T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

SONLU LEKSİKOGRAFİKAL SIRALI ALFABE ÜZERİNDE TANIMLI KELİMELER VE DE BRUIJN TİPLİ DİZİLERİ İÇEREN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE BUNLARIN UYGULAMALARI

İrem KÜÇÜKOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

NİSAN 2018

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

SONLU LEKSİKOGRAFİKAL SIRALI ALFABE ÜZERİNDE TANIMLI KELİMELER VE DE BRUIJN TİPLİ DİZİLERİ İÇEREN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE BUNLARIN UYGULAMALARI

İrem KÜÇÜKOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

NİSAN 2018

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU LEKSİKOGRAFİKAL SIRALI ALFABE ÜZERİNDE TANIMLI KELİMELER VE DE BRUIJN TİPLİ DİZİLERİ İÇEREN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE BUNLARIN UYGULAMALARI

İrem KÜÇÜKOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafından FDK-2017-2375 nolu proje ile desteklenmiştir.

NİSAN 2018

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU LEKSİKOGRAFİKAL SIRALI ALFABE ÜZERİNDE TANIMLI KELİMELER VE DE BRUIJN TİPLİ DİZİLERİ İÇEREN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE BUNLARIN UYGULAMALARI

İrem KÜÇÜKOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 13/04/2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Dr. Öğr. Üyesi Eda YÜLÜKLÜ

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ALTÜRK

Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE

ÖZET

SONLU LEKSİKOGRAFİKAL SIRALI ALFABE ÜZERİNDE TANIMLI KELİMELER VE DE BRUIJN TİPLİ DİZİLERİ İÇEREN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE BUNLARIN UYGULAMALARI

İrem KÜÇÜKOĞLU

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Nisan 2018, 66 sayfa

Bu tezde, Lyndon kelimeleri gibi sonlu leksikografikal sıralı alfabe üzerinde tanımlı kelimeleri ve De Bruijn tipli dizileri sayan sayıların üreteç fonksiyonlarının inşası üzerine çalışılmıştır. İnşa edilen üreteç fonksiyonları yardımıyla, bu kelime ve dizilerin bazı özel fonksiyonlarla, Apostol tipli sayı ve polinomlar aileleriyle, Stirling sayılarıyla ve diğer özel sayı ve özel polinom aileleriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca, inşa edilen üreteç fonksiyonları ve bunların diferansiyel denklemleri yardımıyla binom katsayılarını, bazı özel sayı ve özel polinomları içeren yeni formüller, bağıntılar ve özdeşlikler elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar kullanılarak, asal sayı uzunluklu Lyndon kelimelerinin sayılarını ve binom katsayılarını içeren kombinatorik toplamlar da elde edilmiştir. Bunlara ek olarak, elde edilen sonuçların bazıları için nümerik hesaplamalar yapan hesaplamalı algoritmalar verilmiştir ve bu algoritmalar kullanılarak ilgili sonuçlar için tablolar verilmiştir. Verilen tablolardaki değerler yardımıyla da üreteç fonksiyonlarının grafikleri çizilmiştir. Son olarak, elde edilen üreteç fonksiyonlarının asal sayılar ve tek türlü asal çarpanlara ayırma metodu ile ilişkileri incelenerek bazı uygulamaları verilmiştir. Ayrıca bu tez çalışmasında, elde edilen sonuçların bazılarını kapsayan açık problemler de verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları, Aritmetik fonksiyonlar, Bernoulli sayıları ve polinomları, Kombinatoriksel kolyeler, Lyndon kelime-

leri, Mobius fonksiyonu, Özel sayılar ve polinomlar, Stirling Sayıları, Üreteç fonksiyonları, Zeta tipli fonksiyonlar.

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Dr. Öğr. Üyesi Eda YÜLÜKLÜ

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ALTÜRK

Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE

ABSTRACT

GENERATING FUNCTIONS CONTAINING WORDS DEFINED OVER LEXICOGRAPHICAL ORDERED FINITE ALPHABET AND DE BRUIJN TYPE SEQUENCES AND THEIR APPLICATIONS

İrem KÜÇÜKOĞLU

PhD Thesis in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

April 2018, 66 pages

In this thesis, it is studied on the construction of the generating functions for the numbers counting the words defined over the finite lexicographical ordered alphabet such as Lyndon words, and also De Bruijn type sequences. With the help of the constructed generating functions, relations of these words and sequences with some special functions, the families of the Apostol type numbers and polynomials, the Stirling numbers and other special families of numbers and polynomials have been investigated. Moreover, new formulas, relations, identities and combinatorial sums including binomial coefficients and special numbers and polynomials have been obtained with the aid of the constructed generating functions and their differential equations. By using the obtained results, combinatorial sums, including binomial coefficients and the numbers of the Lyndon words having prime number length, have also been obtained. In addition to these, computational algorithms for numerical calculations are given for some of the obtained results, and related tables are given using these algorithms. The graphs of the generating functions are also drawn with the help of the values in the given tables. Finally, some applications have been given by examining relations between the obtained generating functions, prime numbers and the unique prime factorization method. Moreover, in this thesis, open problems including some of our results are given.

KEYWORDS: Apostol-Bernoulli numbers ve polynomials, Arithmetical functions, Bernoulli numbers and polynomials, Combinatorial necklaces, Generating functions,

Lyndon words, Mobius functions, Special numbers and polynomials, Stirling numbers, Zeta type functions.

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Asst. Prof. Dr. Eda YÜLÜKLÜ
Asst. Prof. Dr. Ahmet ALTÜRK
Asst. Prof. Dr. Rahime DERE

ÖNSÖZ

Üreteç fonksiyonları, son yılların en ilgi çeken alanlarından biridir. Çünkü bu fonksiyonların, yalnızca matematikte değil aynı zamanda birçok bilim dalında uygulamaları mevcuttur. Bu tez çalışmasında, Lyndon kelimeleri gibi sonlu leksikografikal sıralı alfabe üzerinde tanımlı kelimeleri sayan sayıların üreteç fonksiyonlarının inşa edilmesi ve elde edilen üreteç fonksiyonları ve bunların diferansiyel denklemleri, ve ilişkili olduğu özel sayı ve polinom aileleri yardımıyla kombinatorik toplamlar, binom katsayıları, Lyndon kelimeleri ve De Bruijn dizilerini de içeren kombinatorik özdeşliklerin bulunması amaçlanmıştır.

Bu tez çalışması Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma, Sonuçlar olmak üzere beş ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, üreteç fonksiyonlarının ve Lyndon kelimelerinin önemi ve tarihsel gelişimi hakkında kısa bir bilgi verilmiştir. Ardından, tez çalışmasının kapsamı kısaca açıklanmıştır.

İkinci bölümde, Leksikografikal sıralı alfabenin cebirsel özellikleri, Lyndon kelimeleri ve bunlarla yakından ilişkili olduğu bilinen kombinatoriksel kolyelerin tanımları ve temel özellikleri, Lyndon kelimelerini sayan sayıların tanımı, Lyndon kelimeleri tarafından üretilebilen De Bruijn dizilerinin tanımı ve bazı uygulamaları kaynak taraması ile birlikte verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tez çalışmasında kullanılan özel sayılar, özel polinomlar ve bunların üreteç fonksiyonları metotları hakkında bilgiler ve temel özellikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, tez çalışmasında elde edilen tüm sonuçlar verilmiştir.

Tezin diğer bölümleri kaynaklar ve özgeçmiş ile bitmektedir.

Bugüne kadar yaptığım bilimsel çalışmalarda ve bu tez çalışmasında yardım ve katkılarıyla beni destekleyen, değerli bilgilerini benimle paylaşıp deneyimlerini benden esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e yürekten teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Doktora eğitimim sırasında 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında verdiği burs ile beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK BİDEB Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Ayrıca, eğitim hayatım boyunca manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum "SONLU LEKSİKOGRAFİKAL SIRALI ALFABE ÜZERİNDE TANIMLI KELİMELER VE DE BRUIJN TİPLİ DİZİLERİ İÇEREN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE BUNLARIN UYGULAMALARI" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

13/04/2018

İrem KÜÇÜKOĞLU

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^-$	: Negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_0^-$	: $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$
$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathrm{Re}\,(s)$	: Kompleks s sayısının reel kısmı
$L_k\,(n)$	: n uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin sayısı
$\mu\,(n)$	: Möbius fonksiyonu
$\mathcal{B}_n\,(x;t)$	: Apostol-Bernoulli polinomları
$\mathcal{B}_n\,(t)$	: Apostol-Bernoulli sayıları
$B_n\,(x)$	: Bernoulli polinomları
B_n	: Bernoulli sayıları
$B\,(k,n)$	: Birbirinden farklı n. mertebeden k-lı De Bruijn dizilerinin sayısı
$H_n\,(t)$	: Frobenius-Euler sayıları
$w(n)$	: Fubini sayıları
$(x)_n$	: Azalan faktoriyel
$S\,(n,k)$	: İkinci tür Stirling sayıları
$s\,(n,k)$	: Birinci tür Stirling sayıları
$\zeta_t^{(v)}\,(s,k,a,b)$	: v-inci mertebeden Lerch zeta tipli fonksiyonu
$\Phi\,(z,s,a)$	: Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu
$\zeta\,(s)$	: Riemann zeta fonksiyonu
$\zeta\,(s,a)$	: Hurwitz (veya genelleştirilmiş) zeta fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

1. GİRİŞ

Matematiğin tarihsel gelişimine bakıldığında, biçimsel kuvvet serileri yardımıyla tanımlanan üreteç fonksiyonlarının hem teorik ve hem de uygulamalı matematikte çok önemli bir rol oynadığı görülebilir. Çok iyi bilinmektedir ki bu fonksiyonlar, sayma problemlerini çözerken, özel sayılar ve özel polinomların özelliklerini araştırırken güçlü araçlardan biridir. Çünkü, herhangi bir özel sayı ve polinom ailesinin açık ya da kapalı formülleri bilinmeksizin rekürans bağıntıları, hesaplama formülleri, özdeşlikler ve türev bağıntıları gibi temel özellikleri incelenirken, söz konusu özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonlarından faydalanılır. Ayrıca, incelenen özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonlarını ve diğer özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonlarını içeren fonksiyonel denklemlerin ve diferansiyel denklemlerin yazılması da bu sayılar ve polinomlar arasındaki ilişkilerin de elde edilmesini kolaylaştırmaktadır. Bunlara ek olarak, bir üreteç fonksiyonunun integral dönüşümleri altında davranışlarının incelenmesi de özel sayı ve polinom ailelerinin bazı özelliklerinin bulunmasını kolaylıklaştırmaktadır. Sağladığı bu kolaylıklar sayesinde üreteç fonksiyonlarının analitik sayılar teorisi, kombinatorik, kuantum fizik, istatistiksel fizik, olasılık teorisi, bilgisayar bilimleri ve ilgili diğer bilim dallarında sıkça kullanıldığı çok iyi bilinmektedir. Özellikle, bir üreteç fonksiyonunu çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulmak kuantum fiziğinin önemli problemlerinden biridir. Burada belirtmek gerekir ki fizik biliminde Hamiltoniyen mekaniğinde ortaya çıkan üreteç fonksiyonları, matematikteki üreteç fonksiyonlarından oldukça farklıdır ve kısmi türevleri, bir sistemin dinamiklerini belirleyen diferansiyel denklemleri oluşturan fonksiyonlardır (Spiegel 1971; Knuth 1997; Charalambides 2002; Simsek 2018a). Matematikte ise üreteç fonksiyonları, katsayıları doğal sayılar tarafından indekslenen bir sayı veya polinom dizisinin vermek istediği bir bilgiyi kodlayan biçimsel kuvvet serileri olarak ifade edilebilir (Rainville 1960; Spiegel 1971; Doubliet vd. 1972; Comtet 1974; Srivastava ve Manocha 1984; Knuth 1997; Charalambides 2002; Djordjevic ve Milovanovic 2014; Simsek 2018a).

Bilindiği kadarıyla, üreteç fonksiyonları ilk olarak 26 Mayıs 1667-27 Kasım 1754 tarihleri arasında yaşayan Fransız matematikçi Abraham de Moivre tarafından keşfedilmiştir (Knuth 1997; Simsek 2018a). Genel lineer rekürans problemini çözmek için, Moivre 1730'da üreteç fonksiyonları kavramını inşa etmiştir. Ayrıca, 23 Mart 1749-5 Mart 1827 tarihleri arasında yaşamış Fransız bir matematikçi, fizikçi ve istatistikçi olan Laplace'ın da biçimsel kuvvet serileri üzerindeki işlemler hakkında kayda değer keşifler yaptığı Doubliet vd. (1972) çalışmasında görülmektedir. Doubliet vd. (1972) çalışmasında, çeşitli kombinatorik ve olasılık problemlerini çözmeye daha uygun yeni türlerde üreteç fonksiyonları cebirleri geliştirmişlerdir. Bu metotlar, grup cebrine (ya da yarıgrup cebrine) dayanmaktadır. Bu yöntem ve metotlar ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için (Doubliet vd. 1972) çalışmasına bakılabilir.

1917-1988 yılları arasında yaşayan Amerikan matematikçi Roger Conant Lyndon tarafından ilk olarak (Lyndon 1954) çalışmasında standart leksikografikal diziler olarak çalışılan Lyndon kelimeleri, literatür incelendiğinde biyoinformatik, kriptoloji, çizge teorisi, kombinatorik, cebir gibi birçok alanda ve son zamanlarda da bilgisayar bilimlerinde çalışılan bir kavram olmuştur (Witt 1937; Lyndon 1954; Metropolis ve Rota 1983; Buchanan vd. 1993; Velleman ve Call 1995; Kang ve Kim 1996; Petrogradsky 2003; Glen 2008, Cusick ve Stanica 2009; Glen 2012; Cevik vd. 2014).

Kaynak taraması bölümünde, sonlu leksikografikal sıralı alfabe üzerinde tanımlı kelimeler, De Bruijn tipli dizileri ve bunları sayan sayılar hakkında ayrıntılı bilgi verilmiştir.

Lyndon kelimelerinin sayısı için literatür incelendiğinde, bu sayıların üreteç fonksiyonları yöntemi olmaksızın farklı yöntemlerle çalışıldığı görülmektedir (Berstel ve Perrin 2007, Lothaire 1997, Metropolis ve Rota 1983, Ruskey ve Sawada 1999, Ruskey 2016, Petrogradsky 2003).

Bu tez çalışmasında, Lyndon kelimeleri gibi sonlu leksikografikal sıralı alfabe üzerinde tanımlı kelimeleri ve De Bruijn tipli dizileri sayan sayılar için üreteç fonksiyonları inşa edilecektir. Kullanılacak metotlar ve yöntemler, özel sayılar, özel polinomlar, üreteç fonksiyonları ve bunların fonksiyonel denklemleri ile zeta fonksiyonlar ailesi ve bunların analitik devam yöntemleridir. İnşa edilen üreteç fonksiyonu yardımıyla, bu kelime ve dizilerin Apostol tipli sayı ve polinomlar aileleri gibi özel sayı ve polinom aileleriyle arasındaki ilişkileri incelenecektir. Dahası inşa edilecek üreteç fonksiyonları ile özel sayı ve polinom ailelerinin temel özellikleri incelenecek ve bunlar ile ilgili uygulamalar verilecektir. Ayrıca inşa edilen üreteç fonksiyonların fonksiyonel denklemleri ve diferansiyel denklemlerinin yardımıyla yeni rekürans formülleri, bağıntılar, özdeşlikler, binom katsayıları, özel sayı ve polinomları içeren kombinatorik toplamlar bulunacaktır. Ayrıca, asal sayı uzunluklu kelimelerin sayıları için binom katsayılarını da içeren kombinatorik toplamlar verilecektir. Elde edilen üreteç fonksiyonlarının nümerik hesaplamalarının yapılması ve tablolarının oluşturulması için hesaplamalı algoritmalar verilecektir ve bu algoritmalar kodlanacaktır. Böylece tez çalışması kapsamında elde edilen teorik sonuçlar ile nümerik değerlerin birbirlerini destekleyip desteklemedikleri kontrol edilecektir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, tez boyunca sıkça kullanılan bazı temel kavramların tanımı özellikleri ve diğer kavramlarla ilişkileri verilecektir. Bu bölümdeki temel kavramlar için Lothaire (1997) kitabından, Metropolis ve Rota (1983) ile Berstel ve Perrin (2007) makalelelerinde yararlanılmıştır. Tez çalışmasında kullanılan diğer kavramlar ise tez boyunca uygun yerlerde yeri geldiğinde açıklanacaktır.

2.1. Leksikografikal Sıralı Alfabenin Cebirsel Özellikleri

Bu bölümde, sözlük sıralaması olarak da bilinen leksikografikal sıralamanın tanımı ve sonlu leksikografikal sıralı alfabenin cebirsel özellikleri ve diğer notasyonlar ve tanımlar verilmiştir. Bu bölümdeki tanımlar için Lothaire (1997) kitabından yararlanılmıştır.

Σ, her bir elemanı harf olan ve alfabe olarak adlandırılan bir küme olsun. Σ'nın elemanları ile oluşturulan ve

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n), \ \ \forall a_i \in \Sigma; i = 1, 2, \ldots, n.$$

şeklinde gösterilen sonlu bir diziye, Σ alfabesi üzerinde tanımlanmış bir kelime denir (Lothaire 1997).

