R(b)I_*)$$

$$= \det(R(a)R(a) + R(b)R(b_*)) = \det(R(a^2 + bb_*)) = (I_{a^2+bb_*})^2.$$

□

4.2. Kompleks Split Kuaterniyon Matrisleri

Elemanları kompleks split kuaterniyon olan $m \times n$ tipindeki matrisler kümesi $M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ ile gösterilir. Eğer $m = n$ ise $M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ ile gösterilir. Standart matris toplamı ve çarpımı tanımlıdır ve bu işlemlerle birlikte $M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ birim elemanlı bir halkadır.

4.2.1 Kompleks split kuaterniyon matrisleri üzerinde temel işlemler

Kompleks split kuaterniyon matrislerinin toplamı: $A = (A)_{ij}$, $B = (B)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ matrislerinin toplamı

$$A + B = (A + B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

olarak tanımlanır.

Kompleks split kuaterniyon matrislerinin çarpımı: $A = (A)_{ij}$, $B = (B)_{jk}$ sırasıyla $m \times n$ ve $n \times p$ tipinde kompleks split kuaterniyon matrisler olmak üzere,

$$AB = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj}$$

şeklinde tanımlıdır.

Kompleks split kuaterniyon matrisinin skalerle çarpımı: Her $A=(A)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ ve $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ için, skalerle sağdan ve soldan çarpım sırasıyla

$$A\lambda = (A\lambda)_{ij} = (A)_{ij}\lambda \text{ ve } \lambda A = (\lambda A)_{ij} = \lambda(A)_{ij}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca $A \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}})$, $B \in M_{n\times p}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ ve λ, $\mu \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ için,

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B,\ (A\lambda)B = A(\lambda B),\ (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

eşitlikleri sağlanır. Yani $M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ skalerle sağ ve sol çarpıma göre ayrı ayrı $\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ üzerinde vektör uzayıdır (Erdoğdu ve Özdemir 2013-2).

Kompleks split kuaterniyon matrisinin eşleniği: $A{=}(A)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ olmak üzere, A'nın eşleniği

$$\overline{A} = \overline{(A)_{ij}} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$$

olarak tanımlıdır.

Kompleks split kuaterniyon matrisinin transpozesi: $A{=}(A)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ için, A'nın transpozesi (devriği)

$$A^T = (A)_{ji} \in M_{n\times m}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$$

şeklinde tanımlıdır.

Kompleks split kuaterniyon matrisinin eşlenik transpozesi: Her $A{=}(A)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ için, A'nın eşlenik transpozesi

$$A^* = (\overline{A})^T \in M_{n\times m}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$$

şeklinde tanımlıdır.

Ayrıca her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ kare matrisi için,

Eğer $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris;

Eğer $A = A^*$ ise A matrisine Hermityan matris;

Eğer $AA^* = I$ ise A matrisine üniter matris adı verilir.

Kompleks split kuaterniyon matrisinin tersi: A, $B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ için, eğer

$$AB = BA = I_n$$

ise, A kompleks split kuaterniyon matrisinin tersi vardır denir. Ayrıca B matrisine A'nın tersi adı verilir (Erdoğdu ve Özdemir 2013b).

4.2.2. Kompleks split kuaterniyon matrislerinin özellikleri

Kompleks matrislerinin bir kısım özelliğinin split kuaterniyon matrisleri için sağlanmadığını 3. kısımda görmüştük. Aşağıda verilen örnek ve teorem, bu tür bir genelleştirmenin kompleks split kuaterniyon matrisleri için her zaman doğru olmayacağını gösterir.

Örnek 4.2.2.1. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b)

$$A=\begin{bmatrix}(1+\mathbf{i})i & (1+\mathbf{i})j\\ 0 & (1+\mathbf{i})k\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}(1+\mathbf{i})i & (1+\mathbf{i})k\\ 0 & (1+\mathbf{i})j\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}i & (1+\mathbf{i})j\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

kompleks split kuaterniyon matrisleri için aşağıdakiler sağlanır;

$$(C^{*})^{-1}=\begin{bmatrix}i & 0\\ (-1-\mathbf{i})k & 1\end{bmatrix}\text{ ve }(C^{-1})^{*}=\begin{bmatrix}-i & 0\\ 1 & (\mathbf{i}-1)k\end{bmatrix}\Rightarrow(C^{*})^{-1}\neq(C^{-1})^{*},$$

$$\left(\overline{A}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(1-\mathbf{i})i & \mathbf{i}-1\\ 0 & (-1-\mathbf{i})k\end{bmatrix}\text{ ve }\overline{(A^{-1})}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(1-\mathbf{i})i & 1-\mathbf{i}\\ 0 & (-1-\mathbf{i})k\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\left(\overline{A}\right)^{-1}\neq\overline{(A^{-1})},$$

$$\left(A^{T}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(\mathbf{i}-1)i & 0\\ \mathbf{i}-1 & (1+\mathbf{i})k\end{bmatrix}\text{ ve }\left(A^{-1}\right)^{T}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(\mathbf{i}-1)i & 0\\ 1-\mathbf{i} & (1+\mathbf{i})k\end{bmatrix}=\left(A^{-1}\right)^{T}$$

$$\Rightarrow(A^{-1})^{T}\neq(A^{T})^{-1},$$

$$\overline{AB}=\begin{bmatrix}-2\mathbf{i} & 2+(2\mathbf{i})j\\ 0 & -2i\end{bmatrix}\text{ ve }\overline{A}\;\overline{B}=\begin{bmatrix}-2i & 2-(2\mathbf{i})j\\ 0 & 2i\end{bmatrix}\Rightarrow\overline{AB}\neq\overline{A}\;\overline{B},$$

$$(AB)^{T}=\begin{bmatrix}-2\mathbf{i} & 0\\ 2-(2\mathbf{i})j & 2i\end{bmatrix}\text{ ve }B^{T}A^{T}=\begin{bmatrix}-2\mathbf{i} & 0\\ 2+2j & -2i\end{bmatrix}\Rightarrow(AB)^{T}\neq B^{T}A^{T},$$

$$(AB)^{*}=\begin{bmatrix}-2\mathbf{i} & 0\\ 2+(2\mathbf{i})j & -2i\end{bmatrix}\text{ ve }B^{*}A^{*}=\begin{bmatrix}-2\mathbf{i} & 0\\ 2+2j & -2i\end{bmatrix}\Rightarrow(AB)^{*}\neq B^{*}A^{*}.$$

Sonuç 4.2.2.1. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b) A, $B\in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır;

i. Eğer A matrisinin tersi var ise $(A^{-1})^{*}\neq(A^{*})^{-1}$ (genel olarak),

ii. Eğer A matrisinin tersi var ise $\overline{(A^{-1})}\neq(\overline{A})^{-1}$ (genel olarak),

iii. Eğer A matrisinin tersi var ise $(A^{-1})^T \neq (A^T)^{-1}$ (genel olarak),

iv. $\overline{AB} \neq \overline{A}\ \overline{B}$ (genel olarak),

v. $(AB)^T \neq B^T\ A^T$ (genel olarak).

Teorem 4.2.2.1. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b) Her $A, B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ için, aşağıdaki özellikler sağlanır;

i. $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$,

ii. Eğer A ve B matrislerinin tersi var ise $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

İspat. $A = (A_{st})$ ve $B = (B_{st}) \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ olsun.

i. $\left(\overline{A}\right)^T = \left(\overline{A_{st}}\right)^T = (\overline{A_{ts}}) = \overline{(A^T)}$.

ii. Eğer A ve B matrislerinin tersi var ise

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I_n \text{ ve } (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = I_n$$

elde edilir. Dolayısıyla AB matrisinin de tersi vardır ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir. $\square$

Önerme 4.2.2.1. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b) $A, B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ olsun. Eğer $AB = I_n$ ise $BA = I_n$'dır.

İspat. $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $A = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 i + \mathbf{A}_2 j + \mathbf{A}_3 k$, $B = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 i + \mathbf{B}_2 j + \mathbf{B}_3 k \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ olsun. Kabul edelim ki $AB = I_n$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
AB &= (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 i + \mathbf{A}_2 j + \mathbf{A}_3 k)(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 i + \mathbf{B}_2 j + \mathbf{B}_3 k) \\
&= (\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B_2}} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_3}) + (\mathbf{A}_0\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_3} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_2})i \\
&+ (\mathbf{A}_0\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_3 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B_0}} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_1})j + (\mathbf{A}_0\mathbf{B}_3 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_0})k \\
&= I_n
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B_2}} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_3} &= I_n, \\
\mathbf{A}_0\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_3} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_2} &= 0_n, \\
\mathbf{A}_0\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_3 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B_0}} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_1} &= 0_n, \\
\mathbf{A}_0\mathbf{B}_3 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_0} &= 0_n
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Elde edilen dört eşitlik kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A_2}} & -\overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_0} & -\overline{\mathbf{A}_1} \\ \overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} & \overline{\mathbf{A}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \\ -\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & -\mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2 \\ \overline{\mathbf{B_2}} & -\overline{\mathbf{B}_3} & \overline{\mathbf{B}_0} & -\overline{\mathbf{B}_1} \\ \overline{\mathbf{B}_3} & \overline{\mathbf{B}_2} & \overline{\mathbf{B}_1} & \overline{\mathbf{B}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matrisler, $M_{4n}(\mathbb{C})$'nun elemanları olduğundan,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \\ -\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & -\mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2 \\ \overline{\mathbf{B_2}} & -\overline{\mathbf{B}_3} & \overline{\mathbf{B}_0} & -\overline{\mathbf{B}_1} \\ \overline{\mathbf{B}_3} & \overline{\mathbf{B}_2} & \overline{\mathbf{B}_1} & \overline{\mathbf{B}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A_2}} & -\overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_0} & -\overline{\mathbf{A}_1} \\ \overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} & \overline{\mathbf{A}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla

$$\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A_2}} + \mathbf{B}_3\overline{\mathbf{A}_3} = I_n,$$

$$\mathbf{B}_0\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_3} + \mathbf{B}_3\overline{\mathbf{A}_2} = 0_n,$$

$$\mathbf{B}_0\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A_0}} + \mathbf{B}_3\overline{\mathbf{A}_1} = 0_n,$$

$$\mathbf{B}_0\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_1\mathbf{A_2} - \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_1} + \mathbf{B}_3\overline{\mathbf{A}_0} = 0_n$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} I_n &= \mathbf{B}_0\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A_2}} + \mathbf{B}_3\overline{\mathbf{A}_3} \\ &\quad + (\mathbf{B}_0\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_3} + \mathbf{B}_3\overline{\mathbf{A}_2})i \\ &\quad + (\mathbf{B}_0\mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_1\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A_0}} + \mathbf{B}_3\overline{\mathbf{A}_1})j \\ &\quad + (\mathbf{B}_0\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_1\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\overline{\mathbf{A}_1} + \mathbf{B}_3\overline{\mathbf{A}_0})k \\ &= (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 i + \mathbf{B}_2 j + \mathbf{B}_3 k)(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 i + \mathbf{A}_2 j + \mathbf{A}_3 k) \\ &= BA \end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat biter. □

4.2.3. Kompleks split kuaterniyon matrisinin kompleks adjoint matrisi

Tanım 4.2.3.1. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b) $A = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 i + \mathbf{A}_2 j + \mathbf{A}_3 k \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ olsun öyle ki $\mathbf{A}_0,\ \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \mathbf{A}_3 \in M_n(\mathbb{C})$. $4n \times 4n$ tipindeki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2} & -\overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_0} & -\overline{\mathbf{A}_1} \\ \overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} & \overline{\mathbf{A}_0} \end{bmatrix}$$

kompleks matrise A'nın kompleks adjoint matrisi adı verilir ve χ_A ile gösterilir.

Teorem 4.2.3.1. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b) Her $A,\ B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ için, aşağıdakiler sağlanır;

i. $\chi_{I_n} = I_{4n}$,

ii. $\chi_{A+B} = \chi_A + \chi_B$,

iii. $\chi_{AB} = \chi_A \chi_B$,

iv. Eğer A matrisinin tersi var ise $(\chi_A)^{-1} = \chi_{A^{-1}}$.

