

**T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TÜRKİYE'DE OLUŞTURULACAK BİR FIRLATICININ, LEO  
YÖRÜNGESİNE BİR UYDU YERLEŞTİREBİLMESİ İÇİN KATMAN DÜŞÜŞ  
BÖLGELERİNİN HESAPLANMASI**

**Gülizar AYSAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
UZAY BİLİMLERİ VE TEKNOLOJİLERİ ANABİLİM DALI**

**2015**

**T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TÜRKİYE'DE OLUŞTURULACAK BİR FIRLATICININ, LEO  
YÖRÜNGESİNE BİR UYDU YERLEŞTİREBİLMESİ İÇİN KATMAN DÜŞÜŞ  
BÖLGELERİNİN HESAPLANMASI**

**Gülizar AYSAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
UZAY BİLİMLERİ VE TEKNOLOJİLERİ ANABİLİM DALI**

**2015**

**T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TÜRKİYE'DE OLUŞTURULACAK BİR FIRLATICININ, LEO  
YÖRÜNGESİNE BİR UYDU YERLEŞTİREBİLMESİ İÇİN KATMAN DÜŞÜŞ  
BÖLGELERİNİN HESAPLANMASI**

**Gülizar AYSAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
UZAY BİLİMLERİ VE TEKNOLOJİLERİ ANABİLİM DALI**

Bu tez 21/07/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Akif ESENDEMİR

Yrd. Doç. Dr. Murat KAPLAN

Yrd. Doç. Dr. Refik SEVER

## ÖZET

# TÜRKİYE'DE OLUŞTURULACAK BİR FIRLATICININ, LEO YÖRÜNGESİNE BİR UYDU YERLEŞTİREBİLMESİ İÇİN KATMAN DÜŞÜŞ BÖLGELERİNİN HESAPLANMASI

Gülizar AYSAN

**Yüksek Lisans Tezi Uzay Bilimleri ve Teknolojileri Anabilim Dalı**  
**Danışman: Prof. Dr. Akif ESENDEMİR**  
**Temmuz 2015, 40 sayfa**

Ülkemizde uzay çalışmalarının öncelikli araştırma konuları arasına alınması ile birlikte, bu doğrultuda yapılan çalışmalar hız kazanmıştır. Gerek fırlatıcı gerekse uydu montaj ve test platformlarına yatırımlar yapılmış ve yapılmaktadır. Ülkemizce üretilen uyduların fırlatımı, şimdiye kadar diğer ülkelerin olanakları kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Yerli fırlatıcının gerçekleştirilmesine dönük çalışmalar mevcut olmakla birlikte, planlanan fırlatıcı özelliklerinin detaylarına dönük bir bilgi henüz bulunmamaktadır.

Bu çalışmada ağırlığı 400 kg olan bir uydunun yörünge yüksekliği 350 km olan eliptik bir yörüngeye yerleştirebilmesi için gereken algoritma çalışılmıştır. Fırlatıcı olarak diğer ülkelerin sahip olduğu fırlatıcılar incelenmiş ve sıvı yakıtlı, iki katmanlı bir fırlatıcının bu göreve uygun olduğu belirlenmiştir.

Dikey olarak hareketlerine başlayan fırlatıcıların daha sonra yere paralel olarak yörüngeye oturtulmaları gerekmektedir. Fırlatıcı hareketi, Newton'un ikinci yasası ile açıklanamaz. Yukarı doğru hareket ettikçe, gerek fırlatıcı kütlelerinin sürekli azalmasından gerekse sürtünme kuvvetinin ortam yoğunluğu ve fırlatıcı hızına bağlı olmasından dolayı, sistemin ivmelenmesi değişmektedir. Ayrıca 90 derecelik dönüş anlamına gelen manevra, fırlatıcının hareket doğrultusuna müdahale etmeyi gerektirmektedir. Gereksinim duyulan açısız rota düzeltmeleri yük dahil toplam fırlatıcı ağırlığına ve sistemin açısız eylemsizlik momentine bağlıdır.

Tez kapsamında, sıvı yakıtlı iki katmanlı bir fırlatıcı ile 350 km yörünge yüksekliğine çıkabilmek için sürtünme kuvveti de dikkate alınarak rota ve gerekli rota düzeltmeleri dairesel yaklaşımla belirlenmiştir. Geliştirilen algoritma sonucunda yakıtı biten birinci katmanın yerden yaklaşık 80 km yukarıda fırlatıcıdan ayrılması gerektiği ve sürtünme kuvveti de dikkate alındığında fırlatma noktasından 175 km uzaklığa düştüğü hesaplanmıştır.

**ANAHTAR KELİMELER:** Fırlatıcılar, hava sürtünme kuvveti, roket hareket denklemleri

**JÜRİ:** Prof. Dr. Akif ESENDEMİR (Danışman)  
Yrd. Doç. Dr. Murat KAPLAN  
Yrd. Doç. Dr. Refik SEVER

## ABSTRACT

### A LAUNCHER'S CALCULATION THE AREA OF STAGE DECLINE FOR PLACING A SATELLITE IN TO LEO ORBIT WHICH WILL BE CREATED IN TURKEY

Gülizar AYSAN

Master of Science Thesis Department of Space Science and Technology

Supervisor: Prof. Dr. Akif ESENDEMİR

July 2015, 40 pages

Space research has been accelerated in Turkey with a given priority to this area. Investments are made and still continue for satellite assembly , test platforms and launcher facilities. Until now satellites produced in Turkey are launched by several foreign countries. Although there is some research to develop Turkey's own launcher, no detailed investigations are made yet.

In this study, necessary algorithm has been studied to place a satellite of 400 kg into an elliptical orbit in altitude of 350 km. Launchers of other countries are investigated and two stage launcher with a liquid-propellant is seemed suitable for this thesis.

Launchers which start to move vertically, have to be put parallel to the ground when they were placed in orbit. In this case, Newton's second law is not enough to explain launcher's movement. When launchers starts to move, it's acceleration changes due to change in it's mass and drag force that depend on the ambient density. Also the maneuver of  $90^0$  means to interfere with launcher's direction of motion. Necessary angular trajectory corrections depend on total weight of the launcher and the payload and the angular inertia of the system.

In this thesis, an altitude route and the necessary course corrections is determined by iterative approach to reach an orbit of 350 km with a launcher that has a two stage liquid propellant tank. As a result of the improved algorithm first stage that finishes it's fuel at 80 km should be separated from the launcher. It is also calculated that, first stage falls 175 km away from the launching point, if drag force is included in the calculations.

**KEYWORDS:** Launchers, drag force, rocket equations of motion

**COMMITTEE:** Prof. Dr. Akif ESENDEMİR (Supervisor)

Yrd. Doç. Dr. Murat KAPLAN

Yrd. Doç. Dr. Refik SEVER

## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasını hoşgörü ve sabırla yönlendiren, her türlü yardım ve fedakarlığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle yol gösteren, yanında çalışmaktan onur duyduğum saygı değer hocam Prof. Dr. Akif ESENDEMİR (Akdeniz Üniversitesi, Uzay Bilimleri ve Teknolojileri A.B.D.)'e çok teşekkür ederim.

Çalışmamda tecrübelerinden yararlandığım ve bilimsel desteklerini esirgemeyen hocalarım Yrd. Doç. Dr. Burçin DÖNMEZ (Akdeniz Üniversitesi, Uzay Bilimleri ve Teknolojileri A.B.D.)'e ve Yrd. Doç. Dr. Muzaffer KARASULU (Akdeniz Üniversitesi, Uzay Bilimleri ve Teknolojileri A.B.D.)'ya teşekkür ederim.

Manevi olarak her zaman yanımda olan değerli aileme çok teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. MATERYAL VE METOT.....	4
2.1. Zenit Doğrultusunda İlerleyen Fırlatıcı Hareket Denklemi.....	4
2.1.1. Hava Sürtünme Kuvveti.....	7
2.2. Verniyeli Motorlar Aktif Olduğunda ve Durdurulduğunda Fırlatıcı Hareket Denklemleri.....	10
2.3. Fırlatma Aşamaları.....	16
2.4. Önerilen Fırlatıcı Sistemi Parametreleri.....	16
2.5. Oluşturulan Algoritmanın, Belirlenen Fırlatıcı Sistemi Parametreleriyle Çalıştırılması.....	18
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	20
3.1. Fırlatıcının Takip Ettiği Yol.....	21
3.2. Hava Basıncının ve Hava Yoğunluğunun Yükseklikle Değişimi.....	22
3.3. Fırlatıcıya ve Atılan Birinci Katmana Etki Eden Hava Sürtünme Kuvvetinin İrdelenmesi.....	23
3.4. Fırlatıcı Hareket Doğrultusu.....	24
3.5. Fırlatıcı İvmesinin Zamanla Değişimi.....	25
3.6. Fırlatıcı Açısal Hızın Zamanla Değişimi.....	26
3.7. Fırlatıcı Kütlesinin Zamanla Değişimi.....	27
3.8. Fırlatıcı Hızının Zamanla Değişimi.....	27
4. SONUÇ.....	29
5. KAYNAKLAR.....	31
6. EKLER.....	33
Ek 1: Konstantin E. Tsiolkovsky Roket Denklemine Türetilmesi.....	33
Ek 2: Paul A. Tipler Roket Denklemine Türetilmesi.....	35
Ek 3: Hava Yoğunluğunun ve Hava Basıncının Elde Edilmesi.....	38
ÖZGEÇMİŞ.....	

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

$C_D$	Hava sürtünme katsayısı
$C_{D1}$	Ayrılan katman için hava sürtünme katsayısı
$L_u$	Fırlatıcının boyu
$\langle m \rangle$	Ortalama atomik kütle
$m_0$	Fırlatıcının herhangi bir andaki kütlesi
$m_H$	Hidrojen atomunun kütlesi
$m_t$	Atılan katman kütlesi
$P_0$	Dış basınç
$P_e$	Egzoz basıncı
$T_a$	Ana motor itme kuvveti
$T_v$	Verniyeli motorlar itme kuvveti
$u_{ex}$	Egzoz çıkış hızı
$\rho_0$	Deniz seviyesindeki hava yoğunluğu
$\emptyset$	Hücum açısı
$\Delta v$	Fırlatıcı hız değişimi
$\Delta w$	Açısal hız değişimi
$a$	Fırlatıcı ivmesi
$g$	Yerçekimi ivmesi
$H$	Ölçek yüksekliği
$I$	Eylemsizlik momenti
$p$	Momentum
$P$	Hava basıncı
$R$	Saniyede yanan fırlatıcı yakıtının kütlesi
$s$	Fırlatıcının aldığı yol
$T$	Hava sıcaklığı
$z$	Fırlatıcının dikey yüksekliği
$\alpha$	Açısal ivme
$\theta$	Verniyeli motorların fırlatıcı eksenine ile yaptığı açı
$\rho$	Hava yoğunluğu
$\tau$	Dönme momenti
$\phi$	Fırlatıcı hız vektörünün yerle yaptığı açı



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Konstantin E. Tsiolkovsky'nin model roketleri .....	1
Şekil 1.2. Uyduya ait eliptik yörünge .....	3
Şekil 2.1. Fırlatıcıya etki eden kuvvetler .....	4
Şekil 2.2. Sıcaklığın yüksekliğe bağlı olarak değişimi .....	7
Şekil 2.3. Sıcaklığın yüksekliğe bağlı değişim modeli .....	8
Şekil 2.4. Verniyeli motorların fırlatıcıya uyguladığı kuvvet ve yerçekimi kuvvetinin bileşenleri .....	10
Şekil 2.5. Fırlatıcı hız vektörleri .....	14
Şekil 2.6. Fırlatıcı yapısı ve varsayılan parametreler .....	17
Şekil 3.1. Birinci katmanın düşüş bölgesi .....	20
Şekil 3.2. Menzil-Yükseklik eğrisi .....	21
Şekil 3.3. Hava basıncının yükseklikle değişimi .....	22
Şekil 3.4. Hava yoğunluğunun yükseklikle değişimi .....	22
Şekil 3.5. Fırlatıcıya etki eden hava sürtünme kuvvetinin yüksekliğe göre değişimi .....	23
Şekil 3.6. Hava sürtünme kuvvetinin varken ve yokken birinci katmanın düşüş mesafesi .....	24
Şekil 3.7. Fırlatıcı hareket doğrultusunun zamanla değişimi .....	25
Şekil 3.8. Fırlatıcı ivmesinin zamanla değişimi .....	25
Şekil 3.9. Fırlatıcı açısal hızın zamanla değişimi .....	26
Şekil 3.10. Fırlatıcı kütesinin zamanla değişimi .....	27
Şekil 3.11. Fırlatıcı hızının zamanla değişimi .....	28

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Yüksekliğe göre sıcaklık değişimi .....	8
Çizelge 2.2. Yüksekliğe göre sıcaklık formülleri .....	9
Çizelge 2.3. Zamanlama çizelgesi .....	18
Çizelge 2.4. Fırlatıcı başlangıç parametre değerleri.....	18
Çizelge 3.1. Parçaların ne zaman atıldığı, atıldığı andaki hızları ve çıktıkları maksimum yükseklikler .....	21

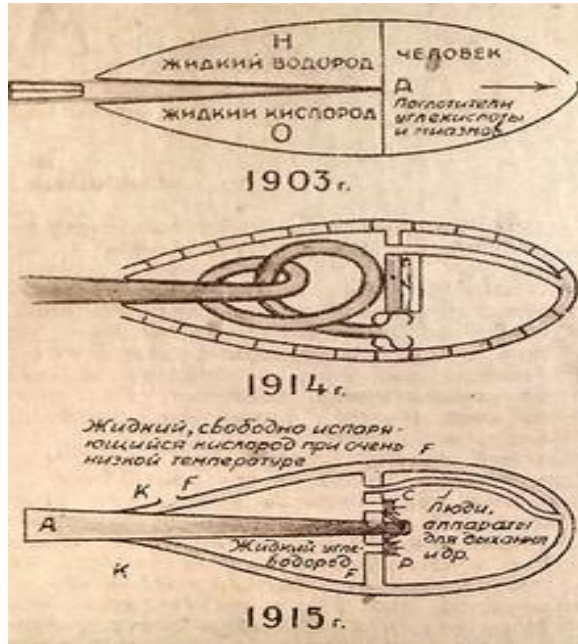
## 1. GİRİŞ

Günümüzde uyduların önemi, bilimsel araştırma, uzaktan algılama ve haberleşme alanları başta olmak üzere benzer gereksinimlerden dolayı hızla artmaktadır. Çeşitli alanlarda kullanılan uydular, istenilen amaçta istenilen yörüngeye fırlatıcılarla gönderilir. Bir çok ülkenin kendine özgü fırlatıcı sistemleri mevcuttur. Ülkemizde uydu entegrasyon ve uzay kalifikasyonu yapılabilmektedir. Uzaya uydu gönderebileceğimiz fırlatıcı çalışmaları da başlatılmış durumdadır.

