

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KARMAŞIK ARALIKLAR ARİTMETİĞİ ÜZERİNE

Edrees M. Nori Mahmood ALWAHAB BAKR

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMAŞIK ARALIKLAR ARİTMETİĞİ ÜZERİNE

Edrees M. Nori Mahmood ALWAHAB BAKR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 21/07/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

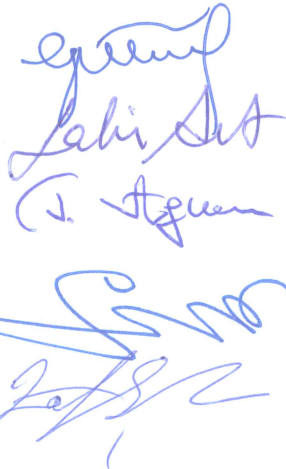
Yrd.Doç.Dr. Gültekin SOYLU

Prof.Dr. Salih AYTAR

Prof.Dr. Gabil ADİLOV

Prof.Dr. İlham ALİYEV

Yrd.Doç.Dr. Zafer ŞANLI



ÖZET

KARMAŞIK ARALIKLAR ARİTMETİĞİ ÜZERİNE

Edrees M. Nori Mahmood ALWAHAB BAKR

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Gültekin SOYLU

Temmuz 2017, 72 sayfa

Karmaşık aralık aritmetiği değişkenlerin değer aldığı bölgelere göre üç farklı türde ele alınmaktadır: dikdörtgensel, dairesel ve kutupsal. Aralık aritmetiği işleminin sonucu, işlemin tüm olası değerlerini uç olarak içermelidir. Daire ve kutupsal aritmetiğinde çarpma ve bölme optimum olarak yine bir daire veya kutupsal olarak hesaplanabilmekteyken toplama ve çıkarma için bu durum söz konusu değildir. Diğer taraftan dikdörtgen aritmetiğinde toplama, çıkarma ve çarpma optimum olarak bir dikdörtgen olarak hesaplanabilmekte, ancak bölme optimum değildir. Bu çalışma kapsamında karmaşık düzlemde dikdörtgen ve kutupsal değerli değişkenlerin üzerindeki temel aritmetik işlemlerin tümünü optimal olarak gerçekleştirmek için hızlı ve kesin çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Aralık aritmetik, Karmaşık kümeler, Global optimizasyon.

JÜRİ: Yrd. Doç. Dr. Gültekin SOYLU (Danışman)

Prof. Dr. Salih AYTAR

Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Yrd. Doç. Dr. Zafer ŞANLI

ABSTRACT

ON COMPLEX INTERVALS ARITHMETIC

Edrees M. Nori Mahmood ALWAHAB BAKR

PhD Thesis in Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Gültekin SOYLU

Temmuz 2017, 72 pages

Complex interval arithmetic is handled in three different types according to the regions where the variables take their values: rectangular, circular, and polar. The result of the interval operation should optimally contain all the possible values of the operation. For circular and polar arithmetic multiplication and division are optimal, but addition and subtraction are not. In rectangular arithmetic addition, subtraction and multiplication are optimal, whereas division is not. In this study, fast and accurate solution methods have been developed in order to perform the basic arithmetic operations of rectangles and polar optimally.

KEYWORDS: Interval arithmetic, Complex sets, Global optimization.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Gültekin SOYLU (Supervisor)

Prof. Dr. Salih AYTAR

Prof. Dr. Gabil ADILOV

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Aralık aritmetiği mühendislikte önemli uygulama alanlarına sahip bir teoridir. Bu aritmetiğin karmaşık düzlemde etkin bir şekilde uyarlanması yine mühendislik uygulamalarının karmaşık değişken içeren modellemelerinde kendisine bir yer edineceği ön görülebilir.

Bu çalışmada, karmaşık aralıklar aritmetiği için hızlı ve kesin çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Diğer bir yandan, bu yöntemler karmaşık değerli doğrusal olmayan model için de kullanılabilir.

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde yapılmıştır. Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Gültekin SOYLU'ya (Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi) en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca jüri üyelerinden Sayın Prof. Dr. İlham ALİYEV (Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi) ve Sayın Prof. Dr. Gabil ADİLOV'a (Akdeniz Üniversitesi Eğitim Fakültesi) katkılarından dolayı teşekkür ederim. Bununla birlikte bu uzun ve zorlu süreçte manevi destekleri ile yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürler ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI.....	3
2.1. Gerçel Aralık Aritmetik	3
2.1.1. Aralık örtüsü.....	3
2.1.2. İkili işlemler	4
2.2. Aralık Fonksiyonu	5
2.3. Dikdörtgen Karmaşık Aralıklar	7
2.3.1. Dikdörtgen aralıkların işlemleri	8
2.4. Kutupsal Karmaşık Aralıklar	12
2.4.1. Açık aralıklarına bağlı sektörlerin sınıflandırılması	12
2.4.2. Kutupsal aralıkların işlemleri	14
3. MATERYAL VE METOT	17
4. BULGULAR.....	19
4.1. İki Dikdörtgen Aralığın Bölümü İçin En Uygun Kapsama	19
4.1.1. $\min f'$ 'nin hızlı hesabı.....	21
4.1.2. $\max f'$ 'nin hızlı hesabı	31
4.1.3. $\min g'$ 'nin hızlı hesabı.....	34
4.1.4. $\max g'$ 'nin hızlı hesabı	36
4.2. İki Sektörün Toplamı Ve Farkı	39
4.2.1. $[\varphi]$ Açık intervalinin sınırlarını hesaplamak.....	40
4.2.2. $[\rho]$ Büyüklük intervalinin sınırlarını hesaplamak	54
5. TARTIŞMA	59
5.1. Dikdörtgen Aritmetiği.....	59
5.2. Kutupsal Aritmetiği	61
5.3. Uygulama Örnek.....	64
6. SONUÇ.....	67
7. KAYNAKLAR	68
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{C}	:	Karmaşık sayılar kümesi
$\square E$:	E 'yi içeren en küçük aralık
$\mathbb{I}(\mathbb{R})$:	Gerçel kapalı aralıklar kümesi
\mathbb{R}	:	Gerçel sayılar kümesi
$R(\mathbb{C})$:	Dikdörtgen karmaşık aralıklar kümesi
$S(\mathbb{C})$:	Kutupsal karmaşık aralıklar kümesi
$[x]$:	Kapalı aralık
$]x[$:	Açık aralık
$[X]$:	Aralık vektörü
$*$:	İkili işlem
\otimes	:	Genleşme işlemi
$\odot\{S\}$:	S 'yi içeren en küçük kutupsal karmaşık aralığı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. f ve $[f]$ fonksiyonların açıklamaları	5
Şekil 2.2. Dikdörtgen aralık değerli değişken.....	7
Şekil 2.3. $Z_1 \odot Z_2$ 'den ortaya çıkan kümeler	8
Şekil 2.4. $Z_1 \cdot Z_2$ ile tanımlanan $Z_1 \odot Z_2$ kümesini içeren en küçük dikdörtgendir	10
Şekil 2.5. $\frac{Z_1}{Z_2}$ ile tanımlanan dikdörtgen optimal değil.....	11
Şekil 2.6. $S(\mathbb{C})$ sınıfında sektörler	13
Şekil 2.7. $S^*(\mathbb{C})$ sınıfında sektörler	14
Şekil 2.8. $S_1 \odot S_2$ 'den ortaya çıkan kümeler	15
Şekil 3.1. GUI Arayüz iki karmaşık dikdörtgen $\frac{Z_1}{Z_2}$ için	18
Şekil 3.2. GUI Arayüz iki karmaşık kutupsal $S_1 + S_2$ için.....	18
Şekil 4.1. $]\rho_1[\cap]\rho_2[= \emptyset$ iken $0 \in \text{int}(S_1 \oplus S_2)$ durumuna örnekler	45
Şekil 4.2. $]\rho_1[\cap]\rho_2[\neq \emptyset$ iken $0 \in \text{int}(S_1 \oplus S_2)$ durumuna bir örnek	46
Şekil 4.3. $0 \in \partial(S_1 \oplus S_2)$ durumuna örnekler	47
Şekil 4.4. h_1 fonksiyonun grafiği.....	48
Şekil 4.5. $\odot\{S_1 \oplus S_2\} \in S^*(\mathbb{C})$ durumuna örnekler	52
Şekil 4.6. $\rho_1^* = -\rho_2^- a \in]\rho_1[$ durumu	57
Şekil 5.1. Yöntemimiz ile elde edilen $Z_1 \oslash Z_2$ kümesini içeren en küçük dikdörtgen	61
Şekil 5.2. Yöntemimiz ile elde edilen sonuçlar	62
Şekil 5.3. Yöntemimiz ile elde edilen sonuçlar	63
Şekil 5.4. Dikdörtgen ve kutupsal çözümler	66

1. GİRİŞ

Aralık aritmetiği (aralık matematik, aralık analiz ve aralık hesaplaması olarak da bilinir) kompakt aralık kümeleri üzerinde tanımlanan bir aritmetiktir. Aralık aritmetiği formu ilk kez 1924 ve 1931'de (Burkill 1924; Young 1931), daha sonra (Dwyer 1951; Sunaga 1958) ele alındı. Aralık aritmetiğinin modern gelişimi Moore'un tezi (Moore 1962) ve *aralık Analiz* kitabıyla (Moore 1966) başladı. Bunu, aralık analizi ile ilgili bir dizi konferans ve eşlik eden tartışmalar takip etti (Nickel 1975, 1980, 1985). Konuyla ilgili bir kaç önemli kitap olarak (Alefeld ve Herzberger 1983; Ratschek ve Rokne 1984; Kearfott ve Kreinovich 2013) ve bibliyografi olarak (Garloff ve Schwierz 1980, Garloff 1985, 1987) örnek gösterilebilir. Aralık aritmetiği ve ilgili teknikler artık *Reliable Computing* isimli özel bir dergiye ve zengin bilgi ve bağlantılar içeren merkezi bir web sitesine (Kreinovich vd 2002) sahiptir. Son zamanlarda, aralık aritmetiği ve aralık analizi konusunda bir dizi uygulama alanında gittikçe artan bir ilgi vardır, örneğin, ışın izlemesi için güçlü kök bulucular (Barth vd 1994; Mitchell 1990), katı modelleme için alanı numaralandırma (Duff 1992; Mudur ve Koparkar 1984; Snyder 1992; Suffern ve Fackerell 1991; Taubin 1994), yüzey kesişim (Gleicher ve Kass 1992), global optimizasyon (Hansen 1979, 1980; Hansen ve Walster 2003; Ichida ve Fujii 1979; Kearfott 1992; Moore vd 1992; Ratschek ve Rokne 1988; Ratschek ve Voller 1991; Van Iwaarden 1996), inşaat mühendisliğinde (Chen ve Ward 1992; Muhanna ve Mullen 1999; Mullen ve Muhanna 1999; Rao ve Berke 1997), makine mühendisliğinde (Dimargonas 1995; Henderson vd 1994; Kulpa vd 1998), elektrik mühendisliğinde (Kolev 1993; Leenaerts 1990; Oppenheimer ve Michel 1988; Oppenheimer 1988; Oppenheimer ve Michel 1988; Ratschek ve Rokne 1993), kontrol sistemleri ve robotikte (Fangfang vd 1997; Malan vd 1997; Piazzzi ve Marro 1996; Piazzzi ve Visioli 1997; 1998).

Kompakt aralıkların bağımsız nesnelere rolü sayısal analiz teorisinde de son otuz yıl boyunca sürekli artmıştır. Çeşitli matematiksel problemlerin çözümlerini doğrularken ya da çözümleri kapsayan kümeler hesaplarken ya da bu tür problemlerin belirli bir alanda çözümünün bulunamayacağını kanıtlarken aralık aritmetiğinden yararlanılmaktadır. Ayrıca, bu aritmetiğin, kontrollü yuvarlamalar, değişken hassasiyet, operatör aşırı yüklenmesi veya epsilon enflasyon konularında da etkin olarak uygulandığı görülmektedir (Alefeld ve Mayer 2000).

Aralık aritmetik işlemi genelde iki uç nokta üretir. Bu iki değer sonuçtaki aralığın alt ve üst uç noktalarına karşılık gelir, böylece doğru sonuç kesinlikle bu aralıkta bulunur ve sonucun doğruluğu sonuç aralığının genişliği ile gösterilir. Örneğin $x \in [3,4]$ ve $y \in [-2,1]$ ise,

$$x + y \in [1,5] = [3,4] + [-2,1]$$

$$x \cdot y \in [-8,4] = [3,4] \cdot [-2,1]$$

sağlanır

Aralık aritmetiği karmaşık sayılarla hesaplamadaki belirsizlik bölgelerini belirlemek için karmaşık aralıklarla genişletilebilir (Boche 1966; Alefeld ve Herzberger

1983; Petkovic ve Petkovi'c 1988). Karmaşık aralık aritmetiğinde üç farklı aralık türü vardır: dikdörtgen (Boche 1966; Alefeld ve Herzberger 1983), daire (Henrici 1971) ve kutupsal (Klatte ve Ullrich 1980). Daire ve kutupsal aritmetiğinde çarpma ve bölme işlemlerinin sonucu yine bir daire ve kutupsal olarak optimum olarak hesaplanabilmekteyken toplama ve çıkarma için durum böyle değildir. Dikdörtgen aritmetiğinde ise bu kez toplama, çıkarma ve çarpma optimum, ama bölme optimum değildir.

Bu çalışma kapsamında dikdörtgenler ve kutupsal üzerindeki temel aritmetik işlemleri gerçekleştirmek için hızlı ve kesin çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde karmaşık aralıklar (dikdörtgen ve kutupsal) aritmetiği ile ilgili gerekli olan bilgiler verilmiş ve bu konuyla ilgili literatürde yer alan çalışmalar incelenmiştir. Üçüncü bölümde, tezin materyal ve metoduyla ilgili bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölüm iki alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, karmaşık dikdörtgen aralığın bölme işlemi bakımından, bu işlemi basit ve etkili bir algoritma aracılığıyla uygulamak için hızlı ve kesin bir yöntem geliştirilmiştir. İkinci kısımda, karmaşık kutupsal aritmetiğin toplama ve çıkarma işlemlerini uygulamak için kolay ve etkili algoritmalar geliştirilmiştir. Beşinci bölümde, önerilen algoritmaların uygulanabilirliğini göstermek için, birtakım örnekler bu önerilen algoritma kullanılarak çözülmüş ve literatürdeki diğer algoritmalar kullanılarak bulunan çözümlerle kıyaslanarak ve tartışılarak belirtilmiştir. Son bölümde ise araştırma sonuçlarının genel bir değerlendirmesi sunulmuştur.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Gerçel Aralık Aritmetik

Bu bölümde karmaşık aralık aritmetiğini inşa etmek için gerekli olan gerçel aralık aritmetiğine kısa bir giriş yapacağız. Daha ayrıntılı bilgi şu eserlerde bulunabilir: (Moore 1966; Moore vd 2009; Kulisch 2012; Neumaier 1990; Jaulin vd 2001; Hansen ve Walster 2003; Bargiela ve Pedrycz 2012).

\mathbb{R} gerçel sayılar kümesi olsun. Bir $[x] = [x^-, x^+]$ aralığı, \mathbb{R} 'nin kapalı ve bağlantılı bir alt kümesidir. Biçimsel olarak, x^- ve x^+ sırasıyla $[x]$ aralığının alt ve üst sınırları (bitim noktaları) olmak üzere:

$$[x] = [x^-, x^+] := \{x \in \mathbb{R} : x^- \leq x \leq x^+\}$$

dir.

Açık aralık $]x[, x'$ 'in içi,

$$]x[=]x^-, x^+[:= \{x \in \mathbb{R} : x^- < x < x^+\}$$

biçiminde gösterilir.

Tüm gerçel aralıkların kümesi de

$$\mathbb{I}(\mathbb{R}) = \{[x] = [x^-, x^+] : x^-, x^+ \in \mathbb{R}, x^- \leq x^+\}$$

ile gösterilir.

Bir aralık vektör $[X] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n]) \in \mathbb{I}(\mathbb{R}^n)$, n aralık bileşenine $[x_i] = [x_i^-, x_i^+] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$ sahiptir.

2.1.1. Aralık örtüsü

E , \mathbb{R} 'nin boş olmayan sınırlı bir alt kümesi olsun E 'nin aralık örtüsü, $\square E$ ile gösterilen, E 'yi içeren en küçük kapalı aralıktır, başka bir deyişle;

$$E = [\inf(E), \sup(E)].$$

Örnek olarak, $\square\{a, b\}$, a ve b bitim noktalarıyla bir aralıktır, yani (Neumaier 1990)

$$a \leq b \text{ ise } \square(\{a, b\}) = [a, b], a > b \text{ ise } \square(\{a, b\}) = [b, a].$$

Herhangi $[x] = [x^-, x^+] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ için, $\square[x] = [x^-, x^+]$

2.1.2. İkili işlemler

$[x] = [x^-, x^+] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ ve $[y] = [y^-, y^+] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ iki aralık olsun. $[x]$ ve $[y]$ arasında bir ikili işlem $*$ $\in \{+, -, \cdot, / \}$ şöyle tanımlanır:

$$[x] * [y] := \square \{x * y : x \in [x], y \in [y]\}.$$

$[x]$ ve $[y]$ 'ye uygulanan $*$ işlemi kapalı bir aralık oluşturunca (bölüm durumunda $0 \notin [y]$ için) tüm olası sonuçların kümesini görmek kolaydır, yani her $*$ $\in \{+, -, \cdot, / \}$ için,

$$[x] * [y] := \square \{x * y : x \in [x], y \in [y]\} = \{x * y : x \in [x], y \in [y]\}.$$

Bundan dolayı, $[x]$ ve $[y]$ 'nin bitim noktaları açısından, her aritmetik operatörü şu kurallara göre değerlendirebiliriz (Moore vd 2009; Kulisch 2012; Neumaier 1990; Jaulin vd 2001; Hansen ve Walster 2003; Bargiela ve Pedrycz 2012):

$$[x] + [y] = [x^- + y^-, x^+ + y^+],$$

$$[x] - [y] = [x^- - y^+, x^+ - y^-],$$

$$[x] \cdot [y] = [\min(x^- y^-, x^+ y^+, x^- y^+, x^+ y^-), \max(x^- y^-, x^+ y^+, x^- y^+, x^+ y^-)],$$

$$\frac{[x]}{[y]} = [x^-, x^+] \cdot \left[\frac{1}{y^+}, \frac{1}{y^-} \right]$$

$$= \left[\min\left(\frac{x^-}{y^+}, \frac{x^-}{y^-}, \frac{x^+}{y^+}, \frac{x^+}{y^-}\right), \max\left(\frac{x^-}{y^+}, \frac{x^-}{y^-}, \frac{x^+}{y^+}, \frac{x^+}{y^-}\right) \right], 0 \notin [y].$$

2.2. Aralık Fonksiyonu

Aralık fonksiyon konusundaki tanım ve kavramlar hakkında daha detaylı bilgi şu eserlerde bulunabilir (Moore 1966; Jaulin vd 2001; Hansen ve Walster 2003; Neumaier 2001).

Tanım 2.1. $A \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{R}^n)$ ve $B \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{R}^m)$ iki aralık vektör kümesi olsun. A 'dan B 'ye tanımlı bir

$$[f]: A \rightarrow B$$

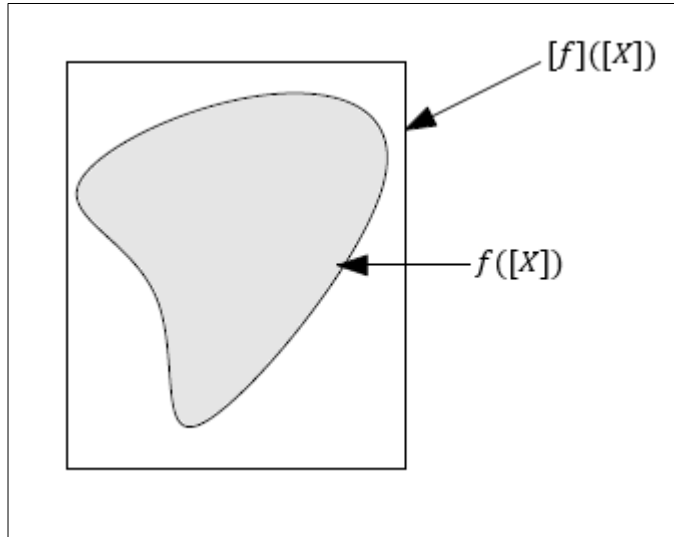
fonksiyonuna aralık fonksiyonu denir.

Tanım 2.2. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ve $[f]: \mathbb{I}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{R}^m)$ iki fonksiyon olsun. $\forall [X] \in \mathbb{I}(\mathbb{R}^n)$ için

$$f([X]) = \{f(X): X \in [X]\} \subseteq [f]([X])$$

oluyorsa, $[f]$ fonksiyonuna f nin kapsama fonksiyonu denir.

Dikkat edilirse $[f]([X])$ her zaman bir aralık vektördür (ya da hiper dikiörtgen), ama $\{f(X): X \in [X]\}$ kümesi \mathbb{R}^m 'de bir dikiörtgen olmak zorunda değil (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. f ve $[f]$ fonksiyonların açıklamaları

Kapsama fonksiyonu için belirgin bir gereklilik aşağıdaki gibidir:

$$[f]([X]) = \left[\inf_{x \in [X]} f(x), \sup_{x \in [X]} f(x) \right].$$

Bu koşula sahip olan bir fonksiyona minimum ya da optimal denir.

Örnek 2.1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x_1 \in [-1,2]$ ve $x_2 \in [3,5]$ olmak üzere

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \sin(x_1)\cos(x_1)$$

tanımlansın. Bu durumda

$$[f_1]([x_1], [x_2]) = \frac{[x_2]}{[x_1] + [x_2]} + \sin([x_1])\cos([x_1])$$

$$\begin{aligned} [f_1]([-1,2], [3,5]) &= \frac{[3,5]}{[-1,2] + [3,5]} + \sin([-1,2]) \cos([-1,2]) \\ &= \frac{[3,5]}{[2,7]} + [-0.8415,1] \cdot [-0.4161,1] \\ &= [-0.42,3.5] \end{aligned}$$

bulunur.

f fonksiyonu başka şekilde de yazılabilir

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\frac{x_1}{x_2} + 1} + \frac{\sin(2x_1)}{2}.$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} f_2([x_1], [x_2]) &= \frac{1}{\frac{[x_1]}{[x_2]} + 1} + \frac{\sin(2[x_1])}{2} \\ &= \frac{1}{\frac{[-1,2]}{[3,5]} + 1} + \frac{\sin(2[-1,2])}{2} = [0.1,2] \end{aligned}$$

bulunur.