İspat. $A = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 i + \mathbf{A}_2 j + \mathbf{A}_3 k,\ B = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 i + \mathbf{B}_2 j + \mathbf{B}_3 k \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ olsun öyle ki $\mathbf{A}_0,\ \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \mathbf{A}_3,\ \mathbf{B}_0,\ \mathbf{B}_1,\ \mathbf{B}_2,\ \mathbf{B}_3 \in M_n(\mathbb{C})$.

i.

$$\chi_{I_n} = \chi_{I_n + 0_n i + 0_n j + 0_n k} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix} = I_{4n}.$$

ii. $A + B = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0) + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)i + (\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2)j + (\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3)k$ olduğundan

$$\chi_{A+B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3 \\ -(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) & \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0 & -(\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3) & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 \\ \overline{(\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2)} & -\overline{(\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3)} & \overline{(\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0)} & -\overline{(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)} \\ \overline{(\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3)} & \overline{(\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2)} & \overline{(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)} & \overline{(\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0)} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A_2}} & -\overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_0} & -\overline{\mathbf{A}_1} \\ \overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} & \overline{\mathbf{A}_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \\ -\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & -\mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2 \\ \overline{\mathbf{B_2}} & -\overline{\mathbf{B}_3} & \overline{\mathbf{B}_0} & -\overline{\mathbf{B}_1} \\ \overline{\mathbf{B}_3} & \overline{\mathbf{B}_2} & \overline{\mathbf{B}_1} & \overline{\mathbf{B}_0} \end{bmatrix}
$$

$$
= \chi_A + \chi_B.
$$

olarak elde edilir.

iii. AB matrisinin kompleks adjoint matrisini

$$
\chi_{AB} = \begin{bmatrix} \chi_{AB_{11}} & \chi_{AB_{12}} & \chi_{AB_{13}} & \chi_{AB_{14}} \\ \chi_{AB_{21}} & \chi_{AB_{22}} & \chi_{AB_{23}} & \chi_{AB_{24}} \\ \chi_{AB_{31}} & \chi_{AB_{32}} & \chi_{AB_{33}} & \chi_{AB_{34}} \\ \chi_{AB_{41}} & \chi_{AB_{42}} & \chi_{AB_{43}} & \chi_{AB_{44}} \end{bmatrix}
$$

ile gösterelim.

$$
AB = (\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B_2}} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_3}) + (\mathbf{A}_0\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_3} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_2})i
$$

$$
+ (\mathbf{A}_0\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_3 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B_0}} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_1})j + (\mathbf{A}_0\mathbf{B}_3 + \mathbf{A}_1\mathbf{B} - \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_1} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_0})k
$$

olduğundan, buradaki, $n \times n$ tipindeki kompleks matrisler

$$
\chi_{AB_{11}} = \mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_1\mathbf{B_1} + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_2} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B_3}},
$$

$$
\chi_{AB_{12}} = \mathbf{A}_0\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_3} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_2}\mathbf{,}
$$

$$
\chi_{AB_{13}} = \mathbf{A}_0\mathbf{B_2} - \mathbf{A}_1\mathbf{B_3} + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_0} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_1},
$$

$$
\chi_{AB_{14}} = \mathbf{A_0}\mathbf{B_3} + \mathbf{A_1}\mathbf{B_2} - \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_1}} + \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B_0}},
$$

$$
\chi_{AB_{21}} = -\mathbf{A}_0\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_3} - \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_2},
$$

$$
\chi_{AB_{22}} = \mathbf{A_0}\mathbf{B_0} - \mathbf{A_1}\mathbf{B_1} + \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_2}} + \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B_3}},
$$

$$
\chi_{AB_{23}} = -\mathbf{A}_0\mathbf{B_3} - \mathbf{A_1}\mathbf{B_2} + \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_1}} - \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B_0}},
$$

$$
\chi_{AB_{24}} = \mathbf{A_0}\mathbf{B_2} - \mathbf{A_1}\mathbf{B_3} + \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_0}} + \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B}_1},
$$

$$\chi_{AB_{31}} = \overline{\mathbf{A_0}}\;\overline{\mathbf{B_2}} - \overline{\mathbf{A_1}}\;\overline{\mathbf{B_3}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_0} + \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_1},$$

$$\chi_{AB_{32}} = -\overline{\mathbf{A_0}}\;\overline{\mathbf{B_3}} - \overline{\mathbf{A_1}}\;\overline{\mathbf{B_2}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_1} - \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_0},$$

$$\chi_{AB_{33}} = \overline{\mathbf{A_0}}\;\overline{\mathbf{B_0}} - \overline{\mathbf{A_1}}\;\overline{\mathbf{B_1}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_2} + \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_3},$$

$$\chi_{AB_{34}} = -\overline{\mathbf{A_0}\mathbf{B_1}} - \overline{\mathbf{A_1}\mathbf{B_0}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_3} - \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_2},$$

$$\chi_{AB_{41}} = \overline{\mathbf{A_0}}\;\overline{\mathbf{B_3}} + \overline{\mathbf{A_1}}\;\overline{\mathbf{B_2}} - \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_1} + \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_0},$$

$$\chi_{AB_{42}} = \overline{\mathbf{A_0}}\;\overline{\mathbf{B_2}} - \overline{\mathbf{A_1}}\;\overline{\mathbf{B_3}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_0} + \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_1},$$

$$\chi_{AB_{43}} = \overline{\mathbf{A}_0}\;\overline{\mathbf{B_1}} + \overline{\mathbf{A}_1}\;\overline{\mathbf{B}_0} - \overline{\mathbf{A}_2}\mathbf{B_3} + \overline{\mathbf{A}_3}\mathbf{B_2},$$

$$\chi_{AB_{44}} = \overline{\mathbf{A_0}\mathbf{B_0}} - \overline{\mathbf{A_1}\mathbf{B_1}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_2} + \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_3}$$

şeklinde olacaktır. Diğer yandan,

$$\chi_A\chi_B = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} & \chi_{14} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} & \chi_{24} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} & \chi_{34} \\ \chi_{41} & \chi_{42} & \chi_{43} & \chi_{44} \end{bmatrix}$$

ile gösterelim. Buradaki $n \times n$ tipindeki kompleks matrisler ise

$$\chi_{11} = \mathbf{A_0}\mathbf{B_0} - \mathbf{A_1}\mathbf{B_1} + \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_2}} + \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B_3}},$$

$$\chi_{12} = \mathbf{A_0}\mathbf{B_1} + \mathbf{A_1}\mathbf{B_0} - \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_3}} + \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B_2}},$$

$$\chi_{13} = \mathbf{A_0}\mathbf{B_2} - \mathbf{A_1}\mathbf{B_3} + \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_0}} + \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B_1}},$$

$$\chi_{14} = \mathbf{A_0}\mathbf{B_3} + \mathbf{A_1}\mathbf{B_2} - \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_1}} + \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B_0}},$$

$$\chi_{21} = -\mathbf{A_0}\mathbf{B_1} - \mathbf{A_1}\mathbf{B_0} + \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_3}} - \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B_2}},$$

$$\chi_{22} = \mathbf{A_0}\mathbf{B_0} - \mathbf{A_1}\mathbf{B_1} + \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_2}} + \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B_3}},$$

$$\chi_{23} = -\mathbf{A_0}\mathbf{B_3} - \mathbf{A_1}\mathbf{B_2} + \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_1}} - \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B_0}},$$

$$\chi_{24} = \mathbf{A_0}\mathbf{B_2} - \mathbf{A_1}\mathbf{B_3} + \mathbf{A_2}\overline{\mathbf{B_0}} + \mathbf{A_3}\overline{\mathbf{B_1}},$$

$$\chi_{31} = \overline{\mathbf{A_0}}\ \overline{\mathbf{B_2}} - \overline{\mathbf{A_1}}\ \overline{\mathbf{B_3}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_0} + \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_1},$$

$$\chi_{32} = -\overline{\mathbf{A_0}}\ \overline{\mathbf{B_3}} - \overline{\mathbf{A_1}}\ \overline{\mathbf{B_2}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_1} - \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_0},$$

$$\chi_{33} = \overline{\mathbf{A_0}}\ \overline{\mathbf{B_0}} - \overline{\mathbf{A_1}}\ \overline{\mathbf{B_1}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_2} + \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_3},$$

$$\chi_{34} = -\overline{\mathbf{A_0}}\ \overline{\mathbf{B_1}} - \overline{\mathbf{A_1}}\ \overline{\mathbf{B_0}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_3} - \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_2},$$

$$\chi_{41} = \overline{\mathbf{A_0}}\ \overline{\mathbf{B_3}} + \overline{\mathbf{A_1}}\ \overline{\mathbf{B_2}} - \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_1} + \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_0},$$

$$\chi_{42} = \overline{\mathbf{A_0}}\ \overline{\mathbf{B_2}} - \overline{\mathbf{A_1}}\ \overline{\mathbf{B_3}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_0} + \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_1},$$

$$\chi_{43} = \overline{\mathbf{A_0}}\ \overline{\mathbf{B_1}} + \overline{\mathbf{A_1}}\ \overline{\mathbf{B_0}} - \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_3} + \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_2},$$

$$\chi_{44} = \overline{\mathbf{A_0}}\ \overline{\mathbf{B_0}} - \overline{\mathbf{A_1}}\ \overline{\mathbf{B_1}} + \overline{\mathbf{A_2}}\mathbf{B_2} + \overline{\mathbf{A_3}}\mathbf{B_3}$$

elde edilir. Her $i,\ j = 1, 2, 3, 4$ için $\chi_{AB_{ij}} = \chi_{ij}$ olduğundan, $\chi_{AB} = \chi_A\chi_B$ elde edilir.

iv. Eğer A matrisinin tersi var ise $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$' dir. i. ve iii. özelliklerden

$$I_{4n} = \chi_{I_n} = \chi_{AA^{-1}} = \chi_A\ \chi_{A^{-1}}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $(\chi_A)^{-1} = \chi_{A^{-1}}$'dir. □

Teorem 4.2.3.1. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b) Her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ için, eğer χ_A matrisinin tersi var ise A matrisinin de tersi vardır.

İspat. $A = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 i + \mathbf{A}_2 j + \mathbf{A}_3 k \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ olsun öyle ki $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 \in M_n(\mathbb{C})$. Burada A matrisinin kompleks adjoint matrisi

$$\chi_A = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A_2}} & -\overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_0} & -\overline{\mathbf{A}_1} \\ \overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} & \overline{\mathbf{A}_0} \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Kabul edelim ki χ_A matrisinin tersi olsun. Dolayısıyla bir $\widetilde{\mathbf{B}} \in M_{4n}(\mathbb{C})$ matrisi vardır öyle ki $\chi_A\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{B}}\chi_A = I_{4n}$. Burada $\widetilde{\mathbf{B}}$ matrisini

$$
\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} & \mathbf{B}_{14} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} & \mathbf{B}_{24} \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{B}_{33} & \mathbf{B}_{34} \\ \mathbf{B}_{41} & \mathbf{B}_{42} & \mathbf{B}_{43} & \mathbf{B}_{44} \end{bmatrix}
$$

ile gösterelim öyle ki her i, $j = 1, 2, 3, 4$ için $\mathbf{B}_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$. $\chi_A \widetilde{\mathbf{B}} = I_{4n}$ eşitliği

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A_2}} & -\overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_0} & -\overline{\mathbf{A}_1} \\ \overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} & \overline{\mathbf{A}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} & \mathbf{B}_{14} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} & \mathbf{B}_{24} \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{B}_{33} & \mathbf{B}_{34} \\ \mathbf{B}_{41} & \mathbf{B}_{42} & \mathbf{B}_{43} & \mathbf{B}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \end{bmatrix}
$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$
\mathbf{A}_0\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{21} + \mathbf{A}_2\mathbf{B_{31}} + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_{41} = I_n,
$$

$$
\mathbf{A}_0\mathbf{B}_{21} - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_{41} - \mathbf{A}_3\mathbf{B}_{31} = 0_n,
$$

$$
\overline{\mathbf{A}_0}\mathbf{B}_{31} - \overline{\mathbf{A}_1}\mathbf{B}_{41} + \overline{\mathbf{A}_2}\mathbf{B_{11}} - \overline{\mathbf{A}_3}\mathbf{B}_{21} = 0_n,
$$

$$
\overline{\mathbf{A}_0}\mathbf{B}_{41} + \overline{\mathbf{A}_1}\mathbf{B}_{31} + \overline{\mathbf{A}_2}\mathbf{B}_{21} + \overline{\mathbf{A}_3}\mathbf{B}_{11} = 0_n
$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikler kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
I_n = {} & \mathbf{A}_0\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{21} + \mathbf{A}_2\mathbf{B_{31}} + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_{41} \\
& + (-\mathbf{A}_0\mathbf{B}_{21} + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{11} - \mathbf{A}_2\mathbf{B}_{41} + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_{31})i \\
& + (\overline{\mathbf{A}_0}\mathbf{B}_{31} - \overline{\mathbf{A}_1}\mathbf{B}_{41} + \overline{\mathbf{A}_2}\mathbf{B_{11}} - \overline{\mathbf{A}_3}\mathbf{B}_{21})j \\
& + (\mathbf{A}_0\overline{\mathbf{B}_{41}} + \mathbf{A}_1\overline{\mathbf{B}_{31}} + \mathbf{A}_2\overline{\mathbf{B}_{21}} + \mathbf{A}_3\overline{\mathbf{B}_{11}})k
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Eğer

$$
B = \mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{21}i + \overline{\mathbf{B_{31}}}j + \overline{\mathbf{B}_{41}}k
$$

alınırsa, yukarıda elde edilen eşitlik $AB = I_n$ eşitliğine denk olacaktır. Önerme 4.2.2.1'den $BA = I_n$ eşitliği de sağlanır. Dolayısıyla A matrisinin tersi vardır. $\square$

Sonuç 4.2.3.1. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b) $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}_\mathbb{C}})$ olsun. A matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter şart χ_A matrisinin tersinin olmasıdır.