Uzaya uydu göndermek amacı ile ateşlenen fırlatıcılar dikey olarak ivmelenirler. Taşıdıkları uyduyu yörüngeye yerleştirebilmek için yörüngeye gerektirdiği yüksekliğe taşınmaları ve yörüngeye ulaştığında fırlatıcı hızının seçilen yörünge için uygun olması gerekir. Uydular genel olarak yörüngeye enberi noktasında, yörüngeye teğet, uygun bir hızla bırakılır. Bu da, fırlatıcıların tercih edilen yörüngeye enberi noktasına 90 derece dönmüş olarak ve yörüngeye teğet bir doğrultuda ulaşmasını gerektirir.

Ekonomik yakıt kullanımı için tek katmanlı fırlatıcılar yerine çok katmanlı fırlatıcılar tercih edilmektedir. Uyduyu yörüngeye yerleştirebilmek için gerekli 90 derecelik dönü hareketini gerçekleştirebilmek için gerekli katmanlarda açılı kontrollü itki motorları (verniyeli motor) kullanılır.

Fırlatıcıların ivmelenmesi için gerekli olan kuvvet itki motorları tarafından üretilir. Ancak ivmelenme kütle değişken olduğundan dolayı  $F = ma$  eşitliğini sağlamaz. Değişken kütleli hareketler Konstantin E. Tsiolkovsky tarafından 1903 yılında çalışılmış ve hız için elde edilen hareket denklemi yayınlanmıştır (Tsiolkovsky 1903). Hareket denkleminin çıkarımı Ek-1'dedir.



Şekil 1.1. Konstantin E. Tsiolkovsky'nin model roketleri (Schultz 2013)

Şekil 1.1'de gösterilen Konstantin E. Tsiolkovsky'nin 1903 yılında el yazısıyla hazırlamış olduğu tasarımlar, bu konunun başlangıcını oluşturan ilk adımdır. Konstantin E. Tsiolkovsky Rusya'nın ilk roket atışının gerçekleştirilmesine de öncülük etmiş bir bilim adamıdır.

$$\Delta v = u_{ex} \ln \left( \frac{m_0}{m_1} \right) \quad (1.1)$$

Bu eşitlikte,

$\Delta v$  = Hız değişimi

$u_{ex}$  = Egzoz çıkış hızı,

$m_0$  = Fırlatıcının herhangi bir andaki kütlesi,

$m_1$  = Fırlatıcının belirgin bir zaman sonraki kütlesidir.

Denklem (1.1)'de, fırlatıcı yakıtının yanmasından dolayı, fırlatıcı kütlesi  $m_0$  kütlesinden  $m_1$  kütlesine azalır. Egzoz çıkış hızı ise egzozun geometrisine bağlı olarak değişir. Dolayısıyla farklı fırlatıcılarda yanan aynı yakıt, farklı itme kuvvetleri oluşturur.

Yukarıdaki denklemde yerçekimi ivmesi bulunmadığından serbest uzayda geçerlidir. Daha sonraki dönemde Paul A. Tipler, yerçekimini de dikkate alarak roket denklemlerini yinelemiş ve aşağıdaki denklemi türetmiştir (Tipler 1998). Denklem çıkarımı Ek-2'dedir.

$$\Delta v = u_{ex} \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - Rt} \right) - g\Delta t \quad (1.2)$$

Burada,

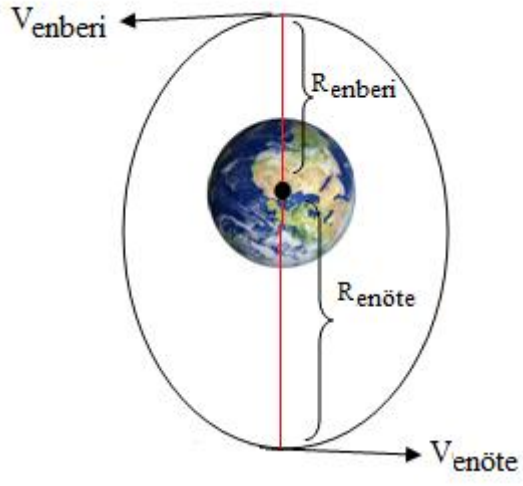
$\Delta v$  = Hız değişimi,

$R$  = Saniyede yanan kütle miktarı

$g$  = Yerçekimi ivmesidir.

Özet olarak denklem (1.1)'de yerçekimi terimi bulunmadığından, denklem (1.2)'de ise yerçekimi dahil edilmekle birlikte yerçekiminin yüksekliğe bağlı olarak değişmesinden dolayı gerçekçi bir fırlatıcı rotası için bu denklemler yetersiz kalmaktadır. Ayrıca her iki denklemde de hava sürtünme kuvveti dikkate alınmamıştır. Gerek fırlatıcı konumunun gerekse fırlatıcı hızının doğru olarak hesaplanabilmesi için yerçekimi ivmesinin ve hava sürtünme kuvvetinin yüksekliğin bir fonksiyonu olarak roket hareket denklemlerinde yer alması gerekir.

Bu tezin amacı; yukarıda ifade edilen roket hareket denklemlerine, zamana ve yüksekliğe bağlı yerçekimi ivmesinin ve hava sürtünme kuvvetinin de eklenmesiyle, birden fazla katmanlı roketler için kullanılacak bir hareket denklemi elde etmektir. Elde edilen bu denklem kullanılarak, Şekil 1.2'de gösterilen enberi uzaklığı 350 km olan bir yörüngeye uydu yerleştirmek üzere dögüsel yaklaşımla bir algoritma oluşturulacaktır. Ayrıca ülkemizden güvenli bir atış yapabilmek için yere düşme ihtimali olan katmanların menzilleri belirlenecektir.

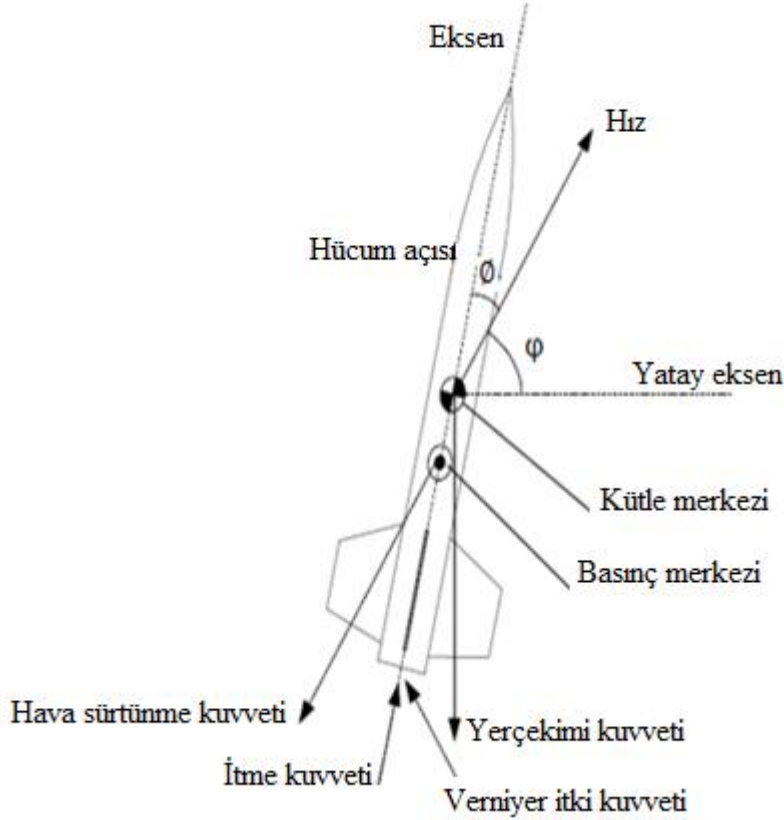


Şekil 1.2. Uyduya ait eliptik yörünge

## 2. MATERYAL VE METOT

### 2.1. Zenit Doğrultusunda İlerleyen Fırlatıcı Hareket Denklemi

Fırlatıcı hareketi sırasında fırlatıcıya, itme kuvveti, yerçekimi kuvveti ve hava sürtünme kuvveti etki eder. Hem hava sürtünme kuvveti hem de yerçekimi kuvveti yüksekliğe ve hıza bağlı olarak sürekli değişime uğrar (Charlesworth 2010). Atmosferde hareket eden fırlatıcıya, etki eden kuvvetler Şekil 2.1'de gösterilmektedir.



Şekil 2.1. Fırlatıcıya etki eden kuvvetler (Charlesworth 2010)

Fırlatıcı, itme kuvveti doğrultusunda hareket eder. Fırlatıcının dönü hareketi ise kütle merkezi etrafında gerçekleşir. Basınç merkezi aerodinamik kuvvetlerin etki ettiği noktadır ve basınç merkezinin yeri fırlatıcı özelliğine ve aerodinamik yapısına göre değişmektedir. Bu çalışmada, kütle ve basınç merkezleri birbirine yakın bir fırlatıcı varsayılmıştır.

Başlangıçtaki toplam kütlesi  $m_0$  olan bir fırlatıcının ateşlenmesiyle birlikte  $t$  zaman sonra fırlatıcının bir miktar yakıtı yanar ve egzoz gazı olarak dışarı atılır. Bunun sonucunda momentumun korunumundan dolayı fırlatıcı  $v$  hızı kazanır. Yakıt sürekli olarak azaldığından hızda sürekli artmaktadır.

Başlangıç kütlesi  $m_0$  olan bir fırlatıcı ele alındığında  $t$  zaman sonra kütlesi;

$$m_{ilk} = m_0 - Rt \quad (2.1)$$

olarak yazılabilir. Bu ifadede R, birim zamanda yanan yakıt kütlesidir. t zamanda sistemin hızı v olursa, fırlatıcının momentumu,

$$p_{ilk} = m_{ilk}v \quad (2.2)$$

olur. Fırlatıcı t + Δt zamanda v + Δv hızına ulaşır. Fırlatıcının yeni kütlesi de :

$$m_{son} = (m_0 - Rt) - RΔt \quad (2.3)$$

olur.

Denklem (2.1) dikkate alındığında bu ifade

$$m_{son} = m_{ilk} - RΔt \quad (2.4)$$

olarak yazılabilir.

t + Δt zaman sonra sistemin momentumu ,

$$\begin{aligned} p_{son} &= m_{son}(v + Δv) + RΔt(v - u_{ex}) \\ &= (m_{ilk} - RΔt)(v + Δv) + RΔt(v - u_{ex}) \\ &= m_{ilk}v + m_{ilk}Δv - RΔtv - RΔtΔv + RΔtv - RΔtu_{ex} \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemde bulunan RΔtΔv çok küçük bir değer olduğundan ihmal edilir. Bu nedenle,

$$p_{son} \approx m_{ilk}v + m_{ilk}Δv - RΔtu_{ex} \quad (2.5)$$

olur. Momentumdaki değişim ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_{son} - p_{ilk} = (m_{ilk}v + m_{ilk}Δv - RΔtu_{ex}) - m_{ilk}v \\ \Delta p &= m_{ilk}Δv - RΔtu_{ex} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sistemin toplam momentumundaki değişim kuvvetler toplamına eşittir.

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \sum_1^n F$$

Sistemde  $\sum_1^n F$ , yerçekimi kuvveti (mg) ve hava sürtünme kuvveti ( $\frac{1}{2}\rho AC_D v^2$ ) dir.

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m_{ilk} \frac{\Delta v}{\Delta t} - Ru_{ex} = -m_{ilk}g - \frac{1}{2}\rho AC_D v^2$$

$$m_{ilk} \frac{\Delta v}{\Delta t} = Ru_{ex} - m_{ilk}g - \frac{1}{2}\rho AC_D v^2$$

$$m_{ilk} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = Ru_{ex} - m_{ilk} g - \frac{1}{2} \rho AC_D v^2$$

$$m_{ilk} \frac{dv}{dt} = Ru_{ex} - m_{ilk} g - \frac{1}{2} \rho AC_D v^2 \quad (2.7)$$

Yukarıdaki denklemde:

$u_{ex}$  = Egzoz çıkış hızı,

$g$  = Yerçekimi ivmesi,

$C_D$  = Hava sürtünme katsayısı,

$\rho$  = Hava yoğunluğu,

$v$  = Fırlatıcı hızı,

$A$  = Fırlatıcı kesit alanıdır.

(2.7) nolu eşitliğin her iki tarafını kütleyle böldüğümüzde,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Ru_{ex}}{m_{ilk}} - g - \frac{\frac{1}{2} \rho AC_D v^2}{m_{ilk}} \quad (2.8)$$

elde edilir.  $m_{ilk}$  yerine denklem (2.1)'deki değeri eklendiğinde aşağıdaki denklem elde edilir.

$$dv = \frac{Ru_{ex}}{m_0 - Rt} dt - g dt - \frac{\frac{1}{2} \rho AC_D v^2}{m_0 - Rt} dt \quad (2.9)$$

$$\int_{V_1}^{V_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} \frac{Ru_{ex}}{m_0 - Rt} dt - \int_{t_1}^{t_2} g dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{1}{2} \rho AC_D v^2}{m_0 - Rt} dt \quad (2.10)$$

Yapılan çalışmada  $t_1 - t_2$  zaman aralığı çok kısa tutulduğunda (0,1 s) bu süre içinde yerçekimi ivmesi ( $g$ ) ve hava sürtünme kuvveti sabit varsayılabilir. Bu nedenle,

$$\Delta v = -u_{ex} \ln(m_0 - Rt_2) - (-u_{ex} \ln(m_0 - Rt_1) - g(t_2 - t_1))$$

$$+ \frac{1}{2R} \rho AC_D V^2 [ \ln(m_0 - Rt_2) - \ln(m_0 - Rt_1) ]$$

$$\Delta v = -u_{ex} \ln \frac{\ln(m_0 - Rt_2)}{\ln(m_0 - Rt_1)} + \frac{1}{2R} \rho AC_D V^2 \ln \frac{\ln(m_0 - Rt_2)}{\ln(m_0 - Rt_1)} - g(t_2 - t_1)$$

$$\Delta v = u_{ex} \ln \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} - \frac{1}{2R} \rho AC_D V^2 \ln \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} - g(t_2 - t_1) \quad (2.11)$$

$$\Delta v = \ln \left( \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} \right) \left( u_{ex} - \frac{1}{2R} \rho AC_D V^2 \right) - g(t_2 - t_1) \quad (2.12)$$

olur. Bu son denklem, amaçladığımız yerçekimi ve hava sürtünme kuvveti dahil dikey hareket denklemdir.



### 2.1.1. Hava Sürtünme Kuvveti

Hava yoğunluğuna ve fırlatıcı hızına bağlı hava sürtünme kuvveti,

$$\frac{1}{2} C_D \rho A v^2 \quad (2.13)$$

Yükseklığe bağlı hava yoğunluğu (Bkz. Ek-3),

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}} \quad (2.14)$$

$z$  = Dikey yükseklik (m),

$\rho_0$  = Deniz seviyesindeki hava yoğunluğu (1,225 kg/ m<sup>3</sup>),

$H$  (T, g) = Ölçek yüksekliği olup, hava yoğunluğunun 1/e kat düştüğü yüksekliği ifade etmektedir. Bu parametre dünyanın yerçekimine, atmosferdeki gazların sıcaklığına ve atmosferdeki atomların kütlelerine bağlı olarak değişir (NASA 2015). Birimi ise metredir.