$[f_1]$ ve $[f_2]$ her ikisinde f 'nin kapsama fonksiyonlarıdır. Ancak, $[f_2]$ optimaldir çünkü herhangi $X = (x_1, x_2) \in [X] = ([x_1], [x_2])$ için

$$[f_2]([X]) = \left[\inf_{x \in [X]} f(x), \sup_{x \in [X]} f(x) \right].$$

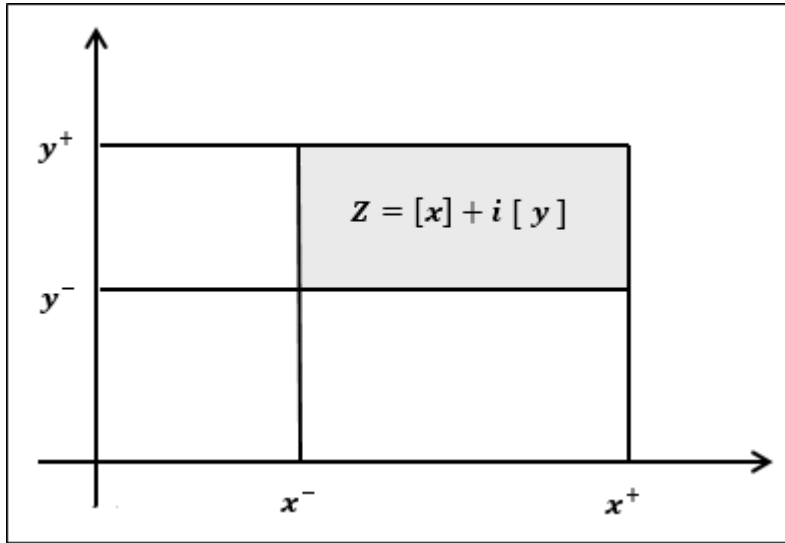
2.3. Dikdörtgen Karmaşık Aralıklar

Dikdörtgen karmaşık aralıklar konusunda detaylı bilgi için bkz. (Boche 1966; Alefeld ve Herzberger 1983; Petkovic ve Petkovic' 1988; Kulisch 2012)

Tanım 2.3. $[x] = [x^-, x^+] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ ve $[y] = [y^-, y^+] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ iki kapalı gerçel aralık olsun. Bir dikdörtgen karmaşık aralık Z , bir gerçel aralık çifti $[x]$ ve $[y]$ ile şöyle tanımlanır:

$$Z = [x] + i[y], Z = \{z = x + iy : x \in [x], y \in [y]\}.$$

Geometrik olarak, dikdörtgen karmaşık aralık, karmaşık düzlemde, kenarları koordinat eksenlerine paralel olarak bir dikdörtgendir. Örnek için Şekil 2.2'ye bakınız.



Şekil 2.2. Dikdörtgen aralık değerli değişken

Tüm dikdörtgen karmaşık aralıkların kümesi

$$R(\mathbb{C}) = \{Z = [x] + i[y] : [x], [y] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})\},$$

ile gösterilir.

2.3.1. Dikdörtgen aralıkların işlemleri

Tanım 2.4. $Z_1, Z_2 \in R(\mathbb{C})$ ve $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ temel bir işlem olsun. Bu durumda,

$$Z_1 \odot Z_2 := \{z_1 * z_2 : z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\}$$

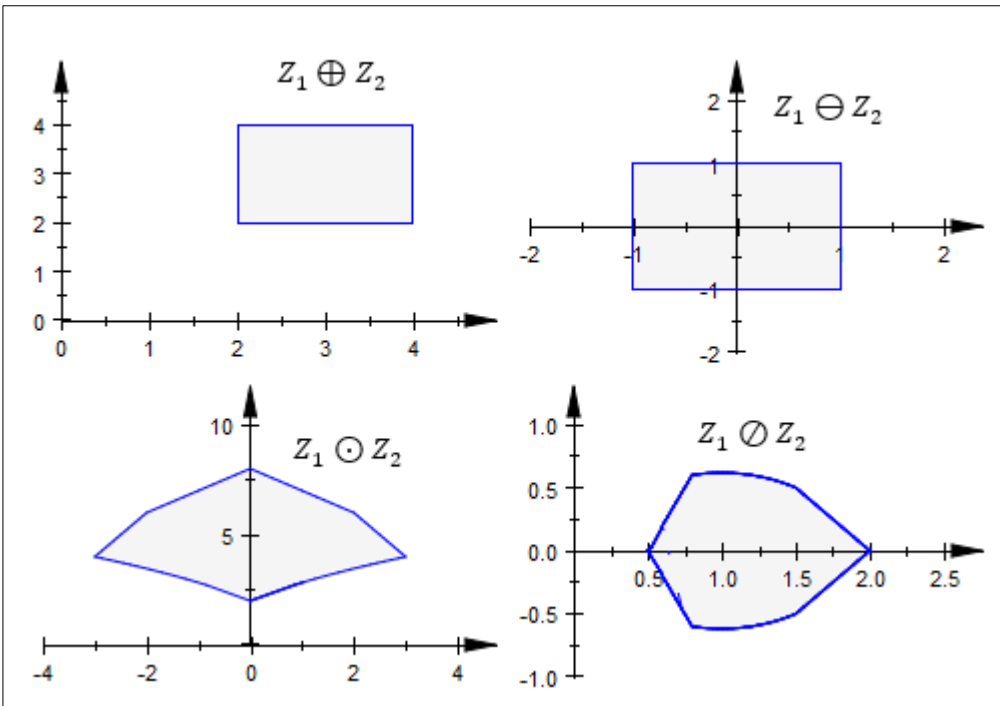
ve $\square\{Z_1 \odot Z_2\}$, $R(\mathbb{C})$ içinde $Z_1 \odot Z_2$ 'i kapsayan en küçük dikdörtgen olmak üzere; Z_1 ve Z_2 için

$$Z_1 * Z_2 := \square\{Z_1 \odot Z_2\}$$

ile bir $*$ ikili işlemi tanımlarız.

$*$ $\in \{\cdot, /\}$ ile $Z_1 \odot Z_2$ kümesi bir karmaşık aralık olmak zorunda değildir. Yani $Z_1 \odot Z_2$, kenarları eksenlere paralel olan bir dikdörtgen olmayabilir. Aşağıdaki örneği inceleyelim.

$Z_1 = [1,2] + i[1,2]$ ve $Z_2 = [1,2] + i[1,2]$ olsun. Bu durumda $Z_1 \odot Z_2$ ve $Z_1 \oslash Z_2$ 'den ortaya çıkan kümeler (dikdörtgen olmayan) karmaşık biçimlere sahipken, $Z_1 \oplus Z_2$ ve $Z_1 \ominus Z_2$ karmaşık düzlemde kenarları eksenlere paralel olan dikdörtgenler üretir. Örnek için Şekil 2.3'e bakılabilir.



Şekil 2.3. $Z_1 \odot Z_2$ 'den ortaya çıkan kümeler

Eğer $Z_1 = [x_1] + i[y_1]$ ve $Z_2 = [x_2] + i[y_2]$ verilen iki dikdörtgen aralık ise, temel aritmetik işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır (Boche 1966; Alefeld ve Herzberger 1983; Petkovic ve Petkovic' 1988):

Toplama ve Çıkarma

Z_1 ve Z_2 'nin toplamı (farkı) şu şekilde verilir:

$$Z_1 \pm Z_2 := [x_1] \pm [x_2] \pm i([y_1] \pm [y_2]).$$

Aşağıdakinin geçerli olduğunu kanıtlamak kolaydır: $* \in \{+, -\}$ için

$$\begin{aligned} Z_1 * Z_2 &:= \square\{Z_1 \odot Z_2\} \\ &= Z_1 \odot Z_2. \end{aligned}$$

Çarpma

Z_1 ve Z_2 'nin çarpımı şu formülle verilir:

$$x^- = \min(x_1^- x_2^-, x_1^- x_2^+, x_1^+ x_2^-, x_1^+ x_2^+) + \min(-y_1^+ y_2^-, -y_1^+ y_2^+, y_1^- y_2^-, -y_1^- y_2^+),$$

$$x^+ = \max(x_1^- x_2^-, x_1^- x_2^+, x_1^+ x_2^-, x_1^+ x_2^+) + \max(-y_1^+ y_2^-, -y_1^+ y_2^+, y_1^- y_2^-, -y_1^- y_2^+),$$

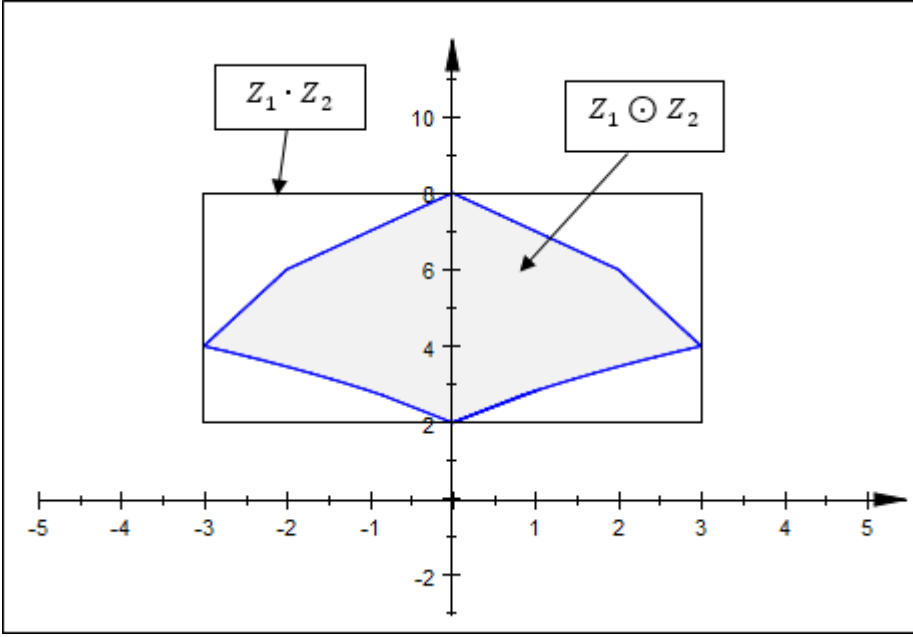
$$y^- = \min(x_1^- y_2^-, x_1^- y_2^+, x_1^+ y_2^-, x_1^+ y_2^+) + \min(x_2^- y_1^-, x_2^- y_1^+, x_2^+ y_1^-, x_2^+ y_1^+),$$

$$y^+ = \max(x_1^- y_2^-, x_1^- y_2^+, x_1^+ y_2^-, x_1^+ y_2^+) + \max(x_2^- y_1^-, x_2^- y_1^+, x_2^+ y_1^-, x_2^+ y_1^+),$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &:= [x_1][x_2] - [y_1][y_2] + i([x_1][y_2] + [x_2][y_1]) \\ &= [x^-, x^+] + i[y^-, y^+]. \end{aligned}$$

Yukarıdaki gibi tanımlanan $Z_1 \cdot Z_2$ çarpımı, karmaşık düzlemde $Z_1 \cdot Z_2 := \square\{Z_1 \odot Z_2\} \supseteq Z_1 \odot Z_2$ biçimindeki dikdörtgeni verir. $Z_1 = [1,2] + i[1,2]$ ve $Z_2 = [1,2] + i[1,2]$ 'nin verildiği önceki örneği düşünelim. Bu durumda $Z_1 \cdot Z_2 = [-3,3] + i[2,8]$, $Z_1 \odot Z_2$ kümesinin içerdiği en küçük dikdörtgen olur (Şekil 2.4).



Şekil 2.4. $Z_1 \cdot Z_2$ ile tanımlanan $Z_1 \odot Z_2$ kümesini içeren en küçük dikdörtgendir

Bölme

Bölme şu şekilde tanımlanır:

$$\frac{Z_1}{Z_2} := \frac{[x_1][x_2] + [y_1][y_2]}{[x_2]^2 + [y_2]^2} + i \frac{[y_1][x_2] - [x_1][y_2]}{[x_2]^2 + [y_2]^2}, 0 \notin [x_2]^2 + [y_2]^2.$$

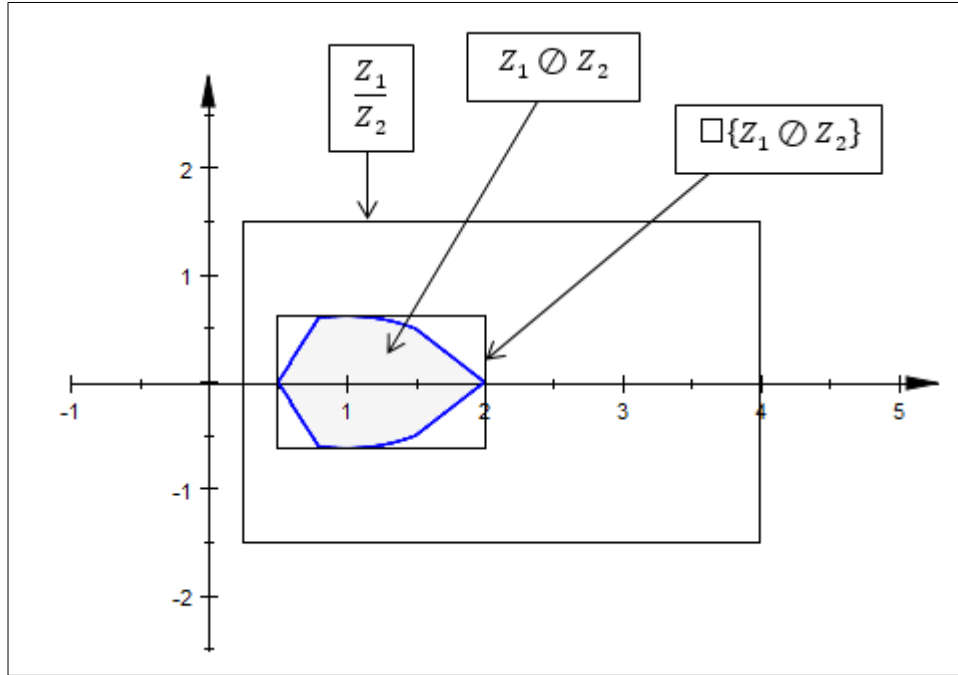
Yukarıda tanımlanan bölme, karmaşık düzlemde genellikle çok kaba bir dikdörtgen üretecektir. Genel olarak, $\frac{Z_1}{Z_2} \supset \square\{Z_1 \oslash Z_2\}$ 'dir. Yine önceki örneği düşünelim. O zaman

$$\frac{Z_1}{Z_2} = [0.25, 4] + i[-1.5, 1.5].$$

Yine de en uygun dikdörtgen (Lohner ve Gudenberg 1985)

$$\square\{Z_1 \oslash Z_2\} = [0.5, 2] + i[-0.618028, 0.618028].$$

Örnek için Şekil.2.5'e bakılabilir.



Şekil 2.5. $\frac{Z_1}{Z_2}$ ile tanımlanan dikdörtgen optimal değil

Bundan dolayı, $Z_1 \ominus Z_2$ bölümünün sonucuna (kapsama anlamında) en küçük dikdörtgenle yaklaşılmalıdır.

Dikdörtgen aralığın bölme işlemini geliştirmek için uygulanan yöntemler Rokne ve Lancaster (1971), Lohner ve Gudenberg (1985) örneklerinde gösterilmiştir.

Rokne ve Lancaster tarafından verilen yöntem, aşağıdaki yaklaşımı temel alır:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 \cdot \frac{1}{Z_2},$$

burada $\frac{1}{Z_2} = \inf\{X: \{(\frac{1}{d}): d \in Z_2\} \subseteq X\}$. Yine de, bu yaklaşımla hesaplanmış dikdörtgen genellikle en uygunu değildir (Lohner ve Gudenberg 1985).

Lohner ve Gudenberg tarafından uygulanan yöntem, bölmenin gerçel ve sanal kısımlarını minimum ve maksimumunu hesaplayan bir algoritmayı temel alır. Ancak genel olarak bu algoritma, en uygun dikdörtgeni elde etmek için önemli ölçüde çok hesaplama gerektirir.

2.4. Kutupsal Karmaşık Aralıklar

Bu bölümde kutupsal (sektör) karmaşık aralıklar ele alınacaktır. Kutupsal üzerindeki aritmetik işlemleri ilk olarak Klatte ve Ullrich (Klatte ve Ullrich 1980) tanıtmıştır. Temel işlemler çarpma ve bölme gerçel aralık aritmetiği kullanılarak tanımlanır. Toplama ve çıkarma işlemleri kutupsal aritmetiğinde kapalı olmadığından dolayı, Klatte ve Ullrich kutupsal aritmetiğini karmaşık aralık uzayındaki dikdörtgen ve daire aritmetiklere alternatif olarak ileri sürmüşlerdir. Klatte ve Ullrich altı ayrı alternatif tanımlamıştır; bunların tümü sektörlerden dikdörtgenlere ya da çemberlere olan dönüşümler üzerine temellendirilmiştir, işlemler seçilen bölge üzerinde çalışır ve buradan özgün gösterimine döner. Açıktır ki, dikdörtgen ve sektöre biçimler arasındaki bu gidiş gelişler görüntü kümesinin gitgide genişlemesine ve optimum olmaktan uzak kötümser bir sonuca yol açmaktadır (Flores 1999; Candau vd 2006). Flores (Flores 1999) sektörler üzerindeki temel aritmetik işlemleri gerçekleştirmek için algoritmalar önermiş. Bu algoritmalar matematiksel olarak kanıtlanmış ve deneysel olarak doğrulanmış olsa bile aşırı düzeyde hesaplama gerektirmektedirler. Bundan dolayı da her durum için bir algoritma kullanmak, kullanıcıya zorluk çıkaracaktır. En sonunda Candau vd (2006), iki sektörün toplamını sınırlandıran en küçük sektörü hesaplamak için analitik algoritmalar türettiler. Önerilen algoritmanın çoğu durumda doğru çalışmadığını bulduk ve bu bulgumuzu bazı karşıt örneklerle sunduk. Bundan dolayı, yukarıdaki sorunu çözmek için genel bir algoritmanın çalışılmasına gereksinim vardır. Bu işlemlerle birlikte tüm durumlarda en uygun kapsama özelliğini garantilemek için kutupsal üzerindeki temel aritmetik işlemleri hesaplayan algoritmalara giriş yapacağız.

Tanım 2.5. (Klatte ve Ullrich 1980, Candau vd 2006)

$[\rho] = [\rho^-, \rho^+] \in \mathbb{I}(\mathbb{R}^+)$ (yani, $[\rho]$ negatif olmayan gerçel aralık) ve $[\varphi] = [\varphi^-, \varphi^+] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ olsun.

$$S = \{s \in \mathbb{C} : s = \rho e^{i\varphi}, \rho \in [\rho], \varphi \in [\varphi]\}$$

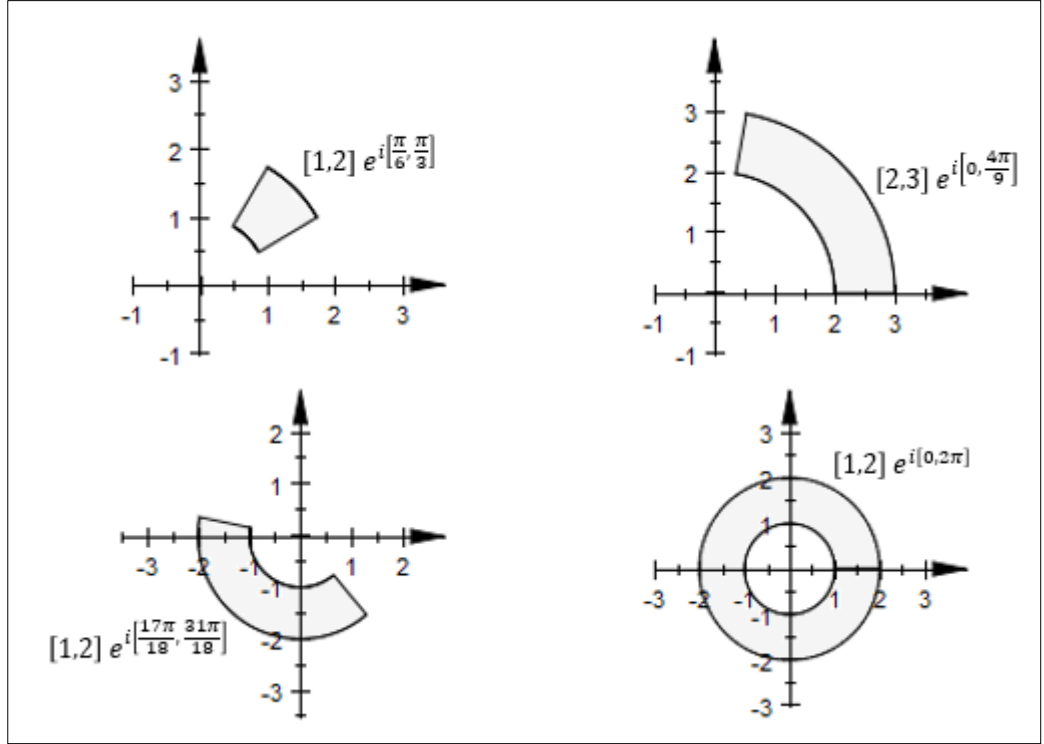
ile tanımlanan kümeye kutupsal karmaşık aralık (ya da sektör) denir, burada büyüklük aralığı $[\rho]$ ve açı aralığı $[\varphi]$, $[\rho]e^{i[\varphi]}$ ile tanımlanır.

Genelliği yitirmeden basitleştirmek için, çalışmamızı $[\varphi] = [\varphi^-, \varphi^+] \in \mathbb{I}(\mathbb{R}^+)$ durumuna kısıtlayacağız, çünkü diğer tüm durumlar bu duruma indirgenebilirdir.

2.4.1. Açı aralıklarına bağlı sektörlerin sınıflandırılması

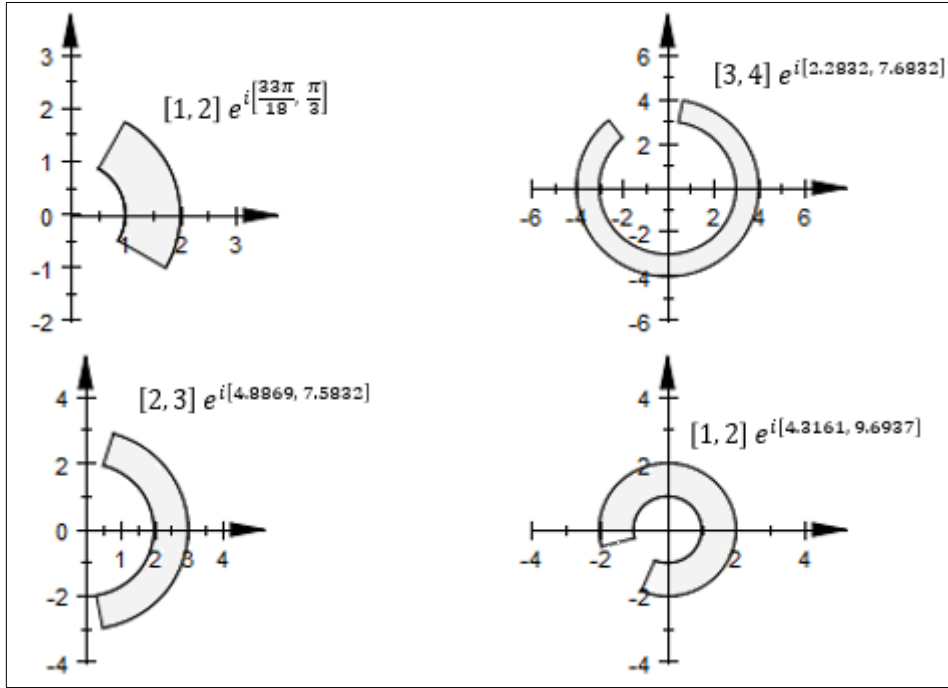
Bu sınıflandırma $[\varphi]$ 'nin kendi açı aralığına bağlı karmaşık aralıklar için iki türü ayırt etmekte kullanışlı olacaktır. $\varphi^+ \leq 2\pi$ ya da $\varphi^+ > 2\pi$ durumuna göre ayırmak yeterli olacaktır. Böylece göz önüne alınacak iki durum ortaya çıkar.

