T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMBİNATORİK TOPLAMLAR VE BUNLARIN OLASILIK VE İSTATİSTİKTEKİ UYGULAMALARI

Hamida Amrani AZIZA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMBİNATORİK TOPLAMLAR VE BUNLARIN OLASILIK VE İSTATİSTİKTEKİ UYGULAMALARI

Hamida Amrani AZIZA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(Bu tez ……………………………………………………………………………………… tarafından ……………….. nolu proje ile desteklenmiştir.)

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMBİNATORİK TOPLAMLAR VE BUNLARIN OLASILIK VE İSTATİSTİKTEKİ UYGULAMALARI

Hamida Amrani AZİZA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.... / 2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/ oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Yrd.Doç.Dr. Eda YÜLÜKLÜ

ÖZET

KOMBİNATORİK TOPLAMLAR VE BUNLARIN OLASILIK VE İSTATİSTİKTEKİ UYGULAMALARI

Hamida Amrani AZIZA

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Haziran 2016, 49 sayfa

Bu tezde, olasılık ve istatistikte çok önemli bir yer tutan üreteç fonksiyonları ve kombinatorik toplamlar ve bunlarla ilgili uygulamalar çalışılmıştır. Binom katsayılarını içeren kombinatorik toplamlar verilmiştir. Bu toplamların bazı özel sayılar ile ilişkileri incelenmiştir.

Bu tezde verilen sonuçlar hem matematik, olasılık ve istatistik alanlarına hem de diğer alanlara katkı sağlayacaktır. Bu tezde kullanılan bazı özel sayılar ile kombinatorik toplamlar arasındaki formüller ve ilişkiler verilmiştir. Örneğin; 1. ve 2. tür Stirling sayıları, Bernoulli sayılar, Euler sayıları, Bell sayıları, Fibonacci sayıları ve Catalan sayıları vb. gibi sayılarla ilgili özdeşlikler elde edilmiştir. Bu tezde, Bernstein baz fonksiyonlarından üretilen Catalan sayılarını içeren formüller kullanılarak, birçok kombinatorik toplam bulunmuştur. Dahası Lagrange inversiyon formülünü ve Stirling sayılarının üreteç fonksiyonları yardımıyla, Stirling sayıları ve negatif üslü Bernoulli sayılarını içeren özdeşlikler elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Kombinatorik Toplamlar, Üreteç Fonksiyonları, Binom Katsayıları, Permütasyon, Kombinasyon, Stirling Sayıları, Fibonacci Sayıları, Catalan Sayıları, Bernoulli Sayılar, Euler Sayıları, Genocchi sayıları, Bell Sayıları ve Bernstein baz fonksiyonları.

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)
Prof. Dr. Musta ALKAN
Yrd. Doç. Dr. Eda YÜLÜKLÜ

ABSTRACT

COMBINATORICS SUM AND ITS APPLICATIONS IN PROBABILITY STATISTIC

Hamida Amrani AZIZA

MSc thesis in Mathematics
Supervisor: Prof.Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
June 2016, 49 pages

In this thesis, generating functions and combinatorial sums and their applications, which are very important tools in Probability and in Statistics, have been studied. Combinatorics sums including binomial coefficients are given. Relations between these sums and special numbers have be investigated.

The results of this thesis will be contribute not only Mathematics, Probability and Statistics, and but also other science. In thesis some formulas and relations which are related to the some special numbers and combinatoricssums are given. For instance, relationship between the Stirling numbers of first kind and second kind, the Fibonacci numbers, the Catalan numbers, Bernoulli numbers, Euler numbers and, Bell numbers etc. are given. In this thesis, we give some combinatorial sums including binomial coefficients, the Catalan numbers and the Bernstein basis functions. Moreover by applying the Lagrange inversion formula to the generating functions for the Stirling numbers, we derive some identities including the Stirling numbers and Bernoulli numbers of negative order.

KEYWORDS: Combinatoric Sums, Generating Functions, Binomial Coefficients, Permutations, Combinations, Genocchi numbers, Stirling Numbers, Fibonacci Numbers, and Catalan Numbers, Bernoulli numbers, Euler numbers, Bell numbers v Bernstein basis functions

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Supervisor)
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Asst. Prof. Dr. Eda YÜLÜKLÜ

ÖNSÖZ

Kombinatorik toplamlar ve binom katsayıları ile ilgili alanlarda birçok araştırma yapılmıştır. Bu konuda birçok teknik geliştirilmiştir. Özellikle son yıllarda, üreteç fonksiyonları matematik, matematiksel fizik, olasılık ve istatistik, kombinatorik teori gibi alanlarda çok önemli uygulama alanlarının yapıldığı görülmektedir. Bu tezdeki konular güncel konulardır. Özellikle binom katsayıları, kombinatorik toplamlar ve kuvvet serileri bu alanın temelini oluşturmaktadır. Bernstein baz fonksiyonları, Catalan sayıları ve bunların üreteç fonksiyonların kapsayan özdeşliklerden yarlanarak, birçok binom katsayılarını içeren kombinatorik toplamlar bulunmuştur. Ayrıca Lagrange inversiyon formülünü ve Stirling sayılarının üreteç fonksiyonları kullanılarak, Stirling sayıları ve negatif üslü Bernoulli sayılarını içeren özdeşlikler bulunmuştur.

Bu tezde kombinatorik toplamlar, binom katsayıları, üreteç fonksiyonları, bazı özel sayıları kapsayan temel tanımlar, teoremler ve özellikler ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Bu tezde ki sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Bu tezde, Giriş, Materyal ve Metot, Bulgular ve Sonuç olmak üzere dört ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, temel kavramlar ve kombinatorik toplamların kısa bir tarihçesi verilmiştir. Ayrıca, bu tezde kullanılan temel kavramlar ve özellikleri verilmiştir.

İkinci bölümde ise, kuramsal bilgiler literatür araştırması ile birlikte verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bazı özel sayıların üreteç fonksiyonlarının tanımı ve özellikleri ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Ayrıca kombinatorik toplamlar için permütasyon, kombinasyon ve binom katsayılarını içeren temel tanım ve teoremler verilmiştir

Bulgular bölümünde, birinci ve ikinci tür Stirling Sayıları, Fibonacci Sayıları, Bell Sayıları, Catalan Sayıları, Bernoulli Sayıları ve polinomları, Euler Sayıları ve polinomları ve Genocci Sayıları ve polinomlarının bazı özellikleri kullanılarak kombinatorik toplamlar bulunmuştur ayrıca Lagrange inversiyon formülü ve Stirling sayılarının üreteç fonksiyonları yardımıyla yüksek mertebeden Bernoulli sayıları ve Stirling sayılarını içeren özdeşlikler bulunmuştur.

Tezin diğer bölümleri tartışma, sonuç, kaynakça ve özgeçmiş ile bitmektedir.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım. Ayrıca her zaman bana desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen bütün bölüm arkadaşlarıma(özellikle Dr. Rahime Dere, Dr. Ahmet Aykut Aygüneş, Dr. İrem Küçükoğlu, Dr. Gülşah Özdemir, Neslihan Kılar ve Büşra Al), kocam Juma Zuberi Peace ve bütün aileme yürekten teşekkür ederim

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{k}}$:	k. dereceden x faktöryeli.
$\boldsymbol{s_1(n,k)}$:	Birinci tür Stirling sayıları.
$\boldsymbol{S_2(n,k)}$:	İkinci tür Stirling sayıları.
$(\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n}}$:	Artan kuvvetlerin faktoriyel fonksiyonu.
$(\boldsymbol{t})_{\boldsymbol{n}}$:	Azalan kuvvetlerin faktoriyel fonksiyonu.
$\boldsymbol{\|s(n,k)\|}$:	Birinci mertebeden mutlak Stirling sayısı.
$\boldsymbol{s_1(n,k;r)}$:	Merkezi olmayan birinci tür Stirling sayıları.
$\boldsymbol{S_2(n,k;r)}$:	Merkezi olmayan ikinci tür Stirling sayıları.
$\boldsymbol{\|s_1(n,k;r)\|}$:	Merkezi olmayan yalın veya mutlak birinci tür Stirling sayıları.
$\boldsymbol{\delta_{n,k}}$:	Kronecker delta.
$\boldsymbol{B(n)}$:	Bell sayıları.
$\mathbf{B_n^{(r)}}$:	Bernoulli sayıları.
$\boldsymbol{E_n}$:	Euler sayıları.
$\mathbf{B_n(x)}$:	Bernoulli polinomları.
$\mathbf{E_n(x)}$:	Euler polinomları.
$\boldsymbol{G_k}$:	Genocchi sayıları.
$\boldsymbol{F(x)}$:	Dağılım fonksiyonu.
$\boldsymbol{M(t)}$:	Moment üreteç fonksiyon.
$\boldsymbol{F_n}$:	Fibonacci sayıları.
$\boldsymbol{C_n}$:	Catalan Sayıları.

1. GİRİŞ

Temel kombinatorik kavramlar ve kombinatorik problemler matematik tarihinini en eski konularının başında gelmektedir. Bu çalışmalar M.Ö. 6. yüzyılda, özellikle Hintli bir hekim olan Sushruta'ın Sushruta Samhita adlı kitabında, bu konular ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Ayrıca, Ortaçağ'da yine Hintli bir matematikçi olan Mahavira'nın, M.S. 850 yılında permütasyon ve kombinasyonlar ile ilgili alanları çalıştığı görülmektedir. Filozof ve gökbilimci Rabbi Abraham ibn Ezra, M. S. 1140 yılında binom katsayılarını çalışmıştır, Talmudist ve Levi ben Gerson ise 1321 yılında tarafından bir kapalı formül elde edilmiştir pascal ve binom katsayılarını içeren formüller vermişlerdir.

Bu kombinatorik çalışmalar Rönesans döneminde, matematiğin en önemli alanlarından biri olmuştur. Bu dönemde yaşayan ünlü matematikçi ve fizikçiler bu alanlara çok ilgi duymuşlardır. Bunların bazıları Pascal, Newton, Jacob Bernoulli ailesi, Euler ve Fermat gibidir. 19. yüzyılın sonlarında, J. J. Sylvester' in bu alanda çalışmalarına rastlanılmaktadır. Yine bu dönemin sonlarında Percy McMahon' in çalışmalarını sayma (toplama) ve cebirsel kombinatorik alanlarında yaptığı görülmektedir.

20. yüzyılın ikinci yarısında, kombinatorik hızlı bir büyüme yaşadı ki bu büyüme cebir, olasılık gibi diğer alanlar ile fonksiyonel analizden sayılar teorisine v.b. kadar yeni bağıntılar ve uygulamaları geliştirdi. Bu bağıntılar, kombinatorik, matematik ve teorik bilgisayar bilimleri bölümleri arasındaki sınırları ortaya koymuştur(Wikipedia, 2016)

Bu tezde özellikle, kombinatorik toplamlar, üreteç fonksiyonları, binom katsayıları, permütasyon, kombinasyon, Stirling sayıları, Fibonacci sayıları, Catalan sayıları, Bernoulli sayılar ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları, Bell sayıları ve Bernstein baz fonksiyonları gibi alanlar üzerinde temel bağıntılar ve kavramlar verilmiştir. Yukarıdaki alanları içeren bazı bulgulara kaynak teşkil edecek kitaplar (Charalambides 2002),(Jordan 1950) ve (Koshy 2009) dir. Ayrıca bu kitaplarda verilen ve çözümü verilmeyen bazı alıştırmalara farklı çözüm yöntemleri üreteç fonksiyonları ve kombinatorik toplam metotlarıyla verilmiştir. Simsek(2015), Riemann integraline Bernstein baz fonksiyonlarına ve bunların üreteç fonksiyonlarına uygulayarak birçok kombinatorik toplam vermiştir. Bu toplamların bazıları Catalan sayıları içermektedir. Catatlan sayılarını içeren toplamlar kullanılarak birçok binom katsayılarını içeren kombinatorik toplamlar elde edilmiştir. Bulgular kısmında verilen sonuçlar yalnızca matematikte değil istatistik aynı zamanda bilgisayar bilimleri ve matematiksel fizik gibi dallarda kullanılabilecek sonuçlar ve formüllerdir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Bu bölümde tezde kullanacağımız temel tanımlar, bağıntılar ve formüller verilecektir.