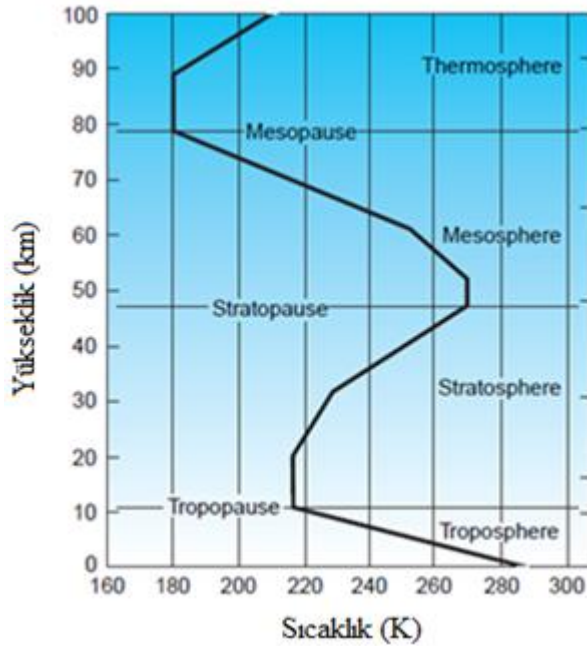
$$H = \frac{kT}{\langle m \rangle g} \quad (2.15)$$

$\langle m \rangle$  = Ortalama atomik kütle (4,76x10<sup>-26</sup> kg)

$k$  = Boltzmann sabiti (1,38 x 10<sup>-23</sup> J/K)

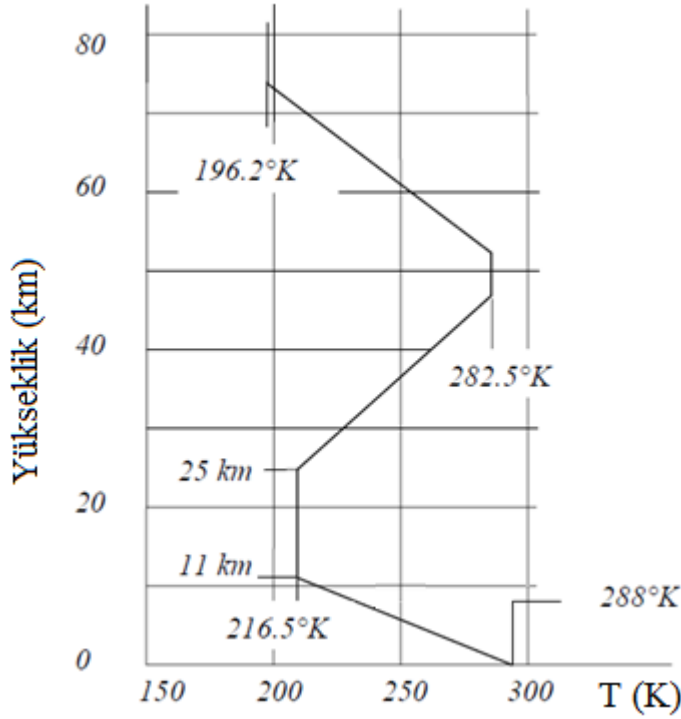
$T$  = Hava sıcaklığı (K)'dir.

Atmosferik sıcaklık değişimi Uluslararası Sivil Havacılık Organizasyonu tarafından standart atmosfer olarak tanımlanmıştır.



Şekil 2.2. Sıcaklığın yüksekliğe bağlı olarak değişimi (Wallace ve Hobbs 2006)

Yükseklığe bağlı olarak sıcaklığın hesaplanabilmesi için Şekil 2.2'de verilen grafik aşağıdaki şekilde modellenmiştir.



Şekil 2.3. Sıcaklığın yüksekliğe bağlı değişim modeli (Yükselen 2006)

Bu grafikte herhangi bir yüksekliğe ait sıcaklığı bulabilmek için yüksekliğin içinde bulunduğu yükseklik aralığına karşılık gelen  $dT/dz$  kullanılabilir. Bu amaçla Şekil 2.3'ten çıkartılan yükseklik aralıkları ve o aralıklardaki  $dT/dz$  değerleri aşağıda tablo halinde sunulmaktadır.

z (km)	$dT/dz$
0 - 11	-6,5
11 - 25	0
25 - 47,3	2,96
47,3- 53,5	0
53,5 - 75,8	-3,85
75,8- 91,3	0

Çizelge 2.1. Yüksekliğe göre sıcaklık değişimi

Şekil 2.3'ten çıkartılan ve bu çalışmada sıcaklık değerleri için kullanılan ifadeler yüksekliğe (z) bağlı olarak aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Yükseklik (km)	Sıcaklık (K)
$0 < z \leq 11$	$288+(-6,5x(z))$
$11 < z \leq 25$	216,5
$25 < z \leq 47,3$	$216,5+(2,96x(z))$
$47,3 < z \leq 53,5$	282,5
$53,5 < z \leq 75,8$	$282,5+(-3,85x(z-53,5))$
$75,8 < z$	196,2

Çizelge 2.2. Yüksekliğe göre sıcaklık formülleri

Denklem 2.13'teki ölçek yüksekliğinin bağlı olduğu diğer parametre ise yerçekimi ivmesidir. Yükseklik arttıkça yerçekimi ivmesi azalmaktadır.

$$g = \frac{GM}{(R+z)^2} \quad (2.16)$$

G = Evrensel yerçekimi sabiti olup değeri ( $6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ )

M = Dünya kütlesi ( $5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$ )

R = Dünya yarıçapı (6375 km)

z = Fırlatıcı yüksekliği (km)

Denklem (2.15) ve denklem (2.16) birleştirildiğinde ölçek yüksekliği,

$$H = \frac{kT}{(m) GM} \frac{(R+z)^2}{GM} \quad (2.17)$$

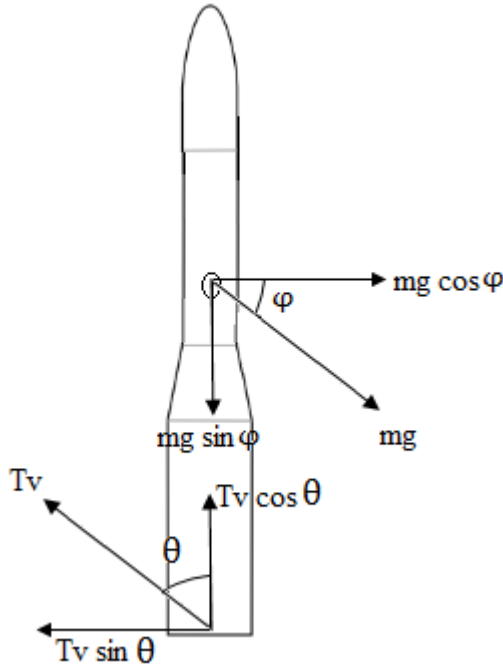
eşitliği elde edilir.

Denklem (2.13)'te gösterilen hava sürtünme kuvvetini hesaplayabilmek için gereken son parametre hava yoğunluğu ( $\rho$ )'dur. Hava sürtünme katsayısı ( $C_D$ ) ve fırlatıcı kesit alanı (A) fırlatıcının geometrisine bağlı olan sabit parametrelerdir.  $C_D$ , rüzgar tüneline yapılan denemeler sonucunda ortaya çıkan boyutsuz bir parametredir ve hava sürtünme kuvvetini hesaplayabilmek için kullanılır. Hareket eden cismin hızı (v), kesit alanı (A), hava sürtünme katsayısı ( $C_D$ ) ve yüksekliği (z) biliniyor ise denklem (2.14) ve (2.15) kullanılarak o yükseklikteki hava yoğunluğu ( $\rho$ ), denklem (2.13) kullanılarak da o yükseklikteki hava sürtünme kuvveti hesaplanabilir.

## 2.2. Verniyeli Motorlar Aktif Olduğunda ve Durdurulduğunda Fırlatıcı Hareket Denklemleri

Verniyeli motorlar, dik hareket eden fırlatıcıya açı vermek amacıyla kullanılırlar (NASA 2015). Verniyeli motorların fırlatıcı eksenine göre yaptığı açı kontrol edilebilir. Genellikle ana egzoz çıkışının çevresine yerleştirilirler. Eksene göre açı ile çalıştırıldığında üretilen itki kuvvetinin eksene paralel olan bileşeni hızın artmasını sağlarken, eksene dik bileşeni kütle merkezi etrafında açısal ivme kazandırır ve fırlatıcının hareket doğrultusunu değiştirir.

Verniyeli motorlar durdurulduğunda ise fırlatıcı kazandığı açısal hızdan dolayı kütle merkezi etrafında dönme hareketine devam eder. Fırlatıcının rotasını hesaplayabilmek için verniyeli motorlar hem çalışırken hem de durdurulduktan sonraki fırlatıcı hareket denklemlerinin elde edilmesi gerekir.



Şekil 2.4. Verniyeli motorların fırlatıcıya uyguladığı kuvvet ve yerçekimi kuvvetinin bileşenleri

Verniyeli motorlar çalıştırıldığında, üretilen itkinin eksene paralel bileşeni,

$$T_v \cos \theta \quad (2.18)$$

fırlatıcı itme kuvvetine eklenir.

$T_v$  = Verniyeli motorların itme kuvveti,

$\theta$  = Verniyeli motorların açısı,

Bu durumda fırlatıcıya eksenini doğrultusunda etki eden toplam kuvvet,

$$m_{ilk} \frac{dv}{dt} = Ru_{ex} + T_v \cos \theta - mg \sin \varphi - \frac{1}{2} \rho A C_D v^2 \quad (2.19)$$

olarak yazılabilir.

Denklem (2.19)'da her iki taraf kütleyle bölünürse,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Ru_{ex}}{m_{ilk}} + \frac{T_v \cos \theta}{m_{ilk}} - g \sin \varphi - \frac{\frac{1}{2} \rho A C_D v^2}{m_{ilk}} \quad (2.20)$$

elde edilir. Denklem (2.1)'in kullanılmasıyla,

$$dv = \frac{Ru_{ex}}{m_0 - Rt} dt + \frac{T_v \cos \theta}{m_0 - Rt} dt - g \sin \varphi dt - \frac{\frac{1}{2} \rho A C_D v^2}{m_0 - Rt} dt \quad (2.21)$$

bulunur. Bu denklemin integralini alıp,

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} \frac{Ru_{ex}}{m_0 - Rt} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{T_v \cos \theta}{m_0 - Rt} dt - \int_{t_1}^{t_2} g \sin \varphi dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{1}{2} \rho A C_D v^2}{m_0 - Rt} dt \quad (2.22)$$

denklem (2.12)'deki yaklaşımları kullanarak,

$$\begin{aligned} \Delta v &= -u_{ex} \ln(m_0 - Rt_2) - (-u_{ex} \ln(m_0 - Rt_1)) + \\ &\quad \left( -\frac{T_v \cos \theta}{R} \ln(m_0 - Rt_2) - \frac{T_v \cos \theta}{R} \ln(m_0 - Rt_1) - g \sin \varphi (t_2 - t_1) - \right. \\ &\quad \left. \left( -\frac{1}{2R} \rho A C_D v^2 \ln(m_0 - Rt_2) - \left( -\frac{1}{2R} \rho A C_D v^2 \ln(m_0 - Rt_1) \right) \right) \right) \\ \Delta v &= u_{ex} \ln \left( \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} \right) + \frac{T_v \cos \theta}{R} \ln \left( \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} \right) - g \sin \varphi (t_2 - t_1) - \\ &\quad \frac{1}{2R} \rho A C_D v^2 \ln \left( \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} \right) \end{aligned}$$

verniyeli motorların çalıştırıldığı durumda hız değişim denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \Delta v &= \left( u_{ex} + \frac{T_v \cos \theta}{R} - \frac{1}{2R} \rho A C_D v^2 \right) \ln \left( \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} \right) \\ &\quad - g \sin \varphi (t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Silindirik bir yapıya sahip fırlatıcının kütle merkezi yaklaşık olarak fırlatıcının geometrik merkezindedir. Dolayısıyla eylemsizlik momenti bu merkeze göre alınmalıdır.

Dönü hareketi boyunca fırlatıcının kütle merkezinin bu noktada olduğu kabul edilirse, fırlatıcının açısız momentumunun zamana göre değışimi olan dönme momenti hesaplanabilir.

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(Iw)}{dt} = I \frac{dw}{dt} = I\alpha \quad (2.24)$$

I eylemsizlik momenti, w açısız hız olmak üzere açısız momentum,

$$L = Iw \quad (2.25)$$

olarak ifade edilir. Fırlatıcı üzerine dönme momenti var ise açısız momentum zamanla artar ve fırlatıcı dönme işlemi  $\alpha$  gibi açısız bir ivmeyle devam eder. Eylemsizlik momenti (I), harcanan yakıt nedeniyle zamanla azaldığından açısız ivmenin hesaplanmasında dikkate alınmalıdır. Fırlatıcının açısız ivmesi ( $\alpha$ ), kısa zaman aralıkları dikkate alınarak hesaplandığında, bu zaman aralığında eylemsizlik momenti (I) sabit olarak alınabilir.

Verniyeli motorların fırlatıcı eksenine dik kuvvet bileşenin ürettiği dönme momenti,

$$\tau = I\alpha = T_v \sin \theta \frac{L_u}{2} \quad (2.26)$$

Burada,

$\tau$  = Dönme momenti

I = Eylemsizlik momenti

$\alpha$  = Açısız ivme

$L_u$  = Fırlatıcının boyu

$\theta$  = Verniyeli motorların açısızdır.