- $S(\mathbb{C})$ öyle ki, açı aralığı $[\varphi]$ ise $\varphi^+ \leq 2\pi$ biçimindedir. Böylece, $S(\mathbb{C})$ içindeki her $[\rho]e^{i[\varphi]}$ için, $\varphi^+ - \varphi^- \leq 2\pi, 0 \leq \varphi^- < 2\pi$ ve $0 < \varphi^+ \leq 2\pi$ vardır (Şekil 2.6).



Şekil 2.6. $S(\mathbb{C})$ sınıfında sektörler

- $S^*(\mathbb{C})$ öyle ki, açı aralığı $[\varphi]$ ise $\varphi^+ > 2\pi$ biçimindedir. Böylece, $S^*(\mathbb{C})$ içindeki her $[\rho]e^{i[\varphi]}$ için, $\varphi^+ - \varphi^- \leq 2\pi, 0 \leq \varphi^- < 2\pi$ ve $2\pi < \varphi^+ < 4\pi$ vardır (Şekil 2.7).



Şekil 2.7. $S^*(\mathbb{C})$ sınıfında sektörler

2.4.2. Kutupsal aralıkların işlemleri

Tanım 2.6. $S_1 = [\rho_1]e^{i[\theta_1]}$ ile $S_2 = [\rho_2]e^{i[\theta_2]}$ iki sektör ve $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ olsun. Bu durumda S_1 ve S_2 için karşılık gelen işlemler $S_1 * S_2 := \mathbb{S}\{S_1 \circledast S_2\}$ ile tanımlanır, burada

$$\mathbb{S}\{S_1 \circledast S_2\}, S_1 \circledast S_2 := \{s_1 * s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$$

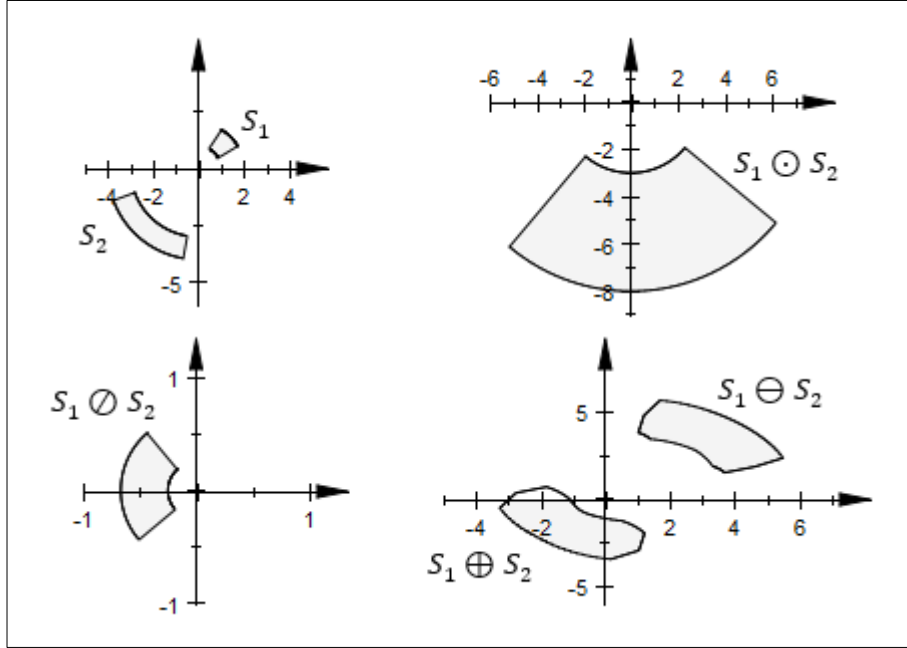
biçiminde tanımlanan kümeyi kapsayan en küçük sektördür.

Biri $S_1 = [\rho_1]e^{i[\theta_1]} = [\rho_1^-, \rho_1^+]e^{i[\theta_1^-, \theta_1^+]}$, diğeri $S_2 = [\rho_2]e^{i[\theta_2]} = [\rho_2^-, \rho_2^+]e^{i[\theta_2^-, \theta_2^+]}$ olan iki sektör verilsin. Eğer $S_1 \circledast S_2$ bir sektörsen, bu durumda

$\mathbb{S}\{S_1 \circledast S_2\} = S_1 \circledast S_2$ olduğu açıktır. $S_1 \circledast S_2$ için bazı önemli durumlar şöyle özetlenebilir:

- $S_1 \odot S_2$ çarpımından ya da $S_1 \oslash S_2$ bölümünden elde edilen sonuçlar da sektördür. Yani, $\mathbb{S}\{S_1 \odot S_2\} = S_1 \odot S_2$ ve $\mathbb{S}\{S_1 \oslash S_2\} = S_1 \oslash S_2$.
- $S_1 \oplus S_2$ toplamı ya da $S_1 \ominus S_2$ farkı sektör olmayabilir.

$S_1 = [1,2]e^{i[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]}$, $S_2 = [3,4]e^{i[\frac{10\pi}{9},\frac{13\pi}{9}]}$ örneğini düşünelim. Burada $S_1 \oplus S_2$ ya da $S_1 \ominus S_2$ işleminden beliren küme sektör değilken, $S_1 \odot S_2$ ya da $S_1 \oslash S_2$ işleminden beliren küme bir sektördür. Bu ise Şekil 2.8'den görülebilir.



Şekil 2.8. $S_1 \odot S_2$ 'den ortaya çıkan kümeler

$\mathbb{I}(\mathbb{R})$ 'deki aritmetik işlemler ve üstel fonksiyonun sürekliliği için var olan kurallar ile birlikte çarpma ve bölme işlemleri şu şekilde tanımlanır:

Çarpma

S_1 ve S_2 'nin çarpımı şöyle verilir:

$$\begin{aligned}
 S_1 \cdot S_2 &:= \odot\{S_1 \odot S_2\} \\
 &= \odot\{s_1 \cdot s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\} \\
 &= \odot\{\rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} : \rho_1 \in [\rho_1^-], \rho_2 \in [\rho_2^-], \theta_1 \in [\theta_1^-], \theta_2 \in [\theta_2^-]\} \\
 &= [\rho_1^- \rho_2^-, \rho_1^+ \rho_2^+] e^{i[\theta_1^- + \theta_2^-, \theta_1^+ + \theta_2^+]}.
 \end{aligned}$$

Unutulmamalıdır ki, bir sektörün tanımından, $(\theta_1^+ + \theta_2^+) - (\theta_1^- + \theta_2^-) \geq 2\pi$ iken $[\theta_1^- + \theta_2^-, \theta_1^+ + \theta_2^+] = [0, 2\pi]$ olarak alınmalıdır.

Bölme

S_1 ve S_2 'nin bölümü şöyle verilir:

$$S_1/S_2 := \mathbb{S}\{S_1 \oslash S_2\}$$

$$= \mathbb{S}\left\{\frac{s_1}{s_2} : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\right\}$$

$$= \mathbb{S}\left\{\frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} : \rho_1 \in [\rho_1], \rho_2 \in [\rho_2], \theta_1 \in [\theta_1], \theta_2 \in [\theta_2]\right\}, 0 \notin [\rho_2]$$

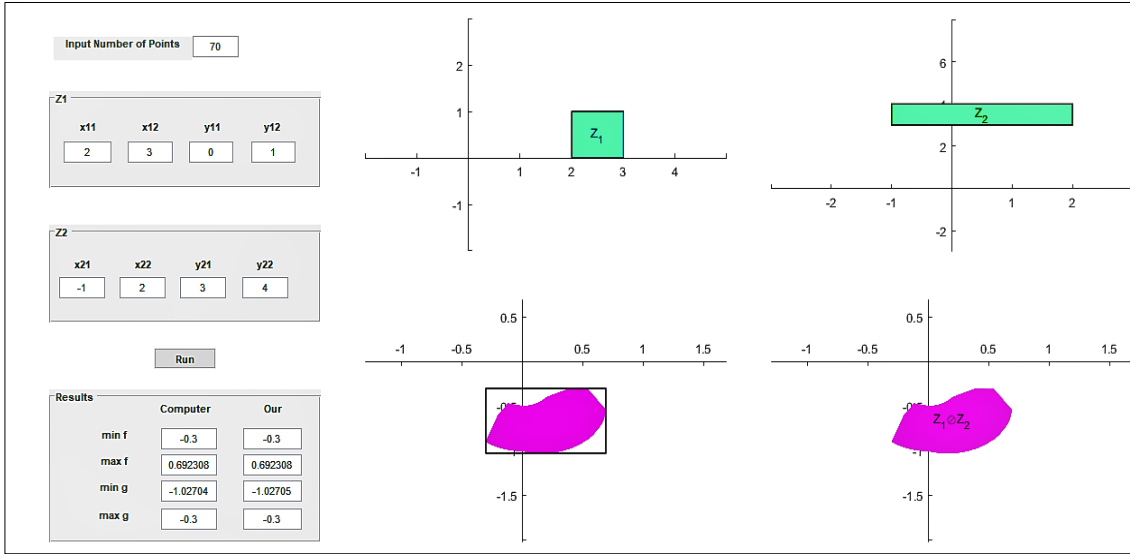
$$= \begin{cases} \left[\frac{\rho_1^-}{\rho_2^+}, \frac{\rho_1^+}{\rho_2^-}\right] e^{i[\theta_1^- - \theta_2^+ + 2n\pi, \theta_1^+ - \theta_2^- + 2n\pi]}, & \theta_1^- - \theta_2^+ < 0 \text{ ise} \\ \left[\frac{\rho_1^-}{\rho_2^+}, \frac{\rho_1^+}{\rho_2^-}\right] e^{i[\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-]}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Burada n en küçük pozitif tam sayıdır öyle ki $\theta_1^- - \theta_2^+ + 2n\pi \geq 0$. Ayrıca $(\theta_1^+ - \theta_2^-) - (\theta_1^- - \theta_2^+) \geq 2\pi$ iken $[\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-] = [0, 2\pi]$ alınır.

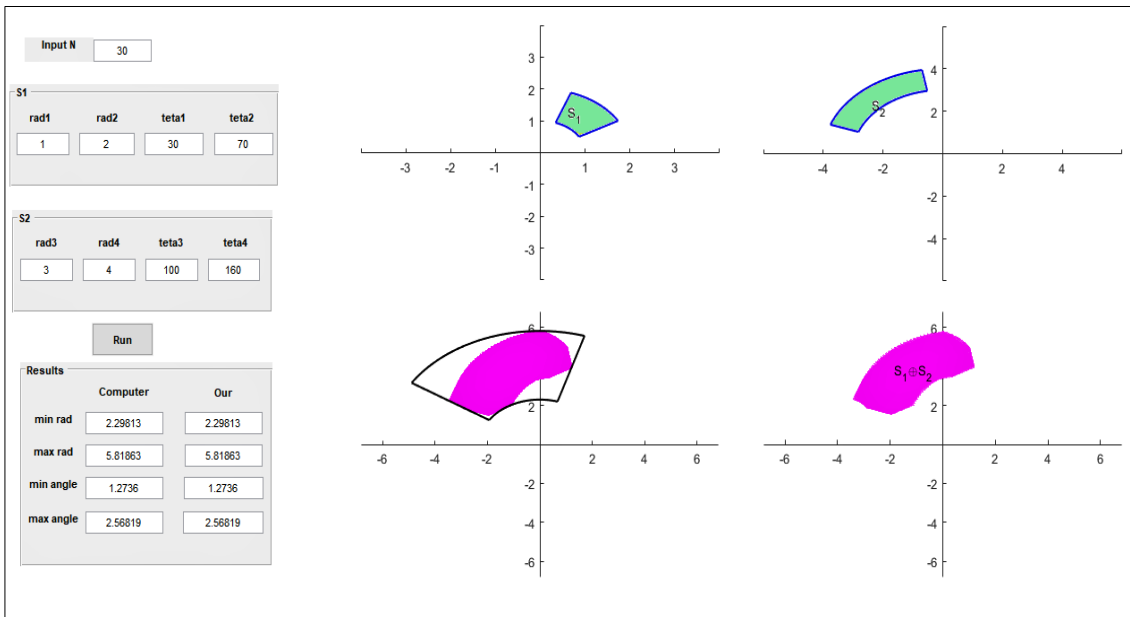
3. MATERYAL VE METOT

Karmaşık aralıklar aritmetik problemi optimizasyon problemi olarak incelenmiştir. Bu anlamda optimizasyon yöntemi tez çalışması için önemli bir yer tutmaktadır. Optimizasyon yöntemi karmaşık aralıklar aritmetiği problemlerine uygulanarak, aralık analizi, geometrik fonksiyonlar ve ikinci dereceden denklemler, matlab bilgisayar programı, optimizasyon üzerinde tanımlanan, Ekstrem Değer Teoremi, v.s. yapıları gibi temel karmaşık analizi metotları kullanılmıştır.

Bu çalışma kapsamında önerilen metotlar analiz edilirken *Matlab R2015b* programının grafiksel arayüzü olan GUI kullanılmıştır. Bu grafik arayüzüne kendi yazdığımız algoritma ile iki karmaşık aralığın (dikdörtgen ya da kutupsal) temel işlemlerini hesaplamakta ve aynı zamanda grafiklerini çizmektedir (Şekil 3.1; Şekil 3.2). Görüleceği üzere bilgisayarla beraber bizim çözümümüz aynı sonuçları vermektedir.



Şekil 3.1. GUI Arayüz iki karmaşık dikdörtgen Z_1 / Z_2 için



Şekil 3.2. GUI Arayüz iki karmaşık kutupsal $S_1 + S_2$ için

4. BULGULAR

4.1. İki Dikdörtgen Aralığın Bölümü İçin En Uygun Kapsama

$Z_1 = [x_1] + i[y_1]$ ve $Z_2 = [x_2] + i[y_2]$ iki dikdörtgen aralık olsun. Biliyoruz ki $Z_1 \odot Z_2$ genellikle bir dikdörtgen değildir ancak kompleks bir biçime sahiptir. Bundan dolayı özel algoritmalar, dikdörtgen aralıklar üzerinde uygulanmak üzere inşa edilmek zorundadır.

$\{Z_1 \div Z_2 : z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\}$ kümesi için en uygun dikdörtgeni hesaplayan etkili bir algoritma (teoride ya da uygulamada) henüz bilinmiyor. Dahası, dikdörtgen karmaşık aralık bölmesi için daha etkili bir yönteme gereksinim vardır.

Bu bölümde en uygun $\square\{Z_1 \odot Z_2\}$ kapsama dikdörtgeninin hesaplanması için kolay ve etkili bir algoritma sunacağız. $\square\{Z_1 \odot Z_2\}$ dikdörtgenini hesaplama yöntemimiz şu biçimde tanımlanacaktır:

$f, g: B \rightarrow \mathbb{R}, B = [x_1] \times [x_2] \times [y_1] \times [y_2]$ ve $x_2^2 + y_2^2 > 0$ iken

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, g(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

olan iki gerçel fonksiyon olsun. Bu durumda $\square\{Z_1 \odot Z_2\}$ dikdörtgeni

$$\square\{Z_1 \odot Z_2\} = [\min f, \max f] + i[\min g, \max g]$$

hesaplanır. Yani, elde edilen

$$(\min f, \min g), (\min f, \max g), (\max f, \min g), (\max f, \max g)$$

noktaları dikdörtgenin köşeleri olacaktır.

Devam etmeden önce aşağıdakini göz önüne alalım. B kapalı ve sınırlı (kompakt) ve f ve g B 'de birer sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda. Ekstrem Değer Teoremi gereği, f ve g sınırlı olduğundan ve maksimum ve minimum değerlerine B 'de ulaşırlar.

f 'nin kritik noktaları için istediğimiz

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{(x_2^2 + y_2^2)x_2}{(x_2^2 + y_2^2)^2} = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{(x_2^2 + y_2^2)x_1 - (x_1x_2 + y_1y_2)(2x_2)}{(x_2^2 + y_2^2)^2} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{(x_2^2 + y_2^2)y_2}{(x_2^2 + y_2^2)^2} = \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{(x_2^2 + y_2^2)y_1 - (x_1x_2 + y_1y_2)(2y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)^2} = 0. \quad (4.4)$$

olmasıdır.

Denklem 4.1 – 4.3 'ten $x_2 = 0$ ve $y_2 = 0$ bulunur. Yine de $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1, 0, y_1, 0)$ biçimindeki noktalar f 'nin tanım kümesinde değildir. Dolayısıyla f 'nin B içinde kritik noktası yoktur. Benzer yolla, g 'nin de B içinde kritik noktasının olmadığını görebiliriz.

Şimdi B 'nin sınır noktalarını denetleyelim. f (aynı zamanda g) x_1 ve y_1 noktalarında doğrusal olduğundan, mutlak ekstrem değerlerin konumu için adaylar şu nokta türlerinin arasındadır:

- $P_1 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2): x_1 \in \{x_1^+, x_1^-\}, x_2 \in]x_2[, y_1 \in \{y_1^+, y_1^-\}, y_2 \in \{y_2^+, y_2^-\}$
burada $x_2, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ eşitliğinin çözümüdür;
- $P_2 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2): x_1 \in \{x_1^+, x_1^-\}, x_2 \in \{x_2^+, x_2^-\}, y_1 \in \{y_1^+, y_1^-\}, y_2 \in]y_2[$
burada $y_2, \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0$ eşitliğinin çözümüdür;
- $P_3 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2): x_1 \in \{x_1^+, x_1^-\}, x_2 \in \{x_2^+, x_2^-\}, y_1 \in \{y_1^+, y_1^-\}, y_2 \in \{y_2^+, y_2^-\}$.

$i = 1,2,3$ için, $p_{imax} \in P_i$ ve $p_{imin} \in P_i$ sırasıyla mutlak maksimum ve minimum noktalarının konumları için adaylar olsun. Amacımız bu adayları etkili bir yolla belirlemektir.

Özel Durumlar

- Eğer $0 \in [x_2]$ ve $[x_1] = [0]$ ise

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

olur.

Burada, açıktır ki, $y_1 y_2 < 0$ varsa, $x_2 = 0$ iken

$$\min f = f(0,0, y_1, y_2) = \min\left(\frac{y_1}{y_2}\right)$$

olur ve, $y_1 y_2 > 0$ varsa, $x_2 = 0$ iken

$$\max f = f(0,0, y_1, y_2) = \max\left(\frac{y_1}{y_2}\right)$$

olur.

Benzer şekilde, eğer $0 \in [y_2]$ ve $[y_1] = [0]$ ise

$$\begin{cases} \min f = f(x_1, x_2, 0,0) = \min\left(\frac{x_1}{x_2}\right), & \text{eğer } x_1 x_2 < 0 \text{ ise.} \\ \max f = f(x_1, x_2, 0,0) = \max\left(\frac{x_1}{x_2}\right), & \text{eğer } x_1 x_2 > 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

olur.

- Yukarıda belirtildiği gibi aynı durumlar g fonksiyonu için de görülebilir.

4.1.1. $\min f$ 'nin hızlı hesabı

$B = [x_1] \times [x_2] \times [y_1] \times [y_2]$ olmak üzere

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

fonksiyonunun $\min f$ değeri

$$\min_B f(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

problemi çözümlenerek hesaplanacaktır.

$p_{1\min}$ ya da $p_{2\min}$ değerini belirlemeden önce aşağıdaki sonuçlara gereksinimimiz vardır. (Kanıt için *Teorem 1*'e bakınız):

- Eğer $0 \in [y_2]$ ise, f 'nin mutlak minimumu P_1 'de bulunamaz.
- Eğer $0 \in [x_2]$ ise, f 'nin mutlak minimumu P_2 'de bulunamaz.

$p_{1\min} \in P_1$ Noktası

Denklem 4.2'den x_2 yi çekersek

$$x_2 = \frac{-y_1 y_2 \pm y_2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{x_1}$$

elde ederiz. Eğer $x_2 \notin [x_2]$ ise $P_1 = \emptyset$ olduğunu unutmayalım. Varsayalım ki $P_1 \neq \emptyset$, $0 \notin [y_2]$ ve

$$x_{2\min} = \frac{-y_1 y_2 \pm y_2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{x_1}$$

için $p_{1\min} = (x_1, x_{2\min}, y_1, y_2)$ olsun.

$$f(p_{1\min}) = \frac{x_1 x_{2\min} + y_1 y_2}{x_{2\min}^2 + y_2^2} = \frac{\pm y_2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{x_{2\min}^2 + y_2^2},$$

olduğundan

$$y_2^- > 0 \text{ ise } x_{2\min} = \frac{-y_1^- y_2^- - y_2^- \sqrt{x_1^2 + (y_1^-)^2}}{x_1} \quad (4.5)$$

olur, ve

$$y_2^+ < 0 \text{ ise } x_{2\min} = \frac{-y_1^+ y_2^+ + y_2^+ \sqrt{x_1^2 + (y_1^+)^2}}{x_1} \quad (4.6)$$

olur. $y_2^- > 0$ iken $y_1 = y_1^-$ ve $y_2^+ < 0$ iken $y_1 = y_1^+$ kullanılmasının nedeni açıktır. Denklem 4.5'te $y_2 = y_2^-$ ve Denklem 4.6'da $y_2 = y_2^+$ kullanılmasının nedeni aşağıdaki gibi açıklanabilir. Denklem 4.5'i, diğer bir ifadeyle $y_2^- > 0$ durumunu düşünelim. Eğer $y_2 = y_2^-$ yerine $y_2 = y_2^+$ kullanırsak,

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_{2\min}, y_1^-, y_2^+) &= \frac{-y_2^+ \sqrt{x_1^2 + (y_1^-)^2}}{x_{2\min}^2 + (y_2^+)^2} \\
&= \frac{-x_1^2 \sqrt{x_1^2 + (y_1^-)^2}}{2y_2^+ (x_1^2 + (y_1^-)^2 + y_1^- \sqrt{x_1^2 + (y_1^-)^2})} \\
&> \frac{-x_1^2 \sqrt{x_1^2 + (y_1^-)^2}}{2y_2^- (x_1^2 + (y_1^-)^2 + y_1^- \sqrt{x_1^2 + (y_1^-)^2})} \\
&= f(x_1, x_{2\min}, y_1^-, y_2^-)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Şimdi $y_2 = y_2^-$ için Denklem 4.6'yı inceleyelim. O zaman

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_{2\min}, y_1^+, y_2^-) &= \frac{y_2^- \sqrt{x_1^2 + (y_1^+)^2}}{x_{2\min}^2 + (y_2^-)^2} \\
&= \frac{x_1^2 \sqrt{x_1^2 + (y_1^+)^2}}{2y_2^- (x_1^2 + (y_1^+)^2 + y_1^+ \sqrt{x_1^2 + (y_1^+)^2})} \\
&> \frac{x_1^2 \sqrt{x_1^2 + (y_1^+)^2}}{2y_2^+ (x_1^2 + (y_1^+)^2 + y_1^+ \sqrt{x_1^2 + (y_1^+)^2})} \\
&= f(x_1, x_{2\min}, y_1^+, y_2^+)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $x_{2\min}$ 'i Denklem 4.5 (Denklem 4.6) ile belirlemek istiyorsak $y_2 = y_2^-$ ($y_2 = y_2^+$) olarak kullanmalıyız.