Kombinatorik, inşa kuralları ile sona erecek şekilde tanımlanabilen ayrık nesneleri kullanır. Örneğin: kelimeler, ağaçlar, çizgeler, permütasyonlar, paylaştırma, bir sonlu kümeden kendisine tanımlı fonksiyonlar, topolojik düzenler, v.s. (Flajolet ve Sedgewick2009).

Ayrıca, bir kombinasyon sınıfı veya bir sınıfı, matematiksel objelerin aşağıdaki özellikler ile tanımlanan bir ölçü fonksiyonu ile tanımlanan sonlu bir küme veya sayılabilir kümesidir:
1. Bir elemanın ölçüsü bir pozitif tamsayıdır;
2. Verilen elemanların sayısı limitlidir (Flajolet ve Sedgewick 2009).

Sonuç olarak**,** kombinatorik, farklı özelliklerde sayma ve düzenlemenin, permütasyon, kombinasyon, farklı koşullar altında bölme ve parçalanışın bir çalışmasıdır. Bu çalışmalar olasılık ve istatistik teorisi ile çakışır (Charalambides 2002).

Tanım 2.1.

Başlangıçta k. dereceden bir faktöryel $k\epsilon\mathbb{Z}^+$ için tanımlanmıştır ve daha sonra $k=0$ ve $k\epsilon\mathbb{Z}^-$ için de verilmiştir.
$x\epsilon\mathbb{R}$ ve $k\epsilon\mathbb{Z}^+$olsun. $(x)_k$ ile simgelenen k. dereceden x faktöryeli, aşağıdaki ile tanımlanmıştır;

$$(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1).$$

Eğer $m\ \epsilon\ \mathbb{Z}$ ise, bu durumda

$$(x)_{k+m} = x(x-1)\dots(x-k-m+1)$$

dır ve faktöriyellerin temel özelliği:

$$(x)_{k+m} = (x)_k(x-k)_m$$

şeklindedir. (2.1)' den m pozitif tamsayısı için $k=-m$ ise, bu durumda

$$(x)_{-m}(x+m)_m = 1.$$

ve $x \neq -1,-2,\dots,-m$ için

$$(x)_{-m} = \frac{1}{(x+m)_m} = \frac{1}{(x+m)(x+m-1)\dots(x+1)}, m = 1,2,\dots.$$

$(x)_k$ ile simgelenen k. dereceden x faktöryeli $\forall\ x\epsilon\mathbb{R}$ ve $\forall\ k\epsilon\mathbb{z}$ olmak üzere

$$(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1), k = 1,2,\dots,(x)_0 = 1.$$

ile verilirse

$$(x)_k = \frac{1}{(x+k)_k} = \frac{1}{(x+k)(x+k-1)\dots(k+1)}\ , k = 1,2,\dots$$

ile verilir ve $x \neq -1,-2,..,-k$. dır(Charalambides 2002).

Eğer x, y reel sayılar olursa bu durumda

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}, \qquad r \geq 0, \left|\frac{x}{y}\right| < 1. \tag{2.1}$$

(Graham vd 2004).

Tanım 2.2.
$k = 0,1,\dots$ olmak üzere a_k, reel sayılar dizisi olsun.

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^k, \tag{2.2}$$

toplamına *üreteç fonksiyonu*denir, ayrıca

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!}, \tag{2.3}$$

toplamına ise *üstel üreteç fonksiyonu* denir (Charalambides 2002).

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k(1,1,\dots,1)t^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)t^k. \tag{2.4}$$

$A(t) = (1+t)^n$ fonksiyonu, (1.4) 'deki anlamda, n farklı elemanın kombinasyonlarını sayan fonksiyon olarak adlandırılan $C(n,k) = a_k(1,1,\dots,1), k = 0,1,\dots,n$, sayı dizisini üretir(Charalambides 2002).

Tanım 2.3.

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} P(n,k)\frac{t^k}{k!}. \tag{2.5}$$

$E(t) = (1+t)^n$ fonksiyonu, (2.5) 'deki tanamda, n farklı elemanın permütasyonlarını sayan fonksiyon olarak tanımlanan$P(n,k),\ k = 0,1,\dots,n$, sayı dizisini üretir (Charalambides 2002).

Tanım 2.4.

$k = 0,1,\dots,n = 0,1,\dots$, olmak üzere $a_{n,k}$ reel sayılar dizisi üreteç fonksiyonu

$$A(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, t^k u^n \tag{2.6}$$

Dir (Charalambides 2002).

Tanım 2.5.

$n = 0,1,2,\dots$ olmak üzere, faktoriyellerin kuvvet serilerine açılımı aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s_1(n,k)\, t^k = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}D^k(t)_n\right]_{t=0}, \tag{2.7}$$

ve burada

$$s_1(n,k) = \left[\frac{1}{k!}D^k(t)_n\right]_{t=0} \tag{2.8}$$

dir. (2.8) ifadesi, birinci tür Stirling sayıları olarak adlandırılır (Jordan 1958).

Tanım 2.6.

$n = 0,1,2,\dots$ olmak üzere, faktoriyellerin kuvvet serilerine açılımı aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k) = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}\Delta^k t^k\right]_{t=0}, \tag{2.9}$$

ve burada

$$S_2(n,k) = \left[\frac{1}{k!}\Delta^k t^k\right]_{t=0}, k = 0,1,2,\dots,n \tag{2.10}$$

dir. (2.10) ifadesi, ikinci tür Stirling sayıları olarak adlandırılır (Jordan 1958).

Not: (2.8) ve (2.10) ifadeleri,

$$S_2(n,k) = s_1(n,k) = 0\,, k > n, k < 0, ve\;\; S_2(0,0) = s_1(0,0) = 1,$$

olmasını gerektirir.

Tanım 2.7.

$k = 0,1,\dots,n,\;\; n = 0,1,\dots$.olsun.

$$(t+n-1)_n = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| t^k\,, k = 0,1,\dots,n, n = 0,1,\dots \tag{2.11}$$

burada

$$|s(n,k)| = (-1)^{n-k}s(n,k) = \left[\frac{1}{k!}D^k(t+n-1)_n\right]_{t=0} \tag{2.12}$$

olarak verilir.

(2.12) ifadesi, artan faktoriyellerin kuvvetlere açılımındaki *birinci mertebeden mutlak Stirling sayısı* olarak adlandırılır (Charalambides 2002).

$k = 0,1,\ldots$olsun.Birinci ve ikinci tür Stirling sayılarının faktoriyel üreteç fonksiyonu

$$\boldsymbol{s_n(t)} = \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}} s_1(n,k)(t)_k = \boldsymbol{(t)_n}, \qquad n = 0,1,\ldots. \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{S_n(t)} = \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}} S_2(n,k)(t)_k = \boldsymbol{t^n}, \qquad n = 0,1,\ldots \tag{2.14}$$

şeklinde verilir.

Birinci ve ikinci tür Stirling sayılarının diğer üreteç fonksiyonları

$$g(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(t)_k\, t^k \frac{u^n}{n!} = (1+u)^t, \tag{2.15}$$

$$f(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(t)_k \frac{u^n}{n!} = e^{tu}, \tag{2.16}$$

şeklinde verilir(Charalambides 2002).

Önerme 2.1.

Merkezi olmayan birinci tür Stirling sayılarının üreteç fonksiyonları

$$(t-r)_n = \sum_{k=0}^{n} s_1(n,k;r)t^k, n = 0,1,\ldots. \tag{2.17}$$

$$s_1(n,k;r) = \left[\frac{1}{k!}D^k(t)_n\right]_{t=-r}, k = 0,1,\ldots,n = 0,1,\ldots \tag{2.18}$$

şeklinde verilir (Charalambides 2002).

Önerme 2.2.

Merkezi olmayan ikinci tür Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu

$$(t+r)^n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k;r)(t)_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}\Delta^k t^k\right]_{t=r}, \qquad n = 0,1,\ldots. \tag{2.19}$$

dir ve

$$S_2(n,k;r) = \left[\frac{1}{k!}\Delta^k t^k\right]_{t=r}, n = 0,1,2,\ldots \quad (2.20)$$

şeklinde verilir (Charalambides 2002).

Not: (2.18) ve (2.20) ifadeleri

$$S_2(n,k;r) = s_1(n,k;r) = 0\,,\ k > n, k < 0\,; \quad S_2(0,0;r) = s_1(0,0;r) = 1,$$

olmasını gerektirir.

Tanım 2.8.

Merkezi olmayan yalın veya mutlak birinci tür Stirling sayıları

$$(t+r+n-1)_n = \sum_{k=0}^{n} |s_1(n,k;r)|t^k, \mathrm{n} = 0,1,\ldots. \quad (2.21)$$

ile verilir ki burada

$$|s_1(n,k;r)| = \sum (r+l_1)(r+l_2)\ldots(r+l_{n-k}) \quad (2.22)$$

dir ve ayrıca yukarıdaki toplam ise $\{0,1,\ldots,n-1\}$ için tüm n tamsayısının $\{l_1,l_2,\ldots,l_{n-k}\}$ şeklindeki $(n-k)$-kombinasyonları üzerindeki bir genişlemedir (Charalambides 2002).

Tanım 2.9.

ß, Ω kümesinin parçalanışlarının ailesi olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanırsa ß, Ω üzerinde bir σ-cebir olur (Ouvrard 2007):

(i) $\Omega \in \beta$.

(ii) Eğer $B \in \beta$, ise $B^c \in \beta$.

(iii)β elemanlarının $\forall (B_n)_{n\in N}$ dizisi olmak üzere $\bigcup_{n\in N} B_n \in \beta$.

Tanım 2.10.

Ω ayrık örnek uzayı olsun. $P(.)$ kümesi, $\mathcal{P}(\Omega)$ olaylarının bir kümesi olarak tanımlanır ve reel değerler varsayılarak aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa olasılık veya olasılık ölçümü olarak adlandırılır;

(i) $P(B) \geq 0,\ \forall B \epsilon\, \mathcal{P}(\Omega)$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii)$P(B_1 + B_2 + \cdots + B_n + \cdots) = P(B_1) + P(B_2) + \cdots P(B_n) + \cdots$

ve ayrıca

$$P(B) < 1$$

olasılığın tanımı

$$P(B) = \frac{N(B)}{N}, \qquad P(B') = 1 - P(B). \quad (2.23)$$

şeklinde verilir ki burada $N(B)$, B' nin elemanlarının sayısı ve $N \equiv N(\Omega)$, Ω örnek uzayının elemanlarının sayısıdır (Charalambides 2002, Ouvrard 2007).

$B_i, i = 1,2,\dots,n$ olaylarının karşılıklı veya tamamen stokastik bağımsız olaylar olarak adlandırılabilmesi için gerek ve yeter şart $\{1,2,\dots,n\}$ ve $r = 2,3,\dots,n$ indisleri ile her r-kombinasyonu için

$$P\left(B_{i_1}B_{i_2}\dots B_{i_r}\right) = P\left(B_{i_1}\right)P\left(B_{i_2}\right)\dots P\left(B_{i_r}\right) \tag{2.24}$$

eşitliğin sağlanmasıdır (Charalambides 2004).

Tanım 2.11.

$n \geq 0$ için F_n, n. Fibonacci sayıları dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

1) $F_0 = 0, F_1 = 1$
2) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$

ve üreteç fonksiyonu

$$\frac{t}{1-t-t^2} = \sum F_n\, t^n \tag{2.25}$$

ile tanımlanır (Grimaldi 2010).