Dönme momentinin sağladığı anlık açısız ivme, denklem (2.27)'de gösterildiği gibi açısız hızın zamanla değışimidir.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt} \quad (2.27)$$

Denklem (2.26) düzenlenirse,

$$I \frac{dw}{dt} = T_v \sin \theta \frac{L_u}{2} \quad (2.28)$$

elde edilir. Eylemsizlik momenti,

$$I = \frac{1}{12} L_u^2 (m_0 - Rt) \quad (2.29)$$

olduğundan, denklem (2.28),

$$\frac{dw}{dt} = \frac{6T_v \sin \theta}{L_u(m_0 - Rt)} \quad (2.30)$$

olarak yazılabilir. Belirgin bir zaman aralığında açısız hızın nasıl değıştiği ise,

$$\int_{w_1}^{w_2} dw = \frac{6T_v \sin \theta}{L_u R} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{m_0 - Rt} \quad (2.31)$$

$$\Delta w = w_2 - w_1 = \frac{6T_v \sin \theta}{L_u R} \ln \left( \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} \right) \quad (2.32)$$

denklemini yardımıyla elde edilir. Denklem (2.28) kullanılarak açısal ivme,

$$\alpha = \frac{T_v \sin \theta \frac{L_u}{2}}{I} \quad (2.33)$$

olarak ifade edilir. Denklem (2.29), denklem (2.33)'te yerine yazılırsa,

$$\alpha = \frac{T_v \sin \theta \frac{L_u}{2}}{\frac{1}{12} L_u^2 (m_0 - Rt)} = \frac{6T_v \sin \theta}{L_u (m_0 - Rt)} \quad (2.34)$$

olarak açısal ivme denklemi elde edilir. Açısal dönü,

$$\varphi = \varphi_0 + (\Delta w \Delta t) + \left( \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 \right) \quad (2.35)$$

olduğundan, denklem (2.32) ve (2.34), (2.35)'te yerine konduğunda,

$$\Delta \varphi = \left[ \frac{6T_v \sin \theta}{L_u R} \ln \left( \frac{m_0 - Rt_0}{m_0 - Rt_1} \right) \Delta t \right] + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{6T_v \sin \theta}{L_u (m_0 - Rt)} \right) \Delta t^2 \right] \quad (2.36)$$

yazılabilir. Verniyeli motorlar durdurulduğunda açısal momentum korunur ve denklem (2.35),  $\alpha = 0$  olduğundan dolayı,

$$\varphi = \varphi_0 + (\Delta w \Delta t) \quad (2.37)$$

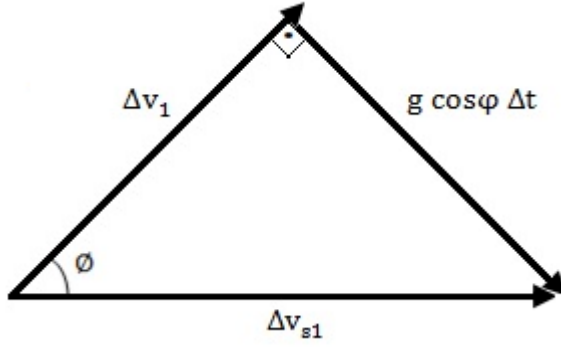
olur.

Hareket denklemi ise (2.23),  $T_v = 0$  olduğundan,

$$\Delta v = \left( u_{ex} - \frac{1}{2R} \rho A C_D v^2 \right) \ln \left( \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} \right) - g \sin \varphi (t_2 - t_1) \quad (2.38)$$

olur.

Fırlatıcı üzerine etkiyen yerçekimi kuvvetinin eksene paralel bileşeni fırlatıcının hızını azaltır. Eksene dik bileşeni olan  $(m_0 - Rt) g \cos \varphi$  ise fırlatıcıyı kütle merkezinden aynı yönde çeker. Yerçekimi kuvvetinin eksene dik bileşeni ise  $(g \cos \varphi)$  fırlatıcıyı aynı doğrultuda ivmelendirir. Bu ivmede  $\Delta t$  zaman aralığında fırlatıcıya  $g \cos \varphi \Delta t$  gibi bir hız kazandırır. Fırlatıcının gerçek hızı şekil 2.5'te gösterildiği gibi bu iki hız vektörünün toplanmasıyla elde edilir.



Şekil 2.5. Fırlatıcı hız vektörleri

Şekil 2.5'te gösterildiği gibi fırlatıcının hızı,  $\Delta v_1$  ile  $g \cos \varphi \Delta t$  olan iki hız vektörünün toplamı,

$$\Delta v_{s1} = \sqrt{\Delta v_1^2 + (g \cos \varphi \Delta t)^2} \quad (2.39)$$

olarak fırlatıcının gerçek hızı elde edilir.

Fırlatıcı hücum açısının hesaplanması gerektiğinde Şekil 2.5'e göre denklem (2.40) kullanılabilir.

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{g \cos \varphi \Delta t}{\Delta v_1} \quad (2.40)$$

olarak fırlatıcı hücum açısı elde edilir.

Fırlatıcının yere dik ve yatay doğrultudaki katettiği mesafeleri bulabilmek için fırlatıcının ivmesinin bilinmesi gerekir.

0,1 saniyelik zaman aralığında hız değişimi  $\Delta v$  bilindiğinden ivme,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{0,1} \quad (2.41)$$

olur. Aynı zaman aralığında rotasında aldığı yol,

$$\Delta s = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \quad (2.42)$$

olarak hesaplanabilir. Bu zaman aralığında fırlatıcı hız vektörünün yerle yaptığı açı,

$$\varphi = 90 - \Delta \varphi \quad (2.43)$$

olur.

Aynı zaman aralığında fırlatıcının çıktığı yatay uzaklık ve yükseklikteki değişim,



$\Delta s \cos \varphi$  ve  $\Delta s \sin \varphi$  olarak yazılabilir.

Herhangi bir zaman aralığında katedilen yatay ve dikey mesafeler yukarıda anlatıldığı gibi hesaplanabildiğinden ardaşık zaman aralıklarında bu değerler toplanarak roketin yüksekliği ve menzili hesaplanabilir.

İşi biten katmanların atılması gerektiği anda yukarıdaki yaklaşımla fırlatıcının o anki hızı, yüksekliği ve yatay mesafesi bilindiğinden, rotası ve yere düşme menzili hesaplanabilir.

Atılan katmanın üzerinde hava sürtünme kuvvetinin sebep olduğu x eksenindeki ivme,

$$a_x = \frac{\frac{1}{2}\rho AC_{D1} V^2 \cos \varphi}{m_t} \quad (2.44)$$

y eksenindeki ivme ise,

$$a_y = \frac{\frac{1}{2}\rho AC_{D1} V^2 \sin \varphi + m_t g}{m_t} \quad (2.45)$$

olmaktadır. Burada,

$m_t$  = Atılan katman kütlesi

$C_{D1}$  = Ayrılan katman için hava sürtünme katsayısı

İşi biten katmanın ayrıldığı andaki yatay ve dikey hız bileşenleri,

$$V_{0x} = V \cos \varphi \quad (2.46)$$

$$V_{0y} = V \sin \varphi \quad (2.47)$$

olur. Bir sonraki zaman aralığının sonunda yatay ve düşey hız bileşenleri,

$$V_x = V_{0x} - a_x \Delta t \quad (2.48)$$

$$V_y = V_{0y} - a_y \Delta t \quad (2.49)$$

olmaktadır.

Fırlatıcının katettiği toplam menzil,

$$x_1 = x_0 + (V_x \Delta t) - \left(\frac{1}{2} a_x (\Delta t^2)\right) \quad (2.50)$$

ve yüksekliği,

$$y_1 = y_0 + (V_y \Delta t) - \left(\frac{1}{2} a_y (\Delta t^2)\right) \quad (2.51)$$

olur.

### 2.3. Fırlatma Aşamaları

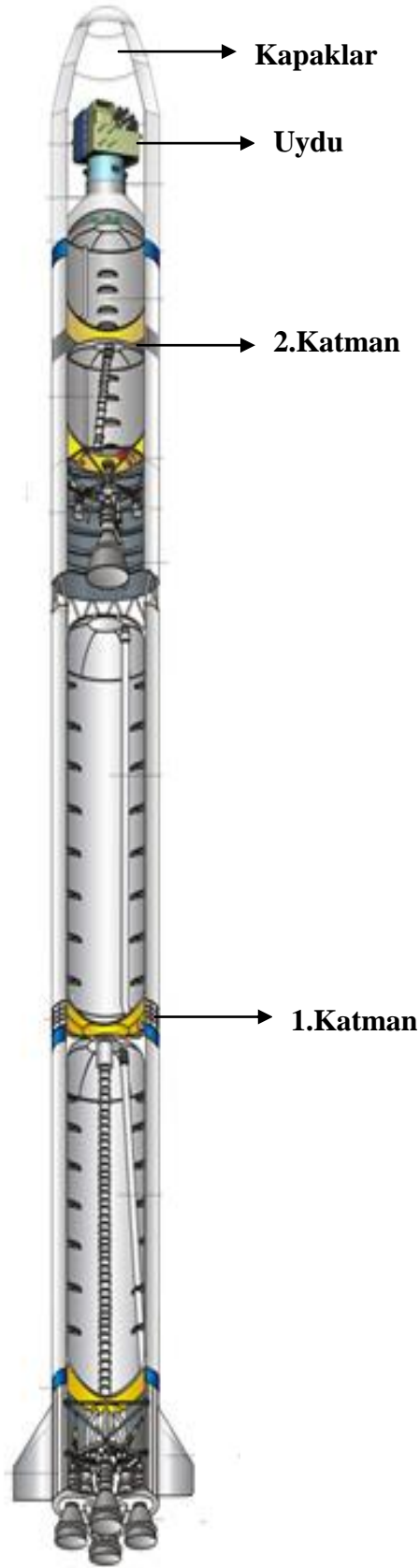
Ülkemizden atılacak bir fırlatıcının, varsayılan bir eliptik yörüngenin enberi noktasına uydu yerleştirebilmek ve fırlatıcı katmanlarının düşüş bölgelerini hesaplayabilmek için dögüsel yaklaşımlı bir algoritma oluşturulmuştur.

Fırlatıcının ateşlenmesiyle başlayan fırlatma işlemi, ana motorlar aracılığıyla bir süre fırlatıcının zenit doğrultusunda yol almasını sağlar. Hedef yörüngenin enberi noktasına teğet olarak ulaşabilmek için zaman zaman verniyeli motorların önceden belirlenen bir açı ile çalıştırılması gerekir. Bu da fırlatıcıya açısız bir hız kazandırır. Birinci katman yakıtı bittiğinde fırlatıcıdan ayrılır.

Daha sonra ikinci katman ana motoru ateşlenir. Fırlatıcının zenit açısı 90 dereceye ulaştığında sistemin motorları durdurulur ve yaylı bir mekanizmayla ayrılan uydu yörüngeye yerleşmiş olur. Yaylı sistemin uyguladığı kuvvet, fırlatıcı ve uydu arasında hız farkı oluşturur. Bu hız farkından dolayı uydu tamamen ayrıldıktan sonra verniyeli motorları ile tekrar yeryüzüne doğru yönlendirilir. Belirli bir yükseklikten düşen katmanların yanıp yanmama olasılığı katmanlarda kullanılan malzemenin türüne bağlıdır. Örneğin uzay mekiği, yüzeyinin özel bir seramik malzemeyle kaplı olması nedeniyle yaklaşık 250 km yükseklikten yanmadan dünyaya geri dönmektedir (NASA 2015). Kolay ısınan bir malzeme kullanıldığında ise fırlatıcı katman ya da parçalarının yanma ihtimali daha yüksek olmaktadır.

### 2.4. Önerilen Fırlatıcı Sistemi Parametreleri

Tanımlanan görev için, Türkiye'de fırlatıcı sistemi ile ilgili bir yapılanma olmadığından diğer ülkelerin sahip olduğu bir çok fırlatıcı incelenerek alçak dünya yörüngelerine uydu yerleştirebilen sıvı yakıtlı ve iki katmanlı bir fırlatıcı sisteminin uygun olduğu belirlenmiştir. Varsayılan bu fırlatıcı parametreleriyle (Şekil 2.6) 0,1 saniyelik zaman aralıklarında fırlatıcı konum ve hız parametrelerinin hesaplanabildiği bir algoritma oluşturulmuştur. Bu algoritma kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamalar dögüsel olarak tamamlanan görevi gerçekleştirebilmek için en uygun hale getirilmiştir. Yapılan bütün çözümler, dünya merkezi, fırlatma noktası ve uydu yörüngesinin enberi noktalarından geçen düzlemde yapılmıştır.



#### Önerilen Fırlatıcı Özellikleri:

Toplam ağırlığı: 250 ton  
 Toplam boyu: 41,05 m  
 Çapı: 3,35 m  
 (Barbosa 2014)

#### 1. Katman Özellikleri:

Boy: 27,91 m  
 Çapı: 3,35 m  
 Toplam ağırlık: 191,70 ton  
 Yakıt kütlesi: 182,03 ton  
 İtme kuvveti: Ana motor: 2961,60 kN  
                   Verniyeli motor: 10 kN  
 Ana motor egzoz çıkış hızı: 2550 m/s  
 Verniyeli motor egzoz çıkış hızı: 2500 m/s  
 Tank kütlesi + Ana motor + Verniyeli motor:  
 9,66 ton

#### 2. Katman + Uydu Özellikleri:

Boy: 13,146 m  
 Çapı: 3,35 m  
 Toplam ağırlık: 58,30 ton  
 Yakıt kütlesi: 51,17 ton  
 İtme Kuvveti: Ana motor: 1500 kN  
                   Verniyeli motor: 10 kN  
 Ana motor egzoz çıkış hızı: 3300 m/s  
 Verniyeli motor egzoz çıkış hızı: 2500 m/s  
 Tank kütlesi + Ana motor + Verniyeli motor +  
 Kapaklar: 6,72 ton  
 Uydu kütlesi: 400 kg olarak varsayılmıştır.

Şekil 2.6. Fırlatıcı yapısı (China Great Wall Ind. Corp. 2012) ve varsayılan parametreler

## 2.5. Oluşturulan Algoritmanın Belirlenen Fırlatıcı Sistemi Parametreleriyle Çalıştırılması

Oluşturulan algoritma tekrarlanarak denenmiş ve planlanan yörüngenin enberi noktasına gereken hızla ve teğet olarak ulaşabilmesi için kullanılması gereken zaman çizelgesi oluşturulmuştur.

	Olaylar	Zaman(s)
1	Yerden kalkış	0
2	Birinci katman verniyeli motorlarının $65,8^{\circ}$ ile çalıştırılması	20,1
3	Birinci katman verniyeli motorların durdurulması	30
4	Birinci katmanın ayrılması	156,7
5	İkinci katmanın ateşlenmesi	156,8
6	İkinci katman verniyeli motorlarının $80,2^{\circ}$ ile çalıştırılması	166,1
7	İkinci katman verniyeli motorlarının durdurulması	176
8	Uyduyu koruyan kapakların atılması	186,5
9	İkinci katmanın ana motorunun durdurulması ve uydunun ayrılması	269,3
10	Uydunun yörüngeye yerleştirilmesi	269,4

Çizelge 2.3. Zamanlama çizelgesi

Fırlatıcının ateşlenmesiyle dikey hareket başlamaktadır. Bir sonraki adımda ( $t=0,1$ ) fırlatıcının hızını (denklem 2.12), ivmesini (denklem 2.41), katedilen mesafeyi (denklem 2.42), hava yoğunluğunu (denklem 2.14) ve yerçekimi ivmesini (denklem 2.16) bulabilmek için Çizelge 2.4'deki değerler kullanılmıştır.

Yerçekimi ivmesi (g)	Hava yoğunluğu ( $\rho$ )	Hava sıcaklığı (T)	Fırlatıcı hızı (V)	Fırlatıcı ivmesi (a)	Fırlatıcı yolu (s)	Fırlatıcı kütlesi ( $m_0$ )	Ölçek yükseklik (H)
9,8 $m/s^2$	1,225 $kg/m^3$	288 K	0 m/s	0 $m/s^2$	0 m	250 ton	8518 m

Çizelge 2.4. Fırlatıcı başlangıç parametre değerleri

Fırlatıcının her 0,1 saniye zaman aralığında ulaşılan hız ve katedilen mesafe bir önceki hız ve yol değerlerine ilave edilerek bir sonraki adımın başlangıç parametreleri belirlenmiştir. Bu algoritma hedeflenen yörünge yüksekliğine ve istenilen hıza ulaşılan kadar tekrarlanmıştır.