Σ alfabesi üzerinde tanımlanmış tüm kelimelerin kümesi, Σ^* ile gösterilir ve bu küme üzerindeki ikili işlem, $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \Sigma^*$ olmak üzere

$$\theta : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$$

$$\begin{aligned} \theta\left((a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_m)\right) &= (a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_m) \\ &= (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m) \end{aligned}$$

şeklinde iki dizinin yan yana bitiştirilmesi, yan yana dizilmesi veya birbirine bağlanması (jukstapozisyonu) ile tanımlanır. Bu ikili işlemi veren θ fonksiyonunun iyi tanımlı olduğu kolayca kontrol edilebilir:

Gerçekten de, her $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Sigma^*$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \Sigma^*$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \Sigma^*$ ve $d = (d_1, d_2, \ldots, d_r) \in \Sigma^*$ için,

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow \theta\,(a, b) = \theta\,(c, d)$$

dir. Böylece bu ikili işlem yardımıyla Σ^* üzerinde bir cebirsel yapı oluşur. Ayrıca bu ikili işlemin birleşmeli olduğu açıktır ve bu birleşme özelliği, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şeklindeki herhangi bir kelimeyi

$$a_1 a_2 \ldots a_n$$

şeklinde yazmamızı sağlar (Lothaire 1997).

Boş dizi, boş kelime olarak adlandırılır ve yan yana bitiştirme işleminin etkisiz(birim) elemanıdır. Dolayısıyla, bu birim elemanı 1_M ile gösterilirse herhangi bir w kelimesi için

$$1_M w = w 1_M = w$$

olur (Lothaire 1997).

Tanım 2.1. *Üzerinde, birleşmeli özelliği olan bir ikili işlem tanımlanmış ve 1_M ile gösterilen bir birim elemanına sahip M kümesine bu ikili işlem altında bir monoid denir (Lothaire 1997).*

Dolayısıyla, Σ^* kümesi jukstapozisyon işlemi altında bir monoid yapısına sahiptir (Lothaire 1997).

Tanım 2.2. *Σ alfabesi üzerindeki tüm kelimelerin kümesini gösteren Σ^*, Σ kümesi üzerinde bir serbest monoid olarak adlandırılır (Lothaire 1997).*

Tanım 2.3. *Σ alfabesi üzerindeki boş kelimeden farklı tüm kelimelerin kümesi, Σ^+ ile gösterilir ve*

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - 1_{\Sigma^*}$$

şeklinde tanımlanır. Σ^+ kümesi, Σ alfabesi üzerindeki serbest yarı grup olarak adlandırılır (Lothaire 1997).

Burada belirtmeliyiz ki, Σ^* monoid'i üzerindeki ikili işlem, $X, Y \subset \Sigma^*$ için

$$XY = \{xy | x \in X, y \in Y\}$$

şeklinde tanımlanarak Σ^*'ın alt kümelerine genişletilebilir (Lothaire 1997).

Tanım 2.4. *$a_i \in \Sigma$ olmak üzere $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ kelimesinin uzunluğu, w kelimesini oluşturan harflerin sayıdır ve $|w|$ ile gösterilir. Dolayısıyla,*

$$|w| = n$$

dir (Lothaire 1997).

Tanım 2.5. *$u, v \in \Sigma^*$ kelimeleri vardır öyle ki*

$$x = uv \quad ve \quad y = vu$$

ise x ve y kelimeleri eşleniktir denir (Lothaire 1997).

Bir başka deyişle burada, x ve y kelimelerinin eşlenik olması için gerek ve yeter şart x kelimesinin, y kelimesindeki harflerinin rotasyonu(çevrimsel permütasyonu) ile elde edilebilmesidir. Dolayısıyla, yukarıda tanımlanan eşlenik kavramı bir bağıntı olarak yansıma, simetri ve geçişme özelliğini sağladığından aynı zamanda Σ^* kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır (Lothaire 1997).

Tanım 2.6. *Σ^+ serbest yarı grubu üzerinde bir leksikografikal sıralama ($<$), Σ alfabesi üzerindeki bir tam sıralamanın kelimelere genişletilmesidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

Herhangi $u, v \in \Sigma^+$ için $u < v$ olması için gerek ve yeter şart ya $v \in u\Sigma^+$ olması ya da $a < b$; $a, b \in \Sigma$ ve $r, s, t \in \Sigma^+$ iken

$$u = ras \quad ve \quad v = rbt$$

olmasıdır (Lothaire 1997).

Not 2.7. *Herhangi $u, v \in \Sigma^+$ için $u < v$ olması, u elemanının v elemamanından leksikografikal olarak daha önce gelmesi veya u elemanının v elemamanından leksikografikal olarak küçük olması anlamına gelir.*

Örnek 2.8. $\Sigma = \{0, 1\}$ *olmak üzere,* $u = 011 \in \Sigma^+$ *ve* $v = 01110 \in \Sigma^+$ *kelimelerini ele alalım. O halde*

$$v = u10$$

olarak yazılabildiği için $v \in u\Sigma^+$ *olur. Dolayısıyla,* $u < v$ *dir.*

Örnek 2.9. $\Sigma = \{0, 1\}$ *olmak üzere,* $u = 01101011 \in \Sigma^+$ *ve* $v = 01101101 \in \Sigma^+$ *kelimelerini ele alalım.* $r = 01101$ *olmak üzere*

$$u = r011 \quad \textit{ve} \quad v = r101$$

olur ve burada $a = 0 \in \Sigma$, $b = 1 \in \Sigma$; $a < b$, $s = 11 \in \Sigma^+$ *ve* $t = 01 \in \Sigma^+$ *olarak seçildiğinde*

$$u = ras \quad \textit{ve} \quad v = rbt$$

olduğundan $u < v$ *dir.*

Not 2.10. Σ^+ *üzerindeki leksikografikal sıralamanın aynı zamanda* Σ^+ *üzerinde bir tam sıralama olduğu açıktır (Lothaire 1997).*

Leksikografikal sıralamanın önemli iki özelliği aşağıdaki şekilde verilebilir (Lothaire 1997):

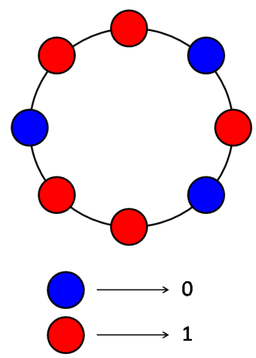
($\mathcal{L}1$) $\forall w \in \Sigma^*, u < v \iff wu < wv.$

($\mathcal{L}2$) Eğer $v \notin u\Sigma^*$, $\forall w, z \in \Sigma^*$ için $u < v$ ise $uw < vz$ dir.

2.2. Lyndon Kelimeleri ve Kombinatoriksel Kolyeler

Bu bölümde, herhangi bir sonlu leksikografikal sıralı alfabenin elemanlarından türetilen n uzunluklu k-lı Lyndon kelimeleri ve bunların yakından ilişkili olduğu kombinatoriksel kolyelerin tanımları ve temel özellikleri verilecektir.

İlkel kombinatoriksel kolyelerle temsil edilebilen k-lı Lyndon kelimeleri, sözlük sıralaması olarak da bilinen leksikografikal sıralama ile sıralanmış k-harfli alfabenin elemanlarından türetilir (Ruskey ve Sawada 1999; Cusick ve Stanica 2009; Glen 2012). Metropolis ve Rota (1983) çalışmalarında, k farklı renkteki n adet boncuğun bir çember etrafında yerleştirilmesi sonucunda oluşan kolyeyi, *kombinatoriksel kolye* olarak adlandırmışlardır. Şekil 2.1 ile $k = 2$ ve $n = 8$ için bir kombinatoriksel kolye örneği verilmektedir.



Şekil 2.1. $k = 2$ ve $n = 8$ için bir kombinatoriksel kolye

Şekil 2.1 ile verilen kombinatoriksel kolye üzerindeki mavi ve kırmızı boncuklar sırasıyla 0 ve 1 harfleri ile temsil edilirse, bu kolye üzerindeki rotasyon sonucunda elde edilen tüm kelimeler aşağıdaki kümenin elemanlarıdır:

$$\{10101101, 01011011, 10110110, 01101101, 11011010, 10110101, 01101011, 11010110\}.$$

Yukarıdaki kümede verilen kelimelerin rotasyona göre denk olduğu görülebilir. Yani, Şekil 2.1 ile verilen kombinatoriksel kolyeden türetilen bütün kelimeler aynı denklik sınıfına aittir ve Şekil 2.1 ile verilen kombinatoriksel kolye bu kelimelerin denklik sınıfıdır. Bir k-lı kolyenin rotasyonlar altında k-lı kelimelerin bir denklik sınıfı olduğu (Cusick ve Stanica 2009, s. 36) çalışmasında da görülmektedir. İlgili kaynakta, böyle bir denklik sınıfının temsilci kelimesi olarak leksikografikal sıradan en küçük eleman seçilmiştir.

Tanım 2.11 (Periyodik ve İlkel Kelime Kavramı)**.** *Kombinatoriksel kolyenin bütün rotasyonlar altında temsil ettiği kelime, kendinden daha kısa bir kelimenin tamsayı kuvveti olarak yazılabiliyorsa bu kolyeye ve temsil ettiği kelimeye periyodiktir denir. Aksi durumda ise kolye ve temsil ettiği kelimeye periyodik olmayan(ilkel) denir (Metropolis ve Rota 1983; Lothaire 1997; Berstel ve Perrin 2007).*

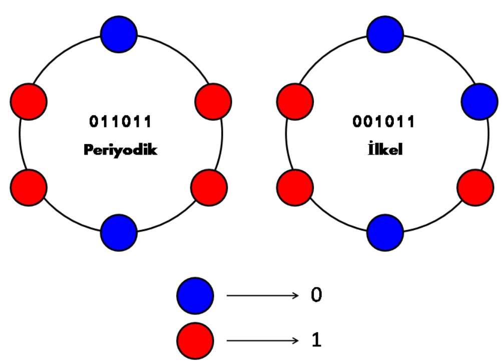
Örneğin, $\Sigma = \{0, 1\}$ olmak üzere

$$\overbrace{0011\ldots0011}^{m \text{ tane } 0011} = (0011)^m,\ m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$$

olduğundan $\overbrace{0011\ldots0011}^{m \text{ tane } 0011}$ kelimesi periyodiktir.

İlkel kelimelerin özellikleri hakkında daha detaylı bilgiler (Metropolis ve Rota 1983) kaynağında mevcuttur.

Periyodik kolye, ilkel kolye ve bunların temsil ettiği kelimelerinin birer örneği, Şekil 2.2 ile verilmektedir.



Şekil 2.2. Periyodik ve periyodik olmayan kolyeler ile bunların temsilci kelimeleri

Şekil 2.2 ile verilen iki kombinatoriksel kolyeden sol taraftaki kolyenin temsil ettiği kelime $011011 = (011)^2$ olduğundan 011011 kelimesi ve sol taraftaki kolye periyodiktir. Ancak, sağ taraftaki kolyede bu böyle değildir çünkü bu kolyenin temsil ettiği kelime 001011, kendisinden daha kısa bir kelimenin kuvveti şeklinde yazılamaz. Sonuç olarak, sağ taraftaki kolye ve temsil ettiği 001011 kelimesi ilkeldir.

Tanım 2.12. *k farklı renkteki n adet boncuktan oluşan ilkel bir kolye ile temsil edilebilen, k-harfli alfabeden türetilebilen n uzunluklu tüm ilkel kelimelerin oluşturduğu kümedeki leksikografikal olarak en küçük elemana, n uzunluklu k-lı Lyndon kelimesi denir (Lothaire 1997; Ruskey ve Sawada 1999; Berstel ve Perrin 2007; Cusick ve Stanica 2009; Glen 2012; Ruskey 2016).*

Dolayısıyla, 001011 kelimesi hem ilkel bir kelime hem de elemanı olduğu denklik sınıfının leksikografikal olarak en küçük elemanı olduğundan 6 uzunluklu 2-li bir Lyndon kelimesidir.

Bunlara ek olarak, 2 farklı renkte 6 adet boncuğun farklı kombinasyonlarda çember üzerinde dizilimiyle oluşan kolyelerin temsil ettiği leksikografikal olarak sıralanmış 2-harfli $\Sigma = \{0, 1\}$ alfabesi üzerindeki tüm 6 uzunluklu 2-li Lyndon kelimelerinin oluşturduğu küme, elemanları leksikografikal olarak sıralanmış şekilde aşağıdaki gibidir:

$$\{000001, 000011, 000101, 000111, 001011, 001101, 001111, 010111, 011111\}.$$

Ayrıca, $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$ alfabesi üzerinde uzunlukları 1'den 6'ya kadar değişen leksikografikal olarak sıralanmış tüm 2-li Lyndon kelimeleri aşağıdaki gibidir:

- α, β
- $\alpha\beta$
- $\alpha\alpha\beta, \alpha\beta\beta$
- $\alpha\alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\beta\beta, \alpha\beta\beta\beta$
- $\alpha\alpha\alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\alpha\beta\beta, \alpha\alpha\beta\alpha\beta, \alpha\alpha\beta\beta\beta, \alpha\beta\alpha\beta\beta, \alpha\beta\beta\beta\beta$
- $\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta, \alpha\alpha\alpha\beta\alpha\beta, \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta, \alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta, \alpha\alpha\beta\beta\alpha\beta, \alpha\alpha\beta\beta\beta\beta, \alpha\beta\alpha\beta\beta\beta, \alpha\beta\beta\beta\beta\beta$

n uzunluklu 2-li Lyndon kelimelerinin sayısı $L_2(n)$ gösterilirse yukarıdaki listeye bakıldığında $L_2(1) = 2$, $L_2(2) = 1$, $L_2(3) = 2$, $L_2(4) = 3$, $L_2(5) = 6$, $L_2(6) = 9$ olduğu görülür. O halde, genel olarak, n uzunluğunda kaç tane k-lı Lyndon kelimesi vardır? Bir sonraki bölümde bu sorunun cevabı hakkında bilgiler verilecektir.

2.3. Lyndon Kelimelerinin Sayısı

Bu bölümde, Lyndon kelimelerini sayan sayılar hakkında temel bilgiler verilecektir.

Lyndon kelimelerini sayan sayıları vermeden önce bu sayıları hesaplayabilmemizi sağlayacak bazı temel tanım ve teoremleri verelim:

Tanım 2.13. *Pozitif tamsayılar üzerinde tanımlı reel veya kompleks değerli bir fonksiyona aritmetik fonksiyon denir (Apostol 1998, s. 24).*

Bu çalışmada kullanılan aritmetik fonksiyonlardan biri μ ile gösterilen Möbius fonksiyonudur ve bu aritmetik fonksiyon,

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ ise}, \\ (-1)^r & n \text{ sayısı } r \text{ farklı asalın çarpımı ise}, \\ 0 & n \text{ sayısı bir asal sayının karesine bölünebiliyor ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Apostol 1998).

Bu çalışmada kullanılan önemli formüllerden biri de Möbius inversiyon formülüdür ve aşağıdaki şekilde verilir:

Teorem 2.14 (Möbius inversiyon formülü)**.** *f ve g iki aritmetik fonksiyon olmak üzere,*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{2.1}$$

denklemi

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\, \mu\left(\frac{n}{d}\right) \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan, (2.2) deklemi, (2.1) denklemini gerektirir (Apostol 1998, s. 32).

Bu çalışmada, n uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin sayısı $L_k(n)$ ile gösterilmiştir ve bu sayılar aşağıdaki şekilde verilir:

Teorem 2.15. *μ, Möbius fonksiyonu olmak üzere,*

$$L_k(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)k^d \tag{2.3}$$

dir (Metropolis ve Rota 1983; Lothaire 1997; Berstel ve Perrin 2007).

Teorem 2.15'in Lothaire, (1997) tarafından verilen kısa bir ispatı aşağıdaki şekildedir:

İspat [Teorem 2.15'in ispatı] Sonlu Σ alfabesinin kardinalitesi k olmak üzere, Σ alfabesi üzerinde n uzunluklu ilkel kelimelerin eşlenik sınıflarının sayısını $L_k(n)$ ile gösterelim.

w, n uzunluklu bir kelime olsun. z ilkel kelime ve $n = qd$ olmak üzere $w = z^q$ ise w'nun eşleniklerinin sayısı tam olarak d olur. Dolayısıyla,

$$k^n = \sum_{d|n} dL_k(d) \tag{2.4}$$

olur ki buradaki toplam, n sayısının pozitif bölenleri üzerinden yürümektedir. Möbius inversiyon formülü ile (2.4) denklemi, (2.3) denklemine denktir ki bu da istenendir. □

$n = 1, 2, ..., 15$ uzunluklu ikili(2-li) Lyndon kelimelerinin sayıları Tablo 2.1 ile verilmiştir (Ruskey 2016; Sloane 2016).

Tablo 2.1. $L_2(n)$ için bazı sayısal değerler

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$L_2(n)$	2	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335	630	1161	2182

Boş kelimenin uzunluğu 0 olduğundan ve boş kelime ve uzunluğu 0 olan kelimeler Lyndon kelimeleri sınıfına giremediğinden $n \geq 0$ iken

$$L_0(n) = 0$$

olduğu ve $k \geq 0$ iken ise

$$L_k(0) = 0$$

olduğu açıktır.

Ayrıca, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ve $n = 1, 2, 3, 4, 5$ iken $L_k(n)$ sayısının aldığı değerler (2.3) denklemi yardımıyla hesaplanmıştır ve bu değerler Tablo 2.2 ile verilmiştir.