Catalan sayıları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \qquad n \geq 1, C_0 = 1 \tag{2.26}$$

$$C_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}. \tag{2.27}$$

Bu sayıların üreteç fonksiyonu

$$\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = \sum_{n\geq 0} C_n\, t^n$$

ifadesi ile tanımlanır (Grimaldi 2010, Simsek 2015).

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Üreteç Fonksiyonları

Teorem (Konvolüsyon Formülü)

$A(t), B(t)\ ve\ C(t)$, üreteç fonksiyonları olsun.

$$C(t) = c_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, n \leq 0 \tag{3.1}$$

toplamı aynı zamanda $\sum_{k\geq 0} a_{n-k} b_k$ şeklinde yazılabilir ve (2.1), *konvolüsyon* olarak adlandırılır (Bender 2005).

İspat: Teoremde verilene denk olarak

$$C(t) = A(t)B(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_k\, t^k\right) = \sum_{k,j\geq 0} a_k\, b_j t^{k+j} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) t^n,$$

Cauchy çarpımından yukarıdaki sonuç elde edilir. Buradan

$$C(t) = A(t)B(t),$$

olmasını gerektirir ve bu da (3.1) eşitliğini gerektirir. Şimdi Bize verilen (3.1) ele alalım.$n \geq 0$ üzerindeki toplamı t^n ile çarparsak, $j = n - k$ alırsak ve bir önceki paragraftaki adımları ters çevirirsek

$$C(t) = \sum_{n\geq 0} c_n\, t^n = \sum_{k,j\geq 0} a_k b_j\, t^{k+j} = A(t)B(t),$$

elde edilir (Bender 2005).

3.2. Kombinasyon ve Permütasyon

3.2.1. Kombinasyon

$W_n = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ sonlu bir küme ve $C_k(W_n)$ kümesi ise n nin k-lı kombinasyonlarının kümesi olsun. Ayrıca, homojen çarpımlar toplamı

$$h_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum x_1^{r_1}, x_2^{r_2}, \dots, x_n^{r_n}, \qquad k = 0,1, \dots \tag{3.2}$$

dir ki buradaki toplam, tüm $r_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n$, öyle ki $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = k$, üzerindeki n nin tüm k-lı kombinasyonlarının genişlemesini gösterir.

Homojen çarpımlar toplamı (3.2) cebirsel olarak elde edilebilir.

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+x_j t+x_j^2 t^2+\cdots\right)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x_1,x_2,\dots,x_n)t^k \qquad (3.3)$$

(3.3) çarpımındaki j. çarpan,

$$A(t,x_j)=1+x_j t+x_j^2 t^2+\cdots, j=1,2,..,n, \qquad (3.4)$$

dir. $x_j^{r_j} t^{r_j}$ terimi w_j elemanı herhangi bir kombinasyonda r_j kez, $r_j=0,1,\dots$ görülebildiğini gösterir. Eğer w_j elemanının en az m_j ve en fazla n_j kez herhangi bir kombinasyonda görülmesine izin verilmişse, (2.4),

$$A_{m_j n_j}(t,x_j)=x_j^{m_j} t^{m_j}+x_j^{m_j+1} t^{m_j+1}+\cdots+x_j^{n_j} t^{n_j}, \qquad (3.5)$$

olur.
$j=1,2,\dots,n$, için (2.4) ifadesi değiştirilir. Eğer örnek olayda $x_j=1, j=1,2,\dots,n$ koyarsak, (3.4) tanımı veya n nin k-lı kombinasyonlarının sayısının üreteç fonksiyonuna indirgenir (Charalambides 2002).

3.2.2. Permütasyon

n nin k-lı permütasyonunun $\mathcal{P}_k(W_n)$ kümesi,

$$g_k(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum \frac{k!}{r_1!\,r_2!\dots r_n!} x_1^{r_1} x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}, \qquad k=0,1,\dots \qquad (3.6),$$

toplamına karşılık gelir ki burada toplam, tüm $r_j \geq 0, j=1,2,\dots,n$, öyle ki $r_1+r_2+\cdots+r_n=k$, üzerindeki genişlemedir. Çok terimli teoreme göre:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^n=\sum \binom{n}{r_1,r_2,\dots,r_{n-1}} x_1^{r_1} x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n},$$

dir.
Cebirsel olarak,

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+x_j t+\frac{x_j^2 t^2}{2!}+\cdots\right)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{t^k}{k!}, \qquad (3.7)$$

elde edilebilir.
Herhangi bir elemanın W_n permütasyonunda görülmesinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın karşılık gelen çarpanlar düzenlenirse

$$E(t,x_j)=1+x_j t+\frac{x_j^2 t^2}{2!}+\cdots, j=1,2,\dots,n \qquad (3.8)$$

dir. Eğer w_j elemanının en az m_j ve en fazla n_j kez herhangi bir permütasyonda görülmesine izin verilirse, (2. 8)

$$E_{m_j,n_j}(t,x_j) = \frac{x_j^{m_j} t^{m_j}}{m_j!} + \frac{x_j^{m_j+1} t^{m_j+1}}{(m_j+1)!} + \cdots + \frac{x_j^{n_j} t^{n_j}}{n_j!}, \qquad (3.9)$$

olur.
$j = 1,2,\dots,n,$ için (1,8) ifadesi değiştirilir.$x_j = 1, j = 1,2,\dots,n$ koyarsak, (1.5) tanımı veya n nin k-lı permütasyonun sayısının üstel üreteç fonksiyonuna indirgenir(Charalambides 2002).

3.3. Çok Değişkenli Üreteç Fonksiyonları

$k = 0,1,\dots, n = 0,1,\dots$ olmak üzere $a_{n,k}$ reel sayı dizisi olsun.

$$A(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, t^k u^n \qquad (3.10)$$

toplamı adi üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır, ve ayrıca

$$E(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \frac{t^k}{k!}\frac{u^n}{n!} \qquad (3.11)$$

toplamı da $a_{n,k}, k = 0,1,\dots, n = 0,1,\dots.$ üstel üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır. (Charalambides 2002).

Örnek 3.1 Tekrarlı Kombinasyon

n nin k-lı tekrarlı (kısıtlamasız) kombinasyonunun üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilebilir.r_j kez ($r_j = 0,1,\dots$) görünmesine izin verildiğinden, j inci elemanın herhangi bir kombinasyonda görülme sayısı,

$$A_0(t,x_j) = 1 + x_j t + x_j^2 t^2 + \cdots = (1 - x_j t)^{-1}, j = 1,2,\dots,n,$$

dir.
n nin k-lı kombinasyonlarının sayısı

$$\prod_{j=1}^{n} A_0(t,x_j)^{-1} = \prod_{j=1}^{n}(1 - x_j t)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x_1,x_2,\dots,x_n) t^k ,$$

dur.
$x_j = 1, j = 0,1,\dots,n,$ n nin k-lı tekrarlı permütasyonlarının üreteç fonksiyonu

$$A_0(t) = (1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k} t^k$$

verilir (Charalambides 2002).

$$(x+y)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k} x^k y^{-n-k} \text{(i)}$$

olduğundan n nın k- lı tekrarlı permütasyonlarının sayısı $(-1)^k\binom{-n}{k}$dir ve

$$\binom{n+k-1}{k} = (-1)^k\binom{-n}{k}$$

ve (i) denkleminden

$$(1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k$$

bulunur.t^k nın katsayıları karşılaştırılırsa

$$E(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

elde edilir bu da$n$ nın k-lı tekrarlı permütasyonlarının sayısıdır (Charalambides 2002).

Örnek 3.2.

n nın üzerinde herhangi bir kısıtlama bulumayan k-lı tekrarlı permütasyonlarının üreteç fonsiyonu ,

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1 + x_j t + \frac{x_j^2 t^2}{2!} + \cdots\right),$$

fonksiyonuna indirgenir.

$x_j = 1,\ j = 1,2,\ldots,n$ koyulursa,

$$E_0(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)^n = e^{nt}.$$

olur.
Yukarıdaki denklem t nin kuvvetlerine genişletilerek,

$$E_0(t) = e^{nt} = \sum_{k=0}^{\infty} U(n,k) \frac{t^k}{k!},$$

elde edilir ki burada

$$U(n,k) = n^k.$$

n nın üzerinde herhangi bir kısıtlama bulunmayan k-lı tekrarlı permütasyonlarının sayısıdır(Charalambides 2002).■

Örnek 3.3 (Hipergeometrik olasılığın ortalaması).

Varsayalım ki art arda seçilen n sayıda topumuz olsun, tekrarlı olmadan seçilen toplar yeşil g (green) ve sarı y (yellow) içermektedir. Çekilişte y yeşil topları çekme olasılığı şu şekilde verilmiştir:

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} \frac{(g)_k (y)_{n-k}}{(g+y)_n} \quad , k = 0,1,2,\ldots,n.$$

Biliyoruz ki;$p_{n,k} \geq 0, k = 0,1,2,\ldots,n$ *Vandermonde formülüne göre*,

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = \frac{1}{(g+y)_n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (g)_k (y)_{n-k} = 1.$$

$$\mu = \frac{ng}{(g+y)_n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (g-1)_{k-1} (y)_{n-k}$$

dır.

*Vandermonde formülü*kullanarak

$$\mu = \frac{ng}{g+y}$$

elde edilir(Charalambides 2002).

Örnek 3.4 (Binom olasılıklarının ortalaması).

Varsayalım ki $n$tane top, tekrarlı olarak art arda rastgele yeşil g (green) ve sarı y (yellow) bir kaptan seçilsin . Aşağıdaki ifade ile n çekilişinde k yeşil topu çekme olasılığı

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\ , k = 1,2, \ldots, n.$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

$$\mu = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k},$$

dır.Elde edilen binom formülü ile

$$\mu = np,$$

dır (Charalambides 2002).

Not:*Yukarıdaki sonuçlarda eğer n sonsuza giderse, bu durumda binom olasılığının Poisson olasılığına gideceğini gözlemleriz.*

3.4. Bazı Özel Sayılar

Bu bölümde özel dizi olarak bilinen özel sayıları ele alacağız. Matematikte bir çok özel sayı vardır. Örneğin, Stirling sayıları $s_1(n,k)$, $S_2(n,k)$, Euler sayıları $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ ve Pascal üçgeninde üçgensel bir form oluşturan $\binom{n}{k}$ binom katsayıları gibi.Harmonik sayılar H_n, Bernoulli sayıları B_n ; diğerlerinden farklıdır.Çünkü kesirli sayılardır fakat tamsayı değildirler. Ayrıca Fibonacci F_n ve Catalan sayıları $\langle 1,2,5,15,\dots \rangle$ da vardır.

Bu çalışma Stirling sayıları ile sınırlıdır ve detaylı olarak çalışılacaktır. Ayrıca, Fibonacci ve Catalan sayıları görülebilir.

3.4.1. Stirling sayıları

***Teorem 3. 4.1.1*:** Birinci tür mutlak Stirling sayısı

$$|s_1(n,k)|, \quad k = 1,2,\dots,n, \quad n = 2,3,\dots,$$

olmak üzere

$$|s(n,k)| = \sum l_1\, l_2, \dots, l_{n-k} \tag{3.4.1.1}$$

toplamı ile verilir.

Ki burada toplam $\{1,2 \dots, n-1\}$ n-1 pozitif tamsayının $(k-1)$-li tüm kombinasyonları $\{l_1 l_2, \dots, l_{n-k}\}$dır.