4.2.4. Kompleks split kuaterniyon matrislerinin özdeğerleri

Tanım 4.2.4.1. $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ ve $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ olsun. Eğer

$$Ax = \lambda x$$

eşitliğini sağlayan en az bir sıfırdan farklı x kompleks split kuaterniyon kolon vektörü varsa λ'ya A'nın sol özdeğeri denir. A'nın sol özdeğerleri kümesi

$$\sigma_l(A) = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}} : Ax = \lambda x,\ x \neq 0\}$$

ile gösterilir ve A'nın sol spektrumu olarak adlandırılır. Eğer

$$Ax = x\lambda$$

eşitliğini sağlayan en az bir sıfırdan farklı x kompleks split kuaterniyon kolon vektörü varsa λ'ya A'nın sağ özdeğeri denir. A' nın sağ özdeğerleri kümesi

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}} : Ax = x\lambda,\ x \neq 0\}$$

ile gösterilir ve A'nın sağ spektrumu olarak adlandırılır.

Teorem 4.2.4.1. Her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ için,

$$\sigma_r(A) \cap \mathbb{C} = \sigma(\chi_A)$$

eşitliği sağlanır. Burada $\sigma(\chi_A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \chi_A y = \lambda y, y \neq 0\}$ ise χ_A matrisinin spekturumudur.

İspat. $A = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 i + \mathbf{A}_2 j + \mathbf{A}_3 k \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$, A matrisinin bir sağ özdeğeri olsun. O halde en az bir sıfırdan farklı $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ kompleks split kuaterniyon kolon vektörü için

$$Ax = x\lambda$$

eşitliği sağlanır. Burada x_0, x_1, x_2, x_3 sıfırdan farklı kompleks kolon vektörleri ve $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3 \in M_n(\mathbb{C})$'dir. Bu eşitliği açarsak

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 i + \mathbf{A}_2 j + \mathbf{A}_3 k)(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)\lambda$$

$$(\mathbf{A}_0 x_0 - \mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 \overline{x_2} + \mathbf{A}_3 \overline{x_3}) + (\mathbf{A}_0 x_1 + \mathbf{A}_1 x_0 - \mathbf{A}_2 \overline{x_3} + \mathbf{A}_3 \overline{x_2})i$$

$$+(\mathbf{A}_0 x_2 - \mathbf{A}_1 x_3 + \mathbf{A}_2 \overline{x_0} + \mathbf{A}_3 \overline{x_1})j + (\mathbf{A}_0 x_3 + \mathbf{A}_1 x_2 - \mathbf{A}_2 \overline{x_1} + \mathbf{A}_3 \overline{x_0})k$$

$$= (x_0\lambda) + (x_1\lambda)i + (x_2\overline{\lambda})j + (x_3\overline{\lambda})k$$

elde ederiz. Buradan

$$\mathbf{A}_0 x_0 - \mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 \overline{x_2} + \mathbf{A}_3 \overline{x_3} = \lambda x_0,$$

$$\mathbf{A}_0 x_1 + \mathbf{A}_1 x_0 - \mathbf{A}_2 \overline{x_3} + \mathbf{A}_3 \overline{x_2} = \lambda x_1,$$

$$\mathbf{A}_0 x_2 - \mathbf{A}_1 x_3 + \mathbf{A}_2 \overline{x_0} + \mathbf{A}_3 \overline{x_1} = \overline{\lambda} x_2,$$

$$\mathbf{A}_0 x_3 + \mathbf{A}_1 x_2 - \mathbf{A}_2 \overline{x_1} + \mathbf{A}_3 \overline{x_0} = \overline{\lambda} x_3$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 \\ \overline{\mathbf{A}_2} & -\overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_0} & -\overline{\mathbf{A}_1} \\ \overline{\mathbf{A}_3} & \overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} & \overline{\mathbf{A}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak A matrisinin kompleks sağ özdeğerleri kümesinin keyfi bir λ elemanı aynı zamanda χ_A matrisinin özdeğeridir. Yani

$$\sigma_r(A) \cap \mathbb{C} \subseteq \sigma(\chi_A)$$

olduğu elde edilir. $\sigma_r(A) \cap \mathbb{C} \supseteq \sigma(\chi_A)$ olduğu ise yukarıdaki işlemler tersine yapıldığında kolayca görülür. Sonuç olarak $\sigma_r(A) \cap \mathbb{C} = \sigma(\chi_A)$ eşitliği elde edilir. $\square$

Bu teorem ile her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ kompleks split kuaterniyon matrisinin sağ özdeğerin varlığını ve A matrisinin en fazla $4n$ tane farklı kompleks sağ özdeğerinin olduğunu ispat ettik. Ayrıca, teoremin ispatı ile A matrisinin kompleks sağ özdeğerine karşılık gelen özvektör ile χ_A nın özvektörü arasındaki ilişki de görülür.

Örnek 4.2.4.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1+\mathbf{i} \\ 1-\mathbf{i} & \mathbf{i} \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} -\mathbf{i} & 1+\mathbf{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} k$$

kompleks split kuaterniyon matrisinin kompleks adjoint matrisi

$$\chi_A = \begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mathbf{i} & -\mathbf{i} & 1+\mathbf{i} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1-\mathbf{i} & \mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mathbf{i} & 0 & \mathbf{i} & -1-\mathbf{i} & 0 & 1+\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1-\mathbf{i} & \mathbf{i} \\ 0 & 1-\mathbf{i} & -i & -1+\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 \\ 1+\mathbf{i} & -\mathbf{i} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 0 & 1-\mathbf{i} & 0 & 0 & 1-\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mathbf{i} & -\mathbf{i} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Kompleks adjoint matrisin özdeğerler kümesi ise

$$\{1+\sqrt{2}\mathbf{i},\ 1-\sqrt{2}\mathbf{i},\ -1+\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2},\ 2+\mathbf{i},\ 2-\mathbf{i},\ \mathbf{i},\ -\mathbf{i}\}$$

olarak elde edilir. Özel olarak $\lambda = 2 + \mathbf{i}$ özdeğerine karşılık gelen özvektör ise

$$(2\mathbf{i},\ \mathbf{i},\ 2,\ 1,\ 0,\ \mathbf{i},\ 0,\ 1)$$

şeklindedir. O halde A matrisinin $\lambda = 2 + \mathbf{i}$ sağ özdeğerine karşılık gelen özvektörü ise

$$x = \begin{bmatrix} 2\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} k$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.4.2. $A = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 i + \mathbf{A}_2 j + \mathbf{A}_3 k \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ olsun. $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ değeri A matrisinin sol özdeğeridir ancak ve ancak $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{C}^n$ vektörleri vardır öyle ki

$$\max\{\|x_0\|_\infty, \|x_1\|_\infty, \|x_2\|_\infty, \|x_3\|_\infty\} > 0,$$

$$(\chi_A - \chi_\Lambda)x = 0.$$

Burada

$$x = (x_0,\ \ -x_1,\ \overline{x_2},\ \overline{x_3})^T \in \mathbb{C}^{4n},$$

$$\Lambda = \lambda_0 I_n + \lambda_1 I_n + \lambda_2 I_n + \lambda_3 I_n \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$$

olarak tanımlı olup, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ kompleks kolon vektörü için

$$\|y\|_\infty = \max\{\|y_i\| : i = 1, 2, ..., n\}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. $\mathbf{A}_0,\ \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \mathbf{A}_3 \in M_n(\mathbb{C})$ ve $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $A = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 i + \mathbf{A}_2 j + \mathbf{A}_3 k \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ ve $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ olsun. $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ değeri A matrisinin sol özdeğeridir ancak ve ancak en az bir sıfırdan farklı $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ kompleks split kuaterniyon kolon vektörü ($\max\{\|x_0\|_\infty, \|x_1\|_\infty, \|x_2\|_\infty, \|x_3\|_\infty\} > 0$) için

$$\Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 i + \mathbf{A}_2 j + \mathbf{A}_3 k)(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)$$

$$= (\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k)(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)\lambda$$

Bu eşitliği açarsak

$$\mathbf{A}_0 x_0 - \mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{A}_2 \overline{x_2} + \mathbf{A}_3 \overline{x_3} = \lambda_0 x_0 - \lambda_1 x_1 + \lambda_2 \overline{x_2} + \lambda_3 \overline{x_3},$$

$$\mathbf{A}_0 x_1 + \mathbf{A}_1 x_0 - \mathbf{A}_2 \overline{x_3} + \mathbf{A}_3 \overline{x_2} = \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_0 - \lambda_2 \overline{x_3} + \lambda_3 \overline{x_2},$$

$$\mathbf{A}_0 x_2 - \mathbf{A}_1 x_3 + \mathbf{A}_2 \overline{x_0} + \mathbf{A}_3 \overline{x_1} = \lambda_0 x_2 - \lambda_1 x_3 + \lambda_2 \overline{x_0} + \lambda_3 \overline{x_1},$$

$$\mathbf{A}_0 x_3 + \mathbf{A}_1 x_2 - \mathbf{A}_2 \overline{x_1} + \mathbf{A}_3 \overline{x_0} = \lambda_0 x_3 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 \overline{x_1} + \lambda_3 \overline{x_0}$$

elde ederiz. Bu eşitlikleri blok matrisler olarak

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 - \lambda_0 I_n & \mathbf{A}_1 - \lambda_1 I_n & \mathbf{A}_2 - \lambda_2 I_n & \mathbf{A}_3 - \lambda_3 I_n \\ \lambda_1 I_n - \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 - \lambda_0 I_n & \lambda_3 I_n - \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 - \lambda_2 I_n \\ \mathbf{A}_2 - \lambda_2 I_n & \lambda_3 I_n - \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_0 - \lambda_0 I_n & \lambda_1 I_n - \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_3 - \lambda_3 I_n & \mathbf{A}_2 - \lambda_2 I_n & \mathbf{A}_1 - \lambda_1 I_n & \mathbf{A}_0 - \lambda_0 I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabilir. $(\chi_A - \chi_\Lambda)x = 0$ olduğu görülür ve ispat biter. □

4.2.5. Kompleks split kuaterniyon matrislerinin tersinin bulunması

$A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}})$ matrisinin tersi var ise Teorem 4.2.3.1 gereği χ_A matrisinin de tersi vardır.

$$(\chi_A)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} & \mathbf{B}_{14} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} & \mathbf{B}_{24} \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{B}_{33} & \mathbf{B}_{34} \\ \mathbf{B}_{41} & \mathbf{B}_{42} & \mathbf{B}_{43} & \mathbf{B}_{44} \end{bmatrix}$$

ise öyle ki her i, $j = 1, 2, 3, 4$ için $\mathbf{B}_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$, A matrisinin tersi ise

$$A^{-1} = \mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{21} i + \overline{\mathbf{B}_{\mathbf{31}}} j + \overline{\mathbf{B}_{41}} k$$

olarak elde edilir (Erdoğdu ve Özdemir 2013b).