Tablo 2.2. $L_k(n)$ için bazı sayısal değerler

		k								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	0	1	3	6	10	15	21	28	36
	3	0	2	8	20	40	70	112	168	240
	4	0	3	18	60	150	315	588	1008	1620
	5	0	6	48	204	624	1554	3360	6552	11808

Tablo 2.2 incelendiğinde görülmektedir ki, 4 uzunluklu 6-lı Lyndon kelimelerinin sayısı 315 dir.

(2.3) denkleminde p asal sayı, $m \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olarak alınırsa, p^m sayısının tüm bölenlerinin kümesi $\{1, p, p^2, \ldots, p^m\}$ olduğundan, Möbius fonksiyonunun tanımı yardımıyla $L_k(p^m)$ sayıları için

$$L_k(p^m) = \frac{k^{p^{m-1}}\left(k^{p^{m-1}(p-1)} - 1\right)}{p^m} \tag{2.5}$$

açık formülü elde edilir (Kucukoglu ve Simsek 2017a).

Not 2.16. *Literatür incelendiğinde $L_k(n)$ sayıları birçok kombinatorik problemde ortaya çıkmaktadır. Örneğin, $L_k(n)$ sayıları Kerber (1999) ve Betten vd. (2006) çalışmalarında Dedekind sayıları olarak adlandırılmıştır ve Betten vd. (2006) bu sayıları, n. mertebeden herhangi bir devirli (cyclic) grubun maksimal uzunluktaki yörüngelerinin sayısını hesaplamak için kullanmıştır. Aynı çalışmada, Betten vd. (2006) Dedekind sayıları için Tablo 2.2'ye benzer bir tablo da vermişlerdir. Ayrıca klasik kelime* *problemlerinde kullanıma ek olarak, (2.3) denklemi ile verilen formül,* $\mathbb{F}_k[x]$ *Galois cismindeki* n*. dereceden indirgenemez monik polinomların sayısını da hesaplar (Kerber 1999; Betten vd. 2006; Bodin 2010; Simmons 1970; Buchanan vd. 1993; Rebenich 2016). Ayrıca,* $L_k(n)$ *sayıları*

$$\frac{1}{1-kz} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^n}\right)^{L_k(n)} \tag{2.6}$$

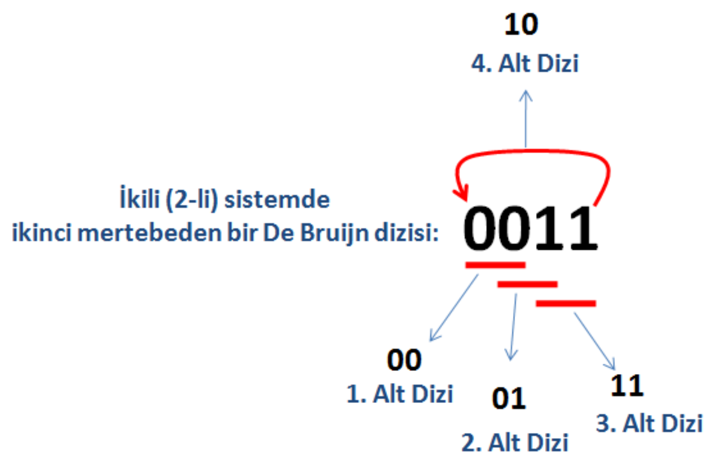
bağıntısı ile verilen siklotomik (cyclotomic) özdeşlikte bir üs olarak karşımıza çıkmaktadır (Metropolis ve Rota 1983; Metropolis ve Rota 1984; Buchanan vd. 1993). Bunlara ek olarak, Metropolis ve Rota (1983) çalışmasında (2.3) denklemi ile verilen formülü kolye (necklace) polinomları olarak adlandırmışlardır ve bu da k*-farklı renkteki* n *adet boncuktan oluşan ilkel kolyelerin sayısını temsil eder. Ayrıca (2.3) denklemi,* k *adet üretece sahip serbest Lie cebirinin derecesi* n *olan homojen alt uzayları için boyut formülünü de verir ve bu formül Witt's formülü olarak da adlandırılır (Witt 1937; Petrogradsky 2003; Berstel ve Perrin 2007; Gurbounov ve Schechtman 2009). Petrogradsky (2003) ve Gurbounov ve Schechtman (2009) çalışmalarında, Hilbert-Poincaré serilerini kullanarak Witt's formülü tipindeki boyut formülleri için üreteç fonksiyonları inşa etme metotları vermiştir.*

2.4. De Bruijn dizileri, Lyndon Kelimeleri ile İlişkileri ve Bazı Uygulamaları

Bu bölümde, Lyndon kelimeleri tarafından üretilebilen De Bruijn dizilerinin tanımı ve bazı uygulamaları verilecektir.

Tanım 2.17. k*-harfli alfabe üzerinde oluşturulacak* n *uzunluklu mümkün her bir kelimenin ardışık bir şekilde bir alt kelime olarak kesinlikle bir kez göründüğü* k^n *uzunluğundaki devirli bir diziye,* n*. mertebeden* k*-lı De Bruijn dizisi denir (De Bruijn 1946; Fredricksen 1982; Fredricksen ve Kessler 1986; Cusick ve Stanica 2009).*

Örnek 2.18. 0011 *dizisi, ikili(2-li) sistemde (*2*-harfli alfabe üzerinde)* 2*. mertebeden* 4 *uzunluklu bir De Bruijn dizisidir. Şekil 2.3,* 0011 *dizisini ve onun alt dizilerini göstermektedir.*



Şekil 2.3. İkili(2-li) sistemde (2-harfli alfabe üzerinde) 2. mertebeden 4 uzunluklu bir De Bruijn dizisi ve onun alt dizileri

Teorem 2.19. *n pozitif tam sayısı olmak üzere, uzunluğu n sayısını bölen Lyndon kelimelerinin leksikografikal olarak birbirine bağlanması ile n. mertebeden k-lı bir De Bruijn dizisi üretilir (Fredricksen ve Maiorana 1978; Fredricksen ve Kessler 1986; Cusick ve Stanica 2009).*

Örnek 2.20. *2-harfli $\Sigma = \{a, b\}$ alfabesi üzerinde uzunluğu 4'ü bölen; a, b, ab, $aaab$, $aabb$, $abbb$ Lyndon kelimelerinin leksikografikal olarak birbirine bağlanması ile üretilen 2^4 uzunluklu 4. mertebeden De Bruijn dizilerinden biri aşağıdaki gibidir:*

***a aaab aabb ab abbb b*.**

$B(k, n)$, birbirinden farklı n. mertebeden k-lı De Bruijn dizilerinin sayısı olsun. $B(k, n)$ sayısının kombinatoriksel ifadesi aşağıdaki şekilde verilir:

Teorem 2.21.

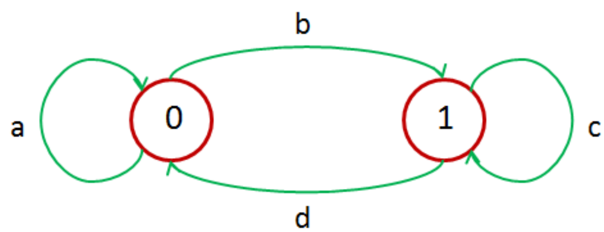
$$B(k, n) = \frac{(k!)^{k^{n-1}}}{k^n}$$

dir (Van Aardenne-Ehrenfest ve De Bruijn, 1951).

Örnek 2.22. *Teorem 2.21 ile verilen denklemde $k = 2$ durumu göz önüne alınırsa, $2^{2^{n-1}-n}$ farklı n. mertebeden ikili (2-li) De Bruijn dizisinin var olduğu anlaşılır.*

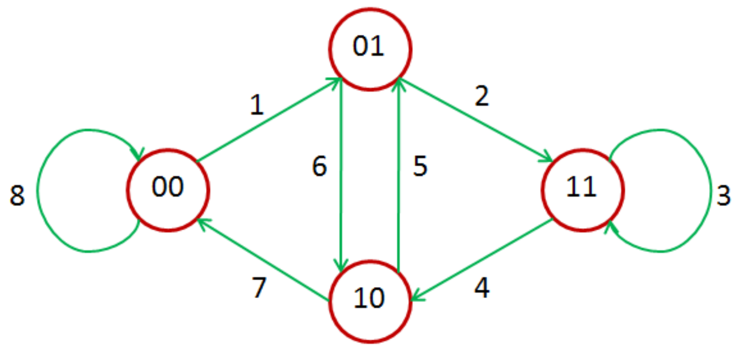
Bu tez konusunun kapsamı dışında olmasına rağmen, De Bruijn dizilerinin De Bruijn çizgeleri olarak adlandırılan özel yönlendirilmiş çizgeler ile de üretildiğini belirtmekte fayda vardır. Örneğin, herhangi bir De Bruijn dizisi, bir De Bruijn çezgesinin herbir kenarının veya herbir köşesinin yalnızca bir kez ziyaret edilmesiyle elde edilen Euler döngüsü veya Hamilton döngüsü ile üretilebilmektedir (De Bruijn 1946; Van Aardenne-Ehrenfest 1951; Chung vd. 1992; Rosenfeld 2002; Cusick ve Stanica 2009).

Örneğin, Şekil 2.4 ile verilen bir boyutlu De Bruijn çizgesinde sırasıyla a-b-c-d kenarlarının izlenmesiyle elde edilen Euler döngüsü sonucu Şekil 2.3 ile verilen 2. mertebeden 0011 De Bruijn dizisi üretilir.



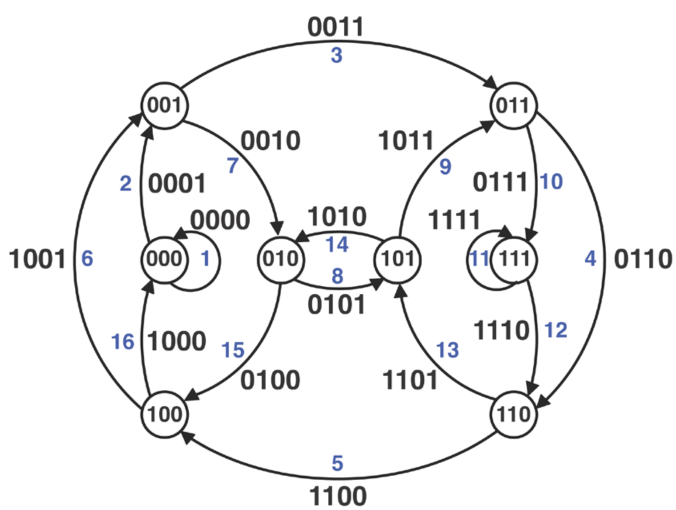
Şekil 2.4. 2 harfli $\Sigma = \{0, 1\}$ alfabesi üzerinde bir boyutlu De Bruijn çizgesi

Buna ek olarak, Şekil 2.5 ile verilen verilen iki boyutlu De Bruijn çizgesinde sırasıyla 00-01-11-10 köşelerinin izlenmesiyle elde edilen Hamilton döngüsü sonucu yine Şekil 2.3 ile verilen 2. mertebeden 0011 De Bruijn dizisi üretilir. Ayrıca, Şekil 2.5 ile verilen çizgede 1-6-5-2-3-4-7-8 kenarlarının ziyaret edilmesiyle oluşan Euler döngüsü sonucu üretilen 3. mertebeden 2-li De Bruijn dizisi ise 00101110 dizisidir.



Şekil 2.5. 2 harfli $\Sigma = \{0, 1\}$ alfabesi üzerinde iki boyutlu De Bruijn çizgesi

Şekil 2.6 ise 2^4 uzunluklu 4. mertebeden 2-li bir De Bruijn dizisinin, 3 boyutlu De Bruijn çizgesi yardımıyla nasıl oluşturulduğunu göstermektedir.



Şekil 2.6. 2 harfli $\Sigma = \{0, 1\}$ alfabesi üzerinde 3 boyutlu De Bruijn çizgesi (Compeau vd. 2011).

Şekil 2.6 ile verilen çizge bir Euler döngüsüne sahiptir çünkü her düğümün iç ve dış derecesi 2'ye eşittir. 1'den 16'ya kadar mavi renkle numaralandırılmış kenarlar izlenerek oluşan Euler döngüsü yardımıyla 0000, 0001, 0011, 0110, 1100, 1001, 0010, 0101, 1011, 0111, 1111, 1110, 1101, 1010, 0100, 1000 kelimeleri elde edilir ve bu alt kelimeler ile 2^4 uzunluklu 4. mertebeden 2-li De Bruijn dizisi:

$$0000110010111101$$

elde edilir (Compeau vd. 2011).

De Bruijn dizileri ve çizgelerinin doğa bilimleri ve bilgisayar bilimlerinde yoğun olarak kullanıldığı bilinmektedir. Bu tezin kapsamı dışında olmasına rağmen bu uygulamalardan birkaçı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

De Bruijn dizileri ve çizgelerinin en önemli uygulamalarından biri DNA dizilimidir (Compeau 2011). Ayrıca literatür incelendiğinde bu dizilerin ve çizgelerinin kodlama, kod çözme ve iletişim ağlarında da kullanıldığı görülmektedir (Esfahanian ve Hakimi 1985; Baker 2011; Ruskey vd. 2012; Warty vd. 2013).

Ayrıca, literatürde De Bruijn dizilerini, kombinatoriksel kolyeleri ve Lyndon kelimelerini üreten birçok etkili algoritma mevcuttur (bakınız; Ruskey 2003; Ruskey ve Sawada 1999; Sawada vd. 2016; Sawada vd. 2011; Fredericksen ve Maiorana 1978; Duval 1988)). Bunlardan üç tanesi Fredericksen, Kessler ve Maiorana'nın FKM algoritması (Fredericksen ve Maiorana, 1978; Fredericksen ve Kessler, 1986; ayrıca bakınız (Ruskey vd. 2012a) ve (Ruskey vd. 2012b)), Duval'in Duval algoritması (Duval 1988) ve cool-lex sıralama algoritmasıdır (Ruskey vd. 2012; Durocher vd. 2012; Stevens ve Williams 2012; Stevens ve Williams 2014). Bunlara ek olarak Knuth (2011) kitabında, De Bruijn dizilerini üreten algoritmalar üzerine bir bölüm vermiştir. Literatürde, De Bruijn dizileri ve Lyndon Kelimelerini üreten ve algoritmik karmaşıklığı veya çalışma zamanı daha etkili(düşük) algoritmalar hakkında açık problemler de verilmiştir (Carpi vd. 2014).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan özel sayılar, özel polinomlar ve bunların üreteç fonksiyonları metotları hakkında bilgiler ve bu metotlar ile ilgili temel özellikler verilecektir.

3.1. Üreteç Fonksiyonunun Tanımı ve Bazı Özellikleri

Bu alt bölümde, tez çalışmasında kullanılan yöntemlerden biri olan üreteç fonksiyonunun tanımı ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.1. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *herhangi bir özel sayı dizisi olmak üzere,*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

tek değişkenli fonksiyonuna, yani katsayıları $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *dizisi olan biçimsel kuvvet serisine,* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sayı dizisinin üstel olmayan üreteç fonksiyonu denir. Aynı şekilde,* $\{a_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *herhangi bir özel polinom dizisi olmak üzere,* $\{a_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *polinom dizisinin üstel olmayan üreteç fonksiyonu aşağıdaki çift değişkenli fonksiyonu ile verilir:*

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) t^n,$$

(Rainville 1960).

Bu tez çalışmasında kullanılacak birkaç tane özel sayı ve özel polinomlar için üreteç fonksiyonları ve bunların özellikleri bir sonraki bölümde verilecektir. Diğer özel sayı ve özel polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları, bunların inşaa teknikleri ve temel özellikleri için (Rainville 1960), (Wilf 1990), (Charalambides 2002) ve (Srivastava ve Choi 2012) kaynaklarına bakılabilir.

3.2. Bazı Özel Sayılar, Özel Polinomlar ve Bunların Üreteç Fonksiyonları

Bu alt bölümde, tez çalışmasında kullanılan diğer bir yöntem olan özel sayılar, özel polinomlar ve bunların üreteç fonksiyonları hakkında bilgiler verilecektir.

3.2.1. Apostol-Bernoulli polinomları, Apostol-Bernoulli sayıları ve özellikleri

Bu bölümde, Apostol-Bernoulli sayıları, Apostol-Bernoulli polinomları, Bernoulli sayıları ve Bernoulli polinomlarının tanımları ve temel özellikleri verilecektir.

$t \in \mathbb{C}$ olsun. $t = 1$ iken $|z| < 2\pi$ ve $t \neq 1$ iken $|z| < |\log t|$ olmak üzere, $\mathcal{B}_k(x,t)$ Apostol-Bernoulli polinomları

$$\frac{ze^{zx}}{te^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k(x;t) \frac{z^k}{k!} \tag{3.1}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Apostol 1951). Bu üreteç fonksiyonunda $x = 0$ alınırsa

$$\mathcal{B}_k(t) = \mathcal{B}_k(0;t)$$

ile gösterilen Apostol-Bernoulli sayıları elde edilir ve dolayısıyla bu sayıların üreteç fonksiyonu:

$$\frac{z}{te^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k(t) \frac{z^k}{k!} \tag{3.2}$$

olur. (3.1) ve (3.2) denklemlerinden kolayca görülmektedir ki k bir pozitif tamsayı olmak üzere, Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları arasında

$$\mathcal{B}_k(x;t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} \mathcal{B}_j(t) \tag{3.3}$$

bağıntısı mevcuttur (Apostol 1951; Srivastava ve Choi 2001; Boyadzhiev 2008; Simsek ve Srivastava 2010; Srivastava vd. 2012; Ozden ve Simsek 2014).