***İspat**: (2.11) de* $n = 2,3,\dots$ *için*

$$(t+1)(t+2)\dots(t+n-1) = \sum_{k=1}^{n} |s_1(n,k)|\, t^{k-1}$$

Sol tarafın çarpımının i. katsayısı

$$p_l(t) = t + l, l = 1,2, \dots n-1,$$

sabit terimi ve baş katsayısı 1'dir. t nin (k-1) inci dereceden çarpımı gerçekleştirilirse kalan (k-1) in dışında $\{1,2, \dots n-1\}$ herhangi n-k faktörlerinin sabit terimlerinin çarpılmasıyla $\{l_1 l_2, \dots, l_{n-k}\}$, oluşturulur, bununla birlikte t nin birinci derecesi herhangi bir çarpanının , çarpma ilkesi tarafından eşiti , (4.1.1) bulunur.

***Not**: (3.4.1.1) kullanılırsa*

$$|s_1(n,k)| = (n-1)! \sum \frac{1}{j_1 j_2 \cdots j_{k-1}} \tag{3.4.1.2}$$

olarak dönüştürülebilir.

Burada toplam $\{1,2 \dots, n-1\}$ n-1 pozitif tamsayının $(k-1)$-li tüm kombinasyonları $\{j_1 j_2, \dots, k_{n-1}\}$ dır(Charalambides 2002). ■

Not: (3.4.1.1) *kullanılırsa*

$$s_1(n,k) = (-1)^{n-k} \sum u_1 u_2 \dots u_{n-k} \qquad (3.4.1.3)$$

olarak yazılabilir.İkinci denklemdeki toplam permütasyonsuz ve tekrarsız $\{1,2, \dots, (n-1)\}$ n-k sayılarının herhangi bir kombinasyonu için geçerlidir (Jordan 1958).

Teorem 3. 4.1.2

Birinci ve ikinci tür Stirling sayılarının ortogonallik ilişkisi:

$$\sum_{r=k}^{n} s_1(n,r)\, S_2(r,k) = \delta_{n,k}, \sum_{r=k}^{n} S_2\,(n,r) s(r,k) = \delta_{n,k} \qquad (3.4.1.4)$$

dir(Charalambides 2002, Jordan 1958).

Burada *Kronecker delta* $k = n$ ise $\delta_{n,k} = 1$ ve $k \neq n$ ise $\delta_{n,k} = 0$ dır.

İspat: (2.7) seriye açılırsa, (2.9) yardımıyla aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$(t)_n = \sum_{r=0}^{n} s_1(n,r) t^r = \sum_{r=0}^{n} s_1(n,r) \sum_{k=0}^{r} S_2\,(r,k)(t)_k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{r=k}^{n} s_1(n,r) S_2(r,k) \right\} (t)_k.$$

dir.Ki bu (3.4.1.4) gerektirir. Benzer şekilde tersi de söylenir.

Teorem 3.4.1.3

(a) Sabit k için $s_1(n,k), n = k, k+1, \dots$, birinci tür Stirling sayılarının üstel üreteç fonksiyonu

$$g_k(u) = \sum_{n=k}^{\infty} s_1(n,k) \frac{u^n}{n!} = \frac{[log(1+u)]^k}{k!}, k = 0,1, \dots. \qquad (3.4.1.5)$$

olarak verilir.

(b) Sabit k için $S_2(n,k)$, $n = k, k+1, \dots$ikinci tür Stirling sayılarının üstel üreteç fonksiyonu

$$f_k(u) = \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k) \frac{u^n}{n!} = \frac{(e^u - 1)^k}{k!}, k = 0,1, \dots. \qquad (3.4.1.6)$$

şeklinde verilir.

İspat: (a) (2.15) 'de ifade sırası değiştirilirse

$$g(t,u) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} S_1(n,k)\frac{u^n}{n!}t^k = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(u)t^k$$

olduğu için,

$$g(t,u) = (1+u)^t = exp\{t\, log(1+u)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[log(1+u)]^k}{k!}t^k$$

(3.4.1.6) sonucu çıkarılır.

(b) Benzer şekilde(2.15) 'de ifade sırası değiştirilirse

$$f(t,u) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k)\frac{u^n}{n!}(t)_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\,(u)(t)_k$$

ve buradan

$$f(t,u) = [1+(e^u-1)]^t$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{t}{k}(e^u-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^u-1)^k}{k!}(t)_k$$

(3.4.1.6) gösterilir(Charalambides 2002, Jordan, 1958).

Teorem 4.1.4

$k = 0,1,\dots,\ n = 0,1,\dots$, olmak üzere $S_2(n,k)$, ikinci tür Stirling sayıları

$$S_2(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}r^n \qquad (3.4.1.7)$$

toplamı ile verilir.

İspat: (3.4.1.6) ile verilen u nun kuvvetleri şeklinde üreteç fonksiyonu genişleterek

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k)\frac{u^n}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}e^{ru}$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\sum_{n=0}^{\infty} r^n\frac{u^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{r}{k}r^n\right\}\frac{u^n}{n!}$$

elde edilir ki bu ifade (3.4.1.7) gerektirir(Charalambides 2002, Jordan, 1958).

Teorem 3.4.1.5 $k = 0,1,\dots,n, n = 0,1,\dots$, ve

$$s_1(0,0) = 1, s_1(n,0) = 0, n > 0, s_1(n,k) = 0, k > n.$$

başlangıç koşulları ile $s_1(n,k)$ birinci tür Stirling sayıları aşağıdaki üçgensel rekürans bağıntısını sağlar.

$$s_1(n+1,k) = s_1(n,k-1) - ns(n,k) \qquad (3.4.1.8)$$

(a) $k = 1,2,\dots,n+1, n = 0,1,\dots$, ve

$$S_2(0,0) = 1, S_2(n,0) = 0, n > 0, S_2(n,k) = 0, k > n.$$

başlangıç koşulları ile $S_2(n,k)$ ikinci tür Stirling sayıları aşağıdaki üçgensel rekürans bağıntısını sağlar.

$$S_2(n+1,k) = S_2(n,k-1) + kS_2(n,k) \tag{3.4.1.9}$$

İspat:

(a) Rekürans bağıntısının her iki tarafı $(t)_{n+1} = (t-n)(t)_n t$ kuvvetine genişletilirse, (2.9) göre ilişkisi,

$$\sum_{k=0}^{n+1} s_1\,(n+1,k)t^k = (t-n)\sum_{r=0}^{n} s_1(n,r)\,t^r$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} s_1(n,k-1)t^k - \sum_{r=0}^{n} ns_1(n,k)\,t^k.$$

olur. Ki bu (3.4.1.8) gerektirir. (8.9) dan başlangıç koşulları sağlandığı görülür.

(b) Rekürans bağıntısının her iki tarafı $t^{n+1} = t.t^n\ t$ nin faktöriyeline genişletilirse, (2.10) göre ilişkisi,

$$\sum_{r=0}^{n+1} S_2(n+1,k)(t)_k = t\sum_{r=0}^{n} S_2(n,r)(t)_k$$

$(t)_{r+1} = (t-r)(t)_r$ olduğundan $t(t)_r = (t)_{r+1}r(t)_r$ olduğunda

$$\sum_{k=0}^{n+1} S_2(n+1,k)(t)_k = S_2(n,r)(t)_{r+1} + \sum_{k=0}^{n} rS_2(n,r)(t)_r$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} S_2(n,k-1)(t)_k + \sum_{k=0}^{n} k\,S_2(n,k)(t)_k$$

,

sonucu çıkarılır ki bu (3.4.1.9) gerektirir. (2.9) dan başlangıç koşulları sağlandığı görülür (Charalambides 2002, Jordan 1958).

Birinci Tür Stirling Sayılarının Hesaplanması

Başlangıç koşulları ve

$$s_1(n+1,k) = s_1(n,k-1) - ns(n,k), k \in \mathbb{Z}, \tag{3.4.1.9}$$

yardımıyla aşağıdaki hesaplamalar yapılabilir:

- (3.4.1.9)$'da\ \ n = 0$ alınırsa,

  $$s_1(1,1) = s_1(0,k-1) - 0s_1(0,k) = s_1(0,k-1)$$

  $k = 1\ ve\ k \in \mathbb{Z} \neq 0$

  $$s_1(1,1) = s_1(0,0) = 1$$

  $k > 1\ ise\ s_1(1,k) = 0'dır.$

- (3.4.1.9) $de\ \ n = 1$koyarsak,

  $$s_1(2,k) = s_1(1,k-1) - 1s_1(1,k) = s_1(0,k-1)$$

$k = 2$ *için*

$$s_1(2,2) = s_1(1,1) - s_1(1,2) = 1 - 0 = 1 \; dir.\text{Çünkü},$$

$k > n$ *için* $s_1(1,2) = 0 \; dır.$

- (3.4.1.9) $de \; n = 2$alınırsa,

$$s_1(3,k) = s_1(2,k-1) - 2s_1(2,k),$$

elde edilir.

$k = 1$ için

$$s_1(3,1) = s_1(2,0) - 2s_1(2,1) = 0 - 2s_1(2,1) = 2,$$

$k = 2$ için

$$s_1(3,2) = s_1(2,1) - 2s_1(2,2) = -1 - 2.1 = -3$$

$k = 3$ için

$$s_1(3,3) = s_1(2,2) - 2s_1(2,3) = 1 - 2.0 = 1$$

dir.

- (3.4.1.9) $de \; n = 3$ *alınırsa,*

$$s_1(4,k) = s_1(3,k-1) - 3s_1(3,k)$$

$k = 1$ için

$$s_1(4,1) = s_1(3,0) - 3s_1(3,2) = 2 + 9 = 11$$

$k = 3$ için

$$s_1(4,3) = s_1(3,2) - 3s_1(3,3) = -3 - 3.1 = -6$$

$k = 4$ için

$$s_1(4,4) = s_1(3,3) - 3s_1(3,4) = 1.$$

- (3.4.1.9) $de \; n = 4$ *alınırsa,*

$$s_1(5,k) = s_1(4,k-1) - 4s_1(4,k)$$

$k = 1$ için

$$s_1(5,1) = s_1(4,0) - 4s_1(4,1) = -4. -6 = 24$$

$k = 2$ için

$$s_1(5,2) = s_1(4,1) - 4s_1(4,2) = -6 - 4.11 = -50$$

$k = 3$ için

$$s_1(5,3) = s_1(4,2) - 4s_1(4,3) = 11 - 4. -6 = 11 + 24 = 35$$

$k = 4$ için

$$s_1(5,4) = s_1(4,3) - 4s_1(4,4) = -6 - 4.1 = -10$$

$k = 5$ için

$$s_1(5,5) = s_1(4,4) - 4s_1(4,5) = 1.$$

$$\vdots$$

$s_1(n+1,k) = s_1(n,k-1) - ns(n,k), \; k \in \mathbb{Z}$ (3.4.1.9) den Birinci Tür Stirling sayılarının tamsayı olduğu sonucuna varılır.

Teorem 3.4.1.6

Sabit r için, $k = 0,1, \dots, n$,$S_2(n,k;r)$Merkezi olmayan ikinci tür Stirling sayılarının dizisi göz önünde bulundurulursa *Teorem3. 4.1.3*ile

$$(t+n)^n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k;r)(t)_r \;\; n = 0,1, \dots.$$

tanımlanır.

(a) $f(t\,,u;r) = \sum_{n=}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} S_2\,(n,k;r)(t)_k \frac{u^n}{n!} = e^{(t+r)u}$

dır ve sonucunda

(b) $f_k(u;r) = \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k;r) \frac{u^n}{n!} = e^{ru} \frac{(e^u-1)^k}{k!}, n = 0,1, \dots$

(c) $S_2(n,k;r) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (r+j)^n$

açık ifadesi çıkar.

İ***spat***:(a)

$$S_n(t+n)^n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k;r)(t)_r \;\; n = 0,1, \dots.$$

Merkezi olmayan ikinci tür Stirling sayıları dizisinin faktöriyel üreteç fonksiyonu

$$(t+r) = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k;r)\,(t)_k$$

verilir.