Daha sonra fırlatıcının hareket doğrultusunu bükebilmek için verniyeli motorlar gerekli açı ile ateşlenmiştir. İtke kuvvetinin fırlatıcı eksenine dik ve paralel bileşenleri ayrı ayrı ele alınmıştır. Verniyeli motorların gövdeye paralel kuvvet bileşeni ana motorların itke kuvvetine katkıda bulunduğundan her adımda hesaplanarak ana motor itke kuvvetine ilave edilmiştir.

Verniyeli motorların gövdeye dik kuvvet bileşeni ise açısız hız ( $w$ ) oluşturduğundan 20. saniyeden sonra her adımda sisteme kazandırılan açısız hız ( $w$ ), açısız ivme ( $\alpha$ ), eylemsizlik momenti ( $I$ ), fırlatıcının yerle yaptığı açı ( $\varphi$ ), yatay ve dikey katedilen mesafe hesaplanarak önceki değerlere ilave edilmiştir. Verniyeli motorlar 10 saniye boyunca çalıştırıldığından dolayı 30. saniyenin sonuna kadar yukarıdaki adımlar tekrarlanmıştır.

Verniyeli motorlar durdurulduktan sonra birinci katmanın yakıtı bitene kadar ( $t=156,6$  s) fırlatıcı hareketine devam etmektedir. Bir dış kuvvet olmamakla birlikte kütle azalmasından dolayı açısız hız ( $w$ ) arttığından her adımda açısız hız, eylemsizlik momenti ( $I$ ), hız vektörünün yatayla yaptığı açıdaki değişim ( $\varphi$ ), yatay ve dikey katedilen yol hesaplanarak bir önceki değerlere ilave edilerek işlemlere devam edilmiştir. Yakıtı biten birinci katman 156,7. saniyede atılarak bu katmanın boş ağırlığı toplam kütlede düşülmüştür.

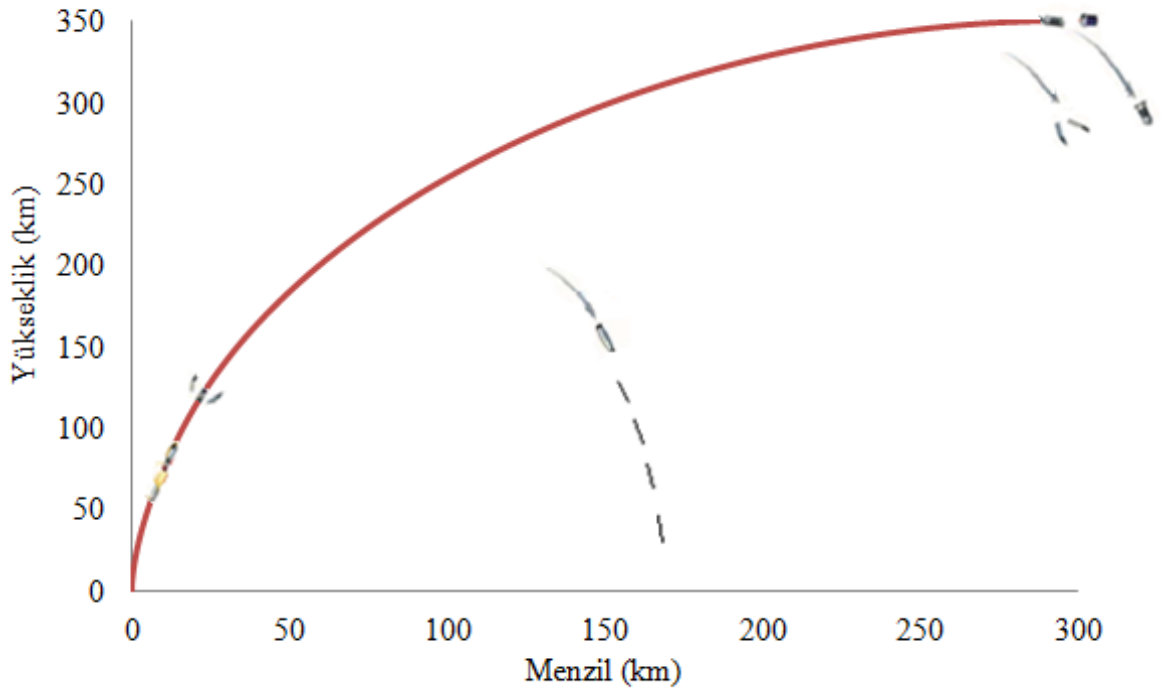
156,8. saniyede fırlatıcının ikinci katmanı ateşlendiğinden, ikinci katmanın itki kuvveti ve kalan kütle dikkate alınarak 166,1. saniyeye kadar bir önceki paragrafta verilen algoritma tekrarlanmıştır. 166,1. saniyede ikinci katmanın verniyeli motorları gerekli açı ile ateşlenerek birinci katmanın verniyeli motorları çalışırken kullanılan adımlar 176. saniyeye kadar tekrarlanmıştır. Sonrasında birinci katmanın verniyeli motorları durdurulduktan sonraki hareket adımları 269,3. saniyeye kadar tekrarlanmıştır. 186,5. saniyede atılan uydu kapaklarının kütleleri de toplam kütlede düşülmüştür.

Bu algoritma sonrasında (269,4. s) uydu 8244 m/s'lik bir hızla 350 km yörünge yüksekliğine yerleşmiş olmaktadır.

### 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Varsayılan bir fırlatıcı yapısı ve parametreleriyle yapılan çalışmalar sonrasında 350 km yörünge yüksekliğine 8244 m/s'lik bir hızla ulaşılabilmesi için en uygun çalışma biçiminin aşağıdaki gibi olması gerektiği belirlenmiştir.

Fırlatıcının ateşlenmesinden 20 saniye sonra verniyeli motorlar 65,8 derecelik açıyla 10 saniye ana motor ile birlikte çalıştırılır. 30. saniyede birinci katman verniyeli motorları durdurulur ve 156,7 saniyeye kadar sadece birinci katmanın ana motoru çalıştırılır. 156,7. saniyede birinci katman atılır. Daha sonra ateşlenen ikinci katman ana motoru 9,3 saniye çalıştırılır ve sonrasında verniyeli motorlar 80,2 derece açı ile 9,9 saniye çalıştırılır. 10 saniye sonra uydu kapakları atılır. İkinci katman ana motoru ile hareketine devam eden fırlatıcı uyduyu 82,9 saniye sonra planlanan yörüngeye yerleştirir. Bu durumda oluşan fırlatıcı rotası Şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Birinci katmanın düşüş bölgesi

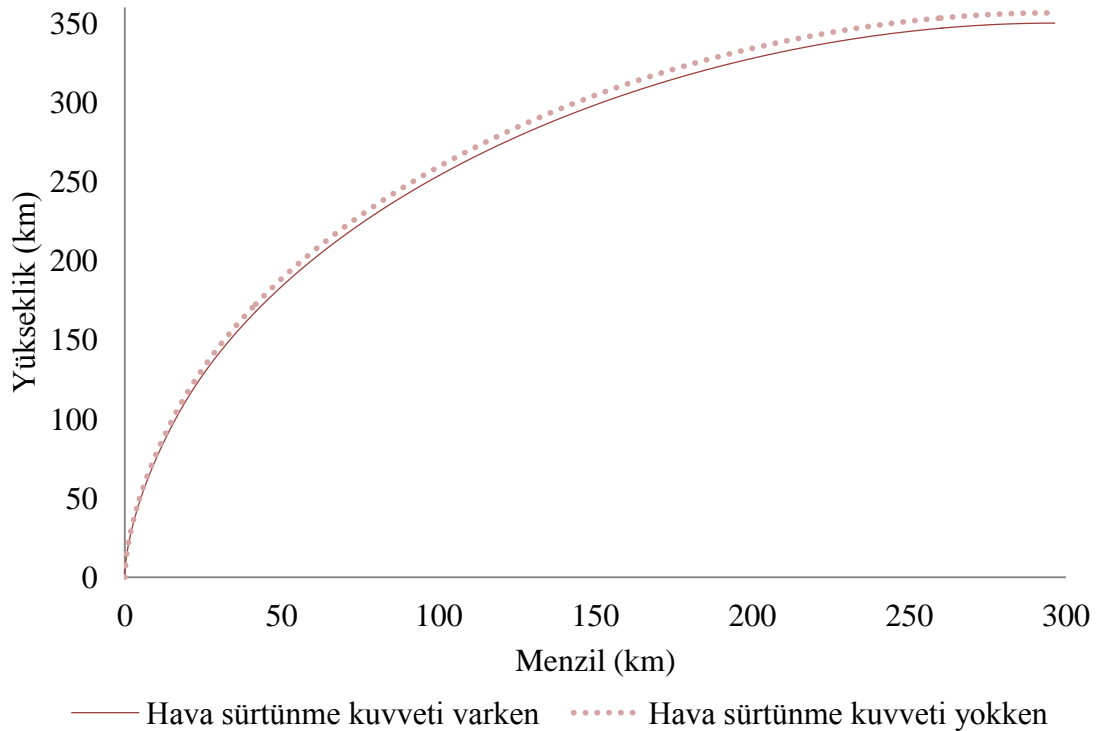
Hava sürtünme kuvvetinin de dahil edildiği hesaplamaların sonucunda, ayrılan birinci katmanın 408 saniye sonra fırlatma noktasından 175,789 km öteye düştüğü, ikinci katmanın yanmadığı varsayıldığında, ayrıldıktan 120,7 saniye sonra fırlatma noktasından 1290 km uzağa düştüğü hesaplanmıştır.

	Zaman (s)	Hız (m/s)	Yükseklik (m)	Maksimum yükseklik(m)
1. katman	156,7	1767	81652	240324
kapaklar	186,5	2374	139976	410767
2. katman	269,3	8244	350000	350045

Çizelge 3.1. Parçaların ne zaman atıldığı, atıldığı andaki hızları ve çıktıkları maksimum yükseklikler

### 3.1. Fırlatıcının Takip Ettiği Yol

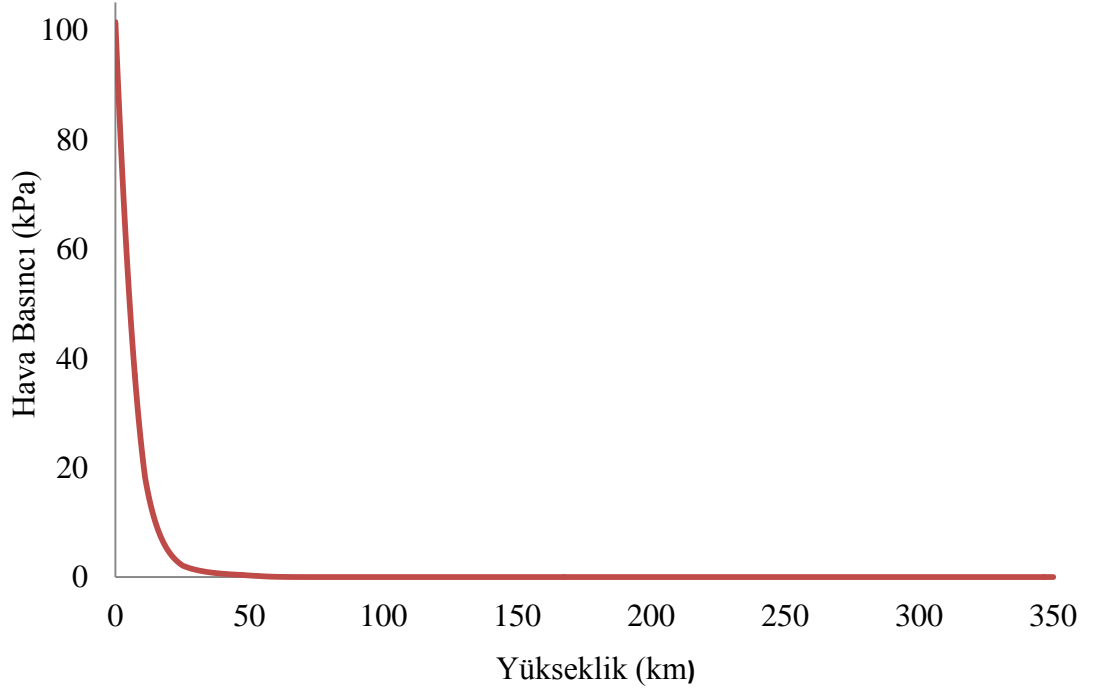
Fırlatıcının hareket doğrultusuna ters yönde etki eden hava sürtünme kuvveti, fırlatıcının çıkacağı yüksekliği azaltmaktadır. Bu çalışmada hava sürtünme kuvveti dikkate alınarak yapılan hesaplamalara göre fırlatıcı 269,4 saniyede 350 km yüksekliğe ulaşmaktadır. Hava sürtünme kuvvetinin ihmal edildiği duruma bakıldığında, fırlatıcının hızı azalmadığından dolayı 269,4 saniyede çıkacağı yükseklik 356,46 km olmaktadır. Hava sürtünme kuvveti varken ve yokken fırlatıcının yere paralel konumdaki yükseklikleri arasında 6464 m'lik bir fark oluşmaktadır.



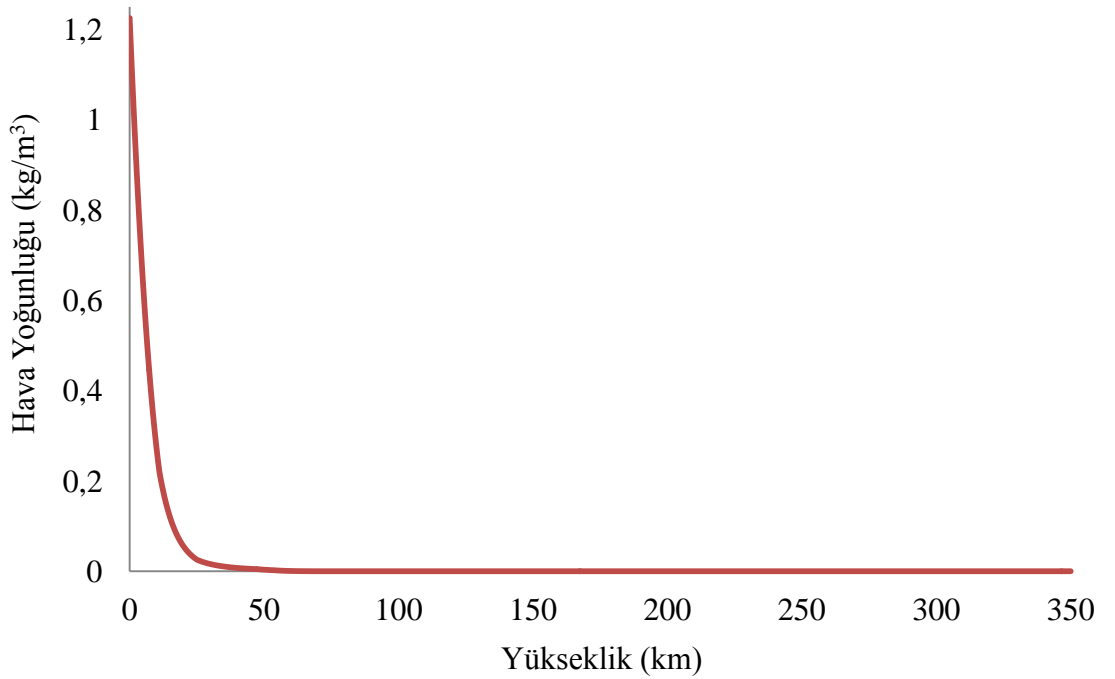
Şekil 3.2. Menzil-Yükseklik eğrisi

### 3.2. Hava Basıncının ve Hava Yoğunluğunun Yükseklikle Değişimi

Herhangi bir yükseklikte hava yoğunluğu ve hava basıncı hava sürtünme kuvvetinin temel parametrelerindedir. Aşağıdaki grafiklerde (Şekil 3.3 ve Şekil 3.4) her iki parametrenin yüksekliğe göre değişimi gösterilmektedir.