Şimdi f 'nin mutlak minimumunun konumu olabilecek $p_{1\min} \in P_1$ noktasını belirleyebiliriz. Burada göz önüne alacağımız iki durum var.

Durum 1. $y_2^- > 0$

Denklem 4.5'i kullanarak

$$x_{2\min} = \frac{-y_1^- y_2^- - y_2^- \sqrt{x_1^2 + (y_1^-)^2}}{x_1}$$

elde ederiz, burada x_1 şu koşullarda seçilmelidir:

- Eğer $x_2^- \geq 0$ ise $x_1 = x_1^-$ seçmeliyiz. Eğer $x_{2\min} \in]x_2[$ ise $p_{1\min} = (x_1^-, x_{2\min}, y_1^-, y_2^-)$ olmalıdır.
- Eğer $x_2^+ \leq 0$ ise $x_1 = x_1^+$ seçmeliyiz. Eğer $x_{2\min} \in]x_2[$ ise $p_{1\min} = (x_1^+, x_{2\min}, y_1^-, y_2^-)$ olmalıdır.
- Eğer $0 \in]x_2[$ ise şu üç ayrı duruma bakacağız.
 1. $x_1^- \geq 0$. Bu durumda $x_1 = x_1^+$ seçmeliyiz. Eğer $x_{2\min} \in]x_2[$ ise $p_{1x_{2\min}} = (x_1^+, x_{2\min}, y_1^-, y_2^-)$ olmalıdır.
 2. $x_1^+ \leq 0$. Bu durumda $x_1 = x_1^-$ seçmeliyiz. Eğer $x_{2\min} \in]x_2[$ ise $p_{1\min} = (x_1^-, x_{2\min}, y_1^-, y_2^-)$ olmalıdır.
 3. $0 \in]x_1[$. Bu durumda iki olasılık vardır, $x_1 = x_1^-$ ve $x_1 = x_1^+$. Varsayalım ki

$$x_{2\min 1} = \frac{-y_1^- y_2^- - y_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2}}{x_1^-}$$

$$x_{2\min 2} = \frac{-y_1^- y_2^- - y_2^- \sqrt{(x_1^+)^2 + (y_1^-)^2}}{x_1^+}$$

olsun. Eğer ikisi birden $]x_2[$ 'nin elemanıysa, yani $x_{2\min 1} \in]x_2[$ ve $x_{2\min 2} \in]x_2[$ ise,

$p_{1\min} \in \{(x_1^-, x_{2\min}, y_1^-, y_2^-), (x_1^+, x_{2\min}, y_1^-, y_2^-)\}$ öyle ki

$$f(p_{1\min}) = \min(f(x_1^-, x_{2\min}, y_1^-, y_2^-), f(x_1^+, x_{2\min}, y_1^-, y_2^-)).$$

Eğer $x_{2\min 1} \in]x_2[$ ve $x_{2\min 2} \notin]x_2[$ ($x_{2\min 1} \notin]x_2[$ ve $x_{2\min 2} \in]x_2[$) ise

$$p_{1\min} = (x_1^-, x_{2\min 1}, y_1^-, y_2^-) \quad (p_{1\min} = (x_1^+, x_{2\min 2}, y_1^-, y_2^-)).$$

Durum 2. $y_2^+ < 0$

Denklem 4.6'dan

$$x_{2\min} = \frac{-y_1^+ y_2^+ + y_2^+ \sqrt{x_1^2 + (y_1^+)^2}}{x_1}$$

bulunur, burada x_1 **Durum 1**'deki gibi seçilir.

$p_{2\min} \in P_2$ Noktası

Denklem 4.4'ten

$$y_2 = \frac{-x_1x_2 \pm x_2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{y_1}$$

bulunur.

Varsayalım ki $P_2 \neq \emptyset$, $0 \notin [x_2]$, ve $p_{2\min} = (x_1, x_2, y_1, y_{2\min})$ olsun, burada

$$y_{2\min} = \frac{-x_1x_2 \pm x_2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{y_1}.$$

$$f(p_{2\min}) = \frac{\pm x_2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{x_2^2 + (y_{2\min})^2}$$

olduğundan,

$$x_2^- > 0 \quad \text{iken} \quad y_{2\min} = \frac{-x_1^-x_2^- - x_2^-\sqrt{(x_1^-)^2 + y_1^2}}{y_1} \quad (4.7)$$

$$x_2^+ < 0 \quad \text{iken} \quad y_{2\min} = \frac{-x_1^+x_2^+ - x_2^+\sqrt{(x_1^+)^2 + y_1^2}}{y_1} \quad (4.8)$$

ki burada $y_1, x_{2\min}$ 'i hesaplarken x_1 olarak alınır.

 $p_{3\min} \in P_3$ Noktası

P_3 kümesi B 'nin tüm ekstrem (köşe) noktalarından oluşur ve burada genellikle bu tür noktalardan 16 tane bulunur. f , x_1 ve y_1 'de doğrusal olduğundan, $p_{3\min}$ 'i P_3 'ün yalnızca dört noktasını ele alarak bulabiliriz. Bu noktalar şunlardır:

$$\{(x_1, x_2^-, y_1, y_2^-), (x_1, x_2^-, y_1, y_2^+), (x_1, x_2^+, y_1, y_2^-), (x_1, x_2^+, y_1, y_2^+)\}$$

burada x_1 'in (y_1) seçimi x_2 'nin (y_2) işaretine bağlıdır. Yani, $x_2 \geq 0$ ise $x_1 = x_1^-$, diğer türlü $x_1 = x_1^+$.

Bulduklarımızı aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

Teorem 1.

1. Eğer $0 \in]y_2]$ ise

1.1. Eğer $y_2^- = 0$ ya da $y_2^+ = 0$ ise $x_{2\min} \notin]x_2[$,

1.2. Eğer $y_2^- = 0$ (ya da $y_2^+ = 0$) ve $y_{2\min} \in]y_2[$ ise $\min f = f(p_{2\min})$,

1.3. Eğer $0 \in]y_2[$ ise

1.3.1. Eğer $y_1^- \geq 0$ (ya da $y_1^+ \leq 0$) ve $y_{2\min} \in]y_2[$ ise $\min f = f(p_{2\min})$,

1.3.2. Eğer $0 \in]y_1[$ ve her ikisi de $y_{2\min1} \in]y_2[$, $y_{2\min1} \in]y_2[$ ise
 $\min f = f(p_{2\min})$,

1.3.3. Eğer $0 \in]y_1[$ ve $y_{2\min1}$, $y_{2\min2}$ 'den biri $]y_2[$ 'de ise
 $\min f = \min(f(p_{2\min}), f(p_{3\min}))$,

2. Eğer $0 \in]x_2]$ ise

2.1. Eğer $x_2^- = 0$ ya da $x_2^+ = 0$ ise $y_{2\min} \notin]y_2[$,

2.2. Eğer $x_2^- = 0$ (ya da $x_2^+ = 0$) ve $x_{2\min} \in]x_2[$ ise $\min f = f(p_{1\min})$,

2.3. Eğer $0 \in]x_2[$

2.3.1. Eğer $x_1^- \geq 0$ (ya da $x_1^+ \leq 0$) ve $x_{2\min} \in]x_2[$ ise $\min f = f(p_{1\min})$,

2.3.2. Eğer $0 \in]x_1[$ ve her ikisi de $x_{2\min1} \in]x_2[$, $x_{2\min1} \in]x_2[$ ise
 $\min f = f(p_{1\min})$,

2.3.3. Eğer $0 \in]x_1[$ ve $x_{2\min1}$, $x_{2\min2}$ 'den biri $]x_2[$ 'de ise
 $\min f = \min(f(p_{1\min}), f(p_{3\min}))$,

3. Eğer $0 \notin]y_2]$ ve $0 \notin]x_2]$ ise

3.1. Eğer $x_{2\min} \in]x_2[$ ise $y_{2\min} \notin]y_2[$ ve $\min f = f(p_{1\min})$,

3.2. Eğer $y_{2\min} \in]y_2[$ ise $x_{2\min} \notin]x_2[$ ve $\min f = f(p_{2\min})$,

4. Eğer $x_{2\min} \notin]x_2[$ ve $y_{2\min} \notin]y_2[$ ise $\min f = f(p_{3\min})$.

İspat

Şimdi 1.1, 1.3.1 ve 3.1 parçalarını kanıtlayacağız; diğer parçalar benzer biçimde kanıtlanır.

1.1'in ispatı: Varsayalım ki $y_2^- = 0$ ya da $y_2^+ = 0$. Bu durumda $x_{2\min} = 0$ olmalıdır ki bu da olanaksızdır.

1.3.1'in ispatı: $0 \in]y_2[$ ve $y_{2\min} \in]y_2[$ olsun. Bu durumda $x_2^- > 0$ ya da $x_2^+ < 0$ olmalıdır. Bunun için $f(p_{2\min}) < f(p)$, $p \in \{p_{1\min}, p_{3\min}\}$ olduğunu göstermeliyiz.

Eğer $x_2^- > 0$ ise, Denklem 4.7'den

$$y_{2\min} = \frac{-x_1^- x_2^- - x_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + y_1^2}}{y_1}.$$

Varsayalım ki $y_{2\min} < 0$ olsun, o zaman $y_1 > 0$ olmalıdır, çünkü

$$-x_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + y_1^2} < 0.$$

Bu da $y_1 = y_1^+$ olduğunu söyler, bundan dolayı

$$p_{2\min} = (x_1^-, x_2^-, y_1^+, y_{2\min}).$$

$y_2 = y_2^-$ için Denklem 4.6'yı kullanarak

$$x_{2\min} = \frac{-y_1^+ y_2^- + y_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^+)^2}}{x_1^-}$$

buluruz.

$y_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^+)^2} < 0$ olduğundan, $x_1^- > 0$ ise $x_{2\min} \notin [x_2]$.

Varsayalım ki $x_1^- < 0$ ve $x_{2\min} \in [x_2]$, başka bir ifadeyle

$$p_{1\min} = (x_1^-, x_{2\min}, y_1^+, y_2^-).$$

$p_{1\min}$ ve $p_{2\min}$ 'i f fonksiyonuna eklemek bize

$$f(p_{1\min}) = \frac{y_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^+)^2}}{x_{2\min}^2 + (y_2^-)^2}$$

$$f(p_{2\min}) = \frac{x_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^+)^2}}{(x_2^-)^2 + y_{2\min}^2}$$

eşitliklerini verir. $(x_2^-)^2 < x_{2\min}$ ve $y_{2\min}^2 < (y_2^-)^2$ olduğundan $f(p_{2\min}) < f(p_{1\min})$ olduğunu elde ederiz. Şimdi $y_{2\min} > 0$ olduğunu var sayalım, diğer ifadesiyle $y_1 = y_1^- < 0$. O zaman $y_2 = y_2^+$ için Denklem 4.5 bize

$$x_{2\min} = \frac{-y_1^- y_2^+ - y_2^+ \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2}}{x_1^-}$$

eşitliğini verir.

$-\sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2} < 0$ olduğundan, $x_1^- > 0$ durumunda

$$\frac{-y_1^- y_2^+ - y_2^+ \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2}}{x_1^-} < 0$$

bu da $x_{2\min} \notin]x_2[$ anlamına gelir.

Varsayalım ki $x_1^- < 0$ ve $x_{2\min} \in]x_2[$. Bu durumda

$$f(p_{1\min}) = f(x_1^-, x_{2\min}, y_1^-, y_2^+) = \frac{-y_2^+ \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2}}{(x_{2\min})^2 + (y_2^+)^2}$$

$$f(p_{2\min}) = f(x_1^-, x_2^-, y_1^-, y_{2\min}) = \frac{-x_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2}}{(x_2^-)^2 + (y_{2\min})^2}.$$

Ayrıca $(x_2^-)^2 < (x_{2\min})^2$ ve $(y_{2\min})^2 < (y_2^+)^2$ olduğundan $f(p_{2\min}) < f(p_{1\min})$.

Eğer $x_2^+ < 0$ ise, Denklem 4.8'den

$$y_{2\min} = \frac{-x_1^+ x_2^+ + x_2^+ \sqrt{(x_1^+)^2 + y_1^2}}{y_1}$$

Benzer hesaplamalar $f(p_{2\min}) < f(p_{1\min})$ eşitsizliğini verir.

$f(p_{2\min}) < f(p_{3\min})$ eşitsizliğinin kanıtı için, $p_{2\min}$ 'in belirlenmesinden bildiğimiz gibi, her $p_2 \in P_2$ için $f(p_{2\min}) < f(p_2)$. Sonuç olarak herhangi $p \in B$ için $f(p_{2\min}) < f(p)$ olmalıdır.

3.1'in ispatı: $0 \notin [y_2], 0 \notin [x_2]$ ve $x_{2\min} \in]x_2[$ alalım. Buradan dört ayrı durum ortaya açar:

$$\{x_2^- > 0, y_2^- > 0\}, \{x_2^- > 0, y_2^+ < 0\}, \{x_2^+ < 0, y_2^- > 0\}, \{x_2^+ < 0, y_2^+ < 0\}.$$

Biz $\{x_2^- > 0, y_2^- > 0\}$ durumunu kanıtlayacağız, diğer durumların kanıtları benzer olarak verilebilir. Varsayalım ki $x_2^- > 0$ ve $y_2^- > 0$. Bu durumda Denklem 4.5'ten

$$x_{2\min 2} = \frac{-y_1^- y_2^- - y_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2}}{x_1^-}$$

olduğu görülür.

$-y_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2} < 0$ ve $x_{2\min 2} \in]x_{2\min}[$ olduğundan, $x_1^- < 0$ eşitsizliğine ulaşırız.

Denklem 4.7'den de

$$y_{2\min} = \frac{-x_1^- x_2^- - x_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2}}{y_1^-}$$

olduğu görülür.

$-x_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2} < 0$ olduğundan, $y_1^- > 0$ eşitsizliği $y_{2\min} < 0$ 'a işaret eder, bu da $y_{2\min} \notin [y_2]$ olduğunu söyler.

$y_1^- < 0$ ise

$$0 < \frac{-y_1^- - \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2}}{x_1^-} < 1.$$

Buradan görülebilir ki

$$x_{2\min} = y_2^- \left(\frac{-y_1^- - \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2}}{x_1^-} \right) < y_2^-,$$

bu da $x_2^- < y_2^-$ anlamına gelir.

Dahası, eğer $y_1^- < 0$ ise

$$0 < \frac{-x_1^- - \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2}}{y_1^-} < 1$$

eşitsizliğine de sahibiz. Yani

$$y_{2\min} = x_2^- \left(\frac{-x_1^- - \sqrt{(x_1^-)^2 + (y_1^-)^2}}{y_1^-} \right) < x_2^- < y_2^-.$$

Bu da $y_{2\min} \notin [y_2]$ olduğunu kanıtlar. $f(p_{1\min}) < f(p_{3\min})$ savı açıktır. ■

Önceki sonuçlar, aşağıdaki algoritmada $\min f$ 'yi hesaplamak için uygulanır.

Algoritma $\min f$:

Eğer $0 \in [x_2]$

eğer $0 \in]x_1[$ ve $0 \in]x_2[$

eğer $x_{2\min 1} \in]x_2[$ ve $x_{2\min 2} \in]x_2[$

$$\min f = f(p_{1\min})$$

aksi halde eğer $x_{2\min 1} \in]x_2[$ ya da $x_{2\min 2} \in]x_2[$

$$\min f = \min(f(p_{1\min}), f(p_{3\min}))$$

yoksa

$$\min f = f(p_{3\min})$$

aksi halde eğer $x_{2\min} \in]x_2[$

$$\min f = f(p_{1\min})$$

yoksa

$$\min f = f(p_{3\min})$$

aksi halde eğer $0 \in [y_2]$

eğer $0 \in]y_1[$ ve $0 \in]y_2[$

eğer $y_{2\min 1} \in]y_2[$ ve $y_{2\min 2} \in]y_2[$

$$\min f = f(p_{2\min})$$

aksi halde eğer $y_{2\min 1} \in]y_2[$ ya da $y_{2\min 2} \in]y_2[$

$$\min f = \min(f(p_{2\min}), f(p_{3\min}))$$

yoksa

$$\min f = f(p_{3\min})$$

aksi halde eğer $y_{2\min} \in]y_2[$

$$\min f = f(p_{2\min})$$

yoksa

$$\min f = f(p_{3\min})$$

aksi halde eğer $x_{2\min} \in]x_2[$

$$\min f = f(p_{1\min})$$

aksi halde eğer $y_{2\min} \in]y_2[$

$$\min f = f(p_{2\min})$$

yoksa

$$\min f = f(p_{3\min}).$$

4.1.2. maxf'nin hızlı hesabı

f 'nin maksimum değeri aslında minimum değeriyle aynı biçimde belirlenir. Yani bu da $\max f$ değeridir ki bu değer

$$\max_B f(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

problemi çözümlenerek belirlenir.

$p_{1\max} = (x_1, x_{2\max}, y_1, y_2) \in P_1$ ve $p_{2\max} = (x_1, x_2, y_1, y_{2\max}) \in P_2$ noktaları sırasıyla şu eşitlikler aracılığıyla belirlenir:

$$x_{2\max} = \begin{cases} \frac{-y_1^+ y_2^- + y_2^- \sqrt{x_1^2 + (y_1^+)^2}}{x_1}, & y_2^- > 0 \text{ ise} \\ \frac{-y_1^- y_2^+ - y_2^+ \sqrt{x_1^2 + (y_1^-)^2}}{x_1}, & y_2^+ < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.9)$$

$$y_{2\max} = \begin{cases} \frac{-x_1^+ x_2^- + x_2^- \sqrt{(x_1^+)^2 + y_1^2}}{y_1}, & x_2^- > 0 \text{ ise} \\ \frac{-x_1^- x_2^+ - x_2^+ \sqrt{(x_1^-)^2 + y_1^2}}{y_1}, & x_2^+ < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.10)$$

Denklem 4.9'daki x_1 şu biçimde seçilir:

$$x_1 = \begin{cases} x_1^+, & x_2^- \geq 0 \text{ ise} \\ x_1^-, & x_2^+ \leq 0 \text{ ise} \\ x_1^+, & 0 \in]x_2[\text{ ve } x_1^- \geq 0 \text{ ise} \\ x_1^-, & 0 \in]x_2[\text{ ve } x_1^+ \leq 0 \text{ ise} \\ \{x_1^+, x_1^-\}, & 0 \in]x_2[\text{ ve } 0 \in]x_1[\text{ ise} \end{cases}$$

Denklem 4.10'daki y_1 de aynı yolla seçilir.

Köşe noktası $p_{3\max} \in P_3$,

$f(p_{3\max})$

$$= \max\{f(x_1, x_2^-, y_1, y_2^-), f(x_1, x_2^-, y_1, y_2^+), f(x_1, x_2^+, y_1, y_2^-), f(x_1, x_2^+, y_1, y_2^+)\}$$

aracılığıyla verilir, burada eğer $x_2 \geq 0$ ($y_2 \geq 0$) ise $x_1 = x_1^+$ ($y_1 = y_1^+$) ve eğer $x_2 \leq 0$ ($y_2 \leq 0$) ise $x_1 = x_1^-$ ($y_1 = y_1^-$).

Açıktır ki, *Teorem 1*'deki problem min yerine max için formüle edilirse $\max f$ için geçerliliğini korur.

Algoritma $\max f$:

Eğer $0 \in]x_2[$

eğer $0 \in]x_1[$ ve $0 \in]x_2[$

eğer $x_{2\max 1} \in]x_2[$ ve $x_{2\max 2} \in]x_2[$

$$\max f = f(p_{1\max})$$

aksi halde eğer $x_{2\max1} \in]x_2[$ ya da $x_{2\max2} \in]x_2[$

$$\max f = \max(f(p_{1\max}), f(p_{3\max}))$$

yoksa

$$\max f = f(p_{3\max})$$

aksi halde eğer $x_{2\max} \in]x_2[$

$$\max f = f(p_{1\max})$$

yoksa

$$\max f = f(p_{3\max})$$

aksi halde eğer $0 \in]y_2[$

eğer $0 \in]y_1[$ ve $0 \in]y_2[$

eğer $y_{2\max1} \in]y_2[$ ve $y_{2\max2} \in]y_2[$

$$\max f = f(p_{2\max})$$

aksi halde eğer $y_{2\max1} \in]y_2[$ ya da $y_{2\max2} \in]y_2[$

$$\max f = \max(f(p_{2\max}), f(p_{3\max}))$$

yoksa

$$\max f = f(p_{3\max})$$

aksi halde eğer $y_{2\max} \in]y_2[$

$$\max f = f(p_{2\max})$$

yoksa

$$\max f = f(p_{3\max})$$

aksi halde eğer $x_{2\max} \in]x_2[$

$$\max f = f(p_{1\max})$$

aksi halde eğer $y_{2\max} \in]y_2[$

$$\max f = f(p_{2\max})$$

yoksa

$$\max f = f(p_{3\max}).$$

4.1.3. $\min g$ 'nin hızlı hesabı

$B = [x_1] \times [x_2] \times [y_1] \times [y_2]$ olmak üzere

$$g(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

fonksiyonunun $\min g$ değeri

$$\min_B g(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

problemi çözümlenerek hesaplanacaktır.