Örnek 4.2.5.1. (Erdoğdu ve Özdemir 2013b)

$$A = \begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathbf{i} \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 0 & 1+\mathbf{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} k$$

kompleks split kuaterniyon matrisini ele alalım. A matrisinin kompleks adjoint matrisi

$$\chi_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1+\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mathbf{i} & 0 & 0 \\ -1-\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1-\mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 & -1+\mathbf{i} & 0 & 0 & -1+\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mathbf{i} & 0 & 0 & 1-\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Kompleks adjoint matrisin tersi ise

$$(\chi_A)^{-1}=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1+\mathbf{i} & -1+\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mathbf{i} & 0 & 0 \\ 1-\mathbf{i} & 0 & 0 & -1+\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1-\mathbf{i} & 1+\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-\mathbf{i} & 0 & 0 & -1-\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1-\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$B_{11}=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 0 & -1+\mathbf{i} \\ 0 & 0 \end{array}\right],\ B_{21}=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 1-\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$B_{31}=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1-\mathbf{i} \end{array}\right],\ B_{41}=\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

olduğu görülür. A matrisinin tersini

$$A^{-1}=\mathbf{B}_{11}-\mathbf{B}_{21}i+\overline{\mathbf{B_{31}}}j+\overline{\mathbf{B}_{41}}k$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 0 & -1+\mathbf{i} \\ 0 & 0 \end{array}\right]-\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 1-\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]i+\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathbf{i} \end{array}\right]j$$

olarak buluruz.

5. DUAL SPLİT KUATERNİYONLAR VE MATRİSLERİ

5.1. Dual Sayılar

Dual sayılar kümesi

$$\mathbb{D} = \{\mathsf{A} = a + \varepsilon a^* : a,\ a^* \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanır. Burada $\varepsilon^2 = 0$'dır. $\mathsf{A} = a + \varepsilon a^*$ ve $\mathsf{B} = b + \varepsilon b^*$ dual sayılarının toplamı ve çarpımı sırasıyla

$$\mathsf{A} + \mathsf{B} = (a + b) + \varepsilon(a^* + b^*) \text{ ve } \mathsf{AB} = (ab) + \varepsilon(ab^* + a^*b)$$

şeklinde tanımlıdır (Kula ve Yaylı 2006, Özkaldı ve Gündoğan 2009).

5.2. Dual Split Kuaterniyonlar

Dual split kuaterniyonlar kümesini

$$\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}} = \{\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k : \mathsf{Q}_0,\ \mathsf{Q}_1,\ \mathsf{Q}_2,\ \mathsf{Q}_3 \in \mathbb{D}\}$$

ile gösterelim. Burada imajiner birimler arasındaki ilişkiler

$$i^2 = -1,\ j^2 = k^2 = 1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = -i,\ ki = -ik = j,$$

$$\varepsilon i = i\varepsilon,\ \varepsilon j = j\varepsilon,\ \varepsilon k = k\varepsilon,\ \varepsilon^2 = 0$$

şeklindedir. Bu ilişkilerin bir sonucu olarak, her dual split kuaterniyon

$$\mathsf{Q} = q + \varepsilon q^* = q + q^* \varepsilon$$

şeklinde yazılabilir. Burada $q,\ q^* \in \widehat{\mathbb{H}}$'dır (Kula ve Yaylı 2006, Özkaldı ve Gündoğan 2009).

5.2.1. Dual split kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler

Dual split kuaterniyonun dual sayı kısmı: Her $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k$ $= q + \varepsilon q^*$ dual split kuaterniyonu için, Q'nun dual sayı kısmı

$$S_{\mathsf{Q}} = \mathsf{Q}_0 = S_q + \varepsilon S_{q^*}$$

olarak tanımlanır.

Dual split kuaterniyonun dual vektör kısmı: Her $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k$ $= q + \varepsilon q^*$ dual split kuaterniyonu için, Q'nun dual vektör kısmı

$$V_{\mathsf{Q}} = \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = V_q + \varepsilon V_{q^*}$$

şeklinde tanımlanır.

Dual split kuaterniyonların toplamı: $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ ve $P{=}P_0{+}P_1 i{+}P_2 j{+}P_3 k = p + \varepsilon p^*$ dual split kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned}\mathsf{Q} + \mathsf{P} &= S_{\mathsf{Q}} + S_{\mathsf{P}} + V_{\mathsf{Q}} + V_{\mathsf{P}} \\ &= \mathsf{Q}_0 + \mathsf{P}_0 + (\mathsf{Q}_1 + \mathsf{P}_1)i + (\mathsf{Q}_2 + \mathsf{P}_2)j + (\mathsf{Q}_3 + \mathsf{P}_3)k \\ &= q + p + \varepsilon(q^* + p^*)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Dual split kuaterniyonların çarpımı: $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ ve $P{=}P_0{+}P_1 i{+}P_2 j{+}P_3 k = p + \varepsilon p^*$ dual split kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned}\mathsf{QP} = &(\mathsf{Q}_0\mathsf{P}_0 - \mathsf{Q}_1\mathsf{P}_1 + \mathsf{Q}_2\mathsf{P}_2 + \mathsf{Q}_3\mathsf{P}_3) + (\mathsf{Q}_0\mathsf{P}_1 + \mathsf{Q}_1\mathsf{P}_0 + \mathsf{Q}_3\mathsf{P}_2 - \mathsf{Q}_2\mathsf{P}_3)i \\ &+ (\mathsf{Q}_0\mathsf{P}_2 + \mathsf{Q}_2\mathsf{P}_0 + \mathsf{Q}_3\mathsf{P}_1 - \mathsf{Q}_1\mathsf{P}_3)j + (\mathsf{Q}_0\mathsf{P}_3 + \mathsf{Q}_3\mathsf{P}_0 + \mathsf{Q}_1\mathsf{P}_2 - \mathsf{Q}_2\mathsf{P}_1)k \\ &= qp + \varepsilon(qp^* + q^*p)\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Dual split kuaterniyonun skalerle çarpımı: $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ dual split kuaterniyonu ile $\lambda \in \mathbb{R}$ skalerinin çarpımı

$$\lambda\mathsf{Q} = \mathsf{Q}\lambda = (\lambda\mathsf{Q}_0) + (\lambda\mathsf{Q}_1)i + (\lambda\mathsf{Q}_2)j + (\lambda\mathsf{Q}_3)k = (\lambda q) + \varepsilon(\lambda q^*)$$

olarak tanımlıdır.

Dual split kuaterniyonun Hamiltonian (kuaterniyon) eşleniği: Her $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ dual split kuaterniyonu için, Q'nun kuaterniyon eşleniği

$$\overline{\mathsf{Q}} = S_{\mathsf{Q}} - V_{\mathsf{Q}} = \mathsf{Q}_0 - \mathsf{Q}_1 i - \mathsf{Q}_2 j - \mathsf{Q}_3 k = \overline{q} + \varepsilon\overline{q^*}$$

şeklinde tanımlıdır.

Dual split kuaterniyonun normu: Her $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ dual split kuaterniyonu için, Q'nun normu ise

$$N_{\mathsf{Q}} = \mathsf{Q}\overline{\mathsf{Q}} = \overline{\mathsf{Q}}\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0^2 + \mathsf{Q}_1^2 - \mathsf{Q}_2^2 - \mathsf{Q}_3^2 = q\overline{q} + \varepsilon(q\overline{q^*} + q^*\overline{q})$$

şeklinde tanımlıdır.

Dual split kuaterniyonun tersi: Her $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ dual split kuaterniyonu için, eğer $I_q = q\overline{q} = \overline{q}q \neq 0$ ise Q' nu tersi vardır ve

$$\mathsf{Q}^{-1} = \frac{\overline{\mathsf{Q}}}{N_{\mathsf{Q}}} = q^{-1} - \varepsilon(q^{-1}q^*q^{-1}).$$

Dual vektör kısmın dual skaler çarpımı: $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ ve $\mathsf{P} = \mathsf{P}_0 + \mathsf{P}_1 i + \mathsf{P}_2 j + \mathsf{P}_3 k = p + \varepsilon p^*$ dual split kuaterniyonlarının dual vektör kısımlarının dual skaler çarpımı

$$\langle V_{\mathsf{Q}}, V_{\mathsf{P}} \rangle_{\mathbb{D}} = -\mathsf{Q}_1\mathsf{P}_1 + \mathsf{Q}_2\mathsf{P}_2 + \mathsf{Q}_3\mathsf{P}_3 = \frac{1}{2}(\overline{V_{\mathsf{Q}}}V_{\mathsf{P}} + \overline{V_{\mathsf{P}}}V_{\mathsf{Q}})$$

$$= \langle V_q, V_{\mathsf{p}} \rangle_{\mathbb{L}} + \varepsilon(\langle V_q, V_{p^*} \rangle_{\mathbb{L}} + \langle V_{q^*}, V_p \rangle_{\mathbb{L}})$$

olarak tanımlıdır.

Dual vektör kısmın dual vektörel çarpımı: $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ ve $\mathsf{P} = \mathsf{P}_0 + \mathsf{P}_1 i + \mathsf{P}_2 j + \mathsf{P}_3 k = p + \varepsilon p^*$ dual split kuaterniyonlarının, dual vektör kısımlarının dual vektörel çarpımı

$$V_{\mathsf{Q}} \times_{\mathbb{D}} V_{\mathsf{P}} = \frac{1}{2}(V_{\mathsf{Q}}V_{\mathsf{P}} - V_{\mathsf{P}}V_{\mathsf{Q}})$$

şeklinde tanımlıdır.

5.2.2. Dual split kuaterniyonların dual matris temsilleri

Her $\mathsf{Q} \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ için,

$$\mathcal{G}_{\mathsf{Q}} : \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}} \to \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$$

$$\mathcal{G}_{\mathsf{Q}}(\mathsf{P}) = \mathsf{QP}$$

lineer dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşüm birebir eşlemedir ve $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ dual split kuaterniyonu için

$$\mathcal{G}_{\mathsf{Q}}(1) = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k,$$

$$\mathcal{G}_{\mathsf{Q}}(i) = -\mathsf{Q}_1 + \mathsf{Q}_0 i + \mathsf{Q}_3 j - \mathsf{Q}_2 k,$$

$$\mathcal{G}_{\mathsf{Q}}(j) = \mathsf{Q}_2 + \mathsf{Q}_3 i + \mathsf{Q}_0 j + \mathsf{Q}_1 k,$$

$$\mathcal{G}_{\mathsf{Q}}(k) = \mathsf{Q}_3 - \mathsf{Q}_2 i - \mathsf{Q}_1 j + \mathsf{Q}_0 k$$

eşitlikleri sağlanır. Bu dönüşüm yardımı ile, $\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ ve

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathsf{Q}_0 & -\mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_2 & \mathsf{Q}_3 \\ \mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_0 & \mathsf{Q}_3 & -\mathsf{Q}_2 \\ \mathsf{Q}_2 & \mathsf{Q}_3 & \mathsf{Q}_0 & -\mathsf{Q}_1 \\ \mathsf{Q}_3 & -\mathsf{Q}_2 & \mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_0 \end{bmatrix} : \mathsf{Q}_0, \mathsf{Q}_1, \mathsf{Q}_2, \mathsf{Q}_3 \in \mathbb{D} \right\}$$

matris cebiri arasında bir izomorfizma tanımlanır. Yukarıda ifade edilen 4×4 tipindeki dual matrise Q dual split kuaterniyonunun sol matris temsili adı verilir ve

$$\mathfrak{L}(\mathsf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathsf{Q}_0 & -\mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_2 & \mathsf{Q}_3 \\ \mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_0 & \mathsf{Q}_3 & -\mathsf{Q}_2 \\ \mathsf{Q}_2 & \mathsf{Q}_3 & \mathsf{Q}_0 & -\mathsf{Q}_1 \\ \mathsf{Q}_3 & -\mathsf{Q}_2 & \mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_0 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir. Bu matris q ve q^* split kuaterniyonlarının sol matrisleri cinsinden

$$\mathfrak{L}(\mathsf{Q}) = L(q) + \varepsilon L(q^*)$$

şeklinde ifade edilir (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2006).

Önerme 5.2.2.1 (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2006) Her P, $\mathsf{Q} \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ ve $\mathsf{r} \in \mathbb{D}$ için, aşağıdaki özellikler sağlanır;

i. $\mathfrak{L}(\mathsf{P}+\mathsf{Q}) = \mathfrak{L}(\mathsf{P}) + \mathfrak{L}(\mathsf{Q})$,

ii. $\mathfrak{L}(\mathsf{P}\mathsf{Q}) = \mathfrak{L}(\mathsf{P})\mathfrak{L}(\mathsf{Q})$,

iii. $\mathfrak{L}(\mathsf{r}\mathsf{P}) = \mathsf{r}\mathfrak{L}(\mathsf{P})$,

iv. $\mathfrak{L}(1) = I_4$.