Şekil 3.3. Hava basıncının yükseklikle değişimi



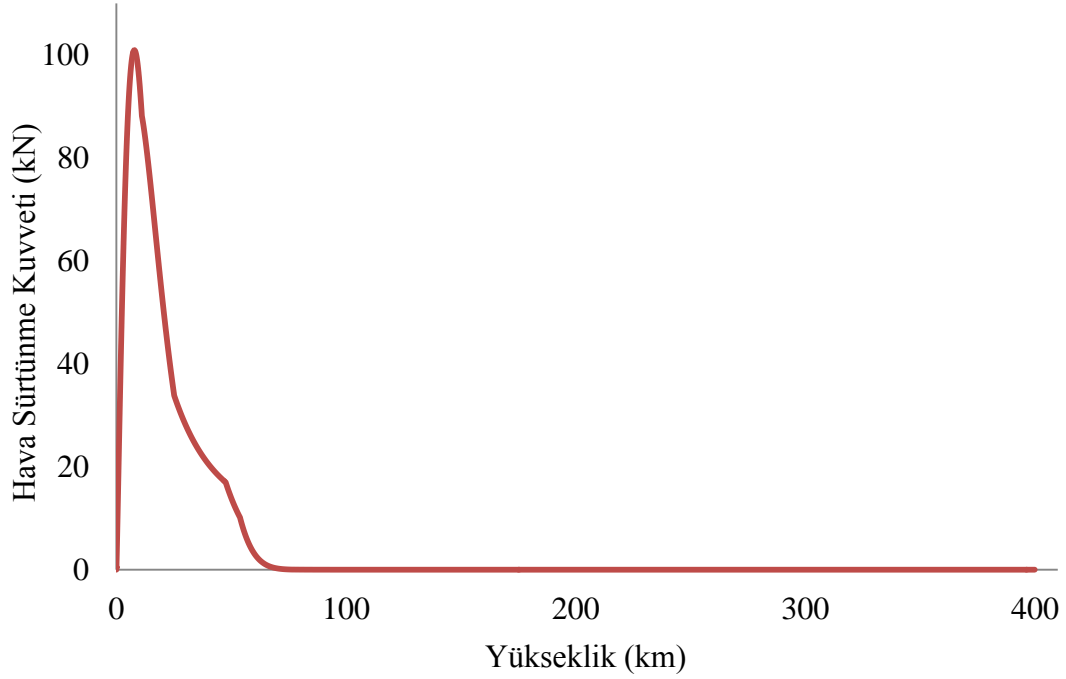
Şekil 3.4. Hava yoğunluğunun yükseklikle değişimi



Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'te görüldüğü gibi hava basıncı ve hava yoğunluğu yüksekliğe bağlı olarak hızla azalmaktadır. Hem hava basıncı hem de hava yoğunluğu yaklaşık 50 km'den sonra çok çok azalmaktadır.

### 3.3. Fırlatıcıya ve Atılan Birinci Katmana Etki Eden Hava Sürtünme Kuvvetinin İrdelenmesi

Ortam yoğunluğuna ve hıza bağlı olarak değişen hava sürtünme kuvvetinin yüksekliğe bağlı olarak değişimi Şekil 3.5'te gösterilmektedir.

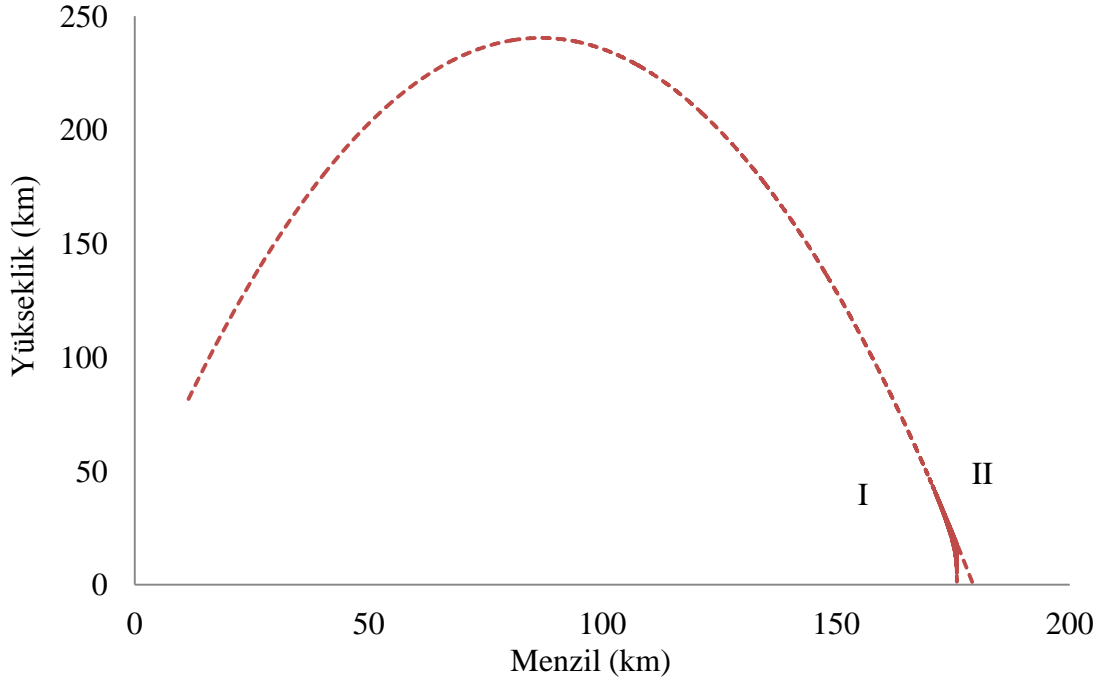


Şekil 3.5. Fırlatıcıya etki eden hava sürtünme kuvvetinin yüksekliğe göre değişimi

Şekil 3.5'te görüldüğü gibi fırlatıcı üzerine etki eden maksimum hava sürtünme kuvveti, ateşlemeden 67,5 saniye sonra 285 m/s bir hızla 7,85 km yükseklikte oluşmaktadır. Yaklaşık olarak bu yükseklik atmosferin en yoğun olduğu bölgedir. Bu yükseklikten sonra fırlatıcı hızı artmakla birlikte hava yoğunluğunun yüksekliğe bağlı olarak hızla düşmesinden dolayı etki eden hava sürtünme kuvveti de azalmaktadır. 167. saniyenin sonunda ulaşılan 100 km yüksekliğinden sonra hava sürtünme kuvveti sıfırlanmaktadır.

Hava sürtünme kuvvetinin ulaştığı maksimum kuvvet 100 kN olduğundan fırlatıcının tasarımı ve üretimi sırasında uzay kalifikasyon değeri olarak bu maksimum kuvvetin güvenlik faktörü ile çarpımı ile elde edilen kuvvet değeri kullanılmalıdır. Uzay kalifikasyonu güvenlik faktörü olarak farklı ülkelerde, farklı güvenlik faktörleri kullanılmakla birlikte genelde kullanılan değer 5'tir. Dolayısıyla tasarım ve üretim,  $5 \cdot 100 \text{ kN} = 500 \text{ kN}$ 'a dayanacak biçimde yapılmalıdır.

Şekil 3.6'da, atılan birinci katmanın hava sürtünme kuvveti varken (I) ve yokken (II) takip ettiği yol ve düşüş menzilleri gösterilmektedir.



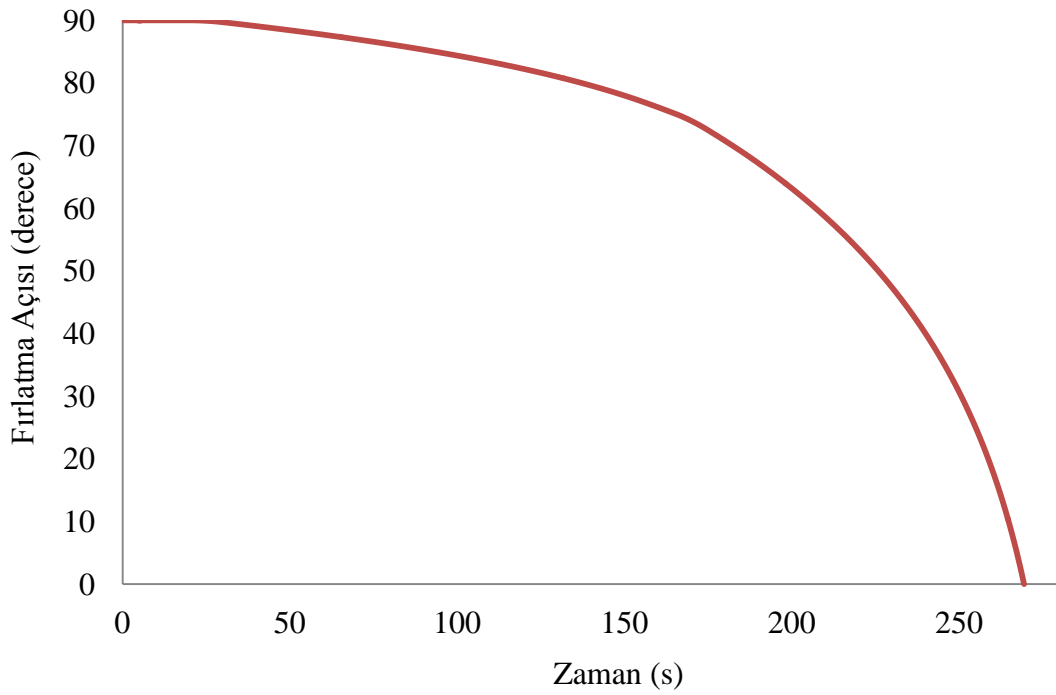
Şekil 3.6. Hava sürtünme kuvveti varken ve yokken birinci katmanın düşüş mesafesi

Şekil 3.6'da görüldüğü gibi hava sürtünme kuvvetinin hesaplamalara dahil edilmesi 3,5 km'lik bir farka sebep olmaktadır.

### 3.4. Fırlatıcı Hareket Doğrultusu

İlk 20 saniyede fırlatıcı yere göre 90 derecelik bir açıyla hareket etmektedir. Daha sonra verniyeli motorları kullanarak dönü hareketi başlatılır. Dönü hareketinden dolayı fırlatıcının hareket doğrultusunun yerle yaptığı açı küçülür. Hedeflenen 350 km yörünge yüksekliğine ulaşıldığında fırlatıcı hareket doğrultusu yere paralel hale gelmektedir.

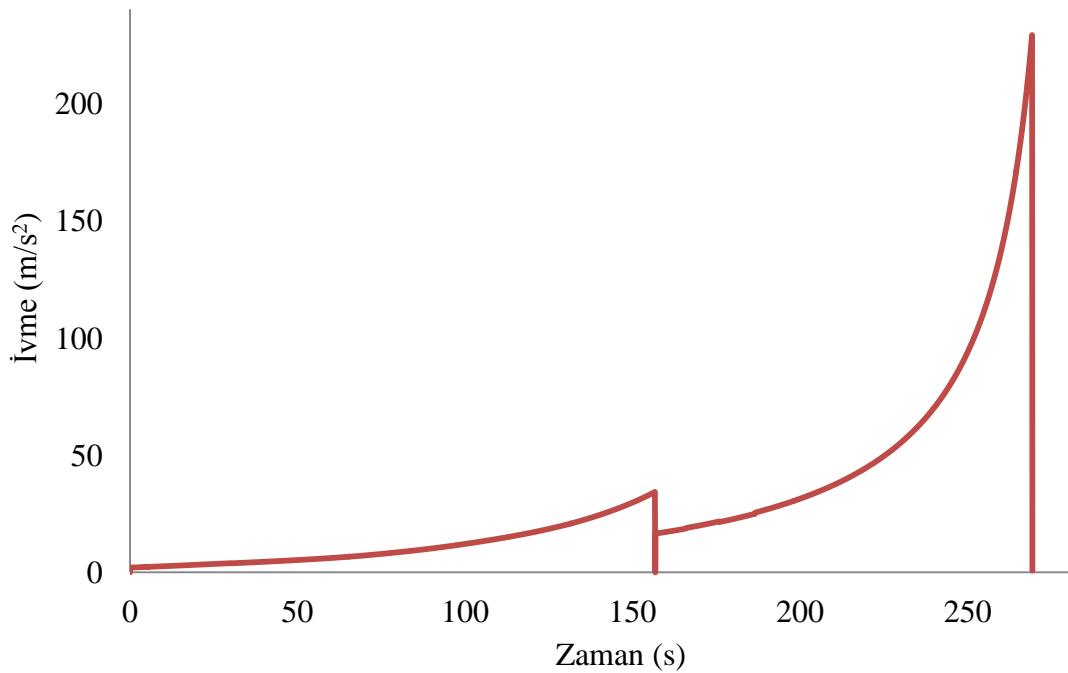
Toplam uçuş süresinin 20,1-30 saniye zaman aralığında birinci katmana, 156,8-166 saniye zamana aralığında ise ikinci katmana ait verniyeli motorların daha önce belirlenen açılarla çalıştırılması sonucunda elde edilen 90 derecelik dönü şekil 3.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3.7. Fırlatıcı hareket doğrultusunun zamanla değişimi

### 3.5. Fırlatıcı İvmesinin Zamanla Değişimi

İki katmandan oluşan fırlatıcının her katmanı farklı itme kuvvetlerine sahiptir. Fırlatıcının birinci katmanının varsayılan itme kuvveti ikinci katmana göre daha fazladır. Birinci katman toplam kütleyi ivmelendirirken ikinci katman, birinci katman atıldıktan sonra kalan kütleyi ivmelendirmektedir.