$g(x_1, x_2, y_1, y_2) = f(y_1, x_2, -x_1, y_2)$ olduğundan,

$p_{1\min} = (x_1, x_{2\min}, y_1, y_2) \in P_1$ ve $p_{2\min} = (x_1, x_2, y_1, y_{2\min}) \in P_2$ noktaları

sırasıyla şu eşitlikler aracılığıyla belirlenir:

$$x_{2\min} = \begin{cases} \frac{x_1^+ y_2^- - y_2^- \sqrt{(x_1^+)^2 + y_1^2}}{y_1}, & y_2^- > 0 \text{ ise} \\ \frac{x_1^- y_2^+ + y_2^+ \sqrt{(x_1^-)^2 + y_1^2}}{y_1}, & y_2^+ < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$y_{2\min} = \begin{cases} \frac{y_1^- x_2^- + x_2^- \sqrt{x_1^2 + (y_1^-)^2}}{x_1}, & x_2^- > 0 \text{ ise} \\ \frac{y_1^+ x_2^+ - x_2^+ \sqrt{x_1^2 + (y_1^+)^2}}{x_1}, & x_2^+ < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.12)$$

burada Denklem 4.11'de y_1 ve denklem 4.12'de x_1 sırasıyla şöyle seçilir:

$$y_1 = \begin{cases} y_1^-, & x_2^- \geq 0 \text{ ise} \\ y_1^+, & x_2^+ \leq 0 \text{ ise} \\ y_1^+, & 0 \in]x_2[\text{ ve } y_1^- \geq 0 \text{ ise} \\ y_1^-, & 0 \in]x_2[\text{ ve } y_1^+ \leq 0 \text{ ise} \\ \{y_1^+, y_1^-\}, & 0 \in]x_2[\text{ ve } 0 \in]y_1[\text{ ise} \end{cases}$$

$$x_1 = \begin{cases} x_1^+, & y_2^- \geq 0 \text{ ise} \\ x_1^-, & y_2^+ \leq 0 \text{ ise} \\ x_1^+, & 0 \in]y_2[\text{ ve } x_1^- \geq 0 \text{ ise} \\ x_1^-, & 0 \in]y_2[\text{ ve } x_1^+ \leq 0 \text{ ise} \\ \{x_1^+, x_1^-\}, & 0 \in]y_2[\text{ ve } 0 \in]x_1[\text{ ise} \end{cases}$$

$p_{3\min} \in P_3$ noktası

$g(p_{3\min})$

$$= \min\{g(x_1, x_2^-, y_1, y_2^-), g(x_1, x_2^-, y_1, y_2^+), g(x_1, x_2^+, y_1, y_2^-), g(x_1, x_2^+, y_1, y_2^+)\}$$

aracılığıyla verilir, burada eğer $x_2 \geq 0$ ($y_2 \geq 0$) ise $y_1 = y_1^-$ ($x_1 = x_1^+$) ve $x_2 \leq 0$ ($y_2 \leq 0$) ise $y_1 = y_1^+$ ($x_1 = x_1^-$).

Sıradaki algoritma g 'nin mutlak minimumunu hesaplar.

Algoritma ming :

Eğer $0 \in]x_2[$

eğer $0 \in]y_1[$ ve $0 \in]x_2[$

eğer $x_{2\min 1} \in]x_2[$ ve $x_{2\min 2} \in]x_2[$

$$\text{ming} = g(p_{1\min})$$

aksi halde eğer $x_{2\min 1} \in]x_2[$ ya da $x_{2\min 2} \in]x_2[$

$$\text{ming} = \min(g(p_{1\min}), g(p_{3\min}))$$

yoksa

$$\text{ming} = g(p_{3\min})$$

aksi halde eğer $x_{2\min} \in]x_2[$

$$\text{ming} = g(p_{1\min})$$

yoksa

$$\text{ming} = g(p_{3\min})$$

aksi halde eğer $0 \in]y_2[$

eğer $0 \in]x_1[$ ve $0 \in]y_2[$

eğer $y_{2\min1} \in]y_2[$ ve $y_{2\min2} \in]y_2[$

$$\text{ming} = g(p_{2\min})$$

aksi halde eğer $y_{2\min1} \in]y_2[$ ya da $y_{2\min2} \in]y_2[$

$$\text{ming} = \min(g(p_{2\min}), g(p_{3\min}))$$

yoksa

$$\text{ming} = g(p_{3\min})$$

aksi halde eğer $y_{2\min} \in]y_2[$

$$\text{ming} = g(p_{2\min})$$

yoksa

$$\text{ming} = g(p_{3\min})$$

aksi halde eğer $x_{2\min} \in]x_2[$

$$\text{ming} = g(p_{1\min})$$

aksi halde eğer $y_{2\min} \in]y_2[$

$$\text{ming} = g(p_{2\min})$$

yoksa

$$\text{ming} = g(p_{3\min}).$$

4.1.4. $\max g$ 'nin hızlı hesabı

g 'nin maksimum değeri $\max_B g(x_1, x_2, y_1, y_2)$ probleminin çözülmesiyle belirlenir. $p_{1\max} = (x_1, x_{2\max}, y_1, y_2) \in P_1$ ve $p_{2\max} = (x_1, x_2, y_1, y_{2\max}) \in P_2$ noktaları sırasıyla şu eşitliklerle belirlenir:

$$x_{2\max} = \begin{cases} \frac{x_1^- y_2^- + y_2^- \sqrt{(x_1^-)^2 + y_1^2}}{y_1}, & y_2^- > 0 \text{ ise} \\ \frac{x_1^+ y_2^+ - y_2^+ \sqrt{(x_1^+)^2 + y_1^2}}{y_1}, & y_2^+ < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.13)$$

$$y_{2\max} = \begin{cases} \frac{y_1^+ x_2^- - x_2^- \sqrt{x_1^2 + (y_1^+)^2}}{x_1}, & x_2^- > 0 \text{ ise} \\ \frac{y_1^- x_2^+ + x_2^+ \sqrt{x_1^2 + (y_1^-)^2}}{x_1}, & x_2^+ < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.14)$$

burada Denklem 4.13'teki y_1 ve Denklem 4.14'teki x_1 sırasıyla şöyle seçilir:

$$y_1 = \begin{cases} y_1^+, & x_2^- \geq 0 \text{ ise} \\ y_1^-, & x_2^+ \leq 0 \text{ ise} \\ y_1^+, & 0 \in]x_2[\text{ ve } y_1^- \geq 0 \text{ ise} \\ y_1^-, & 0 \in]x_2[\text{ ve } y_1^+ \leq 0 \text{ ise} \\ \{y_1^+, y_1^-\}, & 0 \in]x_2[\text{ ve } 0 \in]y_1[\text{ ise} \end{cases}$$

$$x_1 = \begin{cases} x_1^-, & y_2^- \geq 0 \text{ ise} \\ x_1^+, & y_2^+ \leq 0 \text{ ise} \\ x_1^+, & 0 \in]y_2[\text{ ve } x_1^- \geq 0 \text{ ise} \\ x_1^-, & 0 \in]y_2[\text{ ve } x_1^+ \leq 0 \text{ ise} \\ \{x_1^+, x_1^-\}, & 0 \in]y_2[\text{ ve } 0 \in]x_1[\text{ ise} \end{cases}$$

$p_{3\max} \in P_3$ noktası

$g(p_{3\max})$

$$= \max\{g(x_1, x_2^-, y_1, y_2^-), g(x_1, x_2^-, y_1, y_2^+), g(x_1, x_2^+, y_1, y_2^-), g(x_1, x_2^+, y_1, y_2^+)\}$$

aracılığıyla verilir, burada eğer $x_2 \geq 0$ ($y_2 \geq 0$) ise $y_1 = y_1^+$ ($x_1 = x_1^-$) ve eğer $x_2 \leq 0$ ($y_2 \leq 0$) ise $y_1 = y_1^-$ ($x_1 = x_1^+$).

Sıradaki algoritma g 'nin mutlak maksimumunu hesaplar.

Algoritma max g :

Eğer $0 \in]x_2[$

eğer $0 \in]y_1[$ ve $0 \in]x_2[$

eğer $x_{2\max1} \in]x_2[$ ve $x_{2\max2} \in]x_2[$

$$\max g = g(p_{1\max})$$

aksi halde eğer $x_{2\max1} \in]x_2[$ ya da $x_{2\max2} \in]x_2[$

$$\max g = \max(g(p_{1\max}), g(p_{3\max}))$$

yoksa

$$\max g = g(p_{3\max})$$

aksi halde eğer $x_{2\max} \in]x_2[$

$$\max g = g(p_{1\max})$$

yoksa

$$\max g = g(p_{3\max})$$

aksi halde eğer $0 \in]y_2]$

eğer $0 \in]x_1[$ ve $0 \in]y_2[$

eğer $y_{2\max 1} \in]y_2[$ ve $y_{2\max 2} \in]y_2[$

$$\max g = g(p_{2\max})$$

aksi halde eğer $y_{2\max 1} \in]y_2[$ ya da $y_{2\max 2} \in]y_2[$

$$\max g = \max(g(p_{2\max}), g(p_{3\max}))$$

yoksa

$$\max g = g(p_{3\max})$$

aksi halde eğer $y_{2\max} \in]y_2[$

$$\max g = g(p_{2\max})$$

yoksa

$$\max g = g(p_{3\max})$$

aksi halde eğer $x_{2\max} \in]x_2[$

$$\max g = g(p_{1\max})$$

aksi halde eğer $y_{2\max} \in]y_2[$

$$\max g = g(p_{2\max})$$

yoksa

$$\max g = g(p_{3\max}).$$

4.2. İki Sektörün Toplamı Ve Farkı

Genel olarak S_1 ve S_2 gibi iki sektörü toplayıp çıkarmak için doğrudan yol bulmak kolay değildir, ancak $\mathbb{S}\{S_1 \circledast S_2\} = S = [\rho]e^{i[\varphi]}$ ($\circledast \in \{+, -\}$) en küçük sektörüne makul bir yaklaşım $S_1 \circledast S_2$ 'den elde edilebilir. Bu yaklaşımı değerlendirmek için, temsil ettikleri sektörün olabilecek en küçük sektör olacak ve $S_1 \circledast S_2$ kümesini kapsayacak biçimde, hem $[\rho]$ hem $[\varphi]$ için olabilecek en küçük ve en büyük sınırları hesaplamamız gereklidir.

Çıkarma işlemi toplama işlemine dönüştürülebilir. Yani S_1 ve S_2 'nin farkı için bu durum şöyle tanımlanabilir:

$$S_1 - S_2 = S_1 + (-S_2),$$

burada $(-S_2) := \{w: -w \in S_2\}$. Bundan dolayı, çıkarma işlemi yapmak için toplama işlemi de kullanabiliriz.

Bu bölümde, $\mathbb{S}\{S_1 \oplus S_2\}$ kümesini belirleyecek olan bir yöntemin temeli gösterilecektir.

Eğer $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$ ve $s \in S_1 \oplus S_2$ ise, bu durumda

$$s_1 + s_2 = s$$

$$\rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho e^{i\varphi} \quad (4.15)$$

ρ 'yu kolayca belirlemek için, Denklem 4.15'in her iki yanının karesini alabiliriz. Böylece,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= |\rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_2 e^{i\theta_2}|^2 \\ &= |\rho_1 \cos(\theta_1) + \rho_2 \cos(\theta_2) + i(\rho_1 \sin(\theta_1) + \rho_2 \sin(\theta_2))|^2 \\ &= (\rho_1 \cos(\theta_1) + \rho_2 \cos(\theta_2))^2 + (\rho_1 \sin(\theta_1) + \rho_2 \sin(\theta_2))^2 \\ &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Son eşitlikteki ifadenin karekökünü alırsak

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (4.16)$$

φ 'yi belirlemek istersek, Denklem 4.15'ten bulacağımız sonuç

$$\operatorname{Re}(s) = \rho\cos(\varphi) = \rho_1\cos(\theta_1) + \rho_2\cos(\theta_2)$$

$$\operatorname{Im}(s) = \rho\sin(\varphi) = \rho_1\sin(\theta_1) + \rho_2\sin(\theta_2)$$

olur. Son iki eşitlikten ise şu sonuca varırız:

$$\tan(\varphi) = \frac{\rho_1\sin(\theta_1) + \rho_2\sin(\theta_2)}{\rho_1\cos(\theta_1) + \rho_2\cos(\theta_2)} \quad (4.17)$$

4.2.1. $[\varphi]$ Açığı intervalinin sınırlarını hesaplamak

φ 'nin Eşitlik 4.17'deki tanımını ele alırsak:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\rho_1\sin(\theta_1) + \rho_2\sin(\theta_2)}{\rho_1\cos(\theta_1) + \rho_2\cos(\theta_2)}\right) \quad (4.18)$$

olduğunu görebiliriz, burada $\varphi \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ve, tabiki, onun bulunduğu bölge $\rho_1\sin(\theta_1) + \rho_2\sin(\theta_2)$ ve $\rho_1\cos(\theta_1) + \rho_2\cos(\theta_2)$ işaretlerine göre belirlenir. Eğer $\rho_1\cos(\theta_1) + \rho_2\cos(\theta_2) = 0$ ise

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \rho_1\sin(\theta_1) + \rho_2\sin(\theta_2) > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \rho_1\sin(\theta_1) + \rho_2\sin(\theta_2) < 0 \end{cases}$$

Bundan dolayı her bir $s \in S_1 \oplus S_2$ için $s = 0$ (yani $\rho_1\cos(\theta_1) + \rho_2\cos(\theta_2) = \rho_1\sin(\theta_1) + \rho_2\sin(\theta_2) = 0$) olmadığı durumlarda φ 'nin bağıl bir değerini hesaplayabiliriz.

Amacımız, sınırları φ^- ve φ^+ olan $[\varphi^-, \varphi^+]$ aralığını, $S_1 \oplus S_2$ 'nin tüm olası açılarını kapatacak en küçük aralık olacak biçimde hesaplamaktır. Bu da tüm $(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) \in \Omega = [\rho_1] \times [\rho_2] \times [\theta_1] \times [\theta_2]$ noktalarına bağlı kalarak φ fonksiyonunun en küçük ve en büyük değerlerini hesaplamamız gerektiğini söyler.

φ 'yi diferansiyellemek bize şunları verir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} = \frac{\rho_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\rho^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2} = \frac{-\rho_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\rho^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} = \frac{\rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \rho_1^2}{\rho^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_1^2} = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{\rho^4},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} = \frac{\rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \rho_2^2}{\rho^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_2^2} = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{\rho^4}.$$

Bilinmelidir ki φ 'nin olduğu her yerde $\nabla \varphi(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2)$ tanımlıdır. Dolayısıyla, φ fonksiyonun tanım bölgesinde hiç kiritik nokta olmadığını belirlemek kolaydır.

Her $x \in \Omega$ için $\min \varphi = \varphi^- = \varphi(x_{\min}) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_{\max}) = \varphi^+ = \max \varphi$ biçimindeki iki $x_{\min}, x_{\max} \in \Omega$ noktasını bulacağız.

$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}$ ve $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2}$ 'den bilebiliriz ki ρ_1 ve ρ_2 için tek olasılık, sırasıyla $\{\rho_1^+, \rho_1^-\}$ ve $\{\rho_2^+, \rho_2^-\}$ 'dir. Bundan dolayı da optimal nokta x_{\min} ya da x_{\max} şu nokta türleri kümelerinden birinin içine düşmelidir:

- $X_1 = \{(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2): \rho_1 \in \{\rho_1^+, \rho_1^-\}, \rho_2 \in \{\rho_2^+, \rho_2^-\}, \theta_1 \in]\theta_1[, \theta_2 \in \{\theta_2^+, \theta_2^-\}\}$, burada $\theta_1, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} = 0$ eşitliğinin çözümüdür.
- $X_2 = \{(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2): \rho_1 \in \{\rho_1^+, \rho_1^-\}, \rho_2 \in \{\rho_2^+, \rho_2^-\}, \theta_1 \in \{\theta_1^+, \theta_1^-\}, \theta_2 \in]\theta_2[)\}$, burada $\theta_2, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} = 0$ eşitliğinin çözümüdür.
- $X_3 = \{(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2): \rho_1 \in \{\rho_1^+, \rho_1^-\}, \rho_2 \in \{\rho_2^+, \rho_2^-\}, \theta_1 \in \{\theta_1^+, \theta_1^-\}, \theta_2 \in \{\theta_2^+, \theta_2^-\}\}$. Yalnızca θ_1 ve θ_2 'yi seçmemiz gerektiğinin farkına varmalıyız, çünkü $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}$ ve $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2}$ 'nin işaretleri $\sin(\theta_1 - \theta_2)$ 'nin işareti ile belirlenir. Şimdi θ_1 ve θ_2 için optimallik koşullarını belirleyelim.

Minimum için:

$$\theta_1 = \begin{cases} \theta_1^- & \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1^- - \theta_2) + \rho_1^2 \geq 0 \text{ ise.} \\ \theta_1^+ & \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1^+ - \theta_2) + \rho_1^2 < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \theta_2^- & \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2^-) + \rho_2^2 \geq 0 \text{ ise.} \\ \theta_2^+ & \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2^+) + \rho_2^2 < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

Maksimum için:

$$\theta_1 = \begin{cases} \theta_1^+ & \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1^+ - \theta_2) + \rho_1^2 \geq 0 \text{ ise.} \\ \theta_1^- & \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1^- - \theta_2) + \rho_1^2 < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \theta_2^+ & \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2^+) + \rho_2^2 \geq 0 \text{ ise.} \\ \theta_2^- & \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2^-) + \rho_2^2 < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

Genelliği kaybetmeden $\rho_1^- \leq \rho_2^-$ olduğunu varsayacağız. $S_1 \oplus S_2$ 'nin içi ve sınırını belirtmek için sırasıyla $\text{int}(S_1 \oplus S_2)$ ve $\partial(S_1 \oplus S_2)$ yazacağız.

Eldeki problemi çözmek için iki duruma bakacağız.

Durum 1. $[\rho_1] \cap [\rho_2] = \emptyset$

Bu durumda ne $0 \in \text{int}(S_1 \oplus S_2)$ ne de $0 \in \partial(S_1 \oplus S_2)$ 'dir, yani $0 \notin S_1 \oplus S_2$. Ayrıca, her $\rho_1 \in [\rho_1]$, $\rho_2 \in [\rho_2]$ için $\rho_1 < \rho_2$ olduğundan $X_2 = \emptyset$ 'dir, çünkü herhangi $(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) \in \Omega$ için $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} \neq 0$. Aslında, diğer bir yandan her zaman $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} > 0$ eşitsizliğinin sağlandığını biliyoruz, buna bağlı olarak da θ_2 en küçükken (en büyükken) φ en küçük (en büyük) değerine ulaşır. Buradan ulaşacağımız sonuç ise

$$\varphi^- = \min\varphi(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2^-),$$

$$\varphi^+ = \max\varphi(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2^+).$$

Dolayısıyla optimal nokta X_1 ya da X_3 'e düşer.

X_1 Türündeki Noktalar

Varsayalım ki $[\theta_1]$ dejenere olmayan bir aralık olsun (yani, $\theta_1^+ > \theta_1^-$). Bu durumda $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{-\rho_1}{\rho_2}$ olduğundan $\rho_1\rho_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \rho_1^2 = 0$ iken $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1} = 0$ 'dır. $\sin^2 + \cos^2 = 1$ özdeşliğini kullanarak

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2}$$

değerini buluruz. $\sin(\theta_1 - \theta_2) < 0$ iken $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_1^2} > 0$ ve $\sin(\theta_1 - \theta_2) > 0$ iken $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_1^2} < 0$ olduğundan, $\sin(\theta_1 - \theta_2) < 0$ ($\sin(\theta_1 - \theta_2) > 0$) iken φ en küçüktür (en büyüktür).

Bu nedenle, $\sin(\theta_1 - \theta_2) < 0$ iken $\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1} < 0$ ve $\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2} > 0$ olduğundan, X_1 'in tüm noktalarının arasında $k \in \{0,1\}$ için θ_1

$$\theta_1 - \theta_2^- = \arctan\left(\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2^-)}{\cos(\theta_1 - \theta_2^-)}\right) + \pi$$

$$= \arctan\left(\frac{-\sqrt{1 - \left(\frac{\rho_1^+}{\rho_2}\right)^2}}{-\frac{\rho_1^+}{\rho_2}}\right) + \pi$$

$$= \arctan\left(\frac{\sqrt{(\rho_2^-)^2 - (\rho_1^+)^2}}{\rho_1^+}\right) + \pi.$$

Yani,

$$\theta_1 = \theta_2^- + \arctan\left(\frac{\sqrt{(\rho_2^-)^2 - (\rho_1^+)^2}}{\rho_1^+}\right) + \pi \pm 2\pi k$$

olarak belirlenmişken, eğer $\sin(\theta_1 - \theta_2^-) < 0$ ise, φ 'nin en küçük değerine $x_{1\min} = (\rho_1^+, \rho_2^-, \theta_1, \theta_2^-)$ noktasında ulaşılabildiği sonucuna varırız.

Benzer biçimde, $\theta_2 = \theta_2^+$ varsayılarak, θ_1

$$\theta_1 = \theta_2^+ - \arctan\left(\frac{\sqrt{(\rho_2^-)^2 - (\rho_1^+)^2}}{\rho_1^+}\right) + \pi \pm 2\pi k$$

olarak verildiğinde X_1 'in tüm noktaları arasında eğer $\sin(\theta_1 - \theta_2^+) > 0$ ise, φ 'nin en büyük değerine $x_{1\max} = (\rho_1^+, \rho_2^-, \theta_1, \theta_2^+)$ noktasında ulaşılabılır.

Yukarıdaki analiz şu şekilde özetlenebilir:

1. Eğer $\cos(\theta_1 - \theta_2^-) = \frac{-\rho_1^+}{\rho_2^-}$ ve $\sin(\theta_1 - \theta_2^-) < 0$ ifadelerini sağlayan $\theta_1 \in]\theta_1[$ var ise, her $x_1 \in X_1$ için $\varphi(x_{1\min}) \leq \varphi(x_1)$ 'dir.
2. Eğer $\cos(\theta_1 - \theta_2^+) = \frac{-\rho_1^+}{\rho_2^-}$ ve $\sin(\theta_1 - \theta_2^+) > 0$ ifadelerini sağlayan $\theta_1 \in]\theta_1[$ var ise, her $x_1 \in X_1$ için $\varphi(x_{1\max}) \geq \varphi(x_1)$ 'dir.

X_3 Türündeki Noktalar

Genellikle X_3 , 16 tane nokta içerir. Bizim istediğimiz ise bu 16 nokta arasından, her $x_3 \in X_3$ için $\varphi(x_{3\min}) \leq \varphi(x_3) \leq \varphi(x_{3\max})$ koşulunu sağlayan $x_{3\min}$ ve $x_{3\max}$ noktalarını seçmektir.