(3.2) denkleminde gerekli cebirsel işlemler yapıldıktan sonra, Apostol-Bernoulli sayıları için rekürans bağıntısı $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(t) &= 0, \\ \mathcal{B}_1(t) &= \frac{1}{t-1}, \\ \mathcal{B}_m(t) &= \frac{t}{1-t} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \mathcal{B}_j(t), \end{aligned} \tag{3.4}$$

olarak elde edilir. (3.4) denkleminde verilen rekürans bağıntısı kullanılarak Apostol-Bernoulli sayılarının birkaç değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_2(t) &= \frac{-2t}{(t-1)^2}, \\
\mathcal{B}_3(t) &= \frac{3t(t+1)}{(t-1)^3}, \\
\mathcal{B}_4(t) &= \frac{-4t(t^2+4t+1)}{(t-1)^4}, \\
\mathcal{B}_5(t) &= \frac{5t(t^3+11t^2+11t+1)}{(t-1)^5}, \\
\mathcal{B}_6(t) &= \frac{-6t(t^4+26t^3+66t^2+26t+1)}{(t-1)^6}, \\
\mathcal{B}_7(t) &= \frac{7t(t^5+57t^4+302t^3+302t^2+57t+1)}{(t-1)^7}, \ldots
\end{aligned}$$

Apostol-Bernoulli polinomlarının birkaç değeri ise (3.3) denklemi kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0(x;t) &= 0, \\
\mathcal{B}_1(x;t) &= \frac{1}{t-1}, \\
\mathcal{B}_2(x;t) &= \frac{1}{t-1}x - \frac{2t}{(t-1)^2}, \\
\mathcal{B}_3(x;t) &= \frac{3}{t-1}x^2 - \frac{6t}{(t-1)^2}x + \frac{3t(t+1)}{(t-1)^3}, \\
\mathcal{B}_4(x;t) &= \frac{4}{t-1}x^3 - \frac{12t}{(t-1)^2}x^2 + \frac{12t(t+1)}{(t-1)^3}x - \frac{4t(t^2+4t+1)}{(t-1)^4}, \\
\mathcal{B}_5(x;t) &= \frac{5}{t-1}x^4 - \frac{20t}{(t-1)^2}x^3 + \frac{30t(t+1)}{(t-1)^3}x^2 - \frac{20t(t^2+4t+1)}{(t-1)^4}x \\
&\quad + \frac{5t(t^3+11t^2+11t+1)}{(t-1)^5}, \ldots
\end{aligned}$$

(Apostol 1951; Srivastava ve Choi 2001; Boyadzhiev 2008; Simsek ve Srivastava 2010; Srivastava vd. 2012; Ozden ve Simsek 2014).

Not 3.2. *Apostol-Bernoulli sayılarının nümerik değerlerine bakıldığında bu sayıların hepsinin t parametresinin bir rasyonel fonksiyonu olduğu ve bu fonksiyonların hepsinin $t = 1$ noktasında kutuba sahip olduğu görülebilir.*

(3.1) denklemi kullanılarak Apostol-Bernoulli polinomları için aşağıdaki formül elde edilir:

$$t\mathcal{B}_n(x+1;t) - \mathcal{B}_n(x;t) = nx^{n-1}, n \geq 1.$$

Bu denklemde $x = 0$ alınırsa,

$$t\mathcal{B}_n(1;t) = \mathcal{B}_n(0;t), n > 1 \tag{3.5}$$

elde edilir (Apostol 1951).

Ayrıca, $m \in \mathbb{N}$ ve $t \neq 1$ olmak üzere Apostol-Bernoulli polinomlarının açık formülü:

$$\mathcal{B}_m(t) = \frac{m}{t-1}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{t}{t-1}\right)^n k^{m-1} \tag{3.6}$$

ile verilir (Apostol 1951; Boyadzhiev 2008; Simsek 2018b).

(3.1) denkleminde $t \to 1$ olursa $B_k(x)$ Bernoulli polinomları için

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{z^k}{k!} \tag{3.7}$$

üreteç fonksiyonu elde edilir. Burada $|z| < 2\pi$ dir. (3.7) denkleminde $x = 0$ alınırsa,

$$B_n = B_n(0)$$

Bernoulli sayıları elde edilir. Bu sayılar $B_0 = 1$ olmak üzere $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ için

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j = 0 \tag{3.8}$$

rekürans bağıntısına sahiptir. Bu bağıntı yardımıyla Bernoulli sayılarının birkaç değeri

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, \\ & B_8 = -\frac{1}{30}, B_9 = 0, B_{10} = \frac{5}{66}, \ldots \end{aligned}$$

şekilde hesaplanmıştır. Burada görüleceği gibi

$$B_{2n+1} = 0, (n \in \mathbb{N})$$

dir. Bernoulli polinomları ile Bernoulli sayıları arasındaki ilişki

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} B_j \tag{3.9}$$

şeklindedir. Bu bağıntı yardımıyla Bernoulli polinomlarının birkaç değeri

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1, \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}, \ldots
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanmıştır (Berndt 1985, s. 279; Djordjevic ve Milovanovic 2014; Srivastava ve Choi 2012; Srivastava ve Manocha 1984; Quaintance ve Gould 2015).

Matematiğinin hemen hemen tüm dallarında Bernoulli sayıları ve polinomlarının çeşitli uygulamaları mevcuttur. Bu uygulamalardan biri, ardışık tam sayıların kuvvetlerinin toplamını, Bernoulli sayıları ve polinomlarını cinsinden veren ve ünlü Faulhaber formülü olarak bilinen

$$\sum_{k=0}^{m} k^n = \frac{B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}}{n+1} \tag{3.10}$$

formüldür (Srivastava ve Manocha 1984; Berndt 1985, s. 279; Srivastava 2000; Srivastava ve Choi 2012; Djordjevic ve Milovanovic 2014; Quaintance ve Gould 2015).

3.2.2. Yüksek mertebeden Bernoulli tipli, Euler tipli ve Genocchi tipli polinomların üreteç fonksiyonları ve özellikleri

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılan yüksek mertebeden Bernoulli tipli, Euler tipli ve Genocchi tipli polinomların üreteç fonksiyonları ve bunların özellikleri verilecektir.

$x \in \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $k, v \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ için yüksek mertebeden Bernoulli tipli, Euler tipli ve Genocchi tipli polinomları içeren $\mathcal{Y}_{n,t}^{(v)}(x; k, a, b)$ polinomunun üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{2^{1-k} z^k}{t^b e^z - a^b}\right)^v e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}_{n,t}^{(v)}(x; k, a, b) \frac{z^n}{n!} \tag{3.11}$$

şeklinde Aygunes ve Simsek (2011) tarafından tanımlanmıştır öyle ki $x = 0$ için

$$\mathcal{Y}_{n,t}^{(v)}(k, a, b) = \mathcal{Y}_{n,t}^{(v)}(0; k, a, b)$$

dir (Ozden vd. 2010; Aygunes ve Simsek 2011).

$v = 1$ alınırsa (3.11) denklemi, Ozden vd. (2010) tarafından daha önce tanımlanan ve klasik Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarını içeren $\mathcal{Y}_{n,t}^{(1)}(x; k, a, b)$ polinomunun üreteç fonksiyonuna indirgenir, yani

$$\frac{2^{1-k} z^k}{t^b e^z - a^b} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}_{n,t}^{(1)}(x; k, a, b) \frac{z^n}{n!} \tag{3.12}$$

olur ve burada $\mathcal{Y}_{n,t}^{(1)}(x; k, a, b)$ polinomları $x = 0$ için

$$\mathcal{Y}_{n,t}^{(1)}(k, a, b) = \mathcal{Y}_{n,t}^{(1)}(0; k, a, b)$$

sayılarına indirgenir ki bu sayılar klasik Bernoulli, Euler ve Genocchi sayılarını içeren bir sayıdır (Ozden vd. 2010; Aygunes ve Simsek 2011). Ayrıca, (3.11) denkleminde $v = 0$ alınırsa,

$$\mathcal{Y}_{n,t}^{(0)}(x; k, a, b) = x^n$$

elde edilir.

$\mathcal{E}_n(x; t)$ ve $\mathcal{G}_n(x; t)$ sırasıyla Apostol-Euler polinomlarını ve Apostol-Genocchi polinomlarını göstermek üzere $\mathcal{Y}_{n,t}^{(1)}(x; k, a, b)$ polinomu ile Apostol-Bernoulli polinomları, Apostol-Euler polinomları ve Apostol-Genocchi polinomları arasında sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n,t}^{(1)}(x; 1, 1, 1) &= \mathcal{B}_n(x; t), \\ \mathcal{Y}_{n,t}^{(1)}(x; 0, -1, 1) &= \mathcal{E}_n(x; t), \end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}_{n,t}^{(1)}\left(x;1,-1,1\right) \quad = \quad \frac{1}{2}\mathcal{G}_{n}\left(x;t\right),$$

bağıntıları mevcuttur (Ozden vd. 2010).

3.2.3. Frobenius-Euler sayıları ve bu sayıların ilişkili olduğu bazı sayı aileleri

Bu bölümde, Frobenius-Euler sayılarının tanımı ve bu sayıların ilişkili olduğu bazı sayı aileleri hakkında bilgiler verilecektir.

$H_n\left(t\right)$ ile gösterilen Frobenius-Euler sayıları,

$$\frac{1-t}{e^{z}-t}=\sum_{n=0}^{\infty}H_{n}\left(t\right)\frac{z^{n}}{n!}$$

üreteç fonksiyonu yardımıyla tanımlanır (Jang ve Pak 2002; Kim ve Kim 2012; Simsek 2005; Simsek 2010; Simsek vd. 2004; Simsek vd. 2007).

$n\geq 1$ iken Apostol-Bernoulli sayıları ile Frobenius-Euler sayıları arasındaki bağıntı:

$$\mathcal{B}_{n}\left(t\right)=\frac{n}{t-1}H_{n-1}\left(\frac{1}{t}\right) \tag{3.13}$$

ifade ile verilir (Kim vd. 2008; Simsek 2016b).

$u\in\mathbb{C}\backslash\left\{1\right\}$, $a\in\mathbb{R}^{+}$ ve $a\geq 1$ olmak üzere Simsek (2013a) tarafından $Y_n\left(u;a\right)$ sayıları,

$$\frac{1}{a^{z}-u}=\sum_{n=0}^{\infty}Y_{n}\left(u;a\right)\frac{z^{n}}{n!} \tag{3.14}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlamıştır.

$$Y_{0}\left(u;a\right)=\frac{1}{1-u},$$

olmak üzere (3.14) denklemini kullanarak, Simsek (2017) ayrıca $n\geq 1$ için

$$Y_{n}\left(u;a\right)=\frac{1}{u-1}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}Y_{j}\left(u;a\right)\left(\ln a\right)^{n-j}$$

rekürans bağıntısını vermiştir.

Buna ek olarak, Simsek (2017) $n \geq 1$ olmak üzere Frobenius-Euler sayıları ile $Y_n(u;a)$ sayıları arasındaki bir ilişkiyi

$$H_n(u) = -\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} Y_j(u;e) \tag{3.15}$$

bağıntısı ile vermiştir.

$w(n)$, Fubini sayılarını göstermek üzere (3.14) denkleminde $u = 2$ ve $a = e$ alınırsa,

$$w(n) = -Y_n(2;e)$$

elde edilir ve Fubini sayıları kombinatorik olarak $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin boş olmayan sıralı parçalanışlarının sayısı olarak tanımlanır (Comtet 1974, s. 228). Fubini sayıları ile ilgili temel bilgiler için (Good 1975) çalışmasına bakılabilir. Ayrıca, Fubini sayılarının şifreli kilit ve De Bruijn dizileri ile ilişkili olduğu da bilinmektedir (Velleman ve Call 1995).

3.2.4. Stirling sayıları ve özellikleri

Bu bölümde, Stirling sayıları ile ilgili temel tanım ve özdeşlikler verilmiştir.

$(x)_n = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ azalan faktoriyel olmak üzere, $S(n,k)$ ile gösterilen ikinci tür Stirling sayıları için azalan faktoriyeli içeren bir bağıntı (Charalambides 2002, s. 202):

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k = x^n \tag{3.16}$$

şeklindedir. Ayrıca, $S(n,k)$ sayılarının üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^z - 1)^k$$

ifadesi ile verilir. $S(0,0) = 1$, $k > n$ iken $S(n,k) = 0$ ve $n > 0$ iken $S(n,0) = 0$ olmak üzere $S(n,k)$ sayıları için rekürans formülü:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k) \tag{3.17}$$

ile verilir ve ikinci tür Stirling sayılarının açık formülü:

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}(k-j)^{n} \tag{3.18}$$

dir. Dahası, $(x)_n$ azalan faktoriyeli $s(n,k)$ ile gösterilen birinci tür Stirling sayıları cinsinden

$$(x)_n=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)\,x^{k} \tag{3.19}$$

şeklinde de yazılabilir (Srivastava ve Choi 2012; Comtet 1974; Bona 2007; Charalambides 2002).

İkinci tür Stirling sayıları kombinatorik olarak n elemanlı sonlu bir kümenin k tane alt kümeye parçalanışlarının sayısı olarak tanımlanır (Charalambides 2002) ve burada belirtmeliyiz ki birinci tür Stirling sayılarının mutlak değeri $|s(n,k)|$, k döngülü n-li permütasyonları sayar (Charalambides 2002; Bona 2007).

Bernoulli sayıları ile ikinci tür Stirling sayıları arasındaki bağıntı,

$$B_m=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}\frac{j!}{j+1}S(m,j) \tag{3.20}$$

ile verilir (Simsek 2013b; Remark 5).

3.2.5. $y_3(n,k;\lambda;a,b)$ sayı ailesi ve özellikleri

Bu bölümde, $y_3(n,k;\lambda;a,b)$ sayı ailesinin tanımı ve temel özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.3. *a ve b reel sayılar ve λ reel veya kompleks bir sayı olmak üzere $y_3(n,k;\lambda;a,b)$ sayıları,*

$$F_{y_3}(z,k;\lambda;a,b)=\frac{e^{bkz}}{k!}\left(\lambda e^{(a-b)z}+1\right)^{k}=\sum_{n=0}^{\infty}y_3(n,k;\lambda;a,b)\frac{z^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu yardımıyla tanımlanır (Simsek 2016a).

Yukarıda üreteç fonksiyonu verilen $y_3(n,k;\lambda;a,b)$ sayılarının açık formülü ise aşağıdaki şekilde verilir (Simsek 2016a):

Teorem 3.4.

$$y_3(n,k;\lambda;a,b) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^j (bk + j(a-b))^n. \tag{3.21}$$

3.3. Zeta Tipli Fonksiyonlar ve Özellikleri

Bu bölümde, Apostol-Bernoulli tipli sayı ve polinomların interpolasyon fonksiyonları verilecektir. Bu interpolasyon fonksiyonları ve özellikleri bu tez çalışmasında kullanılacaktır.

$|z| < 1$ iken $a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$; $s\in\mathbb{C}$ ve $|z| = 1$ iken $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ olmak üzere, Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu $\Phi\,(z,s,a)$:

$$\Phi\,(z,s,a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+a)^s}$$

şeklinde tanımlanır (Srivastava ve Choi 2012, s. 121).

Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonunun bazı özel durumları, sırasıyla:

$$\Phi\,(1,s,1) = \zeta\,(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, (\mathrm{Re}\,(s) > 1)$$

$$\Phi\,(1,s,a) = \zeta\,(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}, (\mathrm{Re}\,(s) > 1)\,.$$

Riemann zeta fonksiyonu ve Hurwitz (veya genelleştirilmiş) zeta fonksiyonudur (Srivastava ve Choi 2012).

Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu, negatif tamsayılarda Apostol-Bernoulli polinomlarının interpolasyon fonksiyonudur, yani d herhangi bir negatif olmayan tamsayı olmak üzere

$$\Phi\,(z,-d,a) = -\frac{\mathcal{B}_{d+1}\,(a;z)}{d+1} \tag{3.22}$$

dir (Apostol 1951, Ozden vd. 2010, Srivastava ve Choi 2012).

Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu aynı zamanda

$$z\Phi(z,s,a+1) - \Phi(z,s,a) = -a^{-s}. \tag{3.23}$$

fark formülünü de sağlar ve bu formül kullanılarak

$$z^{m+1}\Phi(z,s,a+m+1)-\Phi(z,s,a)=-\sum_{n=0}^{m}z^{n}(n+a)^{-s} \tag{3.24}$$

yazılabilir (Srivastava ve Choi 2012). Dolayısıyla, z and a herhangi kompleks sayılar ve d herhangi bir negatif olmayan tamsayı olmak üzere, (3.24) denkleminde $s=-d$ yazılırsa ve (3.22) denklemi kullanılırsa, Apostol-Bernoulli polinomları ile ilgili aşağıdaki formül elde edilir (Apostol 1951; Srivastava ve Choi 2012; Kucukoglu vd. 2017a):

$$\sum_{n=0}^{m}z^{n}(n+a)^{d}=\begin{cases}\dfrac{z^{m+1}\mathcal{B}_{d+1}(a+m+1;z)-\mathcal{B}_{d+1}(a;z)}{d+1}, & z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}\text{ ise,}\\[2ex] \dfrac{z^{m+1}B_{d+1}(a+m+1)-B_{d+1}(a)}{d+1}, & \text{diğer durumlarda.}\end{cases} \tag{3.25}$$

$k,b\in\mathbb{N}_0$ ve $v\in\mathbb{N}$ olmak üzere Aygunes ve Simsek (2011) tarafından tanımlanan v-inci mertebeden Lerch zeta tipli fonksiyonu $\zeta_t^{(v)}(s,k,a,b)$

$$\zeta_t^{(v)}(s,k,a,b)=a^{-bv}\left(-\frac{1}{2}\right)^{(k-1)v}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+v-1}{n}\frac{\left(\frac{t}{a}\right)^{bn}}{n^{s}} \tag{3.26}$$

ifadesi ile verilir ki burada $\left|\frac{t}{a}\right|<1$ iken $s\in\mathbb{C}$ ve $\left|\frac{t}{a}\right|=1$ iken $\mathrm{Re}(s)>1$'dir.

Not 3.5. *Burada belirtmeliyiz ki $\zeta_t^{(v)}(s,k,a,b)$ fonksiyonu, yüksek mertebeden Bernoulli, Euler ve Genocchi sayılarının negatif tamsayılardaki interpolasyon fonksiyonudur (Aygunes ve Simsek 2011).*

Aygunes ve Simsek (2011) aynı zamanda $r>kv$ için aşağıdaki bağıntıyı da ispatlamışlardır:

$$\zeta_t^{(v)}(kv-r,k,a,b)=(-1)^{kv}\frac{\mathcal{Y}_{r,t}^{(v)}(k,a,b)}{\binom{r}{kv}(kv)!}. \tag{3.27}$$

Not 3.6. *(3.26) denkleminde v, a, b ve k'nin özel değerleri alındığında zeta fonksiyonlar ailesinden Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonları, Hurwitz zeta fonksiyonları, Riemann zeta fonksiyonları gibi fonksiyonlar elde edilir. Zeta fonksiyonları ailesindeki fonksiyonlar için (Apostol 1951; Aygunes ve Simsek 2011; Kim vd. 2008; Ozden vd. 2010; Ozden ve Simsek 2014; Srivastava ve Choi 2001; Srivastava ve Choi 2012) çalışmalarına bakılabilir.*

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, tez çalışmasında elde edilen tüm sonuçlar verilmiştir.

4.1. $y_3(n,k;\lambda;a,b)$ Sayı Ailesi ile De Bruijn Dizileri Arasındaki İlişki

Bu bölümde, $y_3(n,k;\lambda;a,b)$ sayı ailesi ile birbirinden farklı 2. mertebeden k-lı De Bruijn dizilerinin sayısı arasındaki ilişki verilmiştir.

(3.21) denkleminde $a=b=1$ alınırsa bu denklem,

$$y_3(n,k;\lambda;1,1)=\frac{k^n}{k!}\left(1+\lambda\right)^k$$

eşitliğine indirgenir. Bu eşitlikte,

$$\lambda=\frac{k!}{\sqrt[k]{k^{2+n}}}-1$$

alınırsa ve $n=0$ ise

$$B(k,2)=k!y_3\left(0,k;\frac{k!}{\sqrt[k]{k^2}}-1;1,1\right)$$

elde edilir. Yani, bu bize k^2 uzunluğundaki birbirinden farklı k-lı De Bruijn dizilerinin sayısının $y_3(n,k;\lambda;a,b)$ sayıları cinsinden ifadesini verir.

4.2. Asal Sayı Uzunluklu Lyndon Kelimelerinin Sayıları için Üreteç Fonksiyonlarının İnşası ve Uygulamaları

Bu bölümde, sonlu leksikografikal sıralı alfabe üzerinde tanımlı kelimelerden biri olan Lyndon kelimelerini sayan sayılar için (Kucukoglu ve Simsek 2017) çalışmasında inşa edilen üreteç fonksiyonları ve bu fonksiyonlar ile ilgili sonuçlar verilmiştir. Bu bölümde, herhangi bir asal sayı uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin sayısı göz önüne alınmıştır.

p herhangi bir asal sayı olmak üzere, $L_k\left(p\right)$ sayıları için üreteç fonksiyonunları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Kucukoglu ve Simsek 2017):

Tanım 4.1. *p bir asal sayı ve $|t| < 1$ olmak üzere, p uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin sayıları ($L_k(p)$ sayıları) için üreteç fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$f_L(t,p) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(p)\, t^k. \tag{4.1}$$

Not 4.2. *Burada belirtmeliyiz ki, her bir p asal sayı değerine karşılık gelen bir üreteç fonksiyonu vardır.*

Örnek 4.3. *(4.1) üreteç fonksiyonunda $p = 2$ alınırsa ve (2.5) denklemi ile verilen formül kullanılırsa, geometrik seri yardımıyla*

$$f_L(t,2) = \frac{1}{2}\left(\frac{2t^2}{(1-t)^3}\right)$$

elde edilir (Kucukoglu ve Simsek 2017; Kucukoglu vd. 2017a; Kucukoglu vd. 2017b).

Örnek 4.4. *(4.1) denkleminde $p = 3$ alınırsa, geometrik seri yardımıyla*

$$f_L(t,3) = \frac{1}{3}\left(\frac{6t^2}{(1-t)^4}\right)$$

olur (Kucukoglu ve Simsek 2017; Kucukoglu vd. 2017a; Kucukoglu vd. 2017b).

Teorem 4.5. *p asal sayı olsun. O halde*

$$f_L(t,p) = \frac{1}{p}\left(\frac{q(t)}{(1-t)^{p+1}}\right)$$

dir ki burada $a_j \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$q(t) = \sum_{j=0}^{p} a_j t^{p-j}$$

şeklindedir ve $\mathrm{der}(q(t)) \leq p$ olan bir polinomdur (Kucukoglu ve Simsek 2017).

İspat (2.5) denkleminde, $m = 1$ özel durumu kullanılırsa

$$f_L(t,p) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}(k^p - k)\, t^k = \frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k^p t^k - \sum_{k=0}^{\infty} k t^k\right) \tag{4.2}$$

elde edilir ve burada asal sayılar üzerinden yapılacak matematiksel tümevarımla istenen sonuç elde edilir. □

4.2.1. $f_L(t,p)$ üreteç fonksiyonları ile Apostol-Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiler

Bu bölümde, $f_L(t,p)$ üreteç fonksiyonları ile Apostol-Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Uzunluğu bir p asal sayısı olan k-lı Lyndon kelimelerinin sayısının etkili bir üreteç fonksiyonunu bulmak için $f_L(t,p)$ üreteç fonksiyonunun Apostol-Bernoulli sayıları cinsinden yeniden inşası yapılmıştır. Bu bölümde verilen sonuçların bir kısmı, (Kucukoglu vd. 2017b) çalışmasında yer almaktadır.

(Kucukoglu ve Simsek 2017) çalışmasında inşaa edilen $f_L(t,p)$ üreteç fonksiyonları, (Kucukoglu vd. 2017b) çalışmasında Apostol-Bernoulli sayılarının t parametresine bağlı fonksiyonları cinsinden yeniden inşa edilmiş ve $f_{L_B}(t,p)$ ifadesi ile aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 4.6. *p bir asal sayısı olmak üzere,*

$$f_{L_B}(t,p) = \frac{\mathcal{B}_2(t)}{2p} - \frac{\mathcal{B}_{p+1}(t)}{p(p+1)} \tag{4.3}$$

dir (Kucukoglu vd. 2017b).

İspat (3.26) denkleminde $s=-m$ ve $k=a=b=v=1$ alınırsa,

$$\zeta_t^{(1)}(-m,1,1,1) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n n^m \tag{4.4}$$

bulunur. Ayrıca, (3.27) denkleminde $r=1+m$ ve $k=a=b=v=1$ alınırsa,

$$\zeta_t^{(1)}(-m,1,1,1) = -\frac{\mathcal{Y}_{1+m,t}^{(1)}(1,1,1)}{1+m} \tag{4.5}$$

elde edilir. (3.1) ve (3.11) denklemlerinden

$$\mathcal{Y}_{n,t}^{(1)}(1,1,1) = \mathcal{B}_n(t) \tag{4.6}$$

olduğu açıktır. Yani, $\zeta_t^{(1)}(-m,1,1,1)$ fonksiyonunun, Apostol-Bernoulli sayılarının interpolasyon fonksiyonu olduğu (4.5) denklemi yardımıyla görülebilir (Ozden vd. 2010; Aygunes ve Simsek 2011).

Bu nedenle, (4.4), (4.5) ve (4.6) denklemleri, (2.5) ve (4.1) denklemleriyle birleştirilirse, istenilen sonuç elde edilir. □

Yukarıda verilen teorem için bazı özel notlar ve örnekler aşağıda verilmiştir:

Not 4.7. *Teorem 4.6 ile verilen denklemde $p = 2$ alınırsa,*

$$f_{L_B}(t,2) = \frac{t^2}{(1-t)^3} \tag{4.7}$$

elde edilir. Bu sonucun Örnek 4.3 ile verilen fonksiyona eşit olduğu görülebilir.

Not 4.8. *Teorem 4.6 ile verilen denklemde $p = 3$ alınırsa,*

$$f_{L_B}(t,3) = \frac{2t^2}{(t-1)^4} \tag{4.8}$$

bulunur. Bu sonucun da Örnek 4.4 ile verilen fonksiyona eşit olduğu görülebilir.

(4.3) denklemi ile (3.4) denklemi birleştirilirse aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.9. *p bir asal sayı olmak üzere,*

$$f_{L_B}(t,p) = -\frac{t}{p\,(t-1)}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}\mathcal{B}_j(t)\right)$$

dir (Kucukoglu vd. 2017b).

4.2.2. $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonları için hesaplama algoritmaları

Bu bölümde, (3.4) denklemi ile (4.3) denklemini birleştirerek, asal sayı uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin sayısı için Apostol-Bernoulli sayıları yardımıyla inşa edilen üreteç fonksiyonlarının nümerik değerlerini etkili bir şekilde hesaplayan algoritmalar türetilmiştir. Ayrıca, bir sonraki bölümde bu algoritmalar kullanarak $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonlarının grafikleri ve bazı nümerik uygulamaları verilmiştir. Bu bölümde yer alan algoritmalar ve uygulamaları (Kucukoglu vd. 2017b) çalışmasında mevcuttur.

Şimdi ilk olarak Apostol-Bernoulli sayılarını hesaplayan aşağıdaki algoritmayı verelim (Kucukoglu vd. 2017b):

Algoritma 1: m bir tamsayı ve $t \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olmak üzere bu algoritma, (3.4) denklemi ile verilen m-inci Apostol-Bernoulli sayısını döndüren rekürsif (özyinelemeli) algoritmadır.

```
procedure APOST_BERN_NUM(m: negatif olmayan tamsayı, t)
    Begin
    Local variable j : integer
    if m = 0 then
        return 0
    else
        if m = 1 then
            return 1/(t − 1)
        else
            return (t/(1 − t)) ∗ sum(Binomial_Coef(m, j)
                        ↪ ∗ APOST_BERN_NUM(m − j, t), j, 1, m)
        end if
    end if
end procedure
```

Şimdi, önceki bölümlerde Apostol-Bernoulli sayıları cinsinden inşa edilen $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonlarını hesaplayan algoritmayı verelim (Kucukoglu vd. 2017b):

Algoritma 2: p bir asal sayı, $t \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ve $|t| < 1$ olmak üzere bu algoritma, Algoritma 1 ile verilen `APOST_BERN_NUM` prosedürünü kullanarak, (4.3) denklemiyle verilen p uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin sayısı için verilen $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonlarını döndürür.

procedure GEN_FUNC_LYNDON(t, p: asal sayı)

Begin

Local variables $v_1, v_2 \leftarrow 0$

$v_1 = (1/2p) *$APOST_BERN_NUM$(2,t)$

$v_2 = (1/(p*(p+1))) *$APOST_BERN_NUM$(p+1,t)$

$f_{L_B}(t,p) = v_1 - v_2$

return $f_{L_B}(t,p)$

end procedure

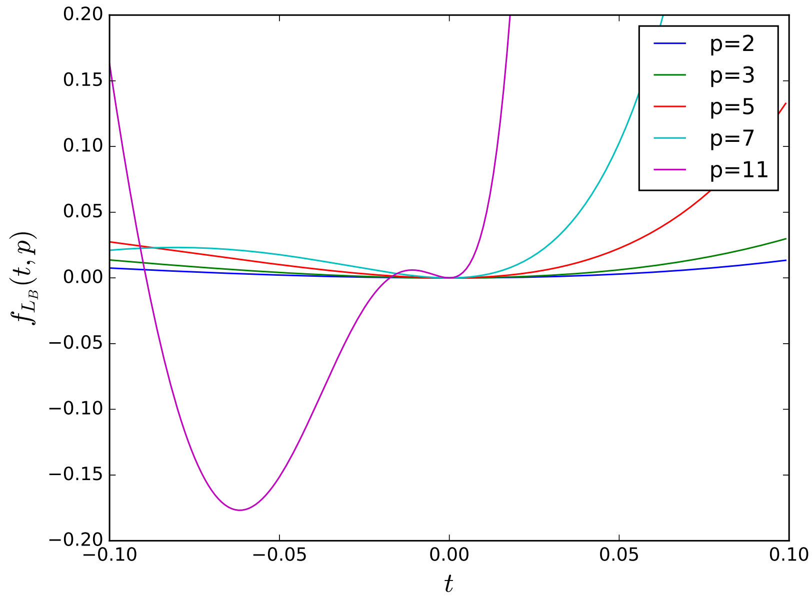
4.2.3. $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonlarının grafikleri

Bu bölümde, $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonlarının bazı p asal sayı değerlerine karşılık gelen grafikleri çizilmiştir. Bu bölümde yer alan grafikler (Kucukoglu vd. 2017b) çalışmasında mevcuttur.

Burada, $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonunun grafiklerini çizmek için

$$t \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$$

aralığı seçilmiştir. Seçilen bu aralığın ve bazı asal sayı değerlerinin, $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonunun grafiğini nasıl etkilediği Şekil 4.7 ile gösterilmektedir.



Şekil 4.7. Çeşitli p asal sayı değerleri için $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonları

Şekil 4.7 ile verilen grafiklerden görülmektedir ki $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonlarının grafiklerinin şekli p asal sayı değerlerinin değişmesinden etkilenmektedir. Bu şekilden ayrıca p değeri arttığında eğrilerde sapmalar meydana geldiği görülebilir. Bu eğriler, $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonların özelliklerini analiz etmemiz için bize bilgi sağlamaktadır. Ayrıca, bu eğriler geometrik tasarımda ve bunların uygulamalarında yeni eğriler geliştirmek için kullanılabilir.

4.2.4. Bazı özel asal sayı sınıfları için $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonlarının yakınsadığı değerler

Bu bölümde, Bölüm 4.2.2.'de verilen algoritmalar kullanılarak, Fermat asalları, Mersenne asalları, Fibonacci asalları ve Lucas asalları gibi bazı özel asal sayı sınıflarından seçilen herhangi bir asal sayı uzunluğundaki k-lı Lyndon kelimelerin sayılarının üreteç fonksiyonlarının temsil ettiği kuvvet serilerinin hangi sayıya yakınsadığı bulunarak bazı nümerik hesaplamalar yapılmıştır ve bu özel asal sayı sınıfları için üreteç fonksiyonlarının tabloları verilmiştir. Böylece, bu üreteç fonksiyonlarının davranışlarının incelenebilmesi ve sınıflandırılabilmeleri için bir zemin hazırlanmıştır. Ayrıca bu bölümde, Algoritma 1 ve Algoritma 2 yardımıyla bazı özel asal sayı sınıfları için $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonunun temsil ettiği kuvvet serilerinin yakınsadığı değerler hesaplanmıştır. Bu bölümde verilen tüm sonuçlar ve daha fazlası, (Kucukoglu vd. 2017b) çalışmasında yer almaktadır.

Öncelikle, Algoritma 1 ve Algoritma 2 kullanılarak, $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonunun $p = 2, 3, 5, 7$ ve $t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ değerlerindeki birkaç değeri hesaplanarak tüm bu değerler, aşağıdaki Tablo 4.3 ile verilmiştir:

Tablo 4.3. İlk dört asal sayı için $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonunun bazı nümerik değerleri

		t				
		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$
p	2		2	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{4}{125}$
	3		8	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{32}{625}$
	5		216	$\frac{27}{2}$	$\frac{27}{512}$	$\frac{864}{15625}$
	7		13512	$\frac{5427}{16}$	$-\frac{243}{4096}$	$-\frac{3936}{78125}$

$f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonunun $t = 1$ noktasında kutbu olduğundan dolayı, Tablo 4.3'de $t = 1$ noktasına karşılık gelen kolon, $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonu tanımsız olacak şekilde gösterilmiştir.