İspat. $\mathsf{P} = \mathsf{P}_0 + \mathsf{P}_1 i + \mathsf{P}_2 j + \mathsf{P}_3 k = p + \varepsilon p^*, \mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ herhangi iki dual split kuaterniyon ve $\mathsf{r} \in \mathbb{D}$ olsun.

i.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mathsf{P}+\mathsf{Q}) &= \mathfrak{L}(p+q+\varepsilon(p^*+q^*)) = L(p+q) + \varepsilon L(p^*+q^*) \\ &= L(p) + \varepsilon L(p^*) + L(q) + \varepsilon L(q^*) = \mathfrak{L}(\mathsf{P}) + \mathfrak{L}(\mathsf{Q}). \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mathsf{P}\mathsf{Q}) &= \mathfrak{L}\left(pq + \varepsilon(pq^* + p^*q)\right) = L(pq) + \varepsilon L(pq^* + p^*q) \\ &= L(p)L(q) + \varepsilon L(p)L(q^*) + \varepsilon L(p^*)L(q) \\ &= \left[L(p) + \varepsilon L(p^*)\right]\left[L(q) + \varepsilon L(q^*)\right] \\ &= \mathfrak{L}(\mathsf{P})\mathfrak{L}(\mathsf{Q}). \end{aligned}$$

iii.

$$\mathfrak{L}(\mathsf{rP}){=}\mathfrak{L}(rp+\varepsilon(rp^*)) = L(rp)+\varepsilon L(rp^*) = r(L(p)+\varepsilon L(p^*)) = \mathsf{r}\mathfrak{L}(\mathsf{P}).$$

iv.

$$\mathfrak{L}(1) = L(1)+\varepsilon L(0) = I_4.$$

□

Burada $\mathfrak{L}(\mathsf{PQ}) = \mathfrak{L}(\mathsf{P})\mathfrak{L}(\mathsf{Q})$ eşitliği sağlandığından

$$\mathfrak{L} : \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}} \to \mathfrak{M}$$

dönüşümü homomorfizmdir. Benzer şekilde, her $\mathsf{Q} \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ için

$$\mathcal{F}_{\mathsf{Q}} : \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}} \to \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$$

$$\mathcal{F}_{\mathsf{Q}}(\mathsf{P}) = \mathsf{PQ}$$

lineer dönüşümü ele alalım. Bu dönüşüm de birbire eşlemedir. Her $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^* \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$\mathcal{F}_{\mathsf{Q}}(1) = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k,$$

$$\mathcal{F}_{\mathsf{Q}}(i) = -\mathsf{Q}_1 + \mathsf{Q}_0 i - \mathsf{Q}_3 j + \mathsf{Q}_2 k,$$

$$\mathcal{F}_{\mathsf{Q}}(j) = \mathsf{Q}_2 - \mathsf{Q}_3 i + \mathsf{Q}_0 j - \mathsf{Q}_1 k,$$

$$\mathcal{F}_{\mathsf{Q}}(k) = \mathsf{Q}_3 + \mathsf{Q}_2 i + \mathsf{Q}_1 j + \mathsf{Q}_0 k.$$

Bu dönüşümü yardımı ile $\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ ve

$$\mathfrak{N} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathsf{Q}_0 & -\mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_2 & \mathsf{Q}_3 \\ \mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_0 & -\mathsf{Q}_3 & \mathsf{Q}_2 \\ \mathsf{Q}_2 & -\mathsf{Q}_3 & \mathsf{Q}_0 & \mathsf{Q}_1 \\ \mathsf{Q}_3 & \mathsf{Q}_2 & -\mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_0 \end{bmatrix} : \mathsf{Q}_0,\ \mathsf{Q}_1,\ \mathsf{Q}_2,\ \mathsf{Q}_3 \in \mathbb{D} \right\}$$

matris cebiri arasında bir izomorfizma tanımlanır. Yukarıda elde edilen 4×4 tipindeki dual matrise Q dual split kuaterniyonun sağ matris temsili adı verilir ve

$$\mathfrak{R}(\mathsf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathsf{Q}_0 & -\mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_2 & \mathsf{Q}_3 \\ \mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_0 & -\mathsf{Q}_3 & \mathsf{Q}_2 \\ \mathsf{Q}_2 & -\mathsf{Q}_3 & \mathsf{Q}_0 & \mathsf{Q}_1 \\ \mathsf{Q}_3 & \mathsf{Q}_2 & -\mathsf{Q}_1 & \mathsf{Q}_0 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir. Bu matris q ve q^* split kuaterniyonlarının sağ matrisleri cinsinden

$$\mathfrak{R}(\mathsf{Q}) = R(q) + \varepsilon R(q^*)$$

şeklinde ifade edilir (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2006).

Önerme 5.2.2.2 (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2006) Her P, $\mathsf{Q} \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ ve $\mathsf{r} \in \mathbb{D}$ için, aşağıdaki özellikler sağlanır;

i. $\mathfrak{R}(\mathsf{P}+\mathsf{Q}) = \mathfrak{R}(\mathsf{P}) + \mathfrak{R}(\mathsf{Q})$,

ii. $\mathfrak{R}(\mathsf{PQ}) = \mathfrak{R}(\mathsf{Q})\mathfrak{R}(\mathsf{P})$,

iii. $\mathfrak{R}(\mathsf{rQ}) = \mathsf{r}\mathfrak{R}(\mathsf{Q})$,

iv. $\mathfrak{R}(1) = I_4$.

İspat. $\mathsf{P} = \mathsf{P}_0 + \mathsf{P}_1 i + \mathsf{P}_2 j + \mathsf{P}_3 k = p + \varepsilon p^*$, $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ herhangi iki dual split kuaterniyon ve $\mathsf{r} \in \mathbb{D}$ olsun.

i.

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(\mathsf{P}+\mathsf{Q}) &= \mathfrak{R}(p+q+\varepsilon(p^*+q^*)) = R(p+q) + \varepsilon R(p^*+q^*) \\ &= R(p) + \varepsilon R(p^*) + R(q) + \varepsilon R(q^*) = \mathfrak{R}(\mathsf{P}) + \mathfrak{R}(\mathsf{Q}).\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(\mathsf{PQ}) &= \mathfrak{R}\left(pq + \varepsilon(pq^* + p^*q)\right) = R(pq) + \varepsilon L(pq^* + p^*q) \\ &= R(q)R(p) + \varepsilon R(q^*)R(p) + \varepsilon R(q)R(p^*) \\ &= \left[R(q) + \varepsilon R(q^*)\right]\left[R(p) + \varepsilon R(p^*)\right] \\ &= \mathfrak{R}(\mathsf{Q})\mathfrak{R}(\mathsf{P}).\end{aligned}$$

iii.

$$\mathfrak{R}(\mathsf{rP}) = \mathfrak{R}(rp + \varepsilon(rp^*)) = R(rp) + \varepsilon R(rp^*) = r(R(p) + \varepsilon R(p^*)) = \mathsf{r}\mathfrak{R}(\mathsf{P}).$$

iv.

$$\mathfrak{R}(1) = R(1) + \varepsilon R(0) = I_4.$$

□

Tanım 5.2.2.1. Her $\mathsf{X} = \mathsf{X}_0 + \mathsf{X}_1 i + \mathsf{X}_2 j + \mathsf{X}_3 k \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ için, $\overrightarrow{\mathsf{X}} = (\mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3)^T$ vektörüne X dual split kuaterniyonunun dual vektör temsili adı verilir.

Teorem 5.2.2.1. (Kula 2003, Kula ve Yaylı 2006) Her A, B ve X dual split kuaterniyonu için, aşağıdakiler sağlanır;

i. $\overrightarrow{\mathsf{AX}} = \mathfrak{L}(\mathsf{A})\overrightarrow{\mathsf{X}}$,

ii. $\overrightarrow{\mathsf{XB}} = \mathfrak{R}(\mathsf{B})\overrightarrow{\mathsf{X}}$,

iii. $\overrightarrow{\mathsf{AXB}} = \mathfrak{L}(\mathsf{A})\mathfrak{R}(\mathsf{B})\overrightarrow{\mathsf{X}} = \mathfrak{R}(\mathsf{B})\mathfrak{L}(\mathsf{A})\overrightarrow{\mathsf{X}}$,

iv. $\det(\mathfrak{L}(\mathsf{A})) = \det(\mathfrak{R}(\mathsf{A})) = (N_{\mathsf{A}})^2$.

İspat. $\mathsf{A} = \mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 i + \mathsf{A}_2 j + \mathsf{A}_3 k$, $\mathsf{B} = \mathsf{B}_0 + \mathsf{B}_1 i + \mathsf{B}_2 j + \mathsf{B}_3 k$ ve $\mathsf{X} = \mathsf{X}_0 + \mathsf{X}_1 i + \mathsf{X}_2 j + \mathsf{X}_3 k$ herhangi dual split kuaterniyonlar olsun.

i.

$$\overrightarrow{\mathsf{AX}} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_0\mathsf{X}_0 - \mathsf{A}_1\mathsf{X}_1 + \mathsf{A}_2\mathsf{X}_2 + \mathsf{A}_3\mathsf{X}_3 \\ \mathsf{A}_0\mathsf{X}_1 + \mathsf{A}_1\mathsf{X}_0 - \mathsf{A}_2\mathsf{X}_3 + \mathsf{A}_3\mathsf{X}_2 \\ \mathsf{A}_0\mathsf{X}_2 + \mathsf{A}_2\mathsf{X}_0 - \mathsf{A}_1\mathsf{X}_3 + \mathsf{A}_3\mathsf{X}_1 \\ \mathsf{A}_0\mathsf{X}_3 + \mathsf{A}_1\mathsf{X}_2 + \mathsf{A}_3\mathsf{X}_0 - \mathsf{A}_2\mathsf{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_0 & -\mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_0 & \mathsf{A}_3 & -\mathsf{A}_2 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_3 & \mathsf{A}_0 & -\mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_3 & -\mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{X}_0 \\ \mathsf{X}_1 \\ \mathsf{X}_2 \\ \mathsf{X}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathfrak{L}(\mathsf{A})\overrightarrow{\mathsf{X}}.$$

ii.

$$\overrightarrow{\mathsf{XB}} = \begin{bmatrix} \mathsf{X}_0\mathsf{B}_0 - \mathsf{X}_1\mathsf{B}_1 + \mathsf{X}_2\mathsf{B}_2 + \mathsf{X}_3\mathsf{B}_3 \\ \mathsf{X}_0\mathsf{B}_1 + \mathsf{X}_1\mathsf{B}_0 - \mathsf{X}_2\mathsf{B}_3 + \mathsf{X}_3\mathsf{B}_2 \\ \mathsf{X}_0\mathsf{B}_2 + \mathsf{X}_2\mathsf{B}_0 - \mathsf{X}_1\mathsf{B}_3 + \mathsf{X}_3\mathsf{B}_1 \\ \mathsf{X}_0\mathsf{B}_3 + \mathsf{X}_1\mathsf{B}_2 + \mathsf{X}_3\mathsf{B}_0 - \mathsf{X}_2\mathsf{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{B}_0 & -\mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_2 & \mathsf{B}_3 \\ \mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_0 & -\mathsf{B}_3 & \mathsf{B}_2 \\ \mathsf{B}_2 & -\mathsf{B}_3 & \mathsf{B}_0 & \mathsf{B}_1 \\ \mathsf{B}_3 & \mathsf{B}_2 & -\mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{X}_0 \\ \mathsf{X}_1 \\ \mathsf{X}_2 \\ \mathsf{X}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathfrak{R}(\mathsf{B})\overrightarrow{\mathsf{X}}.$$

iii.

$$\overrightarrow{\mathsf{AXB}} = \mathfrak{L}(\mathsf{A})\overrightarrow{\mathsf{XB}} = \mathfrak{L}(\mathsf{A})\mathfrak{R}(\mathsf{B})\overrightarrow{\mathsf{X}} = \mathfrak{R}(\mathsf{B})\overrightarrow{\mathsf{AX}} = \mathfrak{R}(\mathsf{B})\mathfrak{L}(\mathsf{A})\overrightarrow{\mathsf{X}}.$$

iv.

$$\det(\mathfrak{L}(\mathsf{A})) = \det\begin{bmatrix} \mathsf{A}_0 & -\mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_0 & \mathsf{A}_3 & -\mathsf{A}_2 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_3 & \mathsf{A}_0 & -\mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_3 & -\mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_0 \end{bmatrix} = \left(\mathsf{A}_0^2 + \mathsf{A}_1^2 - \mathsf{A}_2^2 - \mathsf{A}_3^2\right)^2 = (N_{\mathsf{A}})^2,$$

$$\det(R(\mathsf{A})) = \det\begin{bmatrix} \mathsf{A}_0 & -\mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_3 \\ \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_0 & -\mathsf{A}_3 & \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{A}_2 & -\mathsf{A}_3 & \mathsf{A}_0 & \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{A}_3 & \mathsf{A}_2 & -\mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_0 \end{bmatrix} = \left(\mathsf{A}_0^2 + \mathsf{A}_1^2 - \mathsf{A}_2^2 - \mathsf{A}_3^2\right)^2 = (N_{\mathsf{A}})^2.$$

$\square$

5.2.3. Minkowski 3-uzayında vida hareketlerinin dual split kuaterniyonlarla ifade edilmesi

Minkowski 3-uzayında uzaysal hareket kavramı; dönme ve kayma operatörlerinin bir tür birleşimi olarak düşünülebilir. Eğer hareket sadece dönme dönüşümünden oluşuyorsa, bu hareket altında değişmeyen tek bir doğru olacaktır. Bu doğru ise orjinden geçen ve doğrultusu dönme ekseni olan doğrudur. Genel olarak, uzaysal hareket altında konumu değişmeyen yine tek bir doğru vardır. Fakat bu doğru orjinden geçmeyebilir. Bu doğru üzerindeki her nokta hareketin ardından, yine doğru üzerinde başka bir noktaya taşınacaktır. İşte bu harekete vida hareketi adı verilir. Bu durumda vida hareketi altında değişmeyen doğruya ise vida ekseni adı verilir. Minkowski 3-uzayındaki vida hareketleri dual split kuaterniyonlar yardımıyla incelenebilir. Bu kısımda, dual split kuaterniyonlar ile Minkowski 3-uzayındaki vida hareketleri arasındaki ilişki ele alınacaktır (Kula ve Yaylı 2006, Özkaldı ve Gündoğan 2011, Ramis ve Yaylı 2013).