$x_{3\min}$ noktasını bulmak için, $\varphi^- = \min\varphi(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2^-)$, eşitliğini anımsayalım. θ_1 'in iki olasılığı bulunduğundan (yani, $\theta_1 \in \{\theta_1^+, \theta_1^-\}$), θ_1 minimum koşuluna göre seçilir. Yani

$$x_{3\min} = (\rho_1, \rho_2, \theta_1^-, \theta_2^-) \text{ ya da } x_{3\min} = (\rho_1, \rho_2, \theta_1^+, \theta_2^-)$$

olur. Eğer her iki değer de $(\theta_1^+$ ve $\theta_2^-)$ minimum koşulunu sağlıyorsa,

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_1^+, \rho_2 = \rho_2^-; \sin(\theta_1 - \theta_2^-) \leq 0 \\ \rho_1 = \rho_1^-, \rho_2 = \rho_2^+; \quad \text{diğer türlü} \end{cases}$$

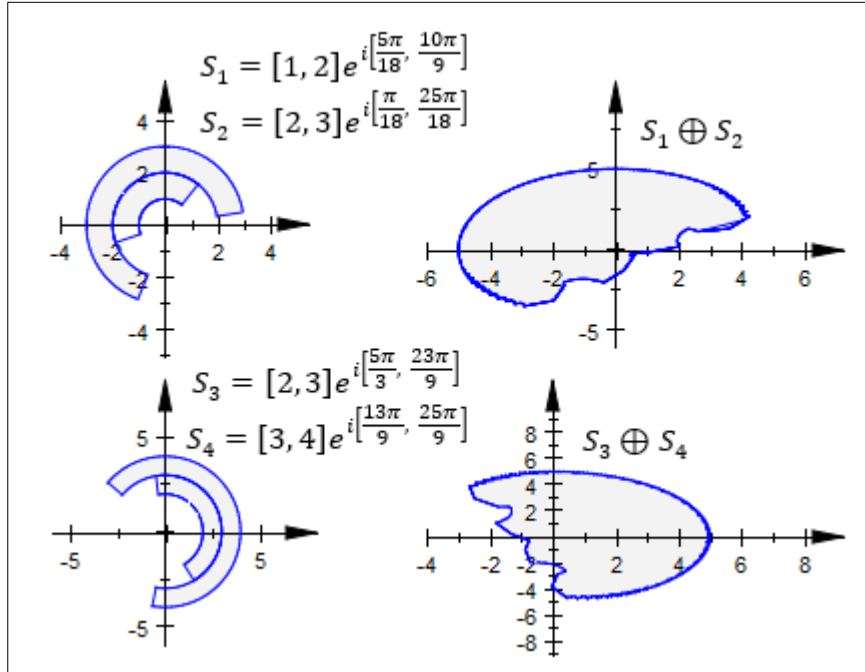
iken

$$x_{3\min} \begin{cases} = (\rho_1, \rho_2, \theta_1^-, \theta_2^-); \sin(\theta_1^- - \theta_2^-) < 0 \text{ ve } \sin(\theta_1^+ - \theta_2^-) \geq 0 \\ = (\rho_1, \rho_2, \theta_1^+, \theta_2^-); \sin(\theta_1^+ - \theta_2^-) < 0 \text{ ve } \sin(\theta_1^- - \theta_2^-) \geq 0 \\ \in \{(\rho_1, \rho_2, \theta_1^-, \theta_2^-), (\rho_1, \rho_2, \theta_1^+, \theta_2^-)\}; \text{ diğer durumlar.} \end{cases}$$

Durum 2. $[\rho_1] \cap [\rho_2] \neq \emptyset$

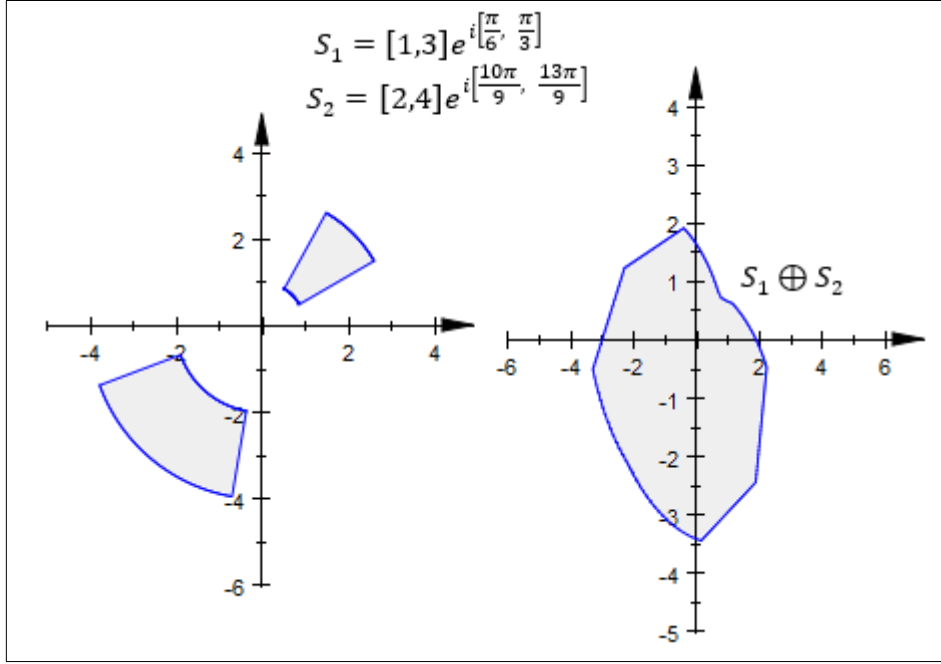
Bu durumda $\rho_1 \cos(\theta_1) + \rho_2 \cos(\theta_2) = 0$ ve $\rho_1 \sin(\theta_1) + \rho_2 \sin(\theta_2) = 0$ gerçekleşebilir. Bu ya $\rho_1 = \rho_2 = 0$, ya da $\rho_1 = \rho_2$ ve $\theta_1 - \theta_2 = \pm(2k+1)\pi$ olduğunda açıkça gerçekleşir. Bu gerçekleştiğinde ise $0 \in \partial(S_1 \oplus S_2)$ ya da $0 \in \text{int}(S_1 \oplus S_2)$ durumu ortaya çıkar. $0 \in \text{int}(S_1 \oplus S_2)$ durumu ayrıca özel dikkat gerektirir, çünkü φ^- ve φ^+ sınırları olağan yollardan belirlenemeyebilir. $S_1 \oplus S_2$ kümesi üzerindeki çalışmamız boyunca $0 \in \text{int}(S_1 \oplus S_2)$ ifadesinin şu iki durumda gerçekleştiğini bulduk:

1. $[\rho_1]$ ve $[\rho_2]$ 'nin dejenere olmamak koşulunda $[\rho_1] \cap [\rho_2] = \rho_1^+ = \rho_2^-$ ifadesi ile her iki $-(2k+1)\pi \in]\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-[$ ve $(2k+1)\pi \in]\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-[$ ifadesi sağlanır. Şekil 4.1 buna iki örnek gösterir.



Şekil 4.1. $[\rho_1] \cap [\rho_2] = \emptyset$ iken $0 \in \text{int}(S_1 \oplus S_2)$ durumuna örnekler

2. $[\rho_1] \cap [\rho_2] \neq \emptyset$ olmasının yanında ya $-(2k+1)\pi \in]\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-[$ ya da $(2k+1)\pi \in]\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-[$ olur. Şekil 4.2 buna bir örnek gösterir.



Şekil 4.2. $]\rho_1[\cap]\rho_2[\neq \emptyset$ iken $0 \in \text{int}(S_1 \oplus S_2)$ durumuna bir örnek

Yukarıdaki ifadelerden φ 'nin herhangi bir değer (yani, $\varphi \in [0, 2\pi]$) olabileceği açıktır. Bu yüzden $\varphi^- = 0$ ve $\varphi^+ = 2\pi$ tanımlanabilir.

Şimdi $0 \notin \text{int}(S_1 \oplus S_2)$ olduğu durumlarda φ^- ve φ^+ 'nin belirlenmesi işine yönelelim. Sıradaki iki alt durumunu göz önüne alacağız.

Altdurum 2.1. $\rho_1^+ = \rho_2^-$

Durum 1'dekine benzer biçimde, φ tanım kümesinde herhangi $(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2)$ için $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} > 0$ 'dır. Bundan dolayı,

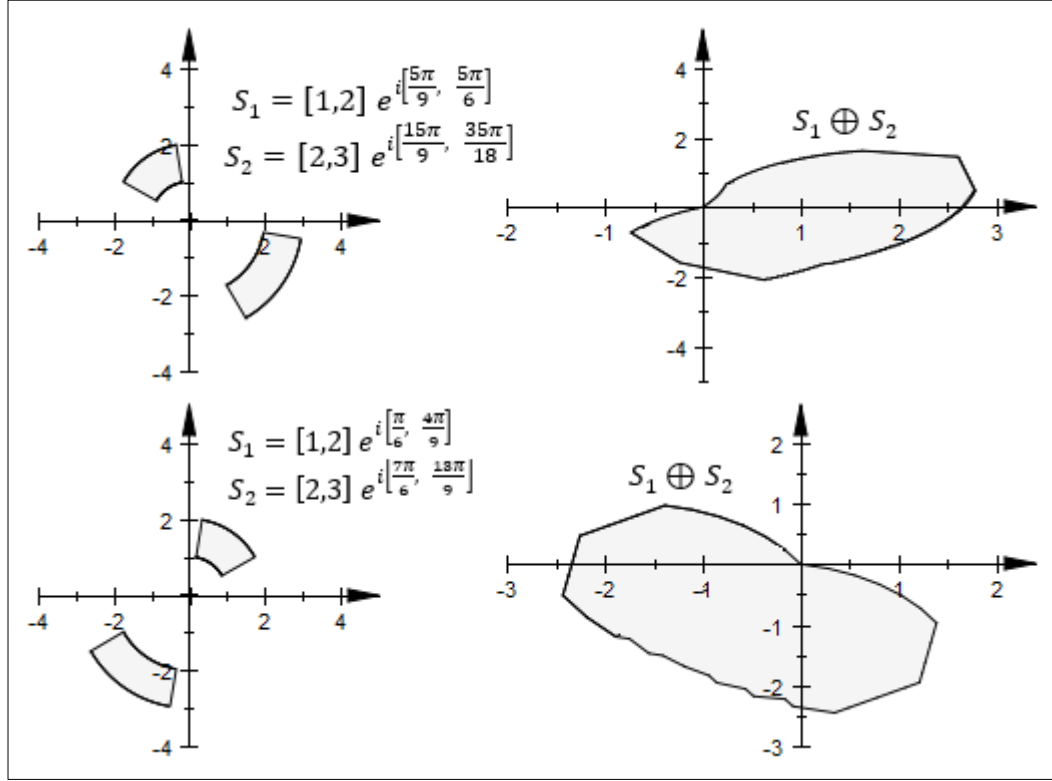
$$\varphi^- = \min \varphi(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2^-),$$

$$\varphi^+ = \max \varphi(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2^+).$$

$0 \in \partial(S_1 \oplus S_2)$ ve $0 \notin \partial(S_1 \oplus S_2)$ durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

$0 \in \partial(S_1 \oplus S_2)$ durumu

Bu durum ya $-(2k+1)\pi \in [\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-]$ ya da $(2k+1)\pi \in [\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-]$ olduğunda gerçekleşir. Şekil 4.3 buna iki örnek gösterir.

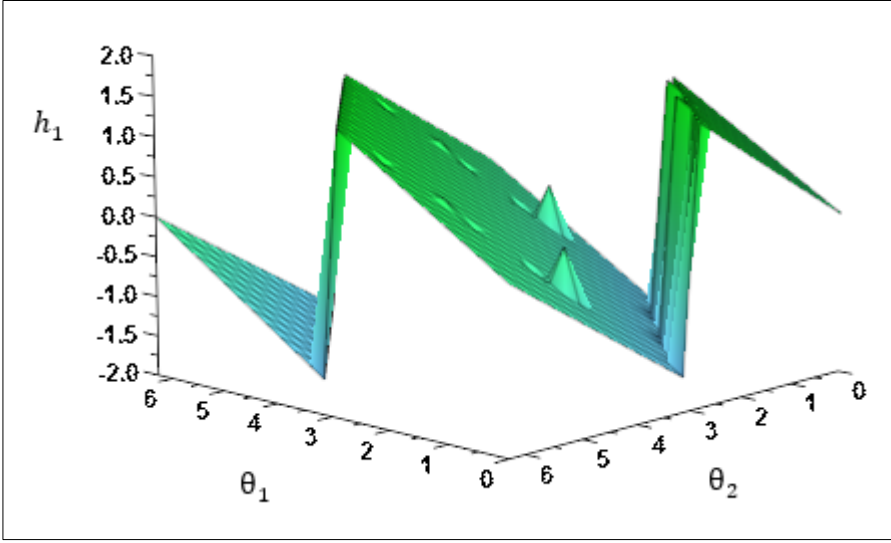


Şekil 4.3. $0 \in \partial(S_1 \oplus S_2)$ durumuna örnekler

Sonuç olarak $\theta_1 - \theta_2 = \pm(2k+1)\pi$ iken φ , $x = (\rho_1^+, \rho_2^-, \theta_1, \theta_2)$ noktasında tanımsızdır. Şimdi de φ 'nin x noktası yakınlarında nasıl davrandığını görelim: $\theta_1 \in [\theta_1]$ ve $\theta_2 \in [\theta_2]$ olsun

$$h_1(\theta_1, \theta_2) = \varphi(\rho_1^+, \rho_2^-, \theta_1, \theta_2) = \arctan\left(\frac{\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)}{\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)}\right)$$

fonksiyonunu düşünelim. Şekil 4.4, $[\theta_1] = [0, 2\pi]$ ve $\theta_2 = [0, 2\pi]$ iken h_1 'in grafiğini gösterir.

Şekil 4.4. h_1 fonksiyonunun grafiği

Şekil 4.4'ten, h_1 fonksiyonunun $|\theta_1 - \theta_2| \rightarrow \pi + \varepsilon$ iken en küçük, ε 'nin yeterince küçük pozitif gerçel sayı olduğu yerde $|\theta_1 - \theta_2| \rightarrow \pi - \varepsilon$ iken de en büyük değerine ulaştığı görülür.

Varsayalım ki $\theta_2 = \theta_2^-$ olsun, bu durumda φ^- şöyle hesaplanır: $\theta_1 = \theta_2^- + \varepsilon \pm (2k + 1)\pi$ olacak biçimde $\theta_1 \in]\theta_1[$ varsa, $\sin(\theta_1 - \theta_2^-) < 0$ 'dır, bu da $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} < 0$ ve $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2} > 0$ ifadelerini ortaya koyar, böylece φ 'nin en küçük değeri $\rho_1 = \rho_1^+$ ve $\rho_2 = \rho_2^-$ kullanılarak hesaplanır. Bu da demektir ki ϕ en küçük değerine $x_{1\min} = (\rho_1^+, \rho_2^-, \theta_1, \theta_2^-) \in X_1$, noktasında ulaşır, yani,

$$\varphi^- = \varphi(\rho_1^+, \rho_2^-, \theta_1, \theta_2^-) = \arctan\left(\frac{\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2^-)}{\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2^-)}\right).$$

Eğer $\theta_2^- + \varepsilon \pm (2k + 1)\pi \notin]\theta_1[$ ise, φ en küçük değerine

$$x_{3\min} \in \{(\rho_1, \rho_2, \theta_1^-, \theta_2^-), (\rho_1, \rho_2, \theta_1^+, \theta_2^-)\} \subset X_3$$

noktasında ulaşır, burada $\theta_1^+ - \theta_2^- = \pm(2k + 1)\pi$ iken

$$x_{3\min} \in \{(\rho_1, \rho_2, \theta_1^-, \theta_2^-), (\rho_1^-, \rho_2^+, \theta_1^+, \theta_2^-)\}.$$

Şimdi φ^+ 'yi hesaplayalım. Varsayalım ki $\theta_2 = \theta_2^+$ olsun. Eğer $\theta_1 = \theta_2^+ - \varepsilon \pm (2k + 1)\pi$ olacak biçimde $\theta_1 \in]\theta_1[$ varsa $\sin(\theta_1 - \theta_2^+) > 0$ 'dır, ki bu da $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} > 0$ ve $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2} < 0$, böylece φ 'nin en büyük değeri $\rho_1 = \rho_1^+$ ve $\rho_2 = \rho_2^-$ kullanılarak hesaplanır.

Yani φ en büyük değerine $x_{1\max} = (\rho_1^+, \rho_2^-, \theta_1, \theta_2^+) \in X_1$ noktasına ulaşır, diğer bir ifadeyle

$$\varphi^+ = \varphi(\rho_1^+, \rho_2^-, \theta_1, \theta_2^+) = \arctan\left(\frac{\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2^+)}{\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2^+)}\right).$$

Eğer $\theta_2^+ - \varepsilon \pm (2k + 1)\pi \notin]\theta_1[$ ise, φ en büyük değerine

$$x_{3\max} \in \{(\rho_1, \rho_2, \theta_1^-, \theta_2^+), (\rho_1, \rho_2, \theta_1^+, \theta_2^+)\} \subset X_3$$

noktasında ulaşır, burada $\theta_1^- - \theta_2^+ = \pm(2k + 1)\pi$ iken

$$x_{3\max} \in \{(\rho_1^-, \rho_2^+, \theta_1^-, \theta_2^+), (\rho_1, \rho_2, \theta_1^+, \theta_2^+)\}.$$

$0 \notin \partial(S_1 \oplus S_2)$ durumu

Bu durum $\theta_1 - \theta_2 \neq \pm(2k + 1)\pi$ olduğunda gerçekleşir. Sonuç olarak

$$\varphi^- = \varphi(x_{3\min}),$$

$$\varphi^+ = \varphi(x_{3\max}).$$

Başka bir deyişle, φ en büyük ve en küçük değerine X_3 türündeki noktalarda ulaşır. Bunu kanıtlamak için de, her $x_1 \in X_1$ için $\varphi(x_{1\min}) \leq \varphi(x_1) \leq \varphi(x_{1\max})$ eşitsizliğini sağlayan $x_{1\min}, x_{1\max} \in X_1$ noktalarıyla birlikte $X_1 \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Şimdi

$$\varphi(x_{3\min}) < \varphi(x_{1\min})$$

ve

$$\varphi(x_{3\max}) > \varphi(x_{1\max})$$

olduğunu gösterelim.

$\varphi(x_{3\min}) < \varphi(x_{1\min})$ olduğunu kanıtlamak için, $x_{1\min} = (\rho_1, \rho_2, \alpha, \theta_2^-)$ olduğunu göz önüne alalım, burada $\alpha \in]\theta_1[$ öyle ki $\cos(\alpha - \theta_2^-) = \frac{-\rho_1}{\rho_2}$ biçimindedir. Eğer $\sin(\alpha - \theta_2^-) < 0$ ise $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} < 0$ ve $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2} > 0$ 'dır, diğer bir ifadeyle $x_{1\min} = (\rho_1^+, \rho_2^-, \alpha, \theta_2^-)$. Ancak böyle bir nokta φ 'nin tanım kümesinde bulunmaz. Eğer $\sin(\alpha - \theta_2^-) > 0$ ise $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} > 0$ ve $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2} < 0$ 'dır, yani $x_{1\min} = (\rho_1^-, \rho_2^+, \alpha, \theta_2^-)$.

$$h_2(\theta_1) = \varphi(\rho_1^-, \rho_2^+, \theta_1, \theta_2^-) = \arctan\left(\frac{\rho_1^- \sin(\theta_1) + \rho_2^+ \sin(\theta_2^-)}{\rho_1^- \cos(\theta_1) + \rho_2^+ \cos(\theta_2^-)}\right)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. İkinci türevini $\sin(\alpha - \theta_2^-) > 0$ için düşünersek

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial \theta_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x_{1\min})}{\partial \theta_1^2} < 0$$

buluruz. Dolayısıyla h_2 'nin grafiği $\theta_1 = \alpha$ çevresinde aşağı yönlü içbükeydir.

Böylece, yukarıda sözü edilen bilgilere dayanarak h_2 'nin en küçük değerine $[\theta_1]$ 'in bitim noktalarından birinde ulaşacağı sonucuna varırız. Sonuç olarak $\varphi(x_{3\min}) < \varphi(x_{1\min})$ eşitsizliğini elde ederiz. Benzer biçimde $\varphi(x_{3\max}) > \varphi(x_{1\max})$ olduğu da gösterilebilir.

Altdurum 2.2. $]\rho_1[\cap]\rho_2[\neq \emptyset$

Bu durumda $\rho_1^+ > \rho_1^-$ 'dir ve φ 'nin uç değerlerini alabildiği yerler yalnızca X_3 türündeki noktalardır, diğer bir ifadeyle

$$\varphi(x_{3\min}) < \begin{cases} \varphi(x_1); \text{ her } x_1 \in X_1 \text{ için} \\ \varphi(x_2); \text{ her } x_2 \in X_2 \text{ için} \end{cases}$$

ve

$$\varphi(x_{3\max}) > \begin{cases} \varphi(x_1); \text{ her } x_1 \in X_1 \text{ için} \\ \varphi(x_2); \text{ her } x_2 \in X_2 \text{ için} \end{cases}$$

$\varphi(x_{3\min}) < \varphi(x_1)$ eşitsizliğini görmek için, $\cos(\alpha - \theta_2) = \frac{-\rho_1}{\rho_2}$ olacak biçimde $\alpha \in]\theta_1[$ olduğunu varsayalım. Eğer $\sin(\alpha - \theta_2) > 0$ ise $x_1 = (\rho_1^-, \rho_2^+, \alpha, \theta_2)$ 'dir.

Bundan dolayı $\frac{\partial^2 \varphi(x_1)}{\partial \theta_1^2} < 0$ eşitsizliği $\varphi(x_{3\min}) < \varphi(x_1)$ olduğunu gösterir.

$\sin(\alpha - \theta_2) < 0$ olduğunu varsayarsak, bu durumda $\rho_1 = \rho_1^+$ ve $\rho_2 = \rho_2^-$ elde edilir. Bunun sonucunda $\cos(\alpha - \theta_2) = \frac{-\rho_1^+}{\rho_2^-} < -1$ elde edilir ki bu olanaksızdır.

$\varphi(x_{3\max}) > \varphi(x_1)$ eşitsizliğini görmek için, $\cos(\beta - \theta_2) = \frac{-\rho_1}{\rho_2}$ olacak biçimde $\beta \in]\theta_1[$ olduğunu varsayalım. Eğer $\sin(\beta - \theta_2) < 0$ ise $x_1 = (\rho_1^-, \rho_2^+, \beta, \theta_2)$ 'dir. Dolayısıyla $\frac{\partial^2 \varphi(x_1)}{\partial \theta_1^2} > 0$ eşitsizliği $\varphi(x_{3\max}) > \varphi(x_1)$ olduğunu gösterir. Eğer $\sin(\beta - \theta_2) > 0$ alırsak $\cos(\beta - \theta_2) = \frac{-\rho_1^+}{\rho_2^-} < -1$ elde ederiz ki bu da olanaksızdır.

Benzer yolla herhangi bir $x_2 \in X_2$ için $\varphi(x_{3\min}) < \varphi(x_2)$ ve $\varphi(x_{3\max}) > \varphi(x_2)$ olduğunu gösterebiliriz.