Literatüre bakıldığında Fermat asalları ve Mersenne asalları gibi özel bir formülle üretilen veya Fibonacci asalları ve Lucas asalları gibi özel bir özelliğe sahip olan birçok asal sayı sınıfları mevcuttur. Örneğin, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $2^n - 1$ formunda yazılabilen asal sayılara Mersenne asalları, $2^{2^n} + 1$ formunda yazılabilen asal sayılara Fermat asalları, asal bir sayı olan Fibonacci ve Lucas sayılarına da sırasıyla Fibonacci ve Lucas asalları denir (bkz: Sloane 1964). Burada belirtilmelidir ki Tablo 4.3 ile verilen 3 ve 7 asalları Mersenne asalları ve 3 ve 5 asalları da Fermat asallarıdır.

$f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonunun 7 sayısından büyük asal sayılar için nümerik hesaplamaları yapıldığında elde edilen değerler çok basamaklı tamsayılar veya büyük pay ve paydaya sahip kesirler çıktığından dolayı, $t = -\frac{1}{2}$ ve $t = \frac{1}{2}$ değerlerine karşılık gelen $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonlarının diğer değerleri tablo haricinde aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$p = 11$ asal sayısı, aynı zamanda bir Lucas sayısı olduğundan Lucas asalları sınıfının bir üyesidir. $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonunda $p = 11$ alınırsa, 11 uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin sayısı, ve $t = -\frac{1}{2}$ ve $t = \frac{1}{2}$ değerleri için verilen üreteç fonksiyonlarının temsil ettiği kuvvet serileri ve yakınsadığı değerler sırasıyla aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$f_{L_B}\left(-\frac{1}{2},11\right) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k\left(11\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^k = -\frac{33176}{6561},$$

ve

$$f_{L_B}\left(\frac{1}{2},11\right) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k\left(11\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 295024104.$$

$p = 13$ asal sayısı, aynı zamanda bir Fibonacci sayısı olduğundan Fibonacci asalları sınıfının bir üyesidir. $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonunda $p = 13$ alınırsa, 13 uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin sayısı, ve $t = -\frac{1}{2}$ ve $t = \frac{1}{2}$ değerleri için verilen üreteç fonksiyonlarının temsil ettiği kuvvet serileri ve yakınsadığı değerler sırasıyla aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$f_{L_B}\left(-\frac{1}{2},13\right) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(13)\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1474760}{19683},$$

ve

$$f_{L_B}\left(\frac{1}{2},13\right) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(13)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 81055130520.$$

$f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonda bir Fermat asal sayısı olan $p = 17$ sayısı alınırsa, 17 uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin sayısı, ve $t = -\frac{1}{2}$ ve $t = \frac{1}{2}$ değerleri için verilen üreteç fonksiyonlarının temsil ettiği kuvvet serileri ve yakınsadığı değerler ise sırasıyla aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$f_{L_B}\left(-\frac{1}{2},17\right) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k\left(17\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{11745087800}{531441},$$

ve

$$f_{L_B}\left(\frac{1}{2},17\right)=\sum_{k=0}^{\infty}L_k\left(17\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k=15337737297545400.$$

4.2.5. $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonlarını sağlayan diferansiyel denklemler ve bazı uygulamaları

Bu bölümde, asal sayı uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin üreteç fonksiyonlarını sağlayan diferansiyel denklemler elde edilmiştir ve bazı uygulamaları yapılmıştır. Ayrıca, üreteç fonksiyonları için elde edilen yüksek mertebeden türevlerin nümerik değerlerini hesaplayabilen bir algoritma da verilmiştir. Bu bölümde, (4.3) denklemi ile verilen $f_{L_B}\left(t,p\right)$ üreteç fonksiyonlarının yüksek mertebeden türevleri için formüller ve bu formüller ile ilgili bir özdeşlik türetilmiştir. Ayrıca, üreteç fonksiyonlarının yüksek mertebeden türevlerinin nümerik değerlerini etkili bir şekilde hesaplayan bir algoritma da bu bölümün sonunda verilmiştir. Bu bölümde verilen tüm sonuçlar ve daha fazlası, (Kucukoglu ve Simsek 2018) çalışmasında yer almaktadır.

$f_{L_B}\left(t,p\right)$ üreteç fonksiyonlarının yüksek mertebeden türevlerini içeren Teorem 4.12'i ispatlayabilmek için öncelikle aşağıdaki önteoreme ihtiyaç duyulmaktadır:

Önteorem 4.10.

$$\frac{d^v}{dt^v}\{\mathcal{B}_2\left(t\right)\}=\frac{d^v}{dt^v}\left\{\frac{-2t}{\left(t-1\right)^2}\right\}=\frac{2\left(-1\right)^{v+1}v!\left(t+v\right)}{\left(t-1\right)^{v+2}}.$$

İspat Bu önteoremin ispatı $\frac{d^v}{dt^v}$ operatörü ile ilgili olduğundan açıktır. □

Ayrıca çok iyi bilinmektedir ki Apostol-Bernoulli sayılarını ikinci tür Stirling sayıları ile hesaplamak için kullanılan formül aşağıdaki şekilde verilir (Apostol 1951; s. 166):

$$\mathcal{B}_n\left(t\right)=\frac{n}{t-1}\sum_{k=0}^{n-1}k!\left(\frac{t}{1-t}\right)^kS\left(n-1,k\right). \tag{4.9}$$

Not 4.11. *(4.9) ile verilen bu bağıntı, Boyadzhiev tarafindan da (Boyadzhiev 2008) çalışmasında ve Simsek tarafindan (Simsek 2018) çalışmasında verilmiştir.*

Bu bilgiler ışığında, $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonunun t parametresine göre yüksek mertebeden türevini içeren teorem ve ispatı aşağıdaki şekildedir:

Teorem 4.12. *$v \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}\frac{d^v}{dt^v}\{f_{L_B}(t,p)\} &= -\frac{1}{p}\frac{(-1)^v v!}{(t-1)^{v+1}}\left[\frac{t+v}{t-1}+\sum_{k=0}^{p}k!S(p,k)\right.\\ &\quad \left.\times\left\{\sum_{j=0}^{v}(-1)^j\binom{v}{j}\binom{k}{j}\frac{1}{(t-1)^j}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{k-j}\right\}\right]\end{aligned} \tag{4.10}$$

dir (Kucukoglu ve Simsek 2018).

İspat (4.9) denklemi (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$f_{L_B}(t,p) = -\frac{1}{p}\left(\frac{t}{(t-1)^2}+\frac{1}{t-1}\sum_{k=0}^{p}k!\left(\frac{t}{1-t}\right)^k S(p,k)\right).$$

elde edilir. Bu denklemin her tarafının t parametresine göre türevi alınırsa, aşağıdaki türev denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{f_{L_B}(t,p)\} &= -\frac{1}{p}\left[\frac{-(t+1)}{(t-1)^3}\right.\\ &\quad \left.+\sum_{k=0}^{p}k!S(p,k)\left\{-\frac{1}{(t-1)^2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^k+\frac{k}{(t-1)^3}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{k-1}\right\}\right].\end{aligned}$$

Yukarıdaki türev alma işlemi v kez yapılırsa, Önteorem 4.10 yardımıyla ve tümevarım metodu kullanılarak teoremdeki ifadeye ulaşılır. □

(4.10) denkleminde $t=0$ alınırsa, $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonunun t parametresine göre yüksek mertebeden türevi için aşağıdaki kombinatorik toplam elde edilir:

Sonuç 4.13. *$v \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$\left.\frac{d^v}{dt^v}\{f_{L_B}(t,p)\}\right|_{t=0} = \frac{v!}{p}\left[-v+\sum_{j=0}^{v}j!\binom{v}{j}S(p,j)\right] \tag{4.11}$$

dir (Kucukoglu ve Simsek 2018).

Bu bölümde ayrıca, ikinci tür Stirling sayılarının (3.18) denklemi ile verilen açık formülü ile Teorem 4.12 ile verilen türev formülü birleştirilerek, asal sayı uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerini sayan sayıların üreteç fonksiyonlarının yüksek mertebeden türevlerinin nümerik değerlerini hesaplayabilen bir algoritma, Algoritma 3 ile verilmiştir.

Algoritma 3: p bir asal sayı, $v \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ve $|t| < 1$ olmak üzere bu algoritma, p uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerini sayan sayıların üreteç fonksiyonlarının (4.10) denklemiyle verilen yüksek mertebeden türev denklemini döndürür. (Bu algoritma işleyiş bakımından ikinci tür Stirling sayıları ile ilgilidir ve bu sayılar algoritma içerisinde `Stirling_Num_Second` prosedürü ile gösterilmiştir).

```
procedure DERIVATIVE_GEN_FUNC_LYNDON(v: pozitif tamsayı, t, p: asal sayı)
    Begin
    Local variables: j ← 0, k ← 0, S ← 0
    for all k in {0, 1, 2, ..., p} do
        for all j in {0, 1, 2, ..., v} do
            S ← S + Power(−1, j) ∗ Binomial_Coef(v, j)
                ↪ ∗Binomial_Coef(k, j) ∗ Factorial(k)
                ↪ ∗Stirling_Num_Second(p, k) ∗ (1/Power(t − 1, j))
                ↪ ∗Power(t/(1 − t), k − j)
        end for
    end for
    return −(1/p) ∗ ((Power(−1, v) ∗ Factorial(v))/Power(t − 1, v + 1))
                ↪ ∗((t + v)/(t − 1) + S)
end procedure
```

4.2.6. $L_k(p)$ sayıları için başka interpolasyon fonksiyonları

Bu bölümde, Apostol-Bernoulli sayıları ile Frobenius-Euler sayıları arasındaki bir bağıntı ve Frobenius-Euler sayıları ile Fubini sayıları arasındaki bir bağıntı kullanılarak, Teorem 4.6 ile verilen (4.3) denkleminin sağ yanı diğer özel sayılar cinsinden ifade edilmiştir ve böylece $L_k(p)$ sayıları için başka interpolasyon fonksiyonları elde edilmiştir.

Teorem 4.6 ile (3.13) denklemi birleştirilerek aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.14. *p bir asal sayı olmak üzere,*

$$f_{L_B}(t,p) = \frac{H_1\left(\frac{1}{t}\right) - H_p\left(\frac{1}{t}\right)}{p\,(t-1)} \tag{4.12}$$

dir (Kucukoglu vd. 2017b).

Ayrıca, (3.14) denklemi ile üreteç fonksiyonu verilen sayı ailesi yardımıyla $f_{L_B}(t,p)$ ile Fubini sayıları arasındaki ilişkilerin kurulması sağlanacaktır. Bu çalışmada ayrıca $Y_n(u;e)$ sayıları, Fubini sayıları ve $f_{L_B}(t,p)$ üreteç fonksiyonları ile ilgili aşağıdaki formüller de verilmiştir:

(4.12) denklemi ile (3.15) denklemleri birleştirilerek, $u > 1$ olmak üzere $L_k(p)$ sayıları için bir diğer üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir:

Teorem 4.15. *p bir asal sayı ve $u > 1$ olmak üzere,*

$$f_{L_B}\left(\frac{1}{u},p\right) = -\frac{u}{p(1-u)^2} + \frac{u}{p(1-u)}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}Y_j(u;e),$$

dir (Kucukoglu vd. 2017b).

Yukarıdaki formülde $u = 2$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.16.

$$f_{L_B}\left(\frac{1}{2},p\right) = \frac{2}{p}\left(-1+\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}w(j)\right)$$

dir (Kucukoglu vd. 2017b).

4.3. Lyndon Kelimelerinin Sayısı için Diğer Üreteç Fonksiyonlarının İnşası

Bu bölümde, (Kucukoglu vd. 2017a) çalışmasında Lyndon kelimelerini sayan sayılar yani $L_k(n)$ sayıları için inşa edilen üreteç fonksiyonlarının tanımları verilecektir ve bu üreteç fonksiyonlarının Bernoulli sayıları, Bernoulli polinomları, Apostol-Bernoulli sayıları ve Apostol-Bernoulli polinomları ile ilişkileri ispatlanacaktır. Ayrıca, kelime uzunlukları için özel olarak seçilmiş bazı asal sayı çarpanları kullanılarak bu üreteç fonksiyonlarına örnekler verilecektir. Son olarak, bu fonksiyonları içeren bir tablo verilecektir.

n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere, (Kucukoglu vd. 2017a) çalışmasında $L_k(n)$ sayıları için üreteç fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 4.17. *n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere, n uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin sayıları ($L_k(n)$ sayıları) için iki sonlu toplam ve üreteç fonksiyonları*

$$\mathcal{F}_1(m,n) = \sum_{k=0}^{m} L_k(n), \tag{4.13}$$

$$\mathcal{G}_1(t,m,n) = \sum_{k=0}^{m} L_k(n)\, t^k, \tag{4.14}$$

$$\mathcal{H}_1(t,n) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(n)\, t^k \quad (|t|<1) \tag{4.15}$$

şeklinde tanımlanır (Kucukoglu vd. 2017a).

Not 4.18. *Burada belirtmeliyiz ki, her bir n pozitif tamsayı değerine karşılık gelen bir üreteç fonksiyonu mevcuttur.*

Teorem 4.19. *m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$\mathcal{F}_1(m,n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{B_{d+1}(m+1) - B_{d+1}}{d+1}$$

dir (Kucukoglu vd. 2017a).

İspat $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, (2.3) denkleminin her iki tarafının $0 \leq k \leq m$ üzerinde toplamı alınırsa

$$\sum_{k=0}^{m} L_k(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{k=0}^{m} k^d$$

elde edilir. Bu denklem, (3.10) ile birleştirilirse istenen sonuç elde edilir. $\square$

Not 4.20. *Burada belirtilmelidir ki Teorem 4.19 ile verilen formül, $L_k(n)$ sayılarının sonlu toplamlarının Bernoulli sayıları ve polinomlarını kullanarak hesaplanabilmesi için bize bir yol sağlar.*

Teorem 4.19 ile (3.9) denklemi birleştirilirse, $L_k(n)$ sayılarının sonlu toplamlarının sadece Bernoulli sayıları kullanarak hesaplanabilmesini sağlayan aşağıdaki Sonuç 4.21 elde edilir:

Sonuç 4.21. *m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$\mathcal{F}_1(m,n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{1}{d+1}\sum_{j=0}^{d}\binom{d+1}{j}(m+1)^{d+1-j}B_j$$

dir.

Teorem 4.22. *m ve n pozitif tamsayılar ve $t \neq 1$ olmak üzere,*

$$\mathcal{G}_1(t,m,n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{t^{m+1}\mathcal{B}_{d+1}(m+1;t) - \mathcal{B}_{d+1}(t)}{d+1}$$

dir (Kucukoglu vd. 2017a).

İspat $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, (2.3) denkleminin her iki tarafını t^k ile çarptıktan sonra $0 \leq k \leq m$ üzerinde toplamı alınırsa

$$\sum_{k=0}^{m} L_k(n)\, t^k = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left(\sum_{k=0}^{m} k^d t^k\right) \tag{4.16}$$

elde edilir. (3.25) denklemi ile $t \neq 1$ için

$$\sum_{k=0}^{m} k^d t^k = \frac{t^{m+1}\mathcal{B}_{d+1}(m+1;t) - \mathcal{B}_{d+1}(t)}{d+1}$$

olduğu bilindiğinden bu denklem, (4.16) ile birleştirilirse istenen sonuç elde edilir. □

Teorem 4.22 ile (3.3) denklemi birleştirilirse, $\mathcal{G}_1(t,m,n)$ sonlu toplamının sadece Apostol-Bernoulli sayıları kullanarak hesaplanabilmesini sağlayan aşağıdaki Sonuç 4.23 elde edilir:

Sonuç 4.23. *m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$\mathcal{G}_1(t,m,n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{t^{m+1}\sum_{j=0}^{d}\binom{d+1}{j}(m+1)^{d+1-j}\mathcal{B}_j(t)+\left(t^{m+1}-1\right)\mathcal{B}_{d+1}(t)}{d+1}$$

dir.

Teorem 4.24. *n herhangi bir pozitif tamsayı ve $|t|<1$ olmak üzere,*

$$\mathcal{H}_1(t,n) = -\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{\mathcal{B}_{d+1}(t)}{d+1}$$

dir (Kucukoglu vd. 2017a).

İspat (2.3) denklemi yardımıyla,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}L_k(n)\,t^k &= \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^d t^k\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^d\,t^{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left(t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{(k+1)^{-d}}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. $|t|<1$ olsun. O halde, $L_0(n)=0$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty}L_k(n)\,t^k = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)t\Phi(t,-d,1)$$

yazılabilir ve bu denklem, (3.22) denklemi ile birleştirilirse

$$\sum_{k=0}^{\infty}L_k(n)\,t^k = -\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{t\mathcal{B}_{d+1}(1;t)}{d+1}$$

elde edilir. (3.5) denklemi ile yukarıdaki denklem birleştirilirse istenen sonuca ulaşılır.
□

Teorem 4.24 ile (3.6) denklemi birleştirilirse, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.25. *n herhangi bir pozitif tamsayı ve $|t|<1$ olmak üzere,*

$$\mathcal{H}_1(t,n) = -\frac{1}{n(t-1)}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\left(\frac{t}{t-1}\right)^j k^d$$

dir.

Not 4.26. *Sonuç 4.25 ile verilen üreteç fonksiyonunun diğer üreteç fonksiyonlarından farkı, hiç bir özel sayı ya da polinoma ihtiyaç duyulmadan hesaplanabilmesidir.*

4.3.1. $\mathcal{F}_1(m,n)$, $\mathcal{G}_1(t,m,n)$ ve $\mathcal{H}_1(t,n)$ fonksiyonlarının bazı uygulamaları

Bu bölümde, $\mathcal{F}_1(m,n)$, $\mathcal{G}_1(t,m,n)$ ve $\mathcal{H}_1(t,n)$ fonksiyonları ile ilgili bir önceki bölümde elde edilen teoremlerin uygulamaları m ve n parametreleri yerine bazı nümerik değerler özel olarak seçilerek verilecektir.