Tanım 5.2.3.1. $q, q^* \in \widehat{\mathbb{H}}_0$ olmak üzere $\mathsf{Q} = q + \varepsilon q^*$ dual split kuaterniyonuna dual split vektör adı verilir. Eğer q spacelike, timelike veya lightlike ise Q'ya sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike dual split vektör adı verilir.

Dual split vektörler kümesi

$$\mathbb{D}_1^3 = \{\mathsf{Q} = q + \varepsilon q^* : q, q^* \in \widehat{\mathbb{H}}_0 \text{ ve } \varepsilon^2 = 0\}$$

ile gösterilir. $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k = q + \varepsilon q^*$ ve $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 i + \mathsf{P}_2 j + \mathsf{P}_3 k = p + \varepsilon p^*$ dual split vektörlerinin dual skaler ve vektörel çarpımı sırasıyla

$$\langle \mathsf{Q}, \mathsf{P}\rangle_{\mathbb{D}} = -\mathsf{Q}_1\mathsf{P}_1 + \mathsf{Q}_2\mathsf{P}_2 + \mathsf{Q}_3\mathsf{P}_3 = \frac{1}{2}(\overline{\mathsf{Q}}\mathsf{P} + \overline{\mathsf{P}}\mathsf{Q})$$

$$= \langle q, p\rangle_{\mathbb{L}} + \varepsilon(\langle q, p^*\rangle_{\mathbb{L}} + \langle q^*, p\rangle_{\mathbb{L}}),$$

$$\mathsf{Q} \times_{\mathbb{D}} \mathsf{P} = \frac{1}{2}(\mathsf{QP} - \mathsf{PQ})$$

olarak tanımlıdır.

Tanım 5.2.3.2. $\mathsf{Q} = q + \varepsilon q^*$ dual split vektörünün normu

$$\|\mathsf{Q}\| = \sqrt{\langle \mathsf{Q}, \mathsf{Q}\rangle_{\mathbb{D}}}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\|\mathsf{Q}\| = 1$ ise Q' ya birim dual vektör adı verilir.

Study Teoremi gereğince, Minkowski 3-uzayındaki her timelike (spacelike) doğru ile bir $\mathsf{U} = \mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{u}^*$ birim timelike (spacelike) dual split vektörü arasında birebir eşleme vardır. Eğer doğrultman vektörü timelike ise doğrunun parametrik denklemi;

$$\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{u}^* + t\mathbf{u},$$

eğer doğrultman vektörü spacelike ise doğrunun parametrik denklemi;

$$-\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{u}^* + t\mathbf{u}$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^3$ doğrunun doğrultman vektörü ve $\mathbf{u}^* \in \mathbb{E}_1^3$ ise $\mathbf{u}$ vektörünün orjine göre momentidir (Kula ve Yaylı 2006).

Tanım 5.2.3.3. $A \in M_3(\mathbb{D})$ olmak üzere, eğer

$$I^* A^T I^* A = I_3$$

ise A matrisine yarı ortogonal dual matris adı verilir. Burada

$$I^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Yarı ortogonal dual matrisler kümesi

$$O_{\mathbb{D}}(1,2) = \{A \in M_3(\mathbb{D}) : I^* A^T I^* A = I_3\}$$

olarak gösterilir. Eğer $A \in O_{\mathbb{D}}(1,2)$ matrisinin determinantı 1 ise A matrisine yarı özel ortogonal dual matris adı verilir ve yarı özel ortogonal dual matrisler kümesi

$$SO_{\mathbb{D}}(1,2) = \{A \in M_3(\mathbb{D}) : I^* A^T I^* A = I_3 \text{ ve } \det A = 1\}$$

olarak gösterilir. Her yarı özel ortogonal dual matris, Minkowski 3-uzayında bir vida hareketi ifade eder (Kula ve Yaylı 2006, Ramis ve Yaylı 2013).

Tanım 5.2.3.4. $A \in M_3(\mathbb{D})$ olmak üzere, eğer

$$I^* A^T I^* = -A$$

ise A matrisine yarı ters simetrik dual matris adı verilir. Yarı ters simetrik dual matrisler kümesi

$$\Delta_{\mathbb{D}}(1,2) = \{A \in M_3(\mathbb{D}) : I^* A^T I^* = -A\}$$

olarak gösterilir.

Her $A \in \Delta_{\mathbb{D}}(1,2)$ matrisi, $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \mathsf{u}_3 \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\mathsf{u}_3 & -\mathsf{u}_2 \\ \mathsf{u}_3 & 0 & -\mathsf{u}_1 \\ -\mathsf{u}_2 & \mathsf{u}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. O halde

$$\Psi : \Delta_{\mathbb{D}}(1,2) \to \mathbb{D}_1^3$$

$$: A \to \Psi(A) = \mathsf{u}_1 i + \mathsf{u}_2 j + \mathsf{u}_3 k$$

dönüşümü ile her A yarı ters simetrik dual matrise bir dual split vektör karşılık gelir. Tersine her $\mathsf{U} = \mathsf{u}_1 i + \mathsf{u}_2 j + \mathsf{u}_3 k$ dual split vektörüne

$$S_{\mathsf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathsf{u}_3 & -\mathsf{u}_2 \\ \mathsf{u}_3 & 0 & -\mathsf{u}_1 \\ -\mathsf{u}_2 & \mathsf{u}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

yarı ters simetrik dual matrisi karşılık gelir.

Teorem 5.2.3.1. (Ramis ve Yaylı 2013) $A \in M_3(\mathbb{D})$ olmak üzere, $A = A_1 + \varepsilon A_2 \in O_{\mathbb{D}}(1,2)$ olması için gerek ve yeter şart $A_1 \in O(1,2)$ ve $A_2 = DA_1$ öyle ki $D \in \Delta(1,2)$ olmasıdır. Burada

$$O(1,2) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : I^* A^T I^* A = I_3\}$$

ile yarı ortogonal reel matrisler kümesi ve

$$\Delta(1,2) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : I^* A^T I^* = -A\}$$

ile yarı ters simetrik reel matrisler kümesi temsil edilmektedir.

İspat. Kabul edelim ki $A = A_1 + \varepsilon DA_1 \in O_{\mathbb{D}}(1,2)$ olsun. Bu durumda $A_1 \in O(1,2)$ ve $D \in \Delta(1,2)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $A \in O_{\mathbb{D}}(1,2)$ olduğundan

$$AI^* A^T I^* = I_3$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik açılırsa

$$A_1 I^* A_1^T I^* + \varepsilon(A_1 I^* A_1^T I^* (I^* D I^*) + D A_1 I^* A_1^T I^*) = I_3$$

olduğu görülür. Bu eşitlik ise

$$A_1 I^* A_1^T I^* = I_3,$$

$$A_1 I^* A_1^T I^* (I^* D I^*) + D A_1 I^* A_1^T I^* = 0_3$$

eşitliklerine denktir. Birinci eşitlikten $A_1 \in O(1,2)$ olduğu görülür. Ayrıca birinci eşitlik, ikinci eşitlikte kullanılırsa

$$I^* D I^* = -D^T$$

elde edilir. O halde $D \in \Delta(1,2)$'dir. Diğer yandan, $A = A_1 + \varepsilon A_2 \in O_{\mathbb{D}}(1,2)$ ise $D = A_2 A_1^{-1}$ olarak almamız yeterli olacaktır. Buradan $A = A_1 + \varepsilon D A_1$ olduğu görülür ve ispat biter. $\square$

Her $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_0 + \mathsf{Q}_1 i + \mathsf{Q}_2 j + \mathsf{Q}_3 k$ birim dual split kuaterniyonu için,

$$Ad_{\mathsf{Q}} : \mathbb{D}_1^3 \to \mathbb{D}_1^3$$

$$: \mathsf{X} \to R_{\mathsf{Q}}(\mathsf{X}) = \mathsf{Q}\mathsf{X}\mathsf{Q}^{-1}$$

dönüşümü lineerdir. Bu dönüşüme karşılık gelen dual matris ise

$$Ad_{\mathsf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathsf{Q}_0^2+\mathsf{Q}_1^2+\mathsf{Q}_2^2+\mathsf{Q}_3^2 & 2\mathsf{Q}_0\mathsf{Q}_3-2\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_2 & -2\mathsf{Q}_0\mathsf{Q}_2-2\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_3 \\ 2\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_2+2\mathsf{Q}_3\mathsf{Q}_0 & \mathsf{Q}_0^2-\mathsf{Q}_1^2-\mathsf{Q}_2^2+\mathsf{Q}_3^2 & -2\mathsf{Q}_2\mathsf{Q}_3-2\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_0 \\ 2\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_3-2\mathsf{Q}_2\mathsf{Q}_0 & 2\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_0-2\mathsf{Q}_2\mathsf{Q}_3 & \mathsf{Q}_0^2-\mathsf{Q}_1^2+\mathsf{Q}_2^2-\mathsf{Q}_3^2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$I^*(Ad_{\mathsf{Q}})^T I^*(Ad_{\mathsf{Q}}) = I \text{ ve } \det(Ad_{\mathsf{Q}}) = 1$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, Ad_{Q} matrisi bir yarı özel ortogonal dual matristir. O halde, Ad_{Q} dönüşümü Minkowski 3-uzayında bir vida hareketi ifade eder. Bu matrisin $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen dual split vektör

$$U = \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{u}^*$$

ise vida ekseninin doğrultmanı $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^3$ olacaktır. Bununla birlikte, eğer $\mathbf{u}$ timelike ise vida ekseninin parametrik denklemi;

$$\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{u}^* + t\mathbf{u},$$

eğer $\mathbf{u}$ spacelike ise vida ekseninin parametrik denklemi;

$$-\mathbf{u} \times_{\mathbb{L}} \mathbf{u}^* + t\mathbf{u}$$

şeklinde olacaktır. Ayrıca, Teorem 5.2.3.1 gereği, $R \in SO(1,2)$ ve $D \in \Delta(1,2)$ olmak üzere, $Ad_{\mathsf{Q}} = R + \varepsilon DR$ şeklinde yazılabilir. O halde, Ad_{Q} dönüşümüne karşılık gelen vida hareketi

$$R\mathbf{x} + d$$

olacaktır. Burada, $R \in SO(1,2)$; dönme ekseni $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^3$ olan dönme dönüşümü olup $d = \Psi(D)$ ise kayma vektörüdür.

Örnek 5.2.3.1.

$$\mathsf{Q} = \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\varepsilon + (\frac{\sqrt{2}}{4}\varepsilon)i + (\frac{\sqrt{2}}{4}\varepsilon)j + (\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{8}\varepsilon)k$$

birim dual split kuaterniyonunu ele alalım. Bu dual split kuaterniyona karşılık gelen dual yarı özel ortogonal matris

$$Ad_{\mathsf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon & \frac{3}{4} + \frac{5}{4}\varepsilon & -\varepsilon \\ \frac{3}{4} + \frac{5}{4}\varepsilon & \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon & -\varepsilon \\ -\frac{1}{2}\varepsilon & \frac{1}{2}\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ad_{Q} yarı özel ortogonal dual matrisin $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen dual vektör

$$U = \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{u}^* = (0,0,1) + \varepsilon(1,1,0)$$

olarak bulunur. Burada $\mathbf{u} = (0,0,1) \in \mathbb{E}_1^3$ vektörü timelike olduğundan vida ekseninin parametrik denklemi

$$(1,1,0) + t(0,0,1)$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$Ad_{\mathsf{Q}} = R + \varepsilon DR = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$R = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. O halde, Ad_{Q} dönüşümüne karşılık gelen vida hareketi

$$R\mathbf{x} + d$$

şeklinde olacaktır. Burada kayma vektörü $d = \Psi(D) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ olarak bulunur.