Artık φ^- ve φ^+ 'yı hesaplamak için $x_{3\min}$ ve $x_{3\max}$ değerlerini bulmanın yeterli olduğunu biliyoruz. Biliyoruz ki

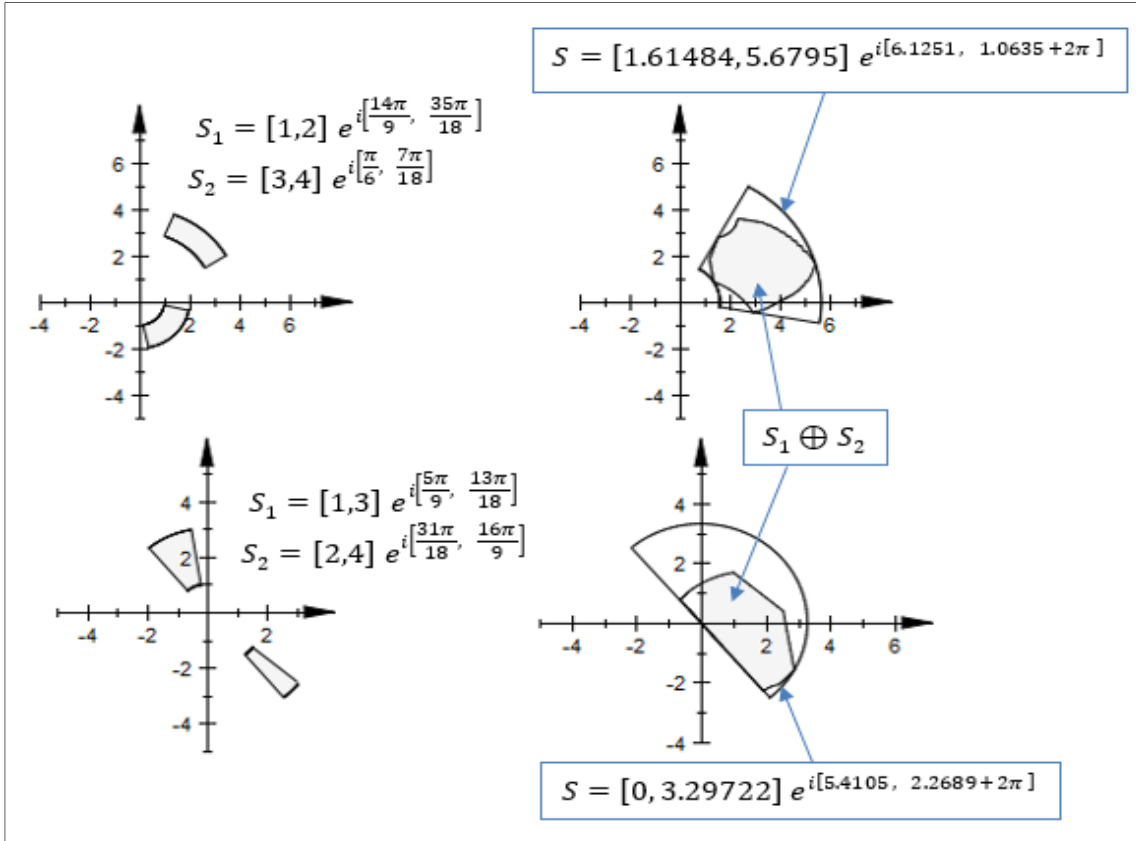
$$x_{3\min} \in \{(\rho_1, \rho_2, \theta_1^-, \theta_2^+), (\rho_1, \rho_2, \theta_1^-, \theta_2^-), (\rho_1, \rho_2, \theta_1^+, \theta_2^-)\},$$

$$x_{3\max} \in \{(\rho_1, \rho_2, \theta_1^-, \theta_2^+), (\rho_1, \rho_2, \theta_1^+, \theta_2^+), (\rho_1, \rho_2, \theta_1^+, \theta_2^-)\},$$

dir.

Şimdi $x_{3\min} \neq (\rho_1, \rho_2, \theta_1^+, \theta_2^+)$ olduğunu görelim. Eğer $\sin(\theta_1^+ - \theta_2^+) < 0$ ise $\rho_1 = \rho_1^+$ ve $\rho_2 = \rho_2^-$ 'dir. $\rho_1^+ > \rho_2^-$ olduğundan $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} > 0$ 'dır ki bu durum $\theta_1 = \theta_1^+$ eşitliğine bağlı olarak minimum kuralına aykırıdır. Eğer $\sin(\theta_1^+ - \theta_2^+) > 0$ ise $\rho_1 = \rho_1^-$ ve $\rho_2 = \rho_2^+$ 'dir. $\rho_1^- < \rho_2^+$ olduğundan, $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} > 0$ 'dır ki bu durum da $\theta_2 = \theta_2^+$ eşitliğine bağlı olarak minimum kuralına aykırıdır. Benzer yolla $x_{3\max} \neq (\rho_1, \rho_2, \theta_1^-, \theta_2^-)$ olduğunu da gösterebiliriz.

φ^- ve φ^+ değerlerini hesaplamak için kullanılan algoritmalara giriş yapmadan önce anımsamalıyız ki $\varphi \in [0, 2\pi]$ 'dir, dolayısıyla $\varphi^+ < \varphi^-$ eşitsizliğiyle karşılaşsak, aslında $\mathbb{S}\{S_1 \oplus S_2\} = S \in S^*(\mathbb{C})$ ile sonuçlanmış demektir, bu durumda φ^+ 'ya yalnızca 2π ekleriz. Şekil 4.5 buna iki örnek gösterir.



Şekil 4.5. $\mathbb{S}\{S_1 \oplus S_2\} \in S^*(\mathbb{C})$ durumuna örnekler

Algoritma φ^- :

eğer $0 \in \text{int}(S_1 \oplus S_2)$

$$\varphi^- = 0$$

aksi halde eğer $]\rho_1[\cap]\rho_2[\neq \emptyset$

$$\varphi^- = \varphi(x_{3\min})$$

aksi halde eğer $\rho_1^+ = \rho_2^-$

eğer $\theta_2^- + \varepsilon \pm (2k + 1)\pi \in]\theta_1[$

$$\varphi^- = \varphi(x_{1\min})$$

yoksa

$$\varphi^- = \varphi(x_{3\min})$$

bitir

aksi halde eğer $\theta_2^- + \arctan\left(\frac{\sqrt{(\rho_2^-)^2 - (\rho_1^+)^2}}{\rho_1^+}\right) \pi \pm 2\pi k \in]\theta_1[$ ve $\sin(\theta_1 - \theta_2^-) < 0$

$$\varphi^- = \varphi(x_{1\min})$$

yoksa

$$\varphi^- = \varphi(x_{3\min})$$

bitir

bitir.

Algoritma φ^+ :

eğer $0 \in \text{int}(S_1 \oplus S_2)$

$$\varphi^+ = 2\pi$$

aksi halde eğer $]\rho_1[\cap]\rho_2[\neq \emptyset$

$$\varphi^+ = \varphi(x_{3\max})$$

aksi halde eğer $\rho_1^+ = \rho_2^-$

eğer $\theta_2^+ - \varepsilon \pm (2k + 1)\pi \in]\theta_1[$

$$\varphi^+ = \varphi(x_{1\max})$$

yoksa

$$\varphi^+ = \varphi(x_{3\max})$$

bitir

aksi halde eğer $\theta_2^+ - \arctan\left(\frac{\sqrt{(\rho_2^-)^2 - (\rho_1^+)^2}}{\rho_1^+}\right) \pi \pm 2\pi k \in]\theta_1[$ ve $\sin(\theta_1 - \theta_2^+) > 0$

$$\varphi^+ = \varphi(x_{1\max})$$

değilse

$$\varphi^+ = \varphi(x_{3\max})$$

bitir

bitir.

4.2.2. $[\rho]$ Büyüklük intervalinin sınırlarını hesaplamak

$$\theta = \theta_1 - \theta_2 \in [\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-] \text{ iken}$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\theta)}$$

olduğunu anımsayalım.

Karekök fonksiyonu artan fonksiyon olduğundan, $h = \rho^2$ en küçük (en büyük) değerine getirilerek ρ en küçük (en büyük) değerine getirilebilir Dolayısıyla uç noktalarını belirleyeceğimiz fonksiyon,

$$h: D \rightarrow [0, \infty)$$

öyle ki $D = [\rho_1] \times [\rho_2] \times [\theta]$ iken

$$h = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\theta)$$

biçimindedir.

Amacımız $\min h = h(v_{\min}), \max h = h(v_{\max})$, olacak biçimde $v_{\min}, v_{\max} \in D$ noktalarını bulmak. $\nabla h = 0$ olduğu yerde h 'nin uç noktaları

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -2\rho_1\rho_2\sin(\theta) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \rho_1} = 2\rho_1 + 2\rho_2\cos(\theta) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \rho_2} = 2\rho_2 + 2\rho_1\cos(\theta) = 0$$

olarak bulunur.

Burada iki kritik nokta vardır:

- Herhangi bir θ için $(0,0,\theta)$,
- $\rho_1 = \rho_2$ ve $\theta = \pm(2k+1)\pi$ için (ρ_1, ρ_2, θ) .

Eğer $\cos(\theta) < 0$ ise $\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} > 0$ olur. $\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_1^2}$ ve $\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_2^2}$ pozitif olduğundan, herhangi bir kritik nokta h 'nin mutlak minimumu haline gelecektir. Yani aslında, herhangi bir $v \in D$ kritik noktası için $h(v) = 0$.

Varsayalım ki $a = \min(\cos(\theta))$ ve $b = \max(\cos(\theta))$ olsun. Bu durumda açıktır ki

$$a = \begin{cases} -1; \pm(2k+1)\pi \in [\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-] \\ \min(\cos(\theta_1^- - \theta_2^+), \cos(\theta_1^+ - \theta_2^-)); \text{diğer türlü} \end{cases}$$

ve

$$b = \begin{cases} 1; \pm 2k\pi \in [\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-] \\ \max(\cos(\theta_1^- - \theta_2^+), \cos(\theta_1^+ - \theta_2^-)); \text{diğer türlü} \end{cases}$$

Dolayısıyla

$$\min h = \min(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2a\rho_1\rho_2),$$

$$\max h = \max(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2b\rho_1\rho_2)$$

noktalarına sahip olmamız gerektiği kolayca görülebilir.

Öncelikle $\max h = h(v_{\max})$ noktasını belirleyelim. $\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_1^2} = 2 > 0$ ve $\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_2^2} = 2 > 0$ olması

$$v_{\max} \in \{(\rho_1, \rho_2, \theta) : \rho_1 \in \{\rho_1^+, \rho_1^-\}, \rho_2 \in \{\rho_2^+, \rho_2^-\}, \cos(\theta) = b\},$$

olduğunu söyler. $\rho_1^- \leq \rho_2^-$ olarak varsaydığımızdan, herhangi bir θ için

$$\frac{\partial h(\rho_1^-, \rho_2^-, \theta)}{\partial \rho_2} \geq 0$$

olur ki bu da $v_{\max} \neq (\rho_1^-, \rho_2^-, \theta)$ olduğunu söyler.

Şimdi, eğer $b \geq 0$ ise $v_{\max} = (\rho_1^+, \rho_2^+, \theta)$, $b < 0$ ise de

$$h(v_{\max}) = \max(h(\rho_1^-, \rho_2^+, \theta), h(\rho_1^+, \rho_2^-, \theta), h(\rho_1^+, \rho_2^+, \theta))$$

elde edilir.

$\min h = h(v_{\min})$ noktasını belirlemek için, eğer h 'nin bir v kritik noktası varsa, bu durumda açıktır ki $h(v_{\min}) = h(v) = 0$. Eğer $a \geq 0$ ise, $\frac{\partial h}{\partial \rho_1} > 0$ ve $\frac{\partial h}{\partial \rho_2} > 0$ 'dır; böylece $\min h, \rho_1 = \rho_1^-$ ve $\rho_2 = \rho_2^-$ yani $v_{\min} = (\rho_1^-, \rho_2^-, a)$ kullanılarak hesaplanır. $a < 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda düşünülmesi gereken üç türlü nokta vardır:

- $V_1 = \{\rho_1^*, \rho_2, \theta\}: \rho_1^* \in]\rho_1^-, \rho_2^+], \rho_2 \in \{\rho_2^+, \rho_2^-\}, \cos(\theta) = a\}$, burada $\rho_1^*, \frac{\partial h}{\partial \rho_1} = 0$ eşitliğinin çözümüdür ve ρ_2 minimum koşuluna uygun seçilmiştir.
- $V_2 = \{(\rho_1, \rho_2^*, \theta): \rho_1 \in \{\rho_1^+, \rho_1^-\}, \rho_2^* \in]\rho_2^-, \rho_1^*], \cos(\theta) = a\}$, burada $\rho_2^*, \frac{\partial h}{\partial \rho_2} = 0$ eşitliğinin çözümüdür ve ρ_1 minimum koşuluna uygun seçilmiştir.
- $V_3 = \{(\rho_1, \rho_2, \theta): \rho_1 \in \{\rho_1^+, \rho_1^-\}, \rho_2 \in \{\rho_2^+, \rho_2^-\}, \cos(\theta) = a\}$, burada ρ_1 ve ρ_2 minimum koşuluna uygun seçilmiştir.

Öncelikle $v_{\min} \notin V_2$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\frac{\partial h}{\partial \rho_2} = 2\rho_2 + 2\rho_1 \cos(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \rho_2^* = -\rho_1 a$$

olduğunu düşünelim. Eğer $\rho_2^* = -\rho_1 a \in]\rho_2^-, \rho_1^*]$ ise $\rho_2^* < \rho_1$ elde edilir ki, buradan,

$$\frac{\partial h}{\partial \rho_1} = 2\rho_1 + 2\rho_2^* a > 0.$$

Bu da $\rho_1 \in \{\rho_1^+, \rho_1^-\}$ 'nin en uygun seçiminin $\rho_1 = \rho_1^-$ olduğu anlamına gelir. Ancak $\rho_1^- \leq \rho_2^-$ olduğundan $\rho_1 = \rho_1^-$ olarak kullanmak demek, herhangi bir a için $\rho_2^* = -\rho_1 a \notin]\rho_2^-, \rho_1^*]$ demektir. Bu nedenle $v_{\min} \notin V_2$.

Şimdi $\rho_1^* = -\rho_2^- a \in]\rho_1^-, \rho_2^+]$ iken $v_{\min} = (\rho_1^*, \rho_2^-, \theta)$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\frac{\partial h}{\partial \rho_1} = 2\rho_1 + 2\rho_2 \cos(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \rho_1^* = -\rho_2 a.$$

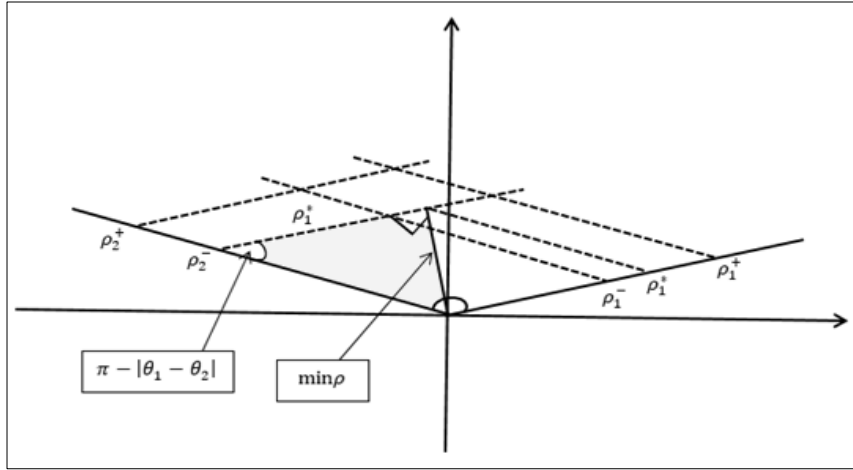
olduğunu düşünelim. Eğer $\rho_1^* = -\rho_2 a \in]\rho_1[$ ise $\rho_1^* < \rho_2$ elde edilir ki, buradan,

$$\frac{\partial h}{\partial \rho_2} = 2\rho_2 + 2\rho_1^* a > 0.$$

Bu nedenle de $\rho_2 = \rho_2^-$ olarak kullanmalıyız. Dolayısıyla eğer $\rho_1^* = -\rho_2^- a \in]\rho_1[$ ise,

$$\begin{aligned} h(\rho_1^*, \rho_2^-, \theta) &= (-\rho_2^- a)^2 + (\rho_2^-)^2 + 2(\rho_2^- a)\rho_2^- a \\ &= (\rho_2^-)^2(1 - a^2) \\ &= (\rho_2^- \sin(\theta))^2 \end{aligned}$$

bulunur ki bu değer, h fonksiyonunun V_1 türündeki noktalar üzerinde alabileceği en küçük değerdir. Bu durum Şekil 4.6 içinde örneklenmiştir.



Şekil 4.6. $\rho_1^* = -\rho_2^- a \in]\rho_1[$ durumu

Eğer $\rho_1^* = -\rho_2^- a \notin]\rho_1[$ ise elbette $v_{\min} \in V_3$ elde edilir. Burada $v_{\min} \neq (\rho_1^+, \rho_2^+, \theta)$ olduğu kolayca görülür. Böylece, $\cos(\theta) = a$ iken

$$h(v_{\min}) = \min(h(\rho_1^-, \rho_2^-, \theta), h(\rho_1^-, \rho_2^+, \theta), h(\rho_1^+, \rho_2^-, \theta))$$

elde edilir.

Önceki sonuçları kullanarak, sırasıyla, $\max h$ ve $\min h$ değerlerini hesaplamak için şu iki algoritmayı önereceğiz:

Algoritma $\max h$:

eğer $b \geq 0$

$$\max h = h(\rho_1^+, \rho_2^+, \theta)$$

yoksa

$$\max h = \max(h(\rho_1^-, \rho_2^+, \theta), h(\rho_1^+, \rho_2^-, \theta), h(\rho_1^+, \rho_2^+, \theta))$$

bitir.

Algoritma $\min h$:

eğer $a \geq 0$

$$\min h = h(\rho_1^-, \rho_2^-, \theta)$$

aksi halde eğer $\rho_1 = \rho_2 = 0$ ya da $[\rho_1] \cap \rho_2] \neq \emptyset$ ve $\pm(2k+1)\pi \in [\theta_1^- - \theta_2^+, \theta_1^+ - \theta_2^-]$

$$\min h = 0$$

aksi halde eğer $\rho_1^* = -\rho_2^- a \in]\rho_1[$

$$\min h = h(\rho_1^*, \rho_2^-, \theta)$$

değilse

$$\min h = \min(h(\rho_1^-, \rho_2^-, \theta), h(\rho_1^-, \rho_2^+, \theta), h(\rho_1^+, \rho_2^-, \theta))$$

bitir.

5. TARTIŞMA

5.1. Dikdörtgen Aritmetiği

Bu bölümde, önerilen algoritmanın etkinliğini ve sağlamlığını göstermek için sayısal sonuçlar vereceğiz. Ayrıca kendi algoritmamızı Lohner ve Gudenberg (1985) tarafından yapılan algoritmalarla ile kıyaslayacağız.

Örnek 5.1.

$$Z_1 = [x_1^-, x_1^+] + i[y_1^-, y_1^+] = [-3, 4] + i[1, 2]$$

$$Z_2 = [x_2^-, x_2^+] + i[y_2^-, y_2^+] = [-4, 3] + i[-3, -1].$$

aralıklarını düşünelim.

Hatırlayalım ki

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

minf'nin hesaplanması

$$x_{2\min 1} = 0.535183758487996 \in]x_2[$$

$$f(x_1^-, x_{2\min 1}, y_1^+, y_2^+) = -2.802775637731994$$

$$x_{2\min 2} = -0.618033988749895 \in]x_2[$$

$$f(x_1^+, x_{2\min 2}, y_1^+, y_2^+) = -3.236067977499790 = \min f.$$

maxf'nin hesaplanması

$$x_{2\max 1} = -1.387425886722793 \in]x_2[$$

$$f(x_1^-, x_{2\max 1}, y_1^-, y_2^+) = 1.081138830084190$$

$$x_{2\max 2} = 1.280776406404415 \in]x_2[$$

$$f(x_1^+, x_{2\max 2}, y_1^-, y_2^+) = 1.561552812808830 = \max f.$$

Şimdi g fonksiyonunu hatırlayalım:

$$g(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

ming'nin hesaplanması

$$x_{2\min 1} = -0.162277660168380 \in]x_2[$$

$$g(x_1^-, x_{2\min 1}, y_1^-, y_2^+) = -3.081138830084190$$

$$x_{2\min 2} = -0.302775637731995 \in]x_2[$$

$$g(x_1^-, x_{2\min 2}, y_1^+, y_2^+) = -3.302775637731994 = \text{ming}.$$

maxg'nin hesaplanması

$$x_{2\max 1} = 0.123105625617661 \in]x_2[$$

$$g(x_1^+, x_{2\max 1}, y_1^-, y_2^+) = 4.061552812808831$$

$$x_{2\max 2} = 0.236067977499790 \in]x_2[$$

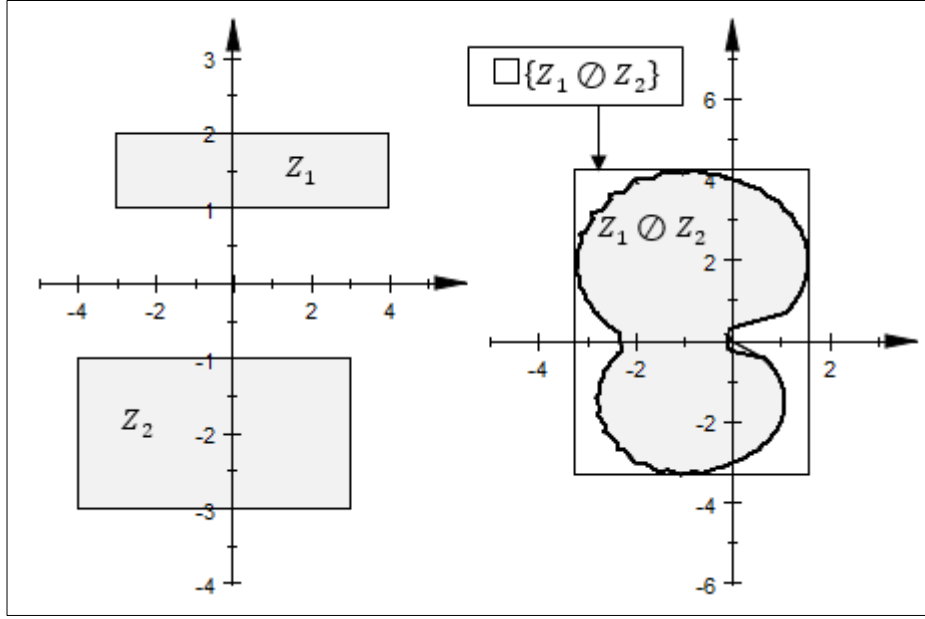
$$g(x_1^+, x_{2\max 2}, y_1^+, y_2^+) = 4.236067977499790 = \text{maxg}.$$

Bundan dolayı, optimal dikdörtgen

$$\square\{Z_1 \otimes Z_2\}$$

$$= [-3.2360679774, 1.5615528128] + i[-3.30277563773, 4.2360679774]$$

biçimindedir. Örnek için Şekil 5.1'e bakılabilir.



Şekil 5.1. Yöntemimiz ile elde edilen $Z_1 \cup Z_2$ kümesini içeren en küçük dikkörtgen

Eğer Lohner ve Gudenberg (1985) tarafından yapılan algoritmalarını kullanmış olsaydık, yukarıdaki sonuçlara ulaşmak için adayların çok büyük sayısını hesaplamak zorunda kalacaktık. Özellikle bu algoritmalar, $\max f$ ya da $\min f$ 'yi bulmak için 32 sabit noktanın hesaplanmasını ve f 'nin 32'ye kadar fonksiyon değerinin tahminini gerektirir, ayrıca $\max g$ ya da $\min g$ 'yi bulmak için de aynı sayıda hesaplama gereklidir.

Bu örnek gösteriyor ki var olan algoritma tüm yürütülme zamanı boyunca içinde büyük miktarda gereksiz hesaplama yapıldığından dolayı devasa boyutlara ulaşabilir. Ayrıca bu örnek, algoritmamızın var olan algoritmadan önemli ölçüde (yaklaşık 240 kat hızlı) daha iyi çalıştığını gösteriyor.