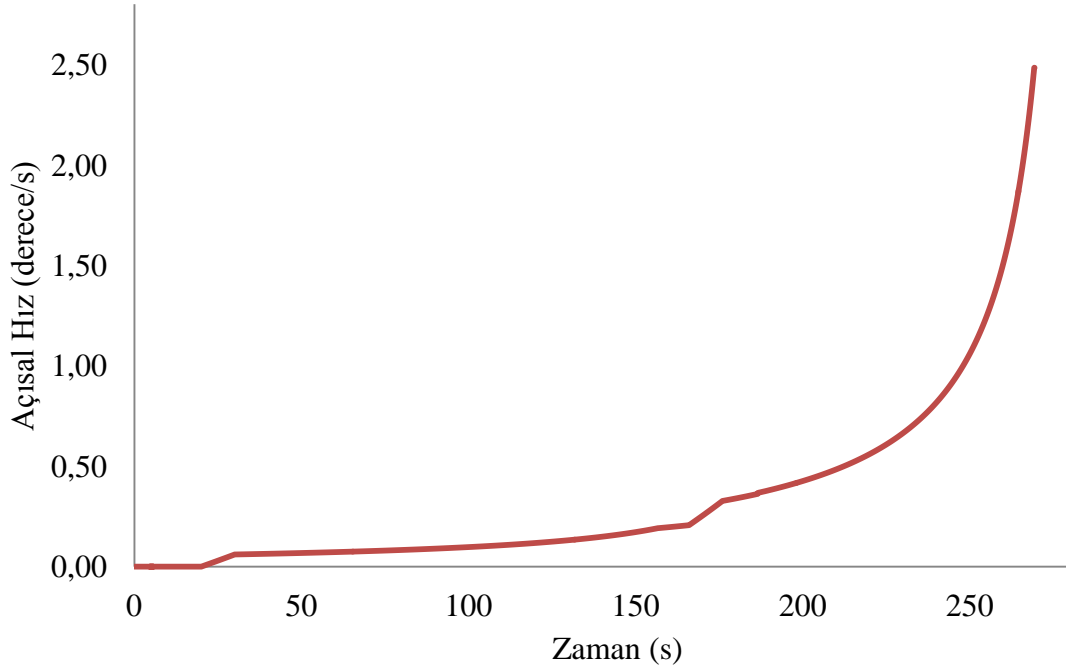
Şekil 3.8. Fırlatıcı ivmenin zamanla değişimi

Bu nedenle birinci katmanın kazandırdığı ivme ikinci katmana göre daha azdır. İvmenin zamanla nasıl arttığı Şekil 3.8'de gösterilmektedir.

156,7. saniyede ve ikinci katmanın ana motoru durdurulduğunda, fırlatıcının ivmesi çok kısa zaman aralığında 0'a düşmektedir. Bu ani değişimler, değişim miktarı\*o anki kütle kadar kuvvet anlamına geldiğinden fırlatıcı yapısının bu kuvvetlere dayanıklı olması gerekir.

### 3.6. Fırlatıcı Açısal Hızın Zamanla Değişimi

Şekil 3.9'da gösterildiği gibi, fırlatıcı ilk 20 saniye hareketine dikey olarak devam ettiğinden dolayı açısal hız 0'dır. Daha sonra verniyeli motorunun ateşlenmesiyle sisteme bir dönme momenti uygulandığından fırlatıcı zamanla artan açısal bir hız kazanmaktadır. Verniyeli motorların durdurulmasında ise fırlatıcıya uygulanan bir kuvvet olmadığından açısal momentum korunur. Sisteme uygulanan bir kuvvet olmamasına rağmen eylemsizlik momentinin azalmasından dolayı açısal hız da zamanla artmaktadır.

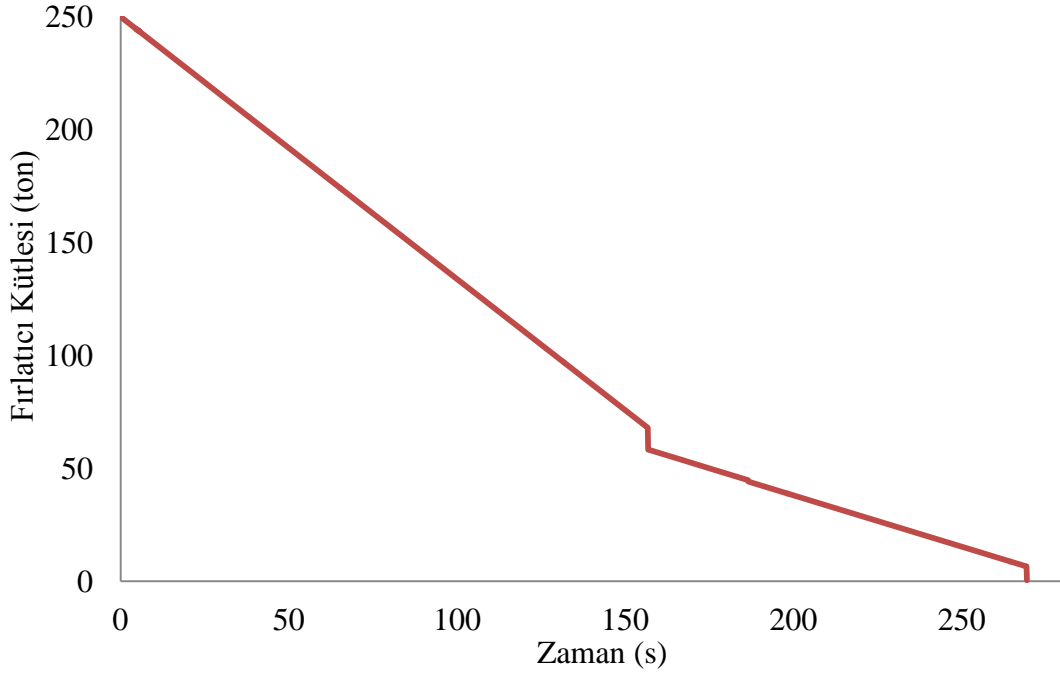


Şekil 3.9. Fırlatıcı açısal hızın zamanla değişimi

166. saniyeden 176. saniyeye kadar çalıştırılan ikinci katmanın verniyeli motorlarıyla kazanılan açısal ivmenin, açısal hıza etkisi de Şekil 3.9'da görülmektedir.

### 3.7. Fırlatıcı Kütlesinin Zamanla Değişimi

Fırlatıcının birinci katmanı birim zamanda sabit bir miktarda yakıt tükettiğinden, çalıştığı sürece sistemin kütlesi 156,7. saniyeye kadar doğrusal olarak azalmaktadır. 156,7. saniyede birinci katmanın atılmasından dolayı kütledeki ani azalma Şekil 3.10'da görülmektedir. Daha sonra ikinci katmanın birim zamanda yakıt tüketimi birinci katmandan daha az olduğu için fırlatıcı kütlesi daha yavaş azalmaktadır.

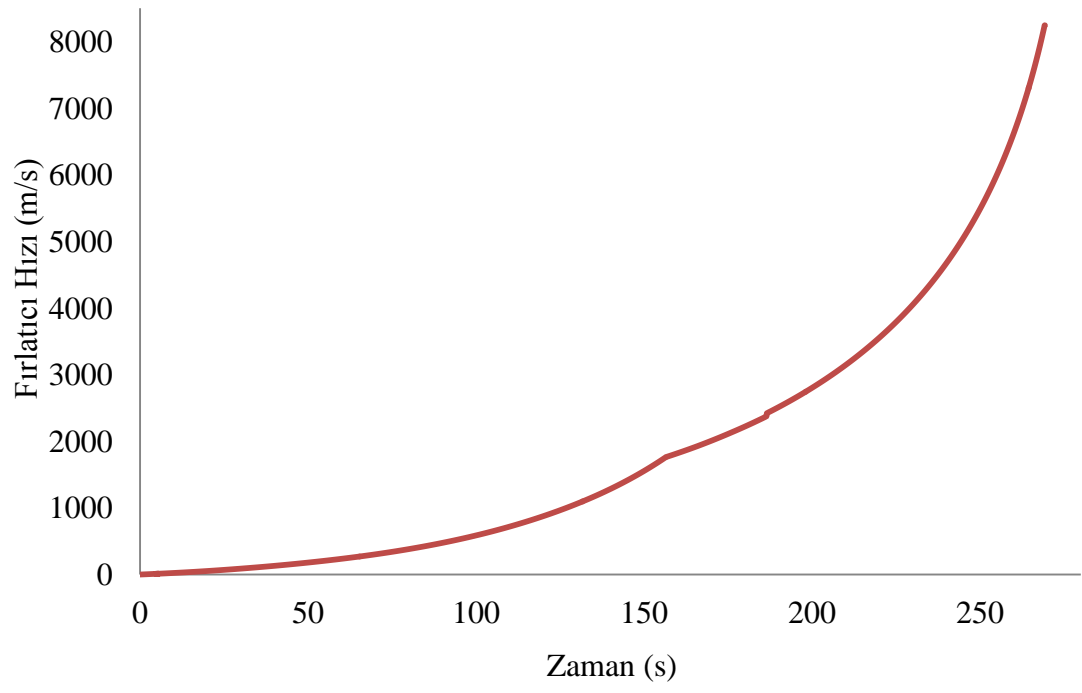


Şekil 3.10. Fırlatıcı kütlesinin zamanla değişimi

Şekil 3.10'da 186,5. saniyede görülen küçük kütle değişimi, uyduyu koruyan kapakların atılmasından kaynaklanmaktadır.

### 3.8. Fırlatıcı Hızının Zamanla Değişimi

Şekil 3.11'de fırlatıcı hızının zamanla değişimi gösterilmektedir. Bu değişimi sözel olarak ifade etmek gerekirse 156,7. saniyede kesişen iki farklı üssel fonksiyonun bileşimi olarak ifade etmek mümkündür. 156,7. saniyeye kadar birinci katmanın fırlatıcıya kazandırdığı hız daha yavaş artmaktadır. 156,7. saniyeden sonra itki kuvveti daha düşük olan ikinci katmanda hızın daha fazla artmasının sebebi, birinci katmanın atıldığından toplam kütlede azalmasından dolayıdır. Hızda 186,5. saniyede görülen küçük değişim uydu kapakları atıldıktan sonraki momentumun korunumundan kaynaklanan ani hız değişimidir.



Şekil 3.11. Fırlatıcı hızının zamanla değişimi

#### 4. SONUÇ

Bu çalışmada Konstantin E. Tsiolkovsky'nin ve Paul A. Tipler'in ürettiği roket hareket denklemlerine, zamanın ve yüksekliğin bir fonksiyonu olarak yerçekimi ivmesinin ve hava sürtünme kuvvetinin eklenmesiyle gerçeğe daha uygun sonuçlara ulaştırabilecek denklemler türetilmiştir. Belirgin bir zaman aralığında türetilen hız değişim denklemleri sırasıyla;

fırlatıcının ana motoru çalıştırılarak gerçekleştirilen dikey hareketi için,

$$\Delta v = \ln \left( \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} \right) \left( u_{ex} - \frac{1}{2R} \rho A C_D v^2 \right) - g (t_2 - t_1)$$

fırlatıcının ana motor ve verniyeli motorlar çalışırken ki hareketi için,

$$\Delta v = \left( u_{ex} + \frac{T_v \cos \theta}{R} - \frac{1}{2R} \rho A C_D v^2 \right) \ln \left( \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} \right) - g \sin \varphi (t_2 - t_1)$$

ve fırlatıcı verniyeli motorları durdurulduktan sonraki ana motorla hareketi için,

$$\Delta v = \left( u_{ex} \sin \varphi - \frac{1}{2R} \rho A C_D v^2 \right) \ln \left( \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} \right) - g \sin \varphi (t_2 - t_1)$$

olarak elde edilmiştir. Ayrıca verniyeli motorların çalıştırılması durumunda fırlatıcı açısız bir hız kazanacağından dolayı, açısız hız denklemi de,

$$\Delta w = w_2 - w_1 = \frac{6T_v \sin \theta}{L_u R} \ln \left( \frac{m_0 - Rt_1}{m_0 - Rt_2} \right)$$

olarak bulunmuştur.

Elde edilen bu denklemler kullanılarak, farklı yükler için varsayılan bir fırlatıcının hedeflenen yörünge yüksekliğine ve yörünge hızına ulaşabilmesi için, zaman aralıkları çok kısa tutulan dögüsel yaklaşımla hesaplanabilecek bir algoritma oluşturulmuştur. Ayrıca bu algoritmaya hava sürtünme kuvveti de dikkate alınarak işi biten katmanların düşüş bölgelerini hesaplayabilecek bir algoritma da eklenmiştir. Bu algoritma hedeflenen farklı yörüngeler ve uydu ağırlıklarına bağlı olarak tekrar çalıştırılarak dögüsel bir yaklaşımla çalıştırılarak Çizelge 2.3'e benzer göreve özgün yeni bir zamanlama çizelgesi elde edilebilir.

Üretilen algoritma ile katman düşüş bölgelerinin de hesaplanabildiğinden, kesinleşmiş parametrelere sahip bir fırlatıcının nereden fırlatılacağı çalışmaları için de kullanılabilir. Atılan parçaların güvenli bölgelere (deniz, çöl, vs) düşmesi gerekir.

Önerilen fırlatıcı özelliklerine göre birinci katman düşüş bölgesi için, 175,789 km'lik bir çevrenin uygun olduğu taraftan fırlatma işleminin yapılması gereklidir. Bulgular ve tartışma bölümünde Şekil 3.5 incelendiğinde birinci katmanın düşüş bölgesi için hava sürtünme kuvvetinin dahil edilmesi menzilin 3,5 km azalmasına sebep

olmaktadır. Hava sürtünme kuvveti dahil edilmediğinde aynı zamanlama ile çıkılan yükseklik ve menzil yaklaşık olarak % 2 oranında artmaktadır.