5.3. Dual Split Kuaterniyon Matrisleri

Elemanları dual split kuaterniyon olan $m \times n$ tipindeki matrisler kümesi $M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ ile gösterilir. Eğer $m = n$ ise $M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ ile gösterilir. Standart matris toplamı ve çarpımı tanımlıdır ve bu işlemlerle birlikte $M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ birim elemanlı bir halkadır.

5.3.1. Dual split kuaterniyon matrisleri üzerinde temel işlemler

Dual split kuaterniyon matrislerini toplamı: $A{=}(\mathsf{A})_{ij}$, $B{=}(\mathsf{B})_{ij}$ $\in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ dual split kuaterniyon matrislerinin toplamı

$$A + B = (A + B)_{ij} = (\mathsf{A})_{ij} + (\mathsf{B})_{ij}$$

olarak tanımlanır.

Dual split kuaterniyon matrislerinin çarpımı: $A = (\mathsf{A})_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$, $B = (\mathsf{B})_{jk} \in M_{n\times \mathsf{p}}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere, dual split kuaterniyon matrislerinin çarpımı

$$AB = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\mathsf{A})_{ik}(\mathsf{B})_{kj}$$

şeklinde tanımlıdır.

Dual split kuaterniyon matrisinin skalerle çarpımı: $A = (\mathsf{A})_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ ve $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ için, skalerle sağdan ve soldan çarpım sırasıyla

$$A\lambda = (\mathsf{A}\lambda)_{ij} = (\mathsf{A})_{ij}\lambda \text{ ve } \lambda A = (\lambda \mathsf{A})_{ij} = \lambda(\mathsf{A})_{ij}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca $A \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$, $B \in M_{n\times p}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ ve λ, $\mu \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ için, aşağıdakiler sağlanır;

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B,\ (A\lambda)B = A(\lambda B),\ (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A).$$

Yani $M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ skalerle sağ ve sol çarpıma göre ayrı ayrı $\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ üzerinde vektör uzayıdır.

Dual split kuaterniyon matrisinin eşleniği: $A = (\mathsf{A})_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ için, A'nın eşleniği

$$\overline{A} = \overline{(\mathsf{A})_{ij}} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$$

olarak tanımlıdır.

Dual split kuaterniyon matrisinin transpozesi: $A = (A)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ için, A'nın transpozesi (devriği)

$$A^T = (\mathsf{A})_{ji} \in M_{n\times m}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde tanımlıdır.

Dual split kuaterniyon matrisinin eşlenik transpozesi: $A = (A)_{ij} \in M_{m\times n}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ için, A'nın eşlenik transpozesi

$$A^* = (\overline{A})^T \in M_{n\times m}(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$$

şeklinde tanımlıdır.

Ayrıca her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ kare matrisi için,

Eğer $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris;

Eğer $A = A^*$ ise A matrisine Hermityan matris;

Eğer $AA^* = I$ ise A matrisine üniter matris adı verilir.

Dual split kuaterniyon matrisinin tersi: $A,\ B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ için, eğer $AB = BA = I_n$ ise yani A matrisini sağ ve sol tersleri eşit ise A matrisinin tersi vardır denir ve B matrisine A'nın tersi denir.

5.3.2. Dual split kuaterniyon matrisinin kuaterniyon matris temsili

Split kuaterniyon matrislerinin özelliklerini kullanabilmek adına, her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ matrisini split kuaterniyon matrisi cinsinden ifade edelim. Her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$, $A_1,\ A_2 \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$ olmak üzere

$$A = A_1 + \varepsilon A_2 = A_1 + A_2\varepsilon$$

şeklinde tek türlü yazılabilir.

Teorem 5.3.2.1. $A, B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ olsun. Eğer $AB = I_n$ ise $BA = I_n$'dır.

İspat. $A = A_1 + \varepsilon A_2$ ve $B = B_1 + \varepsilon B_2 \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ olsun öyleki $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2 \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$. $AB = I_n$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$AB = (A_1 + \varepsilon A_2)(B_1 + \varepsilon B_2) = A_1B_1 + \varepsilon(A_1B_2 + A_2B_1) = I_n$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikten yararlanarak

$$A_1B_1 = I_n,\ A_1B_2 + A_2B_1 = 0_n$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu iki matris eşitliğini ise

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon blok matris eşitliği olarak yazabiliriz. Bu matrisler $2n \times 2n$ tipinde split kuaterniyon matrisleri olduğundan, Teorem 3.2.2.2 gereği

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix}$$

blok matris eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitlikten

$$B_1A_1 = I_n,\ B_2A_1 + B_1A_2 = 0_n$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitliği kullanarak

$$I_n = B_1A_1 + \varepsilon(B_2A_1 + B_1A_2) = BA$$

elde ederiz ve ispat biter. □

Tanım 5.3.2.1. $A = A_1 + \varepsilon A_2 \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ olmak üzere $2n \times 2n$ tipindeki

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}$$

split kuaterniyon matrisine A dual split kuaterniyon matrisinin split kuaterniyon matris temsili adı verilir ve $S(A)$ ile gösterilir.

Teorem 5.3.2.1. Her $A, B \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ için, aşağıdaki özellikler sağlanır;

i. $S(I_n) = I_{2n}$,

ii. $S(A+B) = S(A) + S(B)$,

iii. $S(AB) = S(A)S(B)$,

iv. A matrisi tersinir ise $[S(A)]^{-1} = S(A^{-1})$.

İspat. $A = A_1 + \varepsilon A_2$ ve $B = B_1 + \varepsilon B_2 \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ olsun öyleki $A_1, A_2, B_1, B_2 \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$.

i.

$$S(I_n) = S(I_n + \varepsilon 0) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}.$$

ii. $A + B = (A_1 + B_1) + \varepsilon(A_2 + B_2)$ olarak elde edilir. Buradan

$$S(A+B) = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & 0 \\ A_2 + B_2 & A_1 + B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} = S(A) + S(B)$$

olarak bulunur.

iii. $AB = (A_1B_1) + \varepsilon(A_1B_2 + A_2B_1)$ eşitliğinden

$$S(AB) = \begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 \\ A_1B_2 + A_2B_1 & A_1B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} = S(A)S(B)$$

elde edilir.

iv. A dual split kuaterniyon matrisinin tersi olsun. O halde $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$' dır. Buradan i. ve iii. özellikleri kullanarak

$$I_{2n} = S(I_n) = S(AA^{-1}) = S(A)S(A^{-1}) \text{ ve } I_{2n} = S(I_n) = S(A^{-1}A) = S(A^{-1})S(A)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Yani $S(A)$ split kuaterniyon matrisinin tersi vardır ve

$$[S(A)]^{-1} = S(A^{-1}).$$

□

5.3.3. Dual split kuaterniyon matrislerinin özdeğerleri

Tanım 5.3.3.1. $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ ve $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ olsun. Eğer $A\mathsf{X} = \lambda\mathsf{X}$ eşitliğini sağlayan en az bir sıfırdan farklı X dual split kuaterniyon vektörü varsa λ'ya A' ın sol özdeğeri adı verilir. A'nın sol özdeğerlerinin kümesi

$$\sigma_l(A) = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}} : A\mathsf{X} = \lambda x \text{ ve } x \neq 0\}$$

ile gösterilir ve A'nın sol spektrumu adı verilir. Eğer $A\mathsf{X} = \mathsf{X}\lambda$ eşitliğini sağlayan en az bir sıfırdan farklı X dual split kuaterniyon vektörü varsa λ'ya A'nın sağ özdeğeri adı verilir. A'nın sağ özdeğerlerinin kümesi ise

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}} : Ax = x\lambda \text{ ve } x \neq 0\}$$

ile gösterilir ve A'nın sağ spektrumu adı verilir.

Teorem 5.3.3.1. Her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ için,

$$\sigma_l(A) \cap \widehat{\mathbb{H}} = \sigma_l(S(A))$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}$ ve $A = A_1 + \varepsilon A_2 \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ olsun. Eğer λ, A'nın sol özdeğeri ise en az bir sıfırdan farklı dual split kuaterniyon vektörü $x = x_1 + \varepsilon x_2$ için

$$Ax = \lambda x$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik açılırsa

$$(A_1 + \varepsilon A_2)(x_1 + \varepsilon x_2) = \lambda(x_1 + \varepsilon x_2)$$

$$(A_1x_1) + \varepsilon(A_1x_2 + A_2x_1) = (\lambda x_1) + \varepsilon(\lambda x_2)$$

elde edilir. Buradan

$$A_1x_1 = \lambda x_1$$

$$A_1x_2 + A_2x_1 = \lambda x_2$$

olduğu görülür. Bu eşitlikler

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ & \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $\lambda \in \sigma_l(S(A))$ olduğu görülür. Tersine, $\lambda \in \sigma_l(S(A))$ olsun. O halde

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ & \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği en az bir sıfırdan farklı split kuaterniyon $x = [x_1, x_2]^T$ vektörü için sağlanır. Bu matris eşitliğinden

$$A_1x_1 = \lambda x_1 \text{ ve } A_1x_2 + A_2x_1 = \lambda x_2$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri kullanarak

$$(A_1x_1) + \varepsilon(A_1x_2 + A_2x_1) = (\lambda x_1) + \varepsilon(\lambda x_2)$$

$$(A_1 + \varepsilon A_2)(x_1 + \varepsilon x_2) = \lambda(x_1 + \varepsilon x_2)$$

eşitliği yazılabilir. O halde $\lambda \in \sigma_l(A)$ olarak bulunur. Aynı zamanda $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}$ olduğundan, $\lambda \in \sigma_l(A) \cap \widehat{\mathbb{H}}$ olarak elde edilir ve ispat biter. □

Teorem 5.3.3.2. Her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ için,

$$\sigma_r(A) \cap \widehat{\mathbb{H}} = \sigma_r(S(A))$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}$ ve $A = A_1 + \varepsilon A_2 \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ olsun. Eğer λ, A'nın sağ özdeğeri ise en az bir sıfırdan farklı dual split kuaterniyon vektörü $x = x_1 + \varepsilon x_2$ için

$$Ax = x\lambda$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliği açarsak

$$(A_1 + \varepsilon A_2)(x_1 + \varepsilon x_2) = (x_1 + \varepsilon x_2)\lambda$$

$$(A_1x_1) + \varepsilon(A_1x_2 + A_2x_1) = (x_1\lambda) + \varepsilon(x_2\lambda)$$

elde ederiz. Buradan

$$A_1x_1 = x_1\lambda,$$

$$A_1x_2 + A_2x_1 = x_2\lambda$$

olduğu görülür. Bu eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} \lambda$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $\lambda \in \sigma_r(S(A))$ olduğu görülür. Tersine, $\lambda \in \sigma_r(S(A))$ olsun. O halde

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} \lambda$$

eşitliği en az bir sıfırdan farklı split kuaterniyon $x = [x_1, x_2]^T$ vektörü için sağlanır. Bu matris eşitliğinden

$$A_1 x_1 = x_1 \lambda \text{ ve } A_1 x_2 + A_2 x_1 = x_2 \lambda$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri kullanarak

$$(A_1 x_1) + \varepsilon(A_1 x_2 + A_2 x_1) = (x_1 \lambda) + \varepsilon(x_2 \lambda)$$

$$(A_1 + \varepsilon A_2)(x_1 + \varepsilon x_2) = (x_1 + \varepsilon x_2)\lambda$$

eşitliğini yazabiliriz. O halde $\lambda \in \sigma_r(A)$ olarak bulunur. Aynı zamanda $\lambda \in \widehat{\mathbb{H}}$ olduğundan, $\lambda \in \sigma_r(A) \cap \widehat{\mathbb{H}}$ olarak elde edilir ve ispat biter. $\square$

Teorem 5.3.3.3. Her $A \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ için,

$$\sigma_r(A) \cap \mathbb{C} = \sigma(\chi_{s(A)})$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $\lambda \in \mathbb{C}$, A'nın sağ özdeğeri olsun. O halde $\lambda \in \sigma_r(A) \cap \mathbb{C} \subset \sigma_r(A) \cap \widehat{\mathbb{H}}$ olduğundan, Teorem 5.3.3.2 gereği $\lambda \in \sigma_r(S(A))$ olacaktır. Burada $S(A) \in M_{2n}(\widehat{\mathbb{H}})$ olduğundan, Teorem 3.2.4.3 gereği

$$\sigma_r(S(A)) \cap \mathbb{C} = \sigma(\chi_{S(A)})$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $\lambda \in \sigma(\chi_{S(A)})$ olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\sigma_r(A) \cap \mathbb{C} \subset \sigma(\chi_{S(A)})$$

elde edilir.