(2.19) ve Newton'un genel Binom teoremi kullanılarak *(Charalambides, Enumerative Combinatorics, sayfa 115, teorem3.6.)* ve (2.16) ifadesinden

$$f(t,u;r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} S_2\,(n,k;r)(t)_k \frac{u^n}{n!} = e^{tu}e^{tu} = e^{tu+ru} = e^{u(t+r)}.$$

elde edilir ve böylece

$$f(t,u;r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} S_2\,(n,k;r)(t)_k \frac{u^n}{n!} = e^{u(t+r)}. \blacksquare$$

(b) $f_k(u;r) = \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k;r) \frac{u^n}{n!} = e^{ru} \frac{(e^u-1)^k}{k!}$, $n = 0,1, \dots.$

dir. (3.4.1.6) ifadesinden

$$f(t,u) = f(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k)(t)_k \frac{u^n}{n!}, k = 0,1, \dots$$

r parametresi ile merkezi olmayan ikinci tür Stirling sayıları için

$$f(t,u;r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k;r)(t)_k \frac{u^n}{n!} = e^{(t+r)u},$$

Toplam aşağıdaki şekilde yazılır:

$$f(t,u;r) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{n} S_2(n,k;r)\frac{u^n}{n!}(t)_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\,,(u,r)(t)_k\ . \qquad (i)$$

(2.1) ve (3.4.1.6) ile

$$f(t,u;r) = \{1+(e^u-1)\}^t = \sum_{k=0}^{n}\binom{t}{k}(e^u-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t)_k}{k!}(e^u-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(t)_k\frac{(e^u-1)^k}{k!}.$$

Örneğin;

$$f(t,u) = \{1+(e^u-1)\}^t = \sum_{k=0}^{\infty}(t)_k\frac{(e^u-1)^k}{k!}.e^{ur} \qquad (ii)$$

r parametresi ile (ii) denklemini e^{ur} ile çarparsak, aşağıdaki ifade elde edilir :

$$f(t,u;r) = \{1+(e^u-1)\}^t e^{ur} = \sum_{k=0}^{\infty}(t)_k\frac{(e^u-1)^k}{k!}.e^{ur}$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{\infty}(t)_k\frac{(e^u-1)^k}{k!}\right\}e^{ur}. \qquad (iii)$$

(i) ve (iii) nin sonuçları karşılaştırılırsa

$$f(t,u;r) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\,(u,r)(t)_k \qquad (i)$$

$$f(t,u;r) = \left\{\sum_{k=0}^{\infty}(t)_k\frac{(e^u-1)^k}{k!}\right\}e^{ur}. \qquad (iii)$$

Sonuç olarak

$$f_k(u;r) = \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k;r)\frac{u^n}{n!} = \frac{(e^u-1)^k}{k!}e^{ur}. \blacksquare$$

(c) $S_2(n,k;r) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(r+j)^n$

dir.

Teorem 3.4.1.4 den, ifade (3.4.1.7)

$$S_2(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{r}r^n\frac{u^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}r^n\right\}\frac{u^n}{n!}$$

r parametresiyle aynı şekilde devam edilir.

(b) bağıntısı seriye açılırsa merkezi olmayan ikinci tür Stirling sayılarını aşağıda verilen bağıntı elde edilir:

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k;r)\frac{u^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^u-1)^k}{k!} e^{ur}$$
$$= \left\{\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} e^{uj}\right\} e^{ur}$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} e^{uj}e^{ur}$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} e^{uj+ur}$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} e^{(r+j)u}$$

(2.3) den

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k;r)\frac{u^n}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\sum_{n=0}^{\infty}(r+j)^n\frac{u^n}{n!}$$

gibi yazılabilir.

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k;r)\frac{u^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(r+j)^n\frac{u^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(r+j)^n\right\}\frac{u^n}{n!}$$

u nun katsayıları karşılaştırılırsa

$$S_2(n,k;r) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(r+j)^n$$

elde edilir(Charalambides 2002). ■

Not: Stirling sayıları gibi diğer özel sayılar ile ilişkileri bulundu.

- Stirling sayıları için Euler formülü

$$S_2(n,j) = \frac{(-1)^j}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}k^n$$
$$= \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}(j-k)^n$$

(Quaintance 2016).

- Bell sayıları sayıları ile ikinci tür Stirling sayıları arasındaki bağıntı

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k)$$

dır (Quaintance 2016).

$F(x)$ dağılım fonksiyonu olsun. k cı dereceden cebirsel moment aşağıdaki integral ile tanımlanır:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k F(x)dx,$$

(Lukacs 1970).
$F(x)$ dağılım fonksiyonunun moment üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} exp(tx)\, F(x)dx,$$

(Lukacs 1970).
$F(x)$ dağılım fonksiyonun karekteristik fonksiyonu $f(t)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} exp(itx)\, F(x)dx,$$

(Lukacs 1967).

- Bernoulli ve Euler polynomları ve sayları aşağadaki üreteç fonksiyonları ile tanamlanlar:

Bernoulli polinomlarının,$B_n(x)$ üreteç fonksiyonu

$$\frac{t}{e^t - 1} e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

ile tanımlanır (Srivastava ve Choi 2012).
$B_n(0) = B_n$ Bernoulli saylarıdır

$$B_0 = 1$$

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j \,, n > 1.$$

(Srivastava ve Choi 2012).

r tamsayı olsun. Yüksek mertebeden (r.mertebeden) Bernoulli sayıları, $B_n^{(r)}$ aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} \text{(b1)}$$

(Srivastava ve Choi 2012, Ozden ve Simsek 2014).

- Yüksek mertebeden Bernoulli sayıları ile Stirling sayıları arasındaki bağıntılar

$${C_k}^n = |s_1(n,k)|, {C_k}^{-n} = S_2(k,n).$$

$$S_2(k,n) = \binom{n}{k} B_{n-k}^{(-k)}.$$

dir (Charalambides 2002, Srivastava ve Choi 2012, Ozden ve Simsek 2014).

Euler polinomlarının$E_n(x)$ üreteç fonksiyonun aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{2e^{tx}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Burada $x = 0$ alınırsa $E_n(0) = E_n$ Euler sayları elde edilir:

$$E_0 = 1, E_n = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} E_j , n \geq 1$$

(Srivastava ve Choi 2012).

- Genocchi sayıları olsasılık ve kombinatorik terisinde çok önemli bir yere sahiptirler. Bu sayılar aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{2t}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!},$$

(Srivastava ve Choi 2012, Ozden ve Simsek 2014).

$G_k$ile$E_n$arasındakibağıntıaşağıdakişekildeverilir :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!}.$$

Bu bağıntıda gerekli işlemler yapılırsa

$$E_n = \frac{G_{n+1}}{n+1}$$

ya da

$$G_{n+1} = (n+1)E_n$$

bulunur (Djordjevicve Milovanovic 2014,Srivastava ve Choi 2012).

Theorem 3.4.1.7

$\{L_n\}_{n\in N}$ Laplace dağılımının $\frac{1}{2}exp(-|x|)(x \in \mathbb{R})$ bağımsız rastgele değişkenler dizisi olsun ve $\mathcal{L}_B$ ile gösterilsin

$$\mathcal{L}_B = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k}{2k\pi}$$

(Sun 2007).

Bernoulli polinomlarıaşağıdakiolasılıkveistatistikteorisindeönemliyeriolanbeklenendeğeri iletemsiliaşağıdakişekildeverilir:

$$B_n(x) = \mathbb{E}\left[\left(i\mathcal{L}_B + x - \frac{1}{2}\right)^n\right]$$

buradan $n \in N_0$; $x \in \mathbb{R}$; $i^2 = -1$ dir ve $\mathbb{E}$ beklenen değeri gösterir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathbb{E}[g(x)] = \mathbb{E}_X[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)g(x)dx.$$

f_XX in olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir (Lukacs 1970).

Teorem 3.4.1.8

$\{L_n\}_{n\in N}$ Laplace dağılımının $\frac{1}{2}exp(-|x|)(x \in \mathbb{R})$ bağımsız rastgele değişkenler dizisi olsun ve $\mathcal{L}_{\mathbb{E}}$ ile gösterilsin

$$\mathcal{L}_{\mathbb{E}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k}{(2k-1)\pi}$$

Euler polinomlarıaşağıdakiolasılıkveistatistikteorisindeönemliyeriolanbeklenendeğeriletemsili aşağıdakişekildeverilir:

$$E_n(x) = \mathbb{E}\left[\left(i\mathcal{L}_{\mathbb{E}} + x - \frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$n \in N_0$; $x \in \mathbb{R}$; $i^2 = -1$.

$\mathbb{E}[(i\mathcal{L}_B)^n]$için üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty} \mathbb{E}[(\mathcal{L}_B)^n]\frac{(it)^n}{n!} = \frac{texp\left(\frac{1}{2}\right)}{exp(t)-1}.$$

(Sun 2007).

Bu bağıntıdan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3. 4.1.9

$n \in \mathbb{N}_0$olsun

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^{k-2n}(x-1)^{n-k}\, \mathbb{E}[(2i\mathcal{L}_B)^k]$$

dir(Simsek ve Simsek 2016).

Teorem 3.4.1.10$n \in \mathbb{N}_0$olsun.

$$\mathbb{E}[(i\mathcal{L}_B)^k] = 2^{-n}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} E_{n-k}B_k,$$

dir(Simsek ve Simsek 2016)**.**

Sonuç 3.4.1.1$n \in \mathbb{N}_0$olsun.

$$G_{n+1} = (n+1)2^n \mathbb{E}[(i\mathcal{L}_E)^n],$$

dir(Simsek ve Simsek 2016).

3.4.2. Fibonacci sayıları

Fibonacci sayısı ya da Fibonacci'nin dizisi, İtalyan matematikçi Leonard Fibonacci tarafından tanıştırılmıştır. Bu dizi, "tavşan problemi" olarak bilinir. Fibonacci sayısının uygulamaları: Bilgisayar algoritmaları, veri kurulumu, graf teorisi, biyoloji,...

3.4.2.1. Fibonacci sayılarının özellikleri

Özellik 3.4.2.1 (2.25)'ten, herhangi altı ardışık Fibonacci sayısının toplamı 4'e bölünür. $n \geq 0$ için

$$\sum_{p=0}^{5} F_{n+p} = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} = 4F_{n+4}$$

dir.

İspat:

$$\sum_{p=0}^{5} F_{n+p} = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5}$$
$$= (F_n + F_{n+1}) + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+3} + F_{n+4} + (F_{n+3} + F_{n+4})$$
$$= 2F_{n+2} + 2F_{n+3} + 2F_{n+4} = 2(F_{n+2} + F_{n+3}) + 2F_{n+4}$$
$$\sum_{p=0}^{5} F_{n+p} = 4F_{n+4},$$

(Grimaldi 2012).

Özellik 3.4.2.2 $n \geq 0$ için,

$$\sum_{p=0}^{n} F_p = F_{n+2} - 1$$

dir.

İspat. Fibonacci sayılarının indirgeme tanımı kullanılarak ve

$$\begin{aligned} F_0 &= F_2 - F_1 \\ F_1 &= F_3 - F_2 \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned}$$

Bulunur. Buradan, n+1 tane denklemi toplarsak, elde edilen denklemin sol tarafı $\sum_{p=0}^{n} F_p$ ve sağ tarafı da

$$(F_2 - F_1) + (F_3 - F_2) + \cdots + (F_{n+1} - F_n) + (F_{n+2} - F_{n+1})$$
$$= -F_1 + (F_2 - F_2) + (F_3 - F_3) + \cdots$$
$$+(F_n - F_n) + (F_{n+1} - F_{n+1}) + F_{n+2}$$
$$= F_{n+2} - F_1 = F_{n+2} - 1$$

dir. Fibonacci sayılarının kareleri toplamına geçersek,

$$F_0^2 = 0^2 = 0 = 0 = 0 \times 1$$
$$F_0^2 + F_1^2 = 0^2 + 1^2 = 1 = 1 \times 1$$
$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2 = 1 \times 2$$
$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \times 3$$
$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \times 5$$

elde ederiz (Grimaldi 2012).