Teorem 4.19 ile verilen denklemde n yerine p asal sayısı alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.27. *p asal sayı ve m pozitif tamsayı olmak üzere,*

$$\mathcal{F}_1(m,p) = \frac{1}{p}\left(\frac{B_{p+1}(m+1) - B_{p+1}}{p+1} - \frac{B_2(m+1) - B_2}{2}\right)$$

dir.

Sonuç 4.27 ile verilen denklemde $p = 2$ ve $m = 5$ alınırsa, aşağıdaki örnek elde edilir:

Örnek 4.28.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(5,2) &= \frac{1}{2}\left(\frac{B_3(6) - B_3}{3} - \frac{B_2(6) - B_2}{2}\right) \\ &= 20.\end{aligned}$$

Sonuç 4.21 ile verilen formül kullanılarak $n = 1,2,3,4,5$ ve $m = 1,2,3,4,5,6,7$ değerleri için $\mathcal{F}_1(m,n)$ fonksiyonunun bazı sayısal değerleri hesaplanmıştır ve hesaplanan bu değerler Tablo 4.4 ile verilmiştir.

Tablo 4.4. $\mathcal{F}_1(m,n)$ fonksiyonu için bazı sayısal değerler

		n				
		1	2	3	4	5
m	1	1	0	0	0	0
	2	3	1	2	3	6
	3	6	4	10	21	54
	4	10	10	30	81	258
	5	15	20	70	231	882
	6	21	35	140	546	2436
	7	28	56	252	1134	5796

Not 4.29. *Tablo 4.4'dan görülebilir ki tablonun herbir kolonundaki girdileri arasında*

$$\mathcal{F}_1(m+1,n) = \mathcal{F}_1(m,n) + L_{m+1}(n).$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 4.21 ile verilen denklemde n yerine p asal sayısı alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.30. *p asal sayı ve m pozitif tamsayı olmak üzere,*

$$\mathcal{F}_1(m,p) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}(m+1)^{p+1-j}B_j - \frac{m(m+1)}{2}\right)$$

dir.

Sonuç 4.30 ile verilen denklemde $p = 3$ ve $m = 3$ alınırsa, aşağıdaki örnek elde edilir:

Örnek 4.31.

$$\mathcal{F}_1(3,3) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3}\binom{4}{j}4^{4-j}B_j - 6\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{12}\left(256B_0 + 256B_1 + 96B_2 + 16B_3\right) - 2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Teorem 4.22 ile verilen denklemde n yerine p asal sayısı alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.32. *p asal sayı, m pozitif tamsayı ve $t \neq 1$ olmak üzere,*

$$\mathcal{G}_1(t,m,p) = \frac{1}{p}\left(\frac{t^{m+1}\mathcal{B}_{p+1}(m+1;t) - \mathcal{B}_{p+1}(t)}{p+1} - \frac{t^{m+1}\mathcal{B}_2(m+1;t) - \mathcal{B}_2(t)}{2}\right)$$

dir.

Sonuç 4.32 ile verilen denklemde $p = 2$ ve $m = 5$ alınırsa, aşağıdaki örnek elde edilir:

Örnek 4.33.

$$\mathcal{G}_1(t,5,2) = t^2\left(10t^3 + 6t^2 + 3t + 1\right).$$

Sonuç 4.23 ile verilen denklemde n yerine p asal sayısı alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.34. *p asal sayı, m pozitif tamsayı ve $t \neq 1$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(t,m,p) &= \frac{1}{p}\left(\frac{t^{m+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}(m+1)^{p+1-j}\mathcal{B}_j(t) + \left(t^{m+1}-1\right)\mathcal{B}_{d+1}(t)}{p+1}\right. \\ &\quad \left. - \frac{t\left(mt^{m+1} - (m+1)t^m + 1\right)}{(t-1)^2}\right) \end{aligned}$$

dir.

Şimdi, kelime uzunlukları için özel olarak seçilmiş bazı asal sayı çarpanları kullanılarak $\mathcal{H}_1(t,n)$ üreteç fonksiyonları için uygulamalar verelim:

Örnek 4.35. *p asal sayı olsun. p asal sayısının çarpanları 1 ve p olduğundan Teorem 4.24 ile verilen denklemde $n = p$ alındığında,*

$$\mathcal{H}_1(t,p) = -\frac{1}{p}\left(\frac{\mathcal{B}_{p+1}(t)}{p+1} - \frac{\mathcal{B}_2(t)}{2}\right) \tag{4.17}$$

formülü elde edilir ve bu formülün (4.3) ile verilen formül ile aynı olduğu görülebilir. Dahası, (4.17) denkleminde $p = 2$ ve $p = 3$ alınırsa

$$\mathcal{H}_1(t, 2) = \frac{t^2}{(1-t)^3} \quad \text{ve} \quad \mathcal{H}_1(t, 3) = \frac{2t^2}{(1-t)^4}$$

olur ve bu sonuçların sırasıyla (4.7) ve (4.8) denklemleri ile verilen fonksiyonlara eşit olduğu görülebilir (Kucukoglu ve Simsek 2017, Kucukoglu vd. 2017a, Kucukoglu vd. 2017b).

Örnek 4.36. *p asal sayı olsun. p^2 sayısının çarpanları 1, p ve p^2 olduğundan Teorem 4.24 ile verilen denklemde $n = p^2$ alındığında,*

$$\mathcal{H}_1\left(t, p^2\right) = -\frac{1}{p^2}\left(\frac{\mathcal{B}_{p^2+1}(t)}{p^2+1} - \frac{\mathcal{B}_{p+1}(t)}{p+1}\right)$$

formülü elde edilir (Kucukoglu vd. 2017a).

Örnek 4.37. *Teorem 4.24 ile verilen denklemde $n = p^k, k \in \mathbb{Z}^+$ alınırsa ve Möbius fonksiyonunun tanımı kullanılarak*

$$\mathcal{H}_1\left(t, p^k\right) = -\frac{1}{p^k}\left(\frac{\mathcal{B}_{p^k+1}(t)}{p^k+1} - \frac{\mathcal{B}_{p^{k-1}+1}(t)}{p^{k-1}+1}\right)$$

formülü elde edilir (Kucukoglu vd. 2017a).

Örnek 4.38. *p ve q birbirinden farklı asal sayılar olsun. pq sayısının çarpanları 1, p, q ve pq olduğundan Teorem 4.24 ile verilen denklemde $n = pq$ alındığında,*

$$\mathcal{H}_1(t, pq) = -\frac{1}{pq}\left(\frac{\mathcal{B}_{pq+1}(t)}{pq+1} - \frac{\mathcal{B}_{q+1}(t)}{q+1} - \frac{\mathcal{B}_{p+1}(t)}{p+1} + \frac{\mathcal{B}_2(t)}{2}\right).$$

formülü elde edilir (Kucukoglu vd. 2017a).

Örnek 4.39. *p_1 ve p_2 birbirinden farklı asal sayılar ve $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer, Teorem 4.24 ile verilen denklemde $n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}$ alınırsa*

$$\begin{aligned}{p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\mathcal{H}_1\left(t, {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\right) &= -\frac{\mathcal{B}_{{p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}+1}(t)}{{p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}+1} + \frac{\mathcal{B}_{{p_1}^{k_1-1}{p_2}^{k_2}+1}(t)}{{p_1}^{k_1-1}{p_2}^{k_2}+1} \\ &\quad + \frac{\mathcal{B}_{{p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2-1}+1}(t)}{{p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2-1}+1} - \frac{\mathcal{B}_{{p_1}^{k_1-1}{p_2}^{k_2-1}+1}(t)}{{p_1}^{k_1-1}{p_2}^{k_2-1}+1}.\end{aligned}$$

formülü elde edilir (Kucukoglu vd. 2017a).

Genel olarak, Aritmetiğin Temel Teoremi yardımıyla bilinmektedir ki birden farklı herhangi bir pozitif tam sayı, birbirinden farklı asal sayıların çarpımları şeklinde tek türlü yazılabilir. Yani, $i = 1, 2, \ldots, r$ için p_i'ler birbirinden farklı asal sayılar ve $k_i \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ sayısı aşağıdaki şekilde asal çarpanlarına ayrılabilir:

$$n = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{k_i}.$$

Yukarıdaki ayrışım, Teorem 4.24 ile verilen denklemde yerine yazılırsa ve Möbius fonksiyonunun tanımı kulanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Teorem 4.40. *$i = 1, 2, \ldots, r$ için p_i'ler birbirinden farklı asal sayılar ve $k_i \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere*

$$\mathcal{H}_1\left(t, \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{k_i}\right) = -\frac{1}{\prod_{i=1}^{r} {p_i}^{k_i}} \sum_{\substack{j_v \in \{0,1\} \\ v=1,2,\ldots,r}} (-1)^{j_1+j_2+\ldots+j_r} \frac{\mathcal{B}_{\prod_{i=1}^{r} {p_i}^{k_i - j_i}+1}(t)}{\prod_{i=1}^{r} {p_i}^{k_i - j_i} + 1}.$$

dir (Kucukoglu vd. 2017a).

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sayılarına karşılık gelen $\mathcal{H}_1(t, n)$ fonksiyonları, Teroem 4.24 ve Teorem 4.40 yardımıyla hesaplanarak t değişkenine göre Tablo 4.5 ile verilmiştir:

Tablo 4.5. $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sayılarına karşılık gelen $\mathcal{H}_1(t, n)$ üreteç fonksiyonları

n	$\mathcal{H}_1(t, n)$
1	$\frac{2t}{(t-1)^2}$
2	$-\frac{t^2}{(t-1)^3}$
3	$\frac{2t^2}{(t-1)^4}$
4	$-\frac{3t^2(t+1)}{(t-1)^5}$
5	$\frac{6t(t+1)^2}{(t-1)^6}$
6	$-\frac{t^2\left(11t^3+47t^2+53t+9\right)}{(t-1)^7}$

Sonuç 4.41. *n değeri büyüdükte $\mathcal{H}_1(t,n)$ rasyonel fonksiyonunun t değişkenine göre aldığı değerler yüksek mertebeden polinomları içermektedir. Yani, Tablo 4.5 incelendiğinde, $\mathcal{H}_1(t,n)$ fonksiyonunun payında bulunan polinomun derecesinin ya n ya da n değerinden küçük bir değer olduğu görülmektedir.*

Dolayısıyla, Teorem 4.5 yardımıyla $P(t)$ ve $Q(t)$ iki polinom olmak üzere,

$$\mathcal{H}_1(t,n) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

rasyonel fonksiyonunun her zaman

$$der(P(t)) \leq n \quad \textit{ve} \quad der(Q(t)) \geq n+1$$

durumunu sağlayıp sağlamadığı bir açık problem olarak ortaya çıkmaktadır.

4.3.2. Elde edilen üreteç fonksiyonlarının asal sayılar ve tek türlü asal çarpanlara ayırma metodu ile ilişkileri

Bu bölümde, bir önceki bölümde elde edilen üreteç fonksiyonlarının asal sayılar ve tek türlü asal çarpanlara ayırma metodu ile ilişkileri bazı örnekler verilerek incelenmiştir.

Örnek 4.42. *Aritmetiğin Temel Teoremi yardımıyla 77 sayısı,*

$$77 = 7 \times 11$$

şeklinde tek türlü asal çarpanlarına ayrılır. O zaman, $\mathcal{H}_1(t,77)$ fonksiyonunu hesaplamak için Teorem 4.40 ile verilen denklemde $n = 77$, $r = 2$, $p_1 = 7$, $p_2 = 11$ ve $k_1 = k_2 = 1$ alınırsa,

$$\mathcal{H}_1(t,77) = -\frac{1}{77} \sum_{j_1,j_2 \in \{0,1\}} (-1)^{j_1+j_2} \frac{\mathcal{B}_{7^{1-j_1}11^{1-j_2}+1}(t)}{7^{1-j_1}11^{1-j_2}+1} \tag{4.18}$$

elde edilir. $\mathcal{H}_1(t,77)$ fonksiyonun sayısal değerini bulabilmek için önce aşağıdaki tabloyu verelim:

Tablo 4.6. j_v; $v = 1, 2$ değerlerinin alabileceği değerler tablosu

j_1	j_2
0	0
1	0
0	1
1	1

Tablo 4.6 ile verilen değerler yardımıyla, (4.18) denklemindeki toplama işlemi yapılırsa,

$$\mathcal{H}_1(t,77) = -\frac{1}{77}\left(\frac{\mathcal{B}_{78}(t)}{78} - \frac{\mathcal{B}_{12}(t)}{12} - \frac{\mathcal{B}_8(t)}{8} + \frac{\mathcal{B}_2(t)}{2}\right)$$

elde edilir.

Örnek 4.43. *Aritmetiğin Temel Teoremi yardımıyla* 41503 *sayısı,*

$$41503 = 7^3 \times 11^2$$

şeklinde tek türlü asal çarpanlarına ayrılır. O zaman, $\mathcal{H}_1(t, 41503)$ *fonksiyonunu hesaplamak için Teorem 4.40 ile verilen denklemde* $n = 41503$*,* $r = 2$*,* $p_1 = 7$*,* $p_2 = 11$*,* $k_1 = 3$ *ve* $k_2 = 2$ *alınırsa,*

$$\mathcal{H}_1(t,41503) = -\frac{1}{41503}\sum_{j_1,j_2\in\{0,1\}}(-1)^{j_1+j_2}\frac{\mathcal{B}_{7^{3-j_1}11^{2-j_2}+1}(t)}{7^{3-j_1}11^{2-j_2}+1}$$

elde edilir. Tablo 4.6 ile verilen değerler yardımıyla, yukarıdaki denklemde yer alan toplama işlemi yapılırsa,

$$\mathcal{H}_1(t,41503) = -\frac{1}{41503}\left(\frac{\mathcal{B}_{41504}(t)}{41504} - \frac{\mathcal{B}_{5930}(t)}{5930} - \frac{\mathcal{B}_{3774}(t)}{3774} + \frac{\mathcal{B}_{540}(t)}{540}\right)$$

olarak bulunur.

Örnek 4.44. *Aritmetiğin Temel Teoremi yardımıyla* 30 *sayısı,*

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

şeklinde tek türlü asal çarpanlarına ayrılır. O zaman, $\mathcal{H}_1(t,30)$ *fonksiyonunu hesaplamak için Teorem 4.40 ile verilen denklemde* $n=30$, $r=3$, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$ *ve* $k_1=k_2=k_3=1$ *alınırsa,*

$$\mathcal{H}_1(t,30)=-\frac{1}{30}\sum_{j_1,j_2,j_3\in\{0,1\}}(-1)^{j_1+j_2+j_3}\frac{\mathcal{B}_{2^{1-j_1}3^{1-j_2}5^{1-j_3}+1}(t)}{2^{1-j_1}3^{1-j_2}5^{1-j_3}+1} \tag{4.19}$$

elde edilir. $\mathcal{H}_1(t,30)$ *fonksiyonun sayısal değerini bulabilmek için önce aşağıdaki tabloyu verelim:*

Tablo 4.7. j_v; $v=1,2,3$ değerlerinin alabileceği değerler tablosu

j_1	j_2	j_3
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Tablo 4.7 ile verilen değerler yardımıyla, (4.19) denklemindeki toplama işlemi yapılırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1(t,30) &= -\frac{1}{30}\left(\frac{\mathcal{B}_{31}(t)}{31}-\frac{\mathcal{B}_{16}(t)}{16}-\frac{\mathcal{B}_{11}(t)}{11}+\frac{\mathcal{B}_{6}(t)}{6}\right.\\ &\quad\left.-\frac{\mathcal{B}_{7}(t)}{7}+\frac{\mathcal{B}_{4}(t)}{4}+\frac{\mathcal{B}_{3}(t)}{3}-\frac{\mathcal{B}_{2}(t)}{2}\right)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.45. *Aritmetiğin Temel Teoremi yardımıyla* 360 *sayısı,*

$$360=2^3\times 3^2\times 5$$

şeklinde tek türlü asal çarpanlarına ayrılır. O zaman, $\mathcal{H}_1(t, 360)$ *fonksiyonunu hesaplamak için Teorem 4.40 ile verilen denklemde* $n = 360$*,* $r = 3$*,* $p_1 = 2$*,* $p_2 = 3$*,* $p_3 = 5$*,* $k_1 = 3$*,* $k_2 = 2$ *ve* $k_3 = 1$ *alınırsa,*

$$\mathcal{H}_1(t, 360) = -\frac{1}{360} \sum_{j_1, j_2, j_3 \in \{0,1\}} (-1)^{j_1+j_2+j_3} \frac{\mathcal{B}_{2^{3-j_1}3^{2-j_2}5^{1-j_3}+1}(t)}{2^{3-j_1}3^{2-j_2}5^{1-j_3}+1}$$

elde edilir. Tablo 4.7 ile verilen değerler yardımıyla, yukarıdaki denklemde yer alan toplama işlemi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(t, 360) &= -\frac{1}{360}\left(\frac{\mathcal{B}_{361}(t)}{361} - \frac{\mathcal{B}_{181}(t)}{181} - \frac{\mathcal{B}_{121}(t)}{121} + \frac{\mathcal{B}_{61}(t)}{61}\right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathcal{B}_{73}(t)}{73} + \frac{\mathcal{B}_{37}(t)}{37} + \frac{\mathcal{B}_{25}(t)}{25} - \frac{\mathcal{B}_{13}(t)}{13}\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.4. Özel Sayılar, Özel Polinomlar ve $L_k(n)$ Sayılarını İçeren Diğer Özdeşlikler

Matematiğinin hemen hemen tüm dallarında Bernoulli sayıları ve polinomlarının ve ayrıca Stirling sayılarının çeşitli uygulamaları mevcuttur. Bu alt bölümde, bu uygulamalardan biri olan ardışık tam sayıların kuvvetlerinin toplamının Bernoulli sayıları ve polinomları cinsinden verildiği formül kullanılarak, n uzunluklu k-lı Lyndon kelimelerinin sayısı için başka bir hesaplama formülü türetilmiştir.