5.2. Kutupsal Aritmetiği

Bu bölümde, önerilen algoritmaların sağlamlığını ve verimliliğini göstermek için sayısal örnekler vereceğiz. Ayrıca algoritmalarımızı Candau vd (2006) tarafından yapılan algoritmalarla karşılaştıracacağız.

Örnek 5.2.

$$S_1 = [2,3]e^{i\left[\frac{5\pi}{9}, \frac{4\pi}{3}\right]}$$

$$S_2 = [3,5]e^{i\left[0, \frac{5\pi}{6}\right]}$$

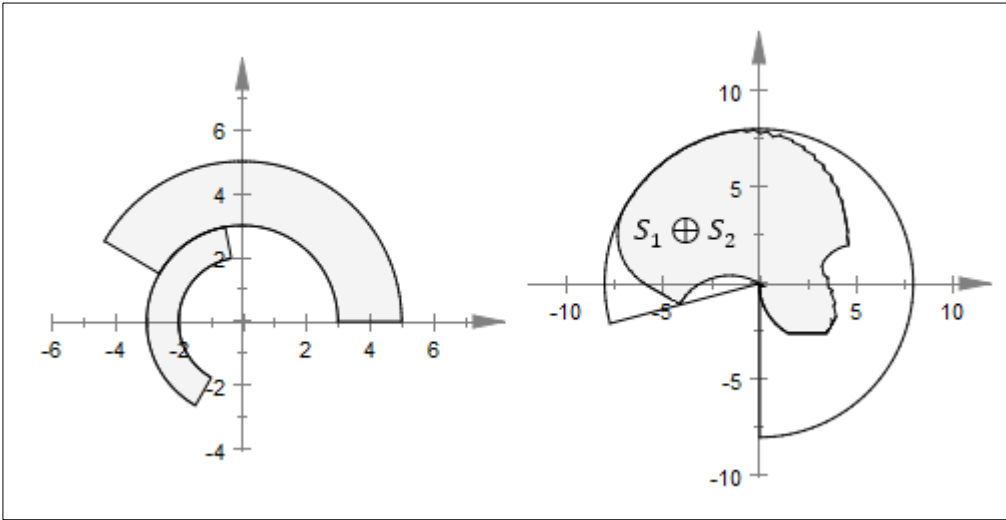
olduğunu düşünelim.

Algoritmalarımızı kullanarak şunu elde ederiz:

$$[\rho] = [0,8]$$

$$[\varphi] = [4.71674, 9.68658]$$

elde edilen sektör Şekil 5.2'de gösterilmiştir.



Şekil 5.2. Yöntemimiz ile elde edilen sonuçlar

Eğer Candau vd (2006) algoritmalarını kullanırsak

$$[\rho] = [0,8]$$

$$[\varphi] = [0.4, 3.4034]$$

elde ederiz.

Örnek 5.3.

$$S_1 = [2, 3.5]e^{i\left[\frac{5\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}\right]}$$

$$S_2 = [4, 5]e^{i\left[\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{6}\right]}$$

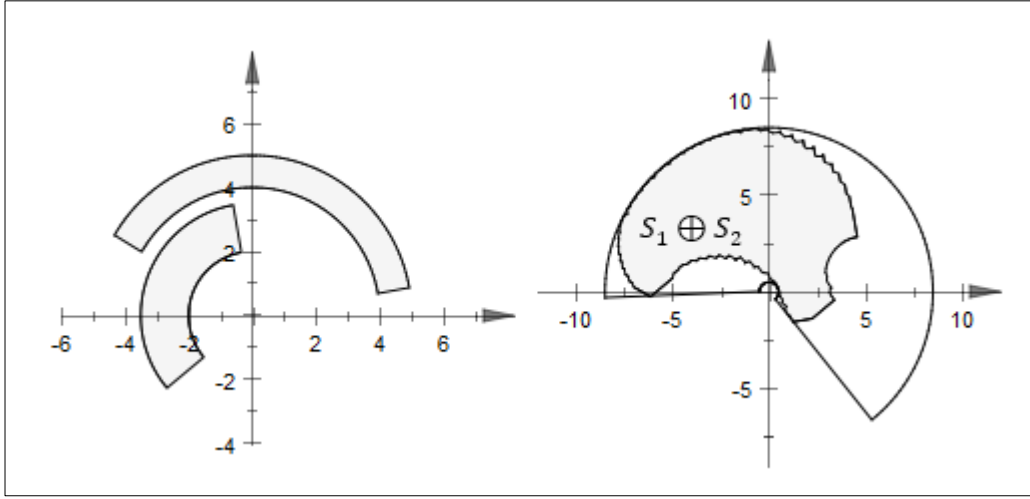
olduğunu düşünelim.

Algoritmalarımızı kullanarak şunu elde ederiz:

$$[\rho] = [0.5, 8.5]$$

$$[\varphi] = [5.39228, 9.4654]$$

Şekil 5.3'te gösterilmiştir.



Şekil 5.3. Yöntemimiz ile elde edilen sonuçlar

Candau vd (2006) algoritmalarını kullanırsak $\varphi^- \in \{5.39228, 0.555\}$ için

$$[\rho] = [0.5, 8.5]$$

$$[\varphi] = [\varphi^-, 3.1822]$$

elde ederiz. Eğer bunların en küçüğünü seçersek, bu durumda $[\varphi] = [0.555, 3.1822]$ olur ki bu da en uygun değildir.

Bu sonuçlardan hareketle, Candau vd (2006) algoritmaları φ için en uygun sınırları bulmakta başarısız olabileceği sonucuna varırız.

5.3. Uygulama Örnek

Bu bölümde, her iki aritmetik (dikdörtgen ve kutupsal) Havriliak-Negami modeline uygulanmakta ve çözümleri karşılaştırılmaktadır. Havriliak-Negami durulması, dielektrik dağılım eğrisinin asimetri ve genişliğini hesaba katan Debye durulma modelinin ampirik bir modifikasyonudur. Bu model ilk olarak Debye denkleminde iki üstel parametre ekleyerek bazı polimerlerin dielektrik durulmasını tanımlamak için kullanılmıştır (Havriliak ve Negami, 1967):

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{(1 + (i\omega\tau)^{\alpha})^{\beta}}, 0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, i = \sqrt{-1}$$

Burada, ε_s ve ε_{∞} sırasıyla statik ve sonsuz dielektrik sabitleri, $0 < \tau$ 'ya makroskobik durulma zamanı, α ve β 'ya ampirik üsler denir.

Varsayalım ki $\varepsilon_{\infty} = 3$, $\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty} = 6$, $\alpha = [0.1,1]$, $\beta = 1$, $\ln(\tau) = [-7,5]$,
 $\omega = 2\pi 10^{-2}$ rad/s olsun.

Dikdörtgen Çözümü:

$\varepsilon(\omega)$ fonksiyonun aralık fonksiyonunu bulalım

$$\begin{aligned} [f_1] &= \varepsilon_{\infty} + \frac{\Delta\varepsilon}{(1 + (i\omega\tau)^{\alpha})^{\beta}} \\ &= 3 + \frac{6}{1 + \left(\left(e^{\frac{\pi i}{2}} \right) (2\pi 10^{-2}) (e^{[-7,5]}) \right)^{[0.1,1]}} \\ &= 3 + \frac{6}{1 + \left(\left(e^{\frac{\pi i}{2}} \right) (2\pi 10^{-2}) [0.00091188, 148.4132] \right)^{[0.1,1]}} \\ &= 3 + \frac{6}{1 + \left(\left(e^{\frac{\pi i}{2}} \right) (2\pi 10^{-2}) [0.00091188, 148.4132] \right)^{[0.1,1]}} \\ &= 3 + \frac{6}{1 + \left(\left(e^{\frac{\pi i}{2}} \right) [5.7295 * 10^{-5}, 9.3251] \right)^{[0.1,1]}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 + \frac{6}{1 + \left(\left(e^{\frac{\pi i}{2}} \right)^{[0.1,1]} [5.7295 * 10^{-5}, 9.3251]^{[0.1,1]} \right)} \\
&= 3 + \frac{6}{1 + (([0,0.9877] + i[0.1564,1]) \times [5.7295 * 10^{-5}, 9.3251])} \\
&= 3 + \frac{6}{1 + [0,9.2104] + i[8.9609 * 10^{-6}, 9.3251]} \\
&= 3 + \frac{6}{[1,10.2104] + i[8.9609 * 10^{-6}, 9.3251]} \\
&= 3 + [0.0682148, 6] + i[-3, -0.000000515724] \\
&= [3.0682148, 9] + i[-3, -0.000000515724].
\end{aligned}$$

Yani $\varepsilon(\omega) \in [f_1] = [3.0682148, 9] + i[-3, -0.000000515724]$.

yukarıdaki sonuç bizim yöntemimiz ile bulunmuştur.

Kutupsal Çözümü:

Şimdi yukarıdaki verilen problemi kutupsal formuna göre çözelim. Yani, $\varepsilon(\omega)$ fonksiyonun aralık fonksiyonunu kutupsal formuna göre bulalım.

$$[f_2] = 3 + \frac{6}{1 + \left([5.7295 * 10^{-5}, 9.3251]^{[0.1,1]} \left(e^{\frac{\pi i}{2}} \right)^{[0.1,1]} \right)}$$

$$[f_2] = 3 + \frac{6}{1 + \left([5.7295 * 10^{-5}, 9.3251] e^{i[0.157, \frac{\pi}{2}]} \right)}$$

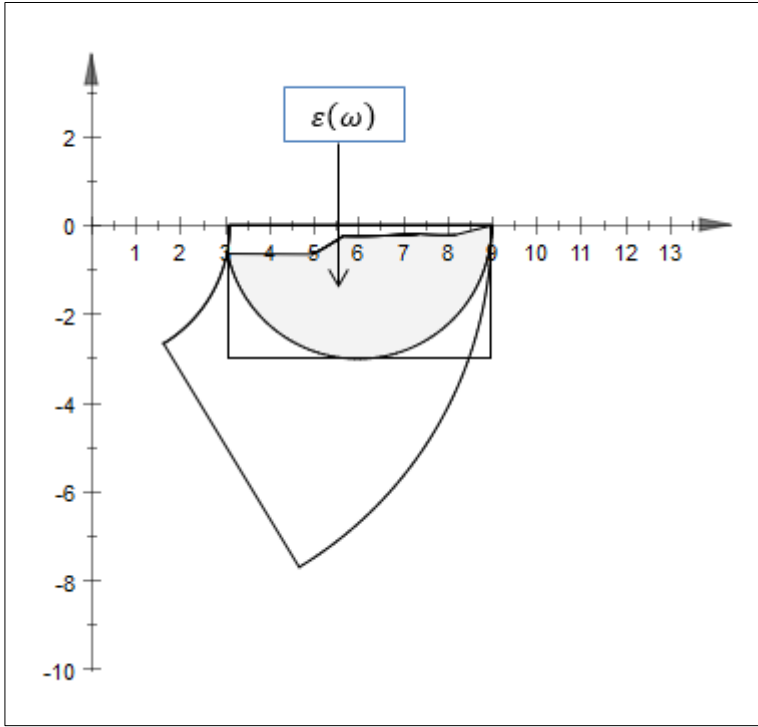
$$[f_2] = 3 + \frac{6}{[1, 10.314] e^{i[0.00000895786, 1.46397]}}$$

$$[f_2] = 3 + [0.5817, 6] e^{i[-1.46397, -0.00000895786]}$$

$$[f_2] = 3 + [0.5817, 6] e^{i[4.8192, 6.2832]}$$

$$[f_2] = [3.11616, 9] e^{i[5.26019, 6.28318]}$$

Çözümlere göre dikdörtgen çözümü daha uygundur (Şekil 5.4).



Şekil 5.4. Dikdörtgen ve kutupsal çözümler

6. SONUÇ

Sunulan tezde karmaşık aralık aritmetiğın iki formu incelendi.

1. Karmaşık aralık aritmetiğı, bir dikdörtgen biçim kullanılarak tanımlanmıştır. Temel aritmetik işlemler, ortaya çıkan dikdörtgenin işleminin tüm olası sonuçlarını içeren en küçük dikdörtgen olması açısından en uygun biçimde tanımlanmıştır. Toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri aralık aritmetiğı kuralları kullanılarak sergilenmiştir. Bölme işlemi bakımından, bu işlemi basit ve etkili bir algoritma aracılığıyla uygulamak için hızlı ve kesin bir yol türettik. Algoritmamızın kayda değer avantajlarından biri de, kullanıcının bilgisayar programları bile kullanmadan iki dikdörtgen aralık arasındaki bölme işlemini karmaşıklığa yol açmadan değerlendirebilmesidir.
2. Karmaşık kutupsal aralığın temel aritmetik işlemlerini gerçekleştirmek için basit ve verimli algoritmalar geliştirdik. Sayısal sonuçlar önerilen algoritmaların etkinliğini ve doğruluğunu göstermektedir.

7. KAYNAKLAR

- ALEFELD, G. and HERZBERGER, J. 1983. Introduction to Interval Computations. Academic Press, New York.
- ALEFELD, G., and MAYER, G. 2000. Interval analysis: theory and applications. *Journal of computational and applied mathematics*, 121(1): 421-464.
- BARGİELA, A., and PEDRYCZ, W. 2012. Granular Computing: An Introduction (Vol. 717). Springer Science & Business Media.
- BARTH, W., LİEGER, R., and SCHİNDLER, M. 1994. Ray tracing general parametric surfaces using interval arithmetic. *The Visual Computer*, 10(7): 363-371.
- BOCHE, R. E. 1966. Complex interval arithmetic with some applications (Master's thesis, San Jose State College).
- BURKİLL, J. C. 1924. Functions of intervals. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1): 275-310.
- CANDAU, Y., RAİSSİ, T., RAMDANI, N., and IBOS, L. 2006. Complex interval arithmetic using polar form. *Reliable computing*, 12(1): 1-20.
- CHEN, R., and WARD, A. C. 1992. Introduction to interval matrices in design. *ASME Design Theory and Methodology* 42: 221-227.
- DİMAROGONAS, A. D. 1995. Interval analysis of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 183(4): 739-749.
- DUFF, T. (1992, July). Interval arithmetic recursive subdivision for implicit functions and constructive solid geometry. In *ACM SIGGRAPH computer graphics* (Vol. 26, No. 2, pp. 131-138). ACM.
- DWYER, P. S. 1951. Linear Computations. New York.
- FANGFANG, F., LEANG-SAN, S., and GUANRONG, C. 1997. Model conversions of uncertain linear systems using interval multipoint Pade approximation. *Applied Mathematical Modelling*, 21(4): 233-244.
- FLORES, J. 1999. Complex fans: A representation for vectors in polar form with interval attributes. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 25(2): 129-156.
- GARLOFF, J., and SCHWİERZ, K. P. 1980. A bibliography on interval mathematics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1): 67-79.

- GARLOFF, J. 1985. Interval Mathematics. A bibliography. *Freiburger Interval-Berichte* 85(6): 1-122.
- GARLOFF, J. 1987. Bibliography on Interval Mathematics. Continuation. *Freiburger Interval-Berichte* 87(2): 1-50.
- GLEİCHER, M., and KASS, M. (1992, September). An interval refinement technique for surface intersection. In *Proceedings of the conference on Graphics interface'92* (pp. 242-249). Morgan Kaufmann Publishers Inc..
- HANSEN, E. R. 1979. Global optimization using interval analysis: the one-dimensional case. *Journal of optimization theory and applications*, 29(3): 331-344.
- HANSEN, E. 1980. Global optimization using interval analysis---the multi-dimensional case. *Numerische Mathematik*, 34(3): 247-270.
- HANSEN, E., and WALSTER, G. W. (Eds.). 2003. *Global Optimization Using Interval Analysis: revised and expanded* (Vol. 264). CRC Press.
- HAVRİLĀK, S., and NEGAMĪ, S. 1967. A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers. *Polymer*, 8: 161-210.
- HENDERSON, T. C., SOBH, T. M., ZANA, F., BRUDERLĪN, B., and HSU, C. Y. 1994. Sensing strategies based on manufacturing knowledge. In *1994 ARPA Image Understanding Workshop*. University of California Riverside, Monterey, 1109-1113.
- HENRĪCĪ, P. 1971. Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros. In *Conference on applications of numerical analysis* (pp. 86-92). Springer, Berlin, Heidelberg.
- ICHĪDA, K., and FUJĪ, Y. 1979. An interval arithmetic method for global optimization. *Computing*, 23(1): 85-97.
- JAULĪN, L., KĪEFFER, M., DĪDRĪT, O., and WALTER, E. 2001. *Applied Interval Analysis*. Springer-Verlag.
- KEARFOTT, R. B. 1992. An interval branch and bound algorithm for bound constrained optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 2(3): 259-280.
- KEARFOTT, R. B., and KREĪNOVĪCH, V. (Eds.). 2013. *Applications of Interval Computations* (Vol. 3). Springer Science & Business Media.

- KLATTE, R., and ULLRICH, C. 1980. Complex sector arithmetic. *Computing*, 24(2): 139-148.
- KREINOVICH, V., BERLEANT, D. J., JOAN-ARINYO, R., and KOSHELEV, M. 2002. Interval computations. *WWW document at <http://www.cs.utep.edu/interval-comp/main.html>*.
- KOLEV, L. V. 1993. *Interval Methods for Circuit Analysis*. Singapore, World Scientific.
- KULISCH, U. 2012. *Computer Arithmetic and Validity: Theory, Implementation, and Applications (Vol. 33)*. Walter de Gruyter.
- KULPA, Z., POWNUK, A., and SKALNA, I. 1998. Analysis of linear mechanical structures with uncertainties by means of interval methods. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 5(4): 443-477.
- LEENAERTS, D. M. W. 1990. Application of interval analysis for circuit design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 37(6): 803-807.
- LOHNER, R., and GUDENBERG, J. W. V. (1985, June). Complex interval division with maximum accuracy. In *Computer Arithmetic (ARITH), 1985 IEEE 7th Symposium on* (pp. 332-336). IEEE.
- MALAN, S., MILANESE, M., and TARAGNA, M. 1997. Robust analysis and design of control systems using interval arithmetic. *Automatica*, 33(7): 1363-1372.
- MITCHELL, D. P. (1990, May). Robust ray intersection with interval arithmetic. In *Proceedings of Graphics Interface* (Vol. 90, pp. 68-74).
- MOORE, R. E. 1962. Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing. PhD thesis, Stanford University.
- MOORE, R. E. 1966. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, NJ.
- MOORE, R., HANSEN, E., and LECLERC, A. 1992. Rigorous methods for global optimization. In *Recent Advances in Global Optimization*, Princeton series in computer science, 321-342.
- MOORE, R. E., KEARFOTT, R. B., and Cloud, M. J. 2009. *Introduction to Interval Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- MUDUR, S. P., and KOPARKAR, P. A. 1984. Interval methods for processing geometric objects. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4(2): 7-17.

- MUHANNA, R. L., and MULLEN, R. L. 1999. Formulation of fuzzy finite-element methods for solid mechanics problems. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 14(2): 107-117.
- MULLEN, R. L., and MUHANNA, R. L. 1999. Bounds of structural response for all possible loading combinations. *Journal of Structural Engineering*, 125(1): 98-106.
- NICKEL, K. (Ed.). 1975. Interval Mathematics. Lecture Notes in Computer Science 29, Berlin: Springer-Verlag.
- NICKEL, K. (Ed.). 1980. Interval Mathematics 1980. New York: Academic Press.
- NICKEL, K. (Ed.). 1985. Interval Mathematics 1985. Lecture Notes in Computer Science 212. Berlin: Springer-Verlag.
- NEUMAÏER, A. 1990. Interval Methods for Systems of Equations (Vol. 37). Cambridge university press.
- NEUMAÏER, A. 2001. Introduction to Numerical Analysis. Cambridge University Press.
- OPPENHEIMER, E. P., and Michel, A. N. 1988. Application of interval analysis techniques to linear systems. I. Fundamental results. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(9): 1129-1138.
- OPPENHEIMER, E. P. 1988. Application of interval analysis techniques to linear systems. II. The interval matrix exponential function. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(10), 1230-1242.
- OPPENHEIMER, E. P., and Michel, A. N. 1988. Application of interval analysis techniques to linear systems. III. Initial value problems. *IEEE transactions on circuits and systems*, 35(10): 1243-1256.
- PETKOVIC, M. S., and PETKOVIĆ, L. 1998. Complex Interval Arithmetic and Its Applications (Vol. 105). John Wiley & Sons.
- PIAZZI, A., and MARRO, G. 1996. Robust stability using interval analysis. *International Journal of Systems Science*, 27(12): 1381-1390.
- PIAZZI, A., and VISIOLI, A. (1997, December). An interval algorithm for minimum-jerk trajectory planning of robot manipulators. In *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on* (Vol. 2, pp. 1924-1927). IEEE.

- PIAZZI, A., and VISIOLI, A. 1998. Global minimum-time trajectory planning of mechanical manipulators using interval analysis. *International journal of Control*, 71(4): 631-652.
- RAO, S. S., and BERKE, L. 1997. Analysis of uncertain structural systems using interval analysis. *AIAA journal*, 35(4): 727-735.
- RATSCHEK, H., and ROKNE, J. 1984. *Computer Methods for the Range of Functions*. Chichester: Ellis Harwood.
- RATSCHEK, H., and ROKNE, J. 1988. *New Computer Methods for Global Optimization*. Chichester: Horwood.
- RATSCHEK, H., and ROKNE, J. 1993. Experiments using interval analysis for solving a circuit design problem. *Journal of global optimization*, 3(4): 501-518.
- RATSCHEK, H., and VOLLER, R. L. 1991. What can interval analysis do for global optimization?. *Journal of Global Optimization*, 1(2): 111-130.
- Reliable computing, Kluwer Academic Publishers, 1997, formerly *Interval Computations*.
- ROKNE, J., and LANCASTER, P. 1971. Complex interval arithmetic. *Communications of the ACM*, 14(2): 111-112.
- SNYDER, J. M. 1992. Interval analysis for computer graphics. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 26(2): 121-130.
- SUFFERN, K. G., and FACKERELL, E. D. 1991. Interval methods in computer graphics. *Computers & Graphics*, 15(3): 331-340.
- SUNAGA, T. 1958. *Theory of an Interval Algebra and Its Application to Numerical Analysis*. Gaukutsu Bunken Fukeyu-kai, Tokyo.
- TAUBIN, G. 1994. Rasterizing algebraic curves and surfaces. *IEEE Computer graphics and applications*, 14(2): 14-23.
- VAN IWAARDEN, R. J. 1996. *An improved unconstrained global optimization algorithm* (PhD thesis,, Department of Mathematics, University of Colorado at Denver).
- YOUNG, R. C. 1931. The algebra of many-valued quantities. *Math. Ann.*, 104(1): 260-290.

ÖZGEÇMİŞ



Edrees M. Nori Mahmood ALWAHAB BAKR, 1971 yılında Irak'ın Tal Afar şehrinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Tal Afar'da tamamladı. 1990 yılında girdiği Musul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1995 yılında mezun oldu. 1996 yılında Musul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı ve 1998 yılında bitirdi. Sonra 2000'den itibaren öğretim elemanı olarak Musul Üniversitesi'nde işe başladı. Eylül 2011 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora öğrenimine başladı.