3.4.2.2. Lineer indirgeme bağıntılarının çözümü: F_n için binet formülü

$C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k \in \mathbb{R}, C_0 \neq 0, C_k \neq 0$ sabit sayıları için aşağıdaki ifade sağlansın.

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_{n-k} = 0.$$

İkinci mertebeden indirgeme bağıntısı

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ , n \geq 2\ , F_0 = 0, F_1 = 1 \qquad (3.4.2.1)$$

ile verilir. $A \neq 0, d \neq 0$ için,

$$F_n = Ad^n\ , \qquad (3.4.2.2)$$

değişken değişimiyle ,

$$Ad^n = Ad^{n-1} + Ad^{n-2} \qquad (3.4.2.3)$$

bağıntısını elde ederiz. (3.4.2.2)'i A'ya ve d^{n-2}'ye bölerek,

$$d^2 - d - 1 = 0 \qquad (3.4.2.4)$$

kuadratik formülü elde edilir. (3.4.2.2) formülünden karakteristik kökler:

$$d_1 = \frac{-1(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$d_2 = \frac{-1(-1) - \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Bu köklerin standart gösterimi α ve β olmak üzere

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ , \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad (3.4.2.5)$$

dir. Sonuç olarak,

$$F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n\ , n \geq 0 \qquad (3.4.2.6)$$

dir.

$0 = F_0 = c_1 + c_2$

ve

$$1 = F_1 = c_1\alpha + c_2\beta = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \qquad (3.4.2.7)$$

bağıntılarından,

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \ , c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad (3.4.2.8)$$

olarak gösterilebilir. Sonuç olarak, F_n'yi açık şekilde

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n , n \geq 0$$

şeklinde ifade edebiliriz (Grimaldi 2012, Koshy 2009).

Not:

$$F_n = \frac{\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{2^n}\left[\left(\sqrt{5}\right)^{j-1} - \left(-\sqrt{5}\right)^{n-j}\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left[\left(\sqrt{5}\right)^{j-1} - \left(-\sqrt{5}\right)^{n-j}\right]^{-1}$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398 \ldots$$

ile verilen α, ***altın oran*** ya da gizemli oran olarak adlandırılır.
Bazı hesaplamalardan sonra,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ , \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad (3.4.2.9)$$

dir. Sonuç olarak,

$$F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n , n \geq 0$$

Dır (Grimaldi 2012, Koshy 2009).

3.4.2.3. αveβ'nın sağladığı özellikler

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$
$$\alpha\beta = -1$$
$$\alpha^{-1} = -\beta$$
$$\alpha - \beta = \sqrt{5}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 3$$
$$\beta^2 = \beta + 1$$
$$\beta^{-1} = -\alpha$$
$$\alpha + \beta = 1$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{5}$$

$\alpha - \beta = \sqrt{5}$ özelliğinden, F_n için açık formülümüzü

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\ , n \geq 0 \quad (3.4.2.10)$$

olarak yeniden düzenleyebiliriz. F_n'nin (3.4.2.3)'teki gösterimi, Fibonacci sayıları için Binet formu olarak adlandırılır (Grimaldi 2012, Koshy 2009).

Özellik 3.4.2.3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

İspat.

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olduğundan, $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ olmak üzere , $n \to \infty$ iken, $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n \to 0$ and $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \to 0$ bulunur. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}{(\alpha-\beta)}}{\frac{(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha-\beta)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - \beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \frac{\alpha - \beta(0)}{1 - 0} = \alpha.$$

Böylelikle istenen elde edilir (Grimaldi 2012, Koshy 2009).

Özellik 3.4.2.4$n \geq 2$ *için,*

$$F_{n+2} + F_{n-2} = 3F_n.$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} F_{n+2} + F_{n-2} &= (F_{n+1} + F_n) + F_{n-2} \\ &= F_n + F_n + (F_{n-1} + F_{n-2}) \\ &= 2F_n + F_n \\ &= 3F_n \\ F_{n+2} + F_{n-2} &= 3F_n, \blacksquare \end{aligned}$$

(Grimaldi 2012, Koshy 2009).

Özellik 3.4.2.5 $n \geq 0$ için,

$$F^3{}_{n+1} = F^3{}_n + F^3{}_{n-1} + 3F_{n-1}F_nF_{n+1} = 3F_n.$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} F^3{}_{n+1} &= (F_{n-1}+F_n)^3 \\ &= F^3{}_{n-1}+F^3{}_n+2F^2{}_{n-1}F_n+ \\ &+2F^2{}_nF_{n-1}+F^2{}_{n-1}F_n+F^2{}_nF_{n-1} \\ &= F^3{}_{n-1}+F^3{}_n+2F_{n-1}F_n(F_{n-1}+F_n)+ \\ &+F_{n-1}F_n(F_{n-1}+F_n) \\ &= F^3{}_{n-1}+F^3{}_n+F_{n+1}(2F_{n-1}F_n+F_{n-1}F_n) \\ &= F^3{}_{n-1}+F^3{}_n+3F_{n+1}F_{n-1}F_n. \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$F^3{}_{n+1} = F^3{}_{n-1}+F^3{}_n+3F_{n+1}F_{n-1}F_n, \blacksquare$$

elde edilir (Grimaldi 2012, Koshy 2009).

Özellik 3. 4.2.6

Binet formunu (3.4.2.3) kullanılarak, $n \geq 0$ için,

$$F_{n-1}F_{n+1}-F^2{}_n = (-1)^n$$

ile verilen Cassini'nin bağıntısı elde edilir.

İspat. (3.4.2.3)$'ten$,

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_{n+1}-F^2{}_n &= \frac{(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{(\alpha-\beta)}\frac{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}{(\alpha-\beta)}-\frac{(\alpha^n-\beta^n)^n}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \frac{[\alpha^{2n}-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-\beta^{n-1}\alpha^{n+1}+\beta^{2n}]}{(\alpha-\beta)^2} \\ &-\frac{[\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}]}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{2n}-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-\beta^{n-1}\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)^2} \\ &+\frac{\beta^{2n}-\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n-\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \frac{-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-\beta^{n-1}\alpha^{n+1}+2\alpha^n\beta^n}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^n\beta^n\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}+2\right)}{(\alpha-\beta)^2} \end{aligned}$$

Bölüm 3.4.2.3'ten,

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha^n\beta^n\frac{(-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)}{\alpha\beta}}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \frac{\frac{\alpha^n\beta^n\left(-(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)\right)}{\alpha\beta}}{(\alpha-\beta)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^n\beta^n(-(\alpha+\beta)^2)}{\alpha\beta(\alpha-\beta)^2}$$
$$= \frac{(\alpha\beta)^n(-1)}{\alpha\beta}$$

Bölüm 3. 4.2.3'ten,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F^2{}_n = (-1)^n,$$

(Grimaldi 2012, Koshy 2009).

3.4.3. Catalan sayıları

Catalan sayıları, bazı sayma problemlerinde sıklıkla ortaya çıkan bir doğal sayılar dizisi şeklindedir.

Özellik 3. 4.3.1 $n \geq 0$ için,

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n}{n+1}$$

dir.

İspat.

$$\frac{1}{n}\binom{2n}{n+1} = \frac{2n!}{n(n+1)!\,\big(2n-(n+1)\big)!} = \frac{2n!}{n(n+1)n!\,(n-1)!} = C_n$$

(1.26) ve (1.27)'den,

$$\frac{1}{n}\binom{2n}{n+1} = C_n. \blacksquare$$

(Grimaldi 2012).

Özellik 3.4.3.2 $n \geq 0$ için,

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}.$$

İspat.(2.26) and (2.27)'den,

$$\frac{4n-2}{n+1}C_{n-1} = \frac{(4n-2)(4n-6)}{(n+1)n}C_{n-2}$$
$$= \frac{(4n-2)(4n-6)(4n-10)}{(n+1)n(n-1)}C_{n-3}$$
$$= \frac{(4n-2)(4n-6)(4n-10)(4n-14)}{(n+1)n(n-1)(n-2)}C_{n-4}$$
$$\vdots$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 3.1}{(n+1)!}2^n$$
$$= \frac{(2n)!\,2^n}{(n+1)!\,(2n)!\,2^n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$$

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1},$$

(Grimaldi 2012, Koshy 2009).

$x \in [0,1]$, $n$ve$k$negatif olmayan tamsayılar olsun. Bernstein baz fonksiyonu,$B_k^n(x)$

$$B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, k = 0,1,\ldots,n$$

şeklinde tanımlanır ve burada

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

dir(Bernstein 1912,Lorenz 1986).

Bernstein baz fonksiyonları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$f_{B,k}(x,t) = \frac{t^k x^k e^{(1-x)t}}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_k^n(x)\frac{t^n}{n!}, k = 0,1,\ldots,n$$

$k = 0,1,\ldots,n$ ve $t \in \mathbb{C}$, $x \in [0,1]$ dir (Açıkgöz ve Aracı 2010, Mahmudov 2011, Simsek 2015, Simsek ve Açıkgöz 2010).

Sonuç 3.4.3.1

$$\frac{1}{C_n} = (n+1)(2n+1)\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\binom{n}{l}\frac{1}{(2n-l+1)}$$

(Simsek 2015).

Sonuç 3.4.3.2

$$C_n = \frac{1}{2n+1}\sum_{l=n}^{2n}\binom{l}{n}$$

(Simsek 2015).

Sonuç 3.4.3.3

$$C_n = \frac{1}{(2n+1)!}\sum_{l=n}^{2n}\binom{2n}{l}\binom{l}{n}(3n-l)!\,(l-n)!$$

(Simsek 2015).

Sonuç 3.4.3.4

$$C_n = \frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{l=0}^{n}\frac{\binom{2n}{l}\binom{2n-1}{n}}{\binom{n}{l}}$$

(Simsek 2015).

Sonuç 3.4.3.5

$$C_n = \frac{2n+1}{n+1}\sum_{j=n}^{2n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{j}\frac{1}{j+l}$$

(Simsek 2015).

Sonuç3.4.3.6

$$C_n = \sum_{l=n}^{2n} \sum_{j=0}^{l-n} (-1)^{l-n-j} \binom{2n}{j, n, l-n-j, 2n-l} \frac{1}{2n-j+1}$$

(Simsek 2015).

4. BULGULAR

Bu bölümde, Simsek(Simsek 2015)tarafından verilen Catalan sayıları ile ilgili formüllerden yararlanarak, kombinatorik toplamları içeren önermeler verilecektir.

Önerme 4.1. *n negatif olmayan tam sayı olsun.*

$$\sum_{l=0}^{n}\frac{\binom{2n}{l}\binom{2n-l}{n}}{\binom{n}{l}}=(n+1)(2n+1)\sum_{j=n}^{2n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{j}\frac{1}{j+l}.$$

İspat: $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ şeklinde verilen Catalan sayılarının tanımı, sonuç3.4.3.1.'den yerine yazarsak ve gerekli işlemlerden sonra ispat tamamlanmış olur.

Not: Bu önermenin ikinci ispat yöntemi matematiksel tümevarım yöntemiyle de yapılabilir.

Önerme 4.2

$$\sum_{l=n}^{2n}\binom{l}{n}=\frac{1}{(2n)!}\sum_{l=n}^{2n}\binom{2n}{l}\binom{l}{n}(3n-l)!\,(l-n)!.$$

İspat. Sonuç 3.4.3.2. ve Sonuç 3.4.3.3.'ün sağ tarafları eşitlenirse, önermenin ispatı elde edilir.

Not: Bu önermenin ikinci ispat yöntemi matematiksel tümevarım yöntemiyle de yapılabilir.

Önerme 4.3.

$$\sum_{l=0}^{n}\frac{\binom{2n}{l}\binom{2n-1}{n}}{\binom{n}{l}}=(n+1)\binom{2n}{n}.$$

İspat. Catalan sayılarının tanımından ve Sonuç 3.4.3.4.'ten bu önerme ispatlanmış olur.