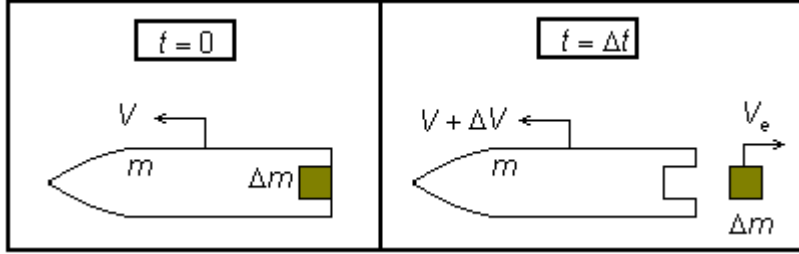
**KAYNAKLAR**

- BARBOSA, R. C. 2014. Long March 2D lofts Yaogan Weixing-24 for China.  
[Http://www.nasaspaceflight.com/2014/11/long-march-2d-yaogan-weixing-24-china/](http://www.nasaspaceflight.com/2014/11/long-march-2d-yaogan-weixing-24-china/). [Son erişim tarihi: 08.06.2015]
- CHARLESWORTH. P. 2010 Forces on a Rocket.  
[Http://www.philsrockets.org.uk/forces.pdf](http://www.philsrockets.org.uk/forces.pdf). [Son erişim tarihi:08.06.2015]
- China Great Wall Industry Corporation, 2012. LM-2D Launch Vehicle.  
[Http://cn.cgwic.com/gk2/english/vehicle](http://cn.cgwic.com/gk2/english/vehicle). [Son erişim tarihi: 08.06.2015]
- NASA, 2015. Exponential Functions and the Atmosphere.  
[Http://spacemath.gsfc.nasa.gov/astrob/7Page15.pdf](http://spacemath.gsfc.nasa.gov/astrob/7Page15.pdf). [Son erişim tarihi: 08.06.2015]
- NASA, 2015. Space Shuttle and International Space Station.  
[Https://www.nasa.gov/centers/kennedy/about/information/shuttle\\_faq.html](https://www.nasa.gov/centers/kennedy/about/information/shuttle_faq.html). [Son erişim tarihi: 08.06.2015]
- NASA, 2015. Rocket Control. [Http://exploration.grc.nasa.gov/education/rocket/rktcontrl.html](http://exploration.grc.nasa.gov/education/rocket/rktcontrl.html). [Son erişim tarihi: 08.06.2015]
- Nebraska Astronomy Applet Project, 2015. Definition of Scale Height.  
[Http://astro.unl.edu/naap/scaleheight/sh\\_bg1.html](http://astro.unl.edu/naap/scaleheight/sh_bg1.html). [Son erişim tarihi: 08.06.2015]
- SADRAEY, M. 2009. Aircraft Performance Analysis, Drag Force and its Coefficient, VDM Verlag Dr. Müller, p.85, Düsseldorf
- SCHULTZ, K. 2013. Russian Discovery Project (Konstantin E. Tsiolkovsky).  
[Https://prezi.com/hwpkdfviqjdu/russian-discovery-project-konstantin-e-tsiolkovsky/](https://prezi.com/hwpkdfviqjdu/russian-discovery-project-konstantin-e-tsiolkovsky/) [Son erişim tarihi: 08.06.2015]
- STINNER, A. 2007, LCP 5A: Newton's Dream–Artificial Satellites: From Sputnik to the Space Shuttle. [Http://www.umanitoba.ca/outreach/crystal/Newton's Dream.pdf](http://www.umanitoba.ca/outreach/crystal/Newton's Dream.pdf). [Son erişim tarihi: 08.06.2015]
- TIPLER, P.A. 1998. Physics for Scientists and Engineers 4th Edition, W.H. Freeman and Company, pp. 241-243, New York
- TSIOLKOVSKI K.E, 1903. Tsiolkovski rocket equation. [Http://www.airports-worldwide.com/articles/article0715.php](http://www.airports-worldwide.com/articles/article0715.php). [Son erişim tarihi: 08.06.2015]
- WALLACE, J. M. and HOBBS, P.V. 2006. Atmospheric Science. Elsevier. pp 9-70, USA

YÜKSELEN, M.A .2006-2007. [Http://web.itu.edu.tr/~yükselen/Uck351/01-Giris.pdf](http://web.itu.edu.tr/~yükselen/Uck351/01-Giris.pdf).  
[Son erişim tarihi: 08.06.2015]

## EKLER

## Ek-1: Konstantin E. Tsiolkovsky Roket Denkleminin Türetilmesi



Roket hareketi

Tsiolkovsky 'e göre,

Net kuvvet, toplam sistemdeki momentum değişimine eşit olmaktadır.

$$\sum F = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_2 - P_1}{\Delta t} ,$$

$$F = \frac{dp}{dt} = 0$$

t zamanda sistemin momentumu,

$$p_1 = (m + \Delta m)v$$

t + Δt zamanda sistemin momentumu,

$$p_2 = m(v + \Delta v) + \Delta m(v - u_{ex})$$

Momentumdaki değişim,

$$p = p_2 - p_1 = m(v + \Delta v) + \Delta m(v - u_{ex}) - (m + \Delta m)v$$

$$p = p_2 - p_1 = m\Delta v - \Delta m u_{ex}$$

$$dm = -\Delta m$$

olduğundan,

$$\sum F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + u_{ex} \frac{dm}{dt} = 0$$

$$m \frac{dv}{dt} = -u_{ex} \frac{dm}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v_f} dv = -u_{ex} \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m}$$

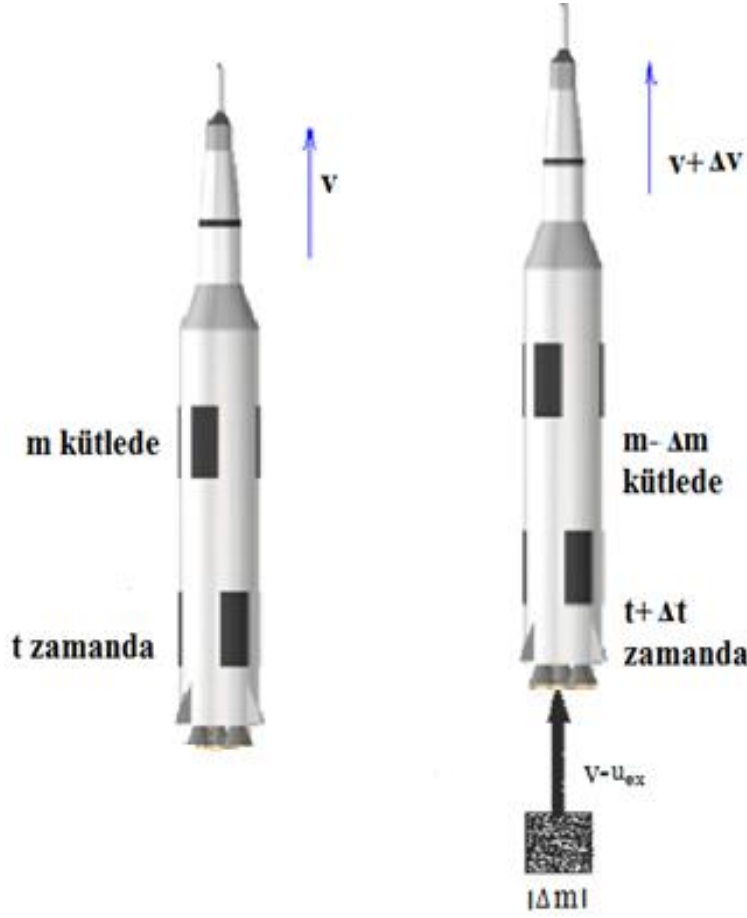
$$v_f - v_0 = -u_{ex} \ln(m_f) - \ln(m_0)$$

Böylelikle fırlatıcı hızı,

$$\Delta V = u_{ex} \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)$$

ifadesine eşit olmaktadır (Tsiolkovsky 1903).

### Ek-2: Paul A. Tipler Roket Denklemi'nin Türetilmesi



Fırlatıcının dikey hareketi (Stinner 2007)

Başlangıçtaki toplam kütlesi  $m_0$  olan bir fırlatıcının ateşlenmesiyle birlikte  $t$  zaman sonra fırlatıcının yakıtı yanarak egzoz gazı dışarı atılmaktadır. Bunun sonucunda fırlatıcı bir  $v$  hızı kazanarak hareketine başlar. Fırlatıcının hareketi sırasında yakıt zamanla sürekli yandığından dolayı toplam kütle de zamanla azalmaktadır.

Başlangıç kütlesi  $m_0$  olan bir fırlatıcı,

$t$  zaman sonra fırlatıcının kütlesi;

$$m = m_0 - Rt$$

olmaktadır.

$t$  zaman sonra sistemin hızı  $v$  olduğundan dolayı fırlatıcının momentumu,

$$P_i = mv$$

ifadesine eşit olmaktadır. Fırlatıcı  $\Delta t$  zaman sonra  $\Delta v$  bir hız kazanarak hareketine devam etmektedir. Bu durumda fırlatıcının yeni kütlesi, aşağıda olduğu gibidir.

$$m_s = m - R\Delta t$$

Yani fırlatıcı,  $t + \Delta t$  zaman sonra  $R\Delta t$  kütleli gaz dışarı atmaktadır.  $t + \Delta t$  zaman sonra sistemin momentumu ise,

$$\begin{aligned} p_s &= (m - R\Delta t)(v + \Delta v) + R\Delta t (v - u_{ex}) \\ &= mv + m\Delta v - vR\Delta t - R\Delta t\Delta v + vR\Delta t - u_{ex}R\Delta t \\ &\approx mv + m\Delta v - u_{ex}R\Delta t \end{aligned}$$

denklemden bulunan  $R\Delta t\Delta v$  çarpımı çok küçük bir değer olduğundan ihmal edilmektedir.

Momentumdaki değişim ise aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\Delta p = p_s - p_i = (mv + m\Delta v - u_{ex}R\Delta t) - mv = m\Delta v - u_{ex}R\Delta t$$

Yani,

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} - u_{ex}R$$

denklemini elde edilmektedir.

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ iken, } \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \frac{dv}{dt}$$

Dolayısıyla

$$m \frac{dv}{dt} = Ru_{ex} - mg$$

olmaktadır. Her iki taraf kütleyle bölüldüğünde,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Ru_{ex}}{m} - g = \frac{Ru_{ex}}{m_0 - Rt} - g$$

bulunmaktadır. İntegral alındığında ise,

$$\int_{v_0}^{v_1} dv = \int_{t_0}^{t_1} \frac{Ru_{ex}}{m_0 - Rt} dt - \int_{t_0}^{t_1} g dt$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv = Ru_{ex} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{m_0 - Rt} dt - g \int_{t_0}^{t_1} dt$$

olarak fırlatıcının hızı,

$$\Delta v = u_{\text{ex}} \ln \frac{m_0}{m_0 - R t} - g \Delta t$$

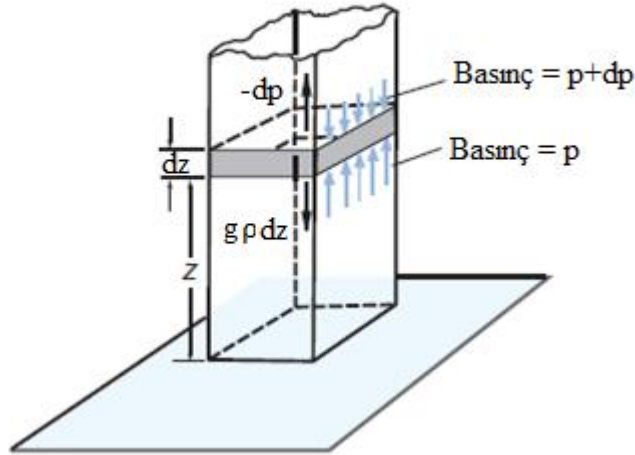
elde edilmektedir (Tipler 1998).

**Ek-3: Hava Yoğunluğunun ve Hava Basıncının elde edilmesi**

Atmosfer için basınç değişimi, hidrostatik denklem, ideal gaz yasası ve yükseklikle sıcaklık değişim denklemleri kullanılarak hesaplanmaktadır. Havanın belirli yüksekliği için hidrostatik denklem;

$$dP = -\rho g dz$$

olarak ifade edilmektedir.



Küçük bir atmosfer elemanı (Wallace ve Hobbs 2006)

Şekilde gösterilen küçük oklar, hava basıncı nedeniyle aşağıya doğru sarf edilen kuvveti, büyük oklar ise yukarı doğru sarf edilen kuvveti gösterir.  $dp$ ,  $z$  yüksekliğinden  $z+dz$  yüksekliğine çıkıştaki basınç değişimini ifade etmektedir ve basınç yükseklikle azalmaktadır. Bu nedenle  $dp$  negatiftir.  $-dp$  ise pozitifdir.

İdeal gaz için hal denklemi;

$$PV = NkT = \frac{M}{\mu m_H} kT$$

dir. Burada,

$N$  = parçacık sayısıdır.

$$P = \frac{\rho}{\mu m_H} kT$$

Atmosfer paralel düzlem olarak varsayılır. Yani,

$$\frac{dP}{dz} = -g\rho$$

olmaktadır.

$$dP = -\rho g dz = -\left(\frac{\mu m_H P}{kT}\right) g dz$$



$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \int_0^z - \left( \frac{\mu m_H g}{kT} \right) dz$$

$$\ln P - \ln P_0 = - \left( \frac{\mu m_H g}{kT} \right) z$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = - \frac{\mu m_H g}{kT} z$$

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{\mu m_H g}{kT} z} = P_0 e^{-\frac{\langle m \rangle g}{kT} z} = P_0 e^{-\frac{z}{H}} \quad (\text{NAAP})$$

basınç ifadesi elde edilir.

$P(z)$  = Yüksekliğe göre değişen hava basıncı ( Pa),

$P_0$  = Deniz seviyesindeki hava basıncıdır. (101325 Pa),

$$H = \frac{kT}{\langle m \rangle g}$$

$\mu m_H = \langle m \rangle$  , ortalama atomik kütedir.

$$\langle m \rangle = 4,76 \times 10^{-26} \text{kg}$$

olarak bulunur.

$$(2 \text{ mol O atomunun kütlesi} = 2 \text{ atom} \times 16 \frac{\text{akb}}{\text{atom}} \times \frac{1 \text{ gram}}{6,02 \times 10^{23} \text{akb}})$$

$$m_H = \frac{1}{N_A} \text{ dir. } N_A = \text{Avagadro sayısıdır.}$$

$$m_H = \frac{1}{N_A} = \frac{1}{6,02 \times 10^{23}} = 1,66 \times 10^{-27} \text{kg 'dır)}$$

olarak elde edilir.

$k$  = Boltzmann sabiti ( $1,38 \times 10^{-23}$  J/derece)

$g$  = Yerçekimi ivmesi ( $\text{m/s}^2$ )'dir.

$$g = \frac{GM}{(R+r)^2}$$

olarak hesaplanır ve fırlatıcının yeryüzünden uzaklaşmasıyla yerçekimi ivmesi, uzaklığın karesiyle orantılı olarak azalır.

$G$  = Evrensel yerçekimi sabiti olup değeri:  $6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

$M$  = Dünyanın kütlesi:  $5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$

$R$  = Dünyanın yarıçapıdır:  $6375000 \text{ m}$

$r$  = Bir cismin dünyadan olan uzaklığıdır.

$m$  = Ortalama atomların kütlesi (kg)

Hava yoğunluğu ise,

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

$\rho(z)$  = Yüksekliğe göre değişen hava yoğunluğu (kg/ m<sup>3</sup>),

$z$  = Dikey yükseklik (m),

$\rho_0$  = Deniz seviyesindeki hava yoğunluğu (1,225 kg/m<sup>3</sup>),

$T$  = Sıcaklık (K),

olarak hava yoğunluğu elde edilmektedir (NAAP 2015).

## ÖZGEÇMİŞ

Gülizar AYSAN 1987 yılında Kastamonu'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Balıkesir'de tamamladı. 2007 yılında girdiği Çanakkale On sekiz Mart Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nden 2012 yılında mezun oldu. 2013 yılından beri Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Uzay Bilimleri ve Teknolojileri Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.