Tersine, $\lambda \in \sigma(\chi_{S(A)})$ olsun. O halde, Teorem 3.2.4.3 gereği $\lambda \in \sigma_r(S(A)) \cap \mathbb{C}$ olacaktır. Buradan $\mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{H}}$ olduğundan, $\lambda \in \sigma_r(S(A)) \cap \widehat{\mathbb{H}}$ olduğu görülür. Teorem 5.3.3.2 gereği, $\lambda \in \sigma_r(A) \cap \mathbb{C}$ olarak bulunur. Yani, $\sigma(\chi_{S(A)}) \subset \sigma_r(A) \cap \mathbb{C}$ elde edilir ve ispat biter. $\square$

5.3.4. Dual split kuaterniyon matrislerinin tersinin bulunması

$A = A_1 + \varepsilon A_2 \in M_n(\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}})$ matrisinin tersi var ise Teorem 5.3.2.1. gereği $S(A)$ matrisinin de tersi vardır ve $[S(A)]^{-1} = S(A^{-1})$' dir. Burada eğer $S(A)$ matrisinin tersi

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ise A matrisinin tersi

$$A^{-1} = B_1 + \varepsilon B_2$$

olarak bulunur. Burada $B_1,\ B_2 \in M_n(\widehat{\mathbb{H}})$'dır.

Örnek 5.3.4.1

$$A = \begin{bmatrix} i & 1+j \\ 0 & k \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & k \end{bmatrix}$$

matrisini ele alalım. A matrisinin split kuaterniyon matris temsili

$$S(A) = \begin{bmatrix} i & 1+j & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i & 1+j \\ i & k & 0 & k \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada $S(A)$ matrisin kompleks adjoint matrisinin tersi

$$[\chi_{S(A)}]^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & -i & 1 & 1 & 1-i & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & -1-i & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 & -1 & 0 & -1-i & i & 1 \\ i & -1+i & 0 & -i & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bölüm 3.2.5'de split kuaterniyon matrisin tersinin bulunması için verilen yol ile $S(A)$ matrisinin tersi

$$[S(A)]^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & -i & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 1-i & 0 & -1 \\ -i & -1-i & 0 & i \end{bmatrix} j$$

$$= \begin{bmatrix} -i & 1-j & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ j & -1+i+j-k & -i & 1-j \\ -k & 1-j-k & 0 & k \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$B_1 = \begin{bmatrix} -i & 1-j \\ 0 & k \end{bmatrix} \text{ ve } B_2 = \begin{bmatrix} j & -1+i+j-k \\ -k & 1-j-k \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. O halde A dual split kuaterniyon matrisinin tersi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 1-j \\ 0 & k \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} j & -1+i+j-k \\ -k & 1-j-k \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

SONUÇ

Bu tezde aşağıdaki sonuçlar ortaya konulmuştur:

Split kuaterniyon matrislerinin sağ öz değerlerinin varlığı ispatlanmıştır. Bir split kuaterniyon matrisin kompleks sağ özdeğerleri ile kompleks adjoint matrisinin özdeğerleri arasındaki ilişki elde edilmiştir. Bununla birlike $n \times n$ tipinde bir split kuaterniyon matrisin en fazla $2n$ tane farklı kompleks özdeğere sahip olabileceği sonucu elde edilmiştir. Ayrıca split kuaterniyon matrisinin sol özdeğerinin hangi koşullar altında var olabileceği elde edilmiştir. Ayrıca split kuaterniyon matrislerinin sol özdeğerler için Gershgorin teoremi ifade ve ispat edilmiştir. Sağ özdeğerler için bu teoremin sağlanmadığı bir örnekle gösterilmiştir. Ek olarak, eğer varsa bir split kuaterniyon matrisin tersinin nasıl bulunacağına dair bir yöntem verilmiş ve bir örnek yardımıyla metot açıklanmıştır.

Split kuaterniyonların kompleks sayılar yardımı ile bir tür genişletilmesi olan, kompleks split kuaterniyonlar tanıtılmış ve üzerindeki temel işlemler verilmiştir. Ayrıca, kompleks split kuaterniyonların reel matris temsilleri ve split kuaterniyonların reel matris temsilleri ile ilişkili olarak ele alınmıştır. Bununla birlikte, kompleks split kuaterniyon matrisleri tanıtılmış ve temel özellikleri incelenmiştir. A ve B kare kompleks split kuaterniyon matrisler olmak üzere, $AB = I_n$ ise $BA = I_n$ olduğu ispatlanmıştır. Bir başka deyişle; bir kompleks split kuaterniyon matrisinin sağ yada sol tersi var ise birbirine eşit olmalıdır. Kompleks split kuaterniyon matrisinin kompleks adjoint matrisi tanımlanmış ve özellikleri ele alınmıştır. Ek olarak, kompleks split kuaterniyon matrislerinin sağ özdeğerinin varlığı ispatlamış ve kompleks sağ özdeğerler ile kompleks adjoint matrisinin özdeğerleri arasında bir ilişki elde edilmiştir. Bir kompleks split kuaterniyon matrisinin ters tersini bulmak için bir yöntem geliştirilmiş ve bir örnek yardımıyla açıklanmıştır.

Son olarak, dual split kuaterniyon matrisleri tanıtılmış ve temel özellikleri üzerinde durulmuştur. Dual split kuaterniyon matrislerin split kuaterniyon matris temsili ifade edilmiştir. Bu matris temsili yardımı ile dual split kuaterniyon matrislerin özdeğerlerine ilişkin yeni sonuçlar elde edildi. Ayrıca sağ özdeğerlerinin varlığı ispat edilmekle birlikte, sol özdeğerlerin hangi durumlarda var olabileceğini ifade edilmiştir. Ayrıca dual split kuaterniyon matrislerinin tersi bulmak için bir metot verilmiş ve bir örnek ile açıklanmıştır.

KAYNAKLAR

ALAGÖZ, Y., ORAL, K.H. and YÜCE, S. 2012. Split Quaternion Matrices. *Miskolc Mathematical Notes,* 13: 223-232.

ANTONUCCIO, F. 2014. Split-Quaternions and the Dirac Equations. *Advances in Applied Clifford Algebras,* DOI 10.1007/s00006-014-0475-z.

ARAGON,G., ARAGON, J.L. and RODRİGUEZ, M.A. 1997. Clifford algebras and geometric algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras,* 7: 91–102.

ATA, E. and YAYLI, Y. 2009. Split quaternions and semi-Euclidean projective spaces. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41: 1910-1915.

BAKER, A. 1999. Right eigenvalues for quaternionic matrices: A topological approach. *Linear Algebra and its Applications,* 286: 303-309.

BRENNER, J.L. 1951. Matrices of Quaternions. *Pasific Journal of Mathematics,* 1: 329-335.

CLIFFORD, W.K. 1873. Preliminary Sketch of Bi-quaternions. *Proceeding of the London Mathematical Society,* 4: 381-395.

COCKLE, J. 1849. On Systems of Algebra Involving More than One Imaginary. *Philosophical Magazine,* 35: 434-435.

ÇÖKEN, A.C., EKİCİ, C. and KOCAYUSUFOĞLU, A. 2009. Formulas for Dual Split Quaternionic Curves. *Kuwait Journal of Science and Engineering,* 36: 1-14.

ERDOĞDU, M. and ÖZDEMİR, M. 2013. On Eigenvalues of Split Quaternion Matrices. *Advances in Applied Clifford Algebras,* 23: 615-623.

ERDOĞDU, M. and ÖZDEMİR, M. 2013. On Complex Split Quaternion Matrices. *Advances in Applied Clifford Algebras,* 23: 625-638.

FAREBROTHER, R.W., GROB, J. and TROSCHKE, S.O. 2003. Matrix representation of quaternions. *Linear Algebra and its Applications,* 362: 251-255.

FARENICK, D.R. and PIDKOWICH, B.A.F. 2003. The Spectral theorem in quaternions. *Linear Algebra and its Applications,* 371: 75-102.

FARID, F.O. 1998. Topics on a Generalization of Gershgorin's Theorem. *Linear Algebra and its Applications,* 268: 91-116.

FARID, F.O., WANG, Q.W. and ZHANG, F. 2011. On the eigenvalues of quaternion matrices. *Linear and Multilinear Algebra,* 59: 451-473.

FRENKEL, I. and LIBINE, M. 2011. Split quaternionic analysis and separation of the series for $SL(2,\mathbb{R})$ and $SL(2,C)/SL(2,\mathbb{R})$. *Advances in Mathematics,* 228: 678-763.

GROB, J., TRENKLER, G. and TROSCHKE, S.O. 2001. Quaternions: further contributions to a matrix oriented approach. *Linear Algebra and its Applications,* 326: 205-213.

GÜRLEBECK, K. and SPROSSING, W. 1997. Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers, Wiley.

HACISALİHOĞLU, H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No.2.

HUANG, L. 2000. On two questions about quaternion matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 318: 79-86.

HUANG, L. and SO, W. 2001. On left eigenvalues of a quaternionic matrix. *Linear Algebra and its Applications,* 323: 105–116.

KANDASAMY, W.B.V. and SMARANDACHE, F. 2012. Dual Numbers. ZIP Publishing.

KANTOR, I.L. ,SOLODOVNIKOV, A.S. , Hypercomplex Numbers. An Elementary Introduction to Algebras, Springer-Verlag, New York, 1989.

KULA, L. 2003. Bölünmüş kuaterniyonların ve geometrik uygulamaları. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, 116 s.

KULA, L. and YAYLI, Y. 2006. Dual Split Quaternions and Screw Motion in Minkowski 3 Space. *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A*, 30: 245-258.

KULA, L. and YAYLI, Y. 2007. Split Quaternions and Rotations in Semi Euclidean Space. *Journal of Korean Mathematical Society,* 44: 1313-1327.

LEE, H.C. 1949. Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients. *Proc. R.I.A.*, 52: Sect.A.

ÖZDEMİR, M. 2005. The Roots of a Split Quaternion. *Applied Mathematics Letters,* 22: 258-263.

ÖZDEMİR, M. 2007. Timelike kuaterniyonların bazı geometrik uygulamaları. Doktora tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, .

ÖZDEMİR, M., ERDOĞDU, M. and ŞİMŞEK, H. 2014. On Eigenvalues and Eigenvectors of a Lorentzian Rotation Matrix by Using Split Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras,* 24: 179-192.

ÖZDEMİR, M. and ERGİN, A.A. 2005. Some geometric applications of split quaternions. *Proc. 16th Int. Conf. Jangjeon Math. Soc.,* 16: 108-115.

ÖZDEMİR, M. and ERGİN, A.A. 2006. Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry and Physics,* 56: 322-336.

ÖZKALDI, S. and GÜNDOĞAN, H. 2011. Dual Split Quaternions and Screw Motion in 3-Dimensional Lorentzian Space. *Advances in Applied Clifford Algebras,* 21: 193-202.

RAMİS, Ç. and YAYLI, Y. 2013. Dual Split Quaternions and Chasles' Theorem in 3-Dimensional Minkowski Space $\mathbb{E}_1^3$. *Advances in Applied Clifford Algebras,* 23: 951-964.

WEIGMANN, N.A. 1955. Some theorems on matrices with real quaternion elements. *Canad. J. Math.,* 7: 191-201.

WOLF, L.A. 1936. Similarity of matrices in which the elements are real quaternions. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 42: 737-743.

ZHANG, F. 1997. Quaternions and Matrices of Quaternions. *Linear Algebra and its Applications,* 251: 21-57.

ZHANG, F. 2007. Gershgorin type theorems for quaternionic matrices. *Linear Algebra and its Applications,* 424: 139-153.

ÖZGEÇMİŞ

Melek ERDOĞDU 1986 yılında Karaman'da doğdu. ilk, orta, lise öğrenimini Karaman'da tamamladı. 2009 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2009-2011 yılları arasında, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 2011 yılından beri Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.