Not: Bu önermenin ikinci ispat yöntemi matematiksel tümevarım yöntemiyle de yapılabilir.

Önerme 4.4.

$$\sum_{j=n}^{2n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{j}\frac{1}{j+l}=\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\sum_{l=0}^{n}\frac{\binom{2n}{l}\binom{2n-1}{n}}{\binom{n}{l}}$$

İspat: Sonuç 3.4.3.4. ve Sonuç 3.4.3.5.'te verilen bağıntıların sağ tarafları eşitlenerek, gerekli işlemler yapılırsa, önerme ispatlanmış olur.

Not: Bu önermenin ikinci ispat yöntemi matematiksel tümevarım yöntemiyle de yapılabilir.

Önerme 4.5

$$\sum_{l=n}^{2n}\sum_{j=0}^{l-n}(-1)^{l-n-j}\frac{1}{(2n-j+1)j!\,(l-n-j)!\,(2n-l)!}$$
$$=\frac{n!}{(2n+1)!}\sum_{l=n}^{2n}\binom{l}{n}$$

İspat. Çok terimli Binom katsayısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\binom{n}{a,b,c,d}=\frac{n!}{a!\,b!\,c!\,d!}$$

dir. Burada $a+b+c+d=n$ dir. Sonuç 3.4.3.5.'da yukarıdaki bağıntı yazılarak Sonuç 3.4.3.2. kullanılarak gerekli işlemlerden sonra, önermenin ispatı tanımlanmış olur.

Not: Bu önermenin ikinci ispat yöntemi matematiksel tümevarım yöntemiyle de yapılabilir.

Teorem 4.1.

$$S_2(n,n-k)=\sum_{r=0}^{k}\binom{k-n}{k+r}\binom{k+n}{k-r}|s_1(k+r,r)| \tag{4.1}$$

dır(Charalambides 2002).

İspat : İlk olarak

$$S_2(n,j)=\sum_{r=0}^{n-j}(-1)^r\binom{n+r-1}{j-1}\binom{2n-j}{n-j-r}s_1(n-j+r,r), \tag{4.2}$$

olduğunu ispatlamamız gerekir.

j = n − k için denklem (4.1) denklemine indirgenir.

Lagrange inversiyon formülü

$$\left[\frac{d^n}{du^n}\left(\theta^{-1}(u)\right)^k\right]_{u=0}=k(n-1)_{k-1}\left[\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{-n}\right]_{t=0}$$

olarak verilmiştir. Bu formül kullanılarak (Teorem 11.11, Charalambides 2002)

$$\frac{1}{k!}\left[\frac{d^n}{du^n}\left(\theta^{-1}(u)\right)^k\right]_{u=0}=\binom{n-1}{k-1}\left[\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^{-n}\right]_{t=0}$$

elde ederiz.

$t = \theta^{-1}(u) = e^u - 1$ ve $u = \emptyset(t) = log(1+t)$ dır. Ve (3.4.1.3) teoreminin (b) ifadesi (3.4.1.6) da kullanılırsa ,

$$f_k(u) = \sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k)\frac{u^n}{n!} = \frac{(e^u-1)^k}{k!}, k = 0,1, ...$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} S_2(n,j) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^n}{d^n}(e^u-1)^k\right]_{u=0} \\ &= \binom{n-1}{k-1}\left[\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\left(\frac{log(1+t)}{t}\right)^{-n}\right]_{t=0}. \end{aligned} \qquad (ia)$$

bulunur.(Charalambides 2002) deki Uyarı (11.5)kullanılırsa,

$$\left[\frac{d^m}{dt^n}\big(h(t)\big)^s\right]_{t=0} = \sum_{r=0}^{m}\binom{s}{r}\binom{m-s}{m-r}\left[\frac{d^m}{dt^m}\big(h(t)\big)^r\right]_{,t=0}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{m}\binom{s}{r}\binom{m-s}{m-r} &= \sum_{r=0}^{n-j}\binom{-n}{r}\binom{n-j-(-n)}{n-j-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n-j}\binom{-n}{r}\binom{2n-j}{n-j-r}, \end{aligned} \qquad (ii)$$

(ia) denkleminde (ii) yazılırsa ,

$$S_2(n,j) = \binom{n-1}{j-1}\sum_{r=0}^{n-j}\binom{-n}{r}\binom{2n-j}{n-j-r}\left[\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\left(\frac{log(1+t)}{t}\right)^r\right]_{t=0} \qquad (iii)$$

elde edilir.

(3.4.1.5) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{[log(1+t)]^r}{t^r} &= \sum_{n=r}^{\infty} r!\, s_1(n,r)\frac{t^{n-r}}{n!} \qquad (4ia) \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} r!\, s_1(i+r,r)\frac{t^i}{(i+r)!}, \end{aligned}$$

Bazı hesaplamalardan sonra

$$\left[\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\frac{\big(log(1+t)\big)^r}{t^r}\right]_{t=0} = \frac{s_1(n-j+r,r)}{\binom{n-j+r}{r}}. \qquad (4i)$$

buluruz.

$$\binom{n-j}{j-n}\binom{-n}{r} = (-1)^r\binom{n+r-1}{j-1}\binom{n-j+r}{r}. \qquad (5i)$$

özdeşliğini (iii) denkleminde (4i) ve (5i) yerine yazılırsa, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz;

$$S_2(n,j) = \sum_{r=0}^{n-j} (-1)^r \binom{n+r-1}{r-1} \binom{n-j+r}{r} \binom{2n-j}{n-j-r} \left[\frac{s_1(n-j+r,r)}{\binom{n-j+r}{r}} \right]. \qquad (6i)$$

gerekli işlemler yaptıktan sonra (5.1.2) bağıntısı bulunmuş olur.

$$S_2(n,j) = \sum_{r=0}^{n-j} (-1)^r \binom{n+r-1}{r-1} \binom{2n-j}{n-j-r} s_1(n-j+r,r).$$

j = n ─ k alınırsa

$$\binom{n+r-1}{n-k-1} \binom{k+n}{k-r} = (-1)^{k+r} \binom{k-n}{k+n} \binom{k+n}{k-r}$$

(Charalambides 2002)deki Tanım (2.12) ve Uyarı (8.3) den,

$$S_2(n,n-k) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k-n}{k+r} \binom{k+n}{k-r} |s_1(k+r,r)|$$

(4.1) elde edilir. ■

Teorem 4.2. (Bernoulli denemeler ile değişen başarı olasılık, merkezi olmayan Stirling Sayılarının olguları)**:**

Varsayalım ki toplar başlangıçta sırasıyla w beyaz ve b siyah top içeren bir kaptan aşağıdaki plana göre çekilsin. Her bir denemede top çekildikten sonra s siyah toplar kaba geri atılsın. k beyaz topun n denemede çekilme olasılığı $p(k;n,r)\ dir.$

$$p(k,n;r) = \frac{|s_1(k,n;r)|\theta^k}{(\theta+r+n-1)_n}, \qquad k = 0,1,\ldots \qquad (4.2.1)$$

Dır (Charalambides 2002).

İspat: Başlangıçta w beyaz ve b siya top içeren bir kap alalım.

Birinci denemede elimizde w + b var;

İkinci denemede elimizde w + b + s var, (birinci denemede çekilen s siyah top kaba geri yerleştirilir) ;

⋮

i ‘ inci denemede elimizde w + b + (i ─ 1)s var;

⋮

n ‘inci denemede elimizde w + b + (n ─ 1)s var.

1.18 ve 1.20 tanımından klasik olasılığın tanımına göre

- İlk denemede beyaz top çekme olasılığı;

$$p_1 = P(B_1) = \frac{w}{w+b},$$

- İkinci denemede beyaz top çekme olasılığı;

$$p_2 = P(B_2) = \frac{w}{w+b+s},$$

⋮

- i ‘inci denemede beyaz top çekme olasılığı;

$$p_i = P(B_i) = \frac{w}{w + b + (i-1)s} \qquad (i)$$

$$\vdots$$

- n'inci denemede beyaz top çekme olasılığı;

$$p_n = P(B_n) = \frac{w}{w + b + (n-1)s}.$$

(1.23) ten ve i 'inci denemede beyaz top çekmeme olasılığı

$$q_i = P(B_i^c) = 1 - \frac{w}{w + b + (i-1)s} = \frac{b + (i-1)s}{w + b + (i-1)s} \qquad (ii)$$

"Charalambides 2002, Tanım 1.17, sayfa 25"dekiçarpma formülünden

$$\mathrm{P}(B_1 B_2 \dots B_n) = P(B_1)P(B_2) \dots P(B_n). \qquad (iii)$$

B_i olayı için i 'inci adımda beyaz çekilmesi $i = 1,2, \dots, n$ (iii)

$$P\left(B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_k} B^c{}_{i_{k+1}} B^c{}_{ik+_2} \dots B^c{}_{i_n}\right)$$
$$= P\left(B_{i_1}\right)P\left(B_{i_2}\right) \dots P\left(B_{i_k}\right)P\left(B^c{}_{i_{k+1}}\right)P\left(B^c{}_{ik+_2}\right) \dots P(B^c{}_{i_n})$$
$$= P\left(B_{i_1}\right)P\left(B_{i_2}\right) \dots P\left(B_{i_k}\right)P\left(B^c{}_{i_{k+1}}\right)P\left(B^c{}_{ik+_2}\right) \dots P(B^c{}_{i_n})$$
$$= \frac{w}{w + b + (i_1 - 1)s} \frac{w}{w + b + (i_2 - 1)s} \dots \frac{w}{w + b + (i_k - 1)s}$$
$$\times \frac{b + (i_{k+1} - 1)s}{w + b + (i_{k+1} - 1)s} \frac{b + (i_{k+2} - 1)s}{w + b + (i_{k+2} - 1)s} \dots \frac{b + (i_{kn} - 1)s}{w + b + (i_{kn} - 1)s}$$
$$= \frac{w^k}{(w + b + (n-1)s)_n} (b + (i_{k+1} - 1)s) \times (b + (i_{k+2} - 1)s)$$
$$(\, b + (i_{kn} - 1)s)(iii)$$

$olur.$

(Charalambides 2002) kaynağındaki Örnek 8.1'e benzer şekilde,

n 'inci denemede k beyaz top çekmek için olasılık $p(k; n, r)$ aşağıdaki toplamla verilir

$$p(k; n, r) = \frac{w^k}{(w + b + (n-1)s)_n} \sum (b + (i_{k+1} - 1)s)$$
$$\times (b + (i_{k+2} - 1)s) \dots (\, b + (i_{kn} - 1)s) \qquad (4i)$$

(1.22) den ,

$$|s_1(n, k; r)| = \sum (r + l_1)(r + l_2) \dots (r + l_{n-k}) \qquad (5i),$$

$(4i)$ de $i_{k+p} - 1 = l_p$, $p = 0,1, \dots n - k$, yazarsak, $(4i)$

$$p(k; n, r) = \frac{w^k}{(w + b + (n-1)s)_n} \sum (b + l_1 s)\,(b + l_2 s)$$
$$\dots (\, b + l_{n-k} s) \qquad (6i)$$

olur.

(*6i*) nin pay ve paydasını s ye bölersek

$$p(k;n,r)=\frac{\frac{w^k}{s}}{\left(\frac{w}{s}+\frac{b}{s}+(n-1)\frac{s}{s}\right)_n}\sum\left(,\frac{b}{s}+\frac{l_1 s}{s}\right)\left(\frac{b}{s}+\frac{l_2 s}{s}\right) \ldots\times\left(\frac{b}{s}+\frac{l_{n-k}s}{s}\right) \qquad (7i)$$

elde edilir.

$$\frac{w}{s}=\theta \; ve \; \frac{b}{s}=r \qquad (8i)$$

Olsun. Bu nedenle $(8i)$ $bağıntısı(7i)$ de yerine konursa, aşağıdaki sonuç bulunur

$$p(k;n,r)=\frac{\theta^k}{(\theta+r+n-1)_n}\sum(r+l_1)(r+l_2)\ldots(r+l_{n-k}) \qquad (8i)$$

(8i) deki toplam ifadesi ve (5i) karşılaştırılırsa

$$p(k;n,r)=\frac{\theta^k}{(\theta+r+n-1)_n}|s_1(n,k;r)|$$

(5.2.1)sonucunu elde ederiz.■

Not: Teorem 4.1ve (4ia) denkleminden t yerinee^t-1alınırsa

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^r=\sum_{n-r}^{\infty} r!\,S_1(n,r)\frac{(e^t-1)^n}{n!}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\binom{n+r}{n}}r!\,s_1(n+r,r)S_2(m,n)\frac{t^m}{m!}$$

elde edilir. (b1) bağıntısı yukarıdaki bağıntı ile kullanılırsa aşağıdaki formül

$$B_m^{(r)}=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\binom{n+r}{n}}s_1(n+r,r)S_2(m,n)$$

ya da

$$B_m^{(r)}=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\binom{n+r}{r}}s_1(n+r,r)S_2(m,n)$$

bulunur. Bu formül ve benzer formüllerin farklı ispatları (Srivastava ve Choi, 2012) kaynağında mevcuttur.

(4i) denkleminden t yerine e^t-1 alınırsa ve (b1) bağıntısı yardımıyla

$$\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\left[\frac{t}{e^t-1}\right]_{t=0}^{r}=\frac{s_1(n-j+r,r)}{\binom{n-j+r}{r}}=B_{n-j}^{(r)}$$

ya da

$$s_1(n-j+r,r)=\binom{n-j+r}{r}B_{n-j}^{(r)}$$

formülü elde edilir. Bu formül ve banzeri formüllerin farklı ispatları (Srivastava ve Choi, 2012) kaynağında mevcuttur.

(ia) denkleminden t yerine $e^t - 1$ alınırsa ve (b1) bağıntısıda da $r = -n$alınırsa

$$S_2(n,j) = \binom{n-1}{k-1}\left[\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{-n}\right]_{t=0}.$$

Yukarıdaki bağıntıda j yerine $n-k$ alarak ve Teorem 4.1 ile yardımıyla

$$S_2(n,n-k) = \binom{n-1}{k-1} B_k^{(-n)}$$

formülü elde edilir. Bu bağıntının farklı ispatları(Charalambides 2002, Kim ve Kim 2013, Ozden ve Simsek 2014, Srivastava ve Choi 2012) gibi kaynaklarda mevcuttur.

5. TARTIŞMA

Bu tezde, matematiğin birçok dalında, olasılık ve istatistikte yaygın olarak kullanılan özel sayılar ve polinomların üreteç fonksiyonları tekniğinden yaralanarak temel kavramlar ve sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar ve bağıntılar, aşağıdaki alanlar üzerine yoğunlaştırılmıştır: Kombinatorik toplamlar, üreteç fonksiyonları, binom katsayıları, permütasyon, kombinasyon, Stirling sayıları, Fibonacci sayıları, Catalan sayıları, Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları, Bell sayıları ve Bernstein baz fonksiyonları. Bu tezin bulgular kısmında elde edilen ve binom katsayılarını içeren kombinatorik toplamlar yalnızca matematikte değil istatistik, bilgisayar bilimleri ve matematiksel fizik gibi dallarda kullanılabilecek sonuçlar ve formüllerdir. Böylece tezde elde edilen sonuçlar güncel ve yaygın etkiye sahiptirler.

6. SONUÇ

Bu tezde, olasılık ve istatistikte üreteç fonksiyonları ve kombinatorik toplamlar ve bunlarla ilgili uygulamalar çalışılmıştır. Binom katsayılarını içeren kombinatorik toplamlar bulunmuştur. Bu toplamların bazı özel sayılar ile ilişkileri incelenmiştir.

Bu tezde verilenler, hem matematik, olasılık ve istatistik alanlarına hem de diğer alanlara katkı sağlayacaktır. Bu tezde kullanılan bazı özel sayılar ile kombinatorik toplamlar arasındaki formüller ve ilişkiler verilmiştir. Örneğin; 1. ve 2. tür Stirling sayıları, Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Bernstein baz fonksiyonları, Bell sayıları, Fibonacci sayıları ve Catalan sayıları vb. gibi sayılar ve polinomlarla ilgili özdeşlikler incelenmiştir.

7. KAYNAKLAR

ACIKGOZ, M., and ARACI, S. 2010. On generating function of the Bernstein polynomials. *Numerical Analysis and Applied Mathematics, American Institute Physics Conference Proceedings,*1281: 1141-1143.

AMDEBERHAN, T., ANGELIS V. D., LIN, M., MOLL, V., and SURY, B. 2012. A pretty binomial identity, *Elemente der Mathematik,*67(1): 18-25.

BENDER, A., WILLIAMSON, S. 2005. Foundation of combinatorics with applications. Dover publication, 469p.

BERNSTEİN, S.N. 1912. Démonstration du théoreme deWeierstrass fondée sur la calcul des probabilités. *Communications of the KharkovMathematical Society*, 13:1-2.

SIMSEK, B., SIMSEK, B. 2016. The computation of expected values and moments of special polynomials via characteristic and generating functions, *Numerical Analysis and Applied Mathematics, American Institute Physics Conference Proceedings (accepted).*

CHARALAMBİDES, A. 2002, Enumerative Combinatorics, Chapman & Hall/CRC: U.S.A, 609 p, p 321, p, 332.

CHARALAMBİDES, A. 2004, Combinatorial methods in discrete distributions, Wiley-Interscience: U.S.A, 433 p.

COMTET L. 1974. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions(Translated from the French by J. M. Nienhuys) Reidel, Dordrecht and Boston, 351 p.

CLARK, D. S. 1982. A class of combinatorial identities, *Discrete AppliedMathematic,* 4(8), 325-327.

DJORDJEVİC, G. B., MİLOVANOVİC, G. 2014. Special classes of polynomials, Universityof Nis, Faculty of technology Leskovac.

FLAJOLET, P., SEDGEWİCK, R. 2009. Analytic Combinatoric,Cambridge University Press, U.S.A, 761 p.

GRAHAM, L., KNUTH, E., PATASHNİK, O. 1994. Concretes mathematiques Fondation pour informatique, U.S.A : 692 p.

GOLDMAN, R. 2002. Pyramid Algorithms: A Dynamic Programming Approach to Curves and Surfaces for Geometric Modeling, *Morgan Kaufmann Publishers, R. Academic Press: San Diego.*

GOLDMAN, R. 1995. Identities for the Univariate and Bivariate Bernstein Basis Functions. In Graphics Gems V, edited by Alan Paeth (ed). Academic Press: San Diego, pp. 149-162. Academic Press: San Diego.

GOULD, H. W. 2016.Combinatorial Identities, Vol.1.PDF-Vol.8.PDFhttp://www.math.wvu.edu/~gould/ [Son erişimtarihi: 10.04.2016].

GRIMALDI, P. 2012. Fibonacci and Catalan numbers an Introduction, U.S.A, 366 p.

JORDAN, C. 1950. Calculus of finites differences, U.S.A, 672 p.

KİM, T. 2007. On the q- extension of Euler andGenocchi numbers , *J.Math. Anal.Appl. Prob.*, 326(2): 1458-1465.

KIM, D. S. ,KİM, T. 2013. Daehee numbers and polynomials, *Appl. Math. Sci. (Ruse),* 7(120):5969-5976.

KOSHY, T. 2009. Catalan numbers with application, Oxford University, U.S.A, 439 p.

LORENTZ, G. G. 1986. Bernstein Polynomials. Chelsea Pub. Comp: New York, N. Y.

LUKACS, E. 1970. Charcteristic function, charles Griffin company limited(second edition) London.

LUKACS. E, 1972. A survey of the theory of charcteristic function, *Adv. Appl.Pro.*, 4, 1-38.

MAHMUDOV, N. I. 2011. Higher order limit *q*-Bernstein operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34(13):1618-1626.

MANSOUR, T. 2002. Combinatoral identities and inverse binomial coefficients. *Advances in AppliedMathematics*,28:196-202.

OUVRARD, Y. 2007.L’essentiel en théorie de probabilites, Cassini Paris, 1174 p.

OZDEN, H., SİMSEK, Y. 2014. Modification and unification of the Apostolütype numbersand polynomials and their applications, *App. Math. Comput.* 23 (5): 338-351.

QUAİNTANCE, J., GOULD, W. 2016. Combinatorial identities for stirling numbers, U.S.A, 277 p.

RİORDAN, C. 1958. An introduction to combinatorial analysis, U.S.A, 254 p.

GOLDMAN, R., SİMEONOV, R., SİMSEK, Y. 2014. Generating functions for the q-Bernstein bases, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*,28(3):1009-1025.

SİMSEK, Y. 2011. Construction a new generating function of Bernstein type polynomials. *Applied Mathematics and Computation*,218:1072-1076.

SİMSEK, Y. 2011. Interpolation function of generalized *q*-Bernstein type polynomials and their application. *Lecture Notes in Computer Science Springer-Verlag,Berlin* 6920:647-662.

SİMSEK, Y. 2013. Functional equations from generating functions: a novel approach to deriving identities for the Bernstein basis functions. *Fixed Point Theory and Applications*, 80, 1-13.

SİMSEK, Y. 2014. A new class of polynomials associated with Bernstein and beta polynomials. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*,37:676-685.

SİMSEK, Y. 2015. Analysis of the Bersntein basis functions: an approach to combinatorial sums involving binomial coefficients and Catalan numbers.

SİMSEK, Y., ACIKGOZ, M. 2010 A new generating function of (*q*-) Bernstein-type polynomials and their interpolation function. *Abstract and Applied Analysis*, 2010: 1-12.

SİMSEK, Y., BAYAD, A., LOKESHA, V. 2012. *q*-Bernstein polynomials related to *q*-Frobenius-Euler polynomials, l-functions, and *q*-Stirling numbers, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 35:877-884.

SRİVASTAVA, H. M. 1987. Some generalizations of a combinatorial identities of L. Vietories, *Discrete Mathematics*,65:99-102.

SRİVASTAVA, H. M., CHOI, J. 2012. Zeta and q- Zeta Functions and associated series and integrals, Elsevier science publishers, Amsterdam, London and New york, 499 p.

SRİVASTAVA, M. 2011. Some generalizaiton and basic (or q-) extension of the Bernoulli, Euler, and Genocchipolynomials, *Appl. Math. Inf. Sci.*, 5:390-444.

SRİVASTAVA, H. M., VİGNAT, C. 2012. Probabilistics proofs of some relationships betweenthe Bernoulli and Euler polynomials, *European J. Pur Appl. Math.*, 5(2):97-107.

SRİVASTAVA, H.M., KİM, T., SİMSEK, Y. 2005. q-bernoulli numbers and polynomials associated with multiple q-zeta functions and basic L-series, *Russ. J. Math. Phys*.,*12*(2): 241-268.

SUN, P. 2007. Moment representationof Bernoulli polynomial, Eulerpolynomials and Gegenbauer polynomials, *Statist. Probab. Lett*.,*77*(2):748-751.

WIKIPEDIA, *2016.* Combinatorics, the free encyclopedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorics [Son erişimtarihi: 20.05.2016].

ÖZGEÇMİŞ

Hamida Amrani Aziza 1985 yılında Kinshasa'da doğdu. İlk, orta, lise öğreminimi Kinshasa'da tamamladı. 2005 yılında girdiği Kinshasa Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında matematikçi olarak mezun oldu. Ekim 2014- Haziran 2016 yılları arasında, Akdeniz Ünıversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.