(2.3) ile verilen denklemin Mobius inversiyonu olan (2.4) denkleminin her iki tarafının $k = 0$'dan $k = m$'ye kadar toplamı alınırsa ve elde edilen denklem (3.10) denklemi ile birleştirilirse aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.46. $n \geq 1$ *olsun. O halde*

$$\sum_{d|n} d \sum_{k=0}^{m} L_k(d) = \frac{B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}}{n+1} \tag{4.20}$$

dir (Kucukoglu vd. 2017b).

(3.7) kullanılarak, (4.20) denkleminin indirgendiği denklemi veren aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.47. $n \geq 1$ *olmak üzere*

$$\sum_{d|n} d \sum_{k=0}^{m} L_k(d) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} (m+1)^{n+1-j} B_j$$

dir (Kucukoglu vd. 2017b).

Ayrıca yukarıdaki sonuç, (3.20) ve ikinci tür Stirling sayılarının tanımı ile birleştirilirse aşağıdaki kombinatorik toplamlar elde edilir:

Teorem 4.48. $n \geq 1$ *olmak üzere*

$$\sum_{d|n} d \sum_{k=0}^{m} L_k(d) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{j} \sum_{c=0}^{l} (-1)^{l+c} \binom{l}{c} \binom{n+1}{j} \frac{(l-c)^j}{l+1} (m+1)^{n+1-j}$$

dir (Kucukoglu vd. 2017b).

Not 4.49. *Teorem 4.48, herhangi bir özel sayı veya polinom yardımı olmadan*

$$\sum_{d|n} d \sum_{k=0}^{m} L_k(d)$$

toplamlarının doğrudan hesaplamasını sağlar. Bu formül sayesinde bu alanda çalışan araştırmacılar herhangi bir özel sayı ve polinom olmaksızın bu kombinatorik toplamı hesaplayabileceklerdir (Kucukoglu vd. 2017b).

(3.16) denklemi, (2.4) denkleminin sol tarafına yerleştirilirse,

$$\sum_{d|n} dL_k(d) = \sum_{j=0}^{n} S(n,j)(k)_j$$

elde edilir ve yukarıdaki denklem, (3.19) denklemi ile birleştirilirse aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.50. $n \geq 1$ *olmak üzere*

$$\sum_{d|n} dL_k(d) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{j} s(j,l) S(n,j) k^l \tag{4.21}$$

dir (Kucukoglu vd. 2017b).

(2.3) denklemindeki k^n ifadesi, (3.16) denklemi ile değiştirilirse ve elde edilen (3.19) denklemi ile birleştirilirse, $L_k(n)$ sayıları ile birinci ve ikinci tür Stirling sayıları arasındaki bağıntıyı veren aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 4.51.

$$L_k(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{j=0}^{n} S(n,j)(k)_j$$

ya da

$$L_k(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{j} s(j,l) S(n,j) k^l \tag{4.22}$$

dir (Kucukoglu vd. 2017b).

Not 4.52. *(4.22) denkleminin, (4.21) denkleminin Mobius inversiyonu olduğu görülebilir (Kucukoglu vd. 2017b).*

5. SONUÇLAR

Bu tezde, Lyndon kelimeleri gibi sonlu leksikografikal sıralı alfabe üzerinde tanımlı kelimeleri ve De Bruijn tipli dizileri sayan sayıların üreteç fonksiyonlarının inşası üzerine çalışılmıştır. İnşa edilen üreteç fonksiyonları yardımıyla, bu kelime ve dizilerin Apostol tipli sayı ve polinomlar aileleri gibi özel sayı ve polinom aileleriyle arasındaki ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca, elde edilen yeni üreteç fonksiyonları ve bunların diferansiyel denklemleri yardımıyla binom katsayılarını, ve özel sayı ve polinomları içeren yeni formüller, bağıntılar, özdeşlikler, kombinatorik toplamlar bulunmuştur. Asal sayı uzunluklu kelimelerin sayıları için binom katsayılarını da içeren kombinatorik toplamlar verilmiştir. Bunlara ek olarak, elde edilen sonuçların bazıları için nümerik hesaplamalar yapan hesaplamalı algoritmalar verilmiştir ve bazı asal sayı değerleri üreteç fonkisyonlarının grafikleri çizilmiştir. Son olarak, elde edilen üreteç fonksiyonlarının asal sayılar ve tek ürlü asal çarpanlara ayırma metodu ile ilişkileri incelenerek bazı uygulamalar verilmiştir.

Apostol-Bernoulli sayılarının hemen hemen matematiğin birçok alanında kullanılması ve bunların özellikle zeta tipli fonksiyonlar, Dirichlet tipli seriler ile ilişkilendirilmesi, sayılar teori, kombinatorik analiz ve bilgisayarda temel algoritmalar gibi birçok alana büyük katkılar sağlayacak olması bu tez çalışmasının önemini arttırmaktadır. Buna ek olarak, teorik verilerin dışında Lyndon kelimelerinin ve De Bruijn dizilerinin çizge teorisi, kriptoloji, ekonomi özellikle robot teknolojisi, görüntü işleme, sinyal işleme, tekstil sanayisi, dijital kalem ve kağıt teknolojisi, dönel kodlayıcılar, nörobilim, oyun programlama ve teorisi, bilgisayar bilimleri, iletişim ağları, analitik sayılar teorisi, soyut cebir, kombinatorik, matris teorisi, olasılık ve istatistik gibi bir çok alanda uygulamasının bulunması da tezde elde edilen sonuçların kullanılabilirliğini önemli ölçüde arttırmaktadır.

Ayrıca, bu tezde verilen sonuçların ve algoritmaların gelecekte üretilecek algoritmalara hem teorik ve hem de uygulamalı bir zemin sağlama potansiyeli mevcuttur.

6. KAYNAKLAR

Apostol, T.M. 1951. On the Lerch zeta function. *Pac. J. Math.*, 1: 161-167.

Apostol, T.M. 1998. Introduction to Analytic Number Theory. Narosa Publishing, Springer-Verlag, New Delhi, Chennai, Mumbai.

Aygunes, A.A. and Simsek, Y. 2011. Unification of multiple lerch-zeta type functions. *Advan. Stud. Contem. Math.*, 21 (4): 367-373.

Baker, J. 2011. De Bruijn graphs and their applications to fault tolerant networks. Master's Thesis, Oregon State University.

Berndt, B.C. 1985. Ramanujan's Notebooks Part 1: Sums of Powers, Bernoulli Numbers, and the Gamma Function(Chapter 7). Springer-Verlag, New York.

Berstel, J. and Perrin, D. 2007. The origins of combinatorics on words. *Eur. J. Combin.*, 28: 996-1022.

Betten, A. Braun, M., Fripertinger, H., Kerber, A., Kohnert, A. and Wassermann, A. 2006. Error Correcting Linear Codes-Classification by Isometry and Applications, Algorithms and Computation in Mathematics Volume 18, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

Bodin, A. 2010. Generating series for irreducible polynomials over finite fields. *Finite Fields and Their Applications*, 16: 116-125.

Bona, M. 2007. Introduction to Enumerative Combinatorics. The McGraw-Hill Companies Inc, New York.

Boyadzhiev, K.N. 2008. Apostol-Bernoulli functions, derivative polynomials, and Eulerian polynomials. *Adv. Appl. Discrete Math.*, 1: 109-122; arxiv:0710.1124v1.

Buchanan, H.L., Knopfmacher, A. and Mays, M.E. 1993. On the cyclotomic identity and related product expansions. Australas. *J. Combin.*, 8: 233-245.

Cangul, I.N., Cevik, A.S. and Simsek, Y. 2013. A new approach to connect Algebra with Analysis: Relationships and Applications between Presentations and Generating Functions. *Bound. Value Probl.*, 2013 (51), doi:10.1186/1687-2770-2013-51.

Carpi, A., Fici, G., Holub, S., Oprsal, J. and Sciortino, M. 2014. Universal Lyndon Words, arXiv:1406.5895v1.

Cevik, A.S., Cangul, I.N. and Simsek, Y. 2013. Analysis Approach to Finite Monoids. *Fixed Point Theory A.*, 2013 (15), doi:10.1186/1687-1812-2013-15.

Cevik, A.S., Das, K.C., Cangul, I.N. and Maden A.D. 2014. Minimality over free monoid presentations. *Hacet. J. Math. Stat.*, 43 (6): 899-913.

Charalambides, C.A. 2002. Ennumerative Combinatorics. Chapman&Hall/Crc, Press Company, London, New York.

Chung, F., Diaconis, P. and Graham, R. 1992. Universal cycles for combinatorial structures. *Discrete Math.*, 110: 43-59.

Compeau, P.E.C., Pevzner, P.A. and Tesler, G. 2011. How to apply de Bruijn graphs to genome assembly. *Nat. Biotechnol.*, 29: 987-991.

Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. Reidel, Dordrecht and Boston (Translated from the French by J. W. Nienhuys).

Cusick, T.W. and Stanica, P. 2009. Cryptographic Boolean Functions and Applications. Academic Press, Elsevier, London.

De Bruijn, N.G. 1946. A Combinatorial Problem. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, 49: 758-764.

Djordjevic, G.B. and Milovanović, G.V. 2014. Special classes of polynomials. University of Nis, Faculty of Technology, Leskovac.

Doubilet, P., Rota, G.C., and Stanley, R. 1972. On the foundations of combinatorial theory. VI. The idea of generating function, Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Univ. of Calif. Press, 2: 267–318.

Durocher, S., Li, P.C., Mondal, D., Ruskey, F. and Williams, A. 2012. Cool-lex order and k-ary Catalan structures, *J. Discrete Algorithm.*, 16: 287-307.

Duval, J.-P. 1988. Génération d'une section des classes de conjugaison et arbre des mots de Lyndon de longueur bornée, *Theoret. Comput. Sci.*, 60: 255-283.

Esfahanian, A.-H. and Hakimi, S.L. 1985. Fault-tolerant routing in De Bruijn communication networks. *IEEE Trans. Comput.*, 3 (9): 777-788.

Fredricksen, H. and Maiorana, J. 1978. Necklaces of beads in k colors and kary de Bruijn sequences. *Discrete Math.*, 23 (3): 207-210.

Fredricksen, H. and Kessler, I.J. 1986. An algorithm for generating necklaces of beads in two colors. *Discrete Math.*, 61: 181-188.

Fredricksen, H. 1982. A Survey of Full Length Nonlinear Shift Register Cycle Algorithms. *SIAM Review*, 24 (2): 195-221.

Glen, A. 2008. A characterization of fine words over a finite alphabet. *Theor. Comput. Sci.*, 391: 51-60.

Glen, A. 2012. Combinatorics of Lyndon words, Mini-Conference: "Combinatorics, representations, and structure of Lie type", February 2012, url: https://amyglen.files.wordpress.com/2012/03/melbourne_talk_feb2012.pdf.

Good, I.J. 1975. The number of ordering of n candidates when ties are permitted. *Fibonacci Quart.*, 13: 11-18.

Gorbounov, V and Schechtman, V. 2009. Homological Algebra and Divergent Series. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, SIGMA 5(034): 31 pp.

Jang, L.C. and Pak, H.K. 2002. Non-archimedean integration associated with q-Bernoulli numbers. *Proc. Jangjeon Math. Soc.*, 5 (2): 125-129.

Kang, S.-J. and Kim, M.-H. 1996. Free Lie algebras, generalized Witt formula, and the denominator identity. *J. Algebra*, 183 (2): 560-594.

Kerber, A. 1999. Applied Finite Group Actions. Second edition. Algorithms and Combinatorics Series, vol. 19, Springer-Verlag.

Kim, T., Rim, S.H., Simsek, Y. and Kim, D. 2008. On the analogs of Bernoulli and Euler numbers, related identities and zeta and l-functions. *J. Korean Math. Soc.*, 45 (2): 435-453.

Kim, D.S. and Kim, T. 2012. Some new identities of Frobenius-Euler numbers and polynomials. *J. Inequal. Appl.*, 307: 1-10.

Knuth, D.E. 1997. The Art of Computer Programming. Volume 1 Fundamental Algorithms(Third Edition). Addison-Wesley, Massachusetts, 1997.

Knuth, D.E. 2011. The art of computer programming. Volume 4A, Combinatorial Algorithms, Part 1, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.

Kucukoglu, I. and Simsek, Y. 2017. On k-ary Lyndon words and their generating functions. International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2016). *AIP Conf. Proc.*, 1863: 30000-1–30000-4.

Kucukoglu, I., Bayad, A. and Simsek, Y. 2017. k-ary Lyndon words and necklaces arising as rational arguments of Hurwitz-Lerch zeta function and Apostol-Bernoulli polynomials. *Mediterr. J. Math.*, 14 (6), Article:223, 1–16.

Kucukoglu, I., Milovanović, G.V. and Simsek, Y. 2017. Analysis of generating functions for special words and numbers with their computation algorithms, (preprint).

Kucukoglu, I. and Simsek, Y. 2018. Computation of k-ary Lyndon words using generating functions and their differential equations. *Filomat*, (yayın için kabul edildi).

Lothaire, M. 1997. Combinatorics on words. Cambridge University Press.

Lyndon, R. 1954. On Burnside problem I. *Trans. American Math. Soc.*, 77: 202-215.

Metropolis, N. and Rota, G.-C. 1983. Witt Vectors and the Algebra of Necklaces. *Adv. in Math.*, 50: 95-125.

Metropolis, N. and Rota, G.-C. 1984. The cyclotomic identity. *Contemp. Math.*, 34: 19-27.

Ozden, H., Simsek, Y. and Srivastava, H.M. 2010. A unified presentation of the generating functions of the generalized Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Comput. Math. Appl.*, 60: 2779-2787.

Ozden, H. and Simsek, Y. 2014. Unified presentation of p-adic L-functions associated with unification of the special numbers. *Acta Math. Hungar.*, 144 (2): 515-529.

Petrogradsky, V.M. 2003. Witt's formula for restricted Lie algebras. *Adv. Appl. Math.*, 30: 219-227.

Quaintance, J. ve Gould, H.W. 2015. Combinatorial Identities for Stirling Numbers (The Unpublished Notes of H.W. Gould). World Scientific Publishing Co., Singapore.

Rainville, E.D. 1960. Special functions. The Macmillan Company, New York.

Rebenich, N. 2016. Counting Prime Polynomials and Measuring Complexity and Similarity of Information. PhD Thesis, University of Victoria, Canada, 129 p.

Rosenfeld, V.R. 2002. Enumerating De Bruijn sequences. *MATCH: Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 45: 71-83.

Ruskey, F. 2003. Combinatorial generation, Working Version (1j-CSC 425/520) no comments printed; pseudo-code version.

Ruskey, F. and Sawada, J. 1999. An Efficient Algorithm for Generating Necklaces With Fixed Density. *SIAM J. Comput.*, 29 (2): 671-684.

Ruskey, F., Sawada J. and Williams, A. 2012. Fixed density de Bruijn cycles. *SIAM J. Discrete Math.*, 26 (2): 605-617.

Ruskey, F., Sawada, J. and Williams, A. 2012. Binary bubble languages and cool-lex order, *J. Comb. Theory A.*, 119: 155-169.

Ruskey, F. Information on necklaces, unlabelled necklaces, Lyndon words, De Bruijn sequences. http://theory.cs.uvic.ca/ cos/inf/neck/NecklaceInfo.html [Son erişim tarihi: 13.04.2016].

Sawada J., Stevens, B. and Williams, A. 2011. De Bruijn sequences for the binary strings with a maximum density. In WALCOM 2011: The 5th International Workshop on Algorithms and Computation, volume 6552 of Lecture Notes in Computer Science, pages 182-190, New Dehli, India, 2011. Springer-Verlag.

Sawada, J., Williams, A. and Wong, D. 2016. A surprisingly simple de Bruijn sequence construction. *Discrete Math.*, 339(1): 127-131.

Simmons, G.J. 1970. On the number of irreducible polynomials of degree d over $GF(p)$, *The American Mathematical Monthly*, 77(7): 743-745.

Simsek, Y. 2005. q-Analogue of the twisted l-Series and q-Twisted Euler Numbers. *J. Number Theory*, 100 (2): 267-278.

Simsek, Y. 2010. Twisted p-adic (h, q)-L-functions. *Comput. Math. Appl.*, 59: 2097-2110.

Simsek, Y. 2013. Generating functions for generalized Stirling type numbers, Array type polynomials, Eulerian type polynomials and their applications. *Fixed Point Theory A.*, 2013 (87): 1-28.

Simsek, Y. 2013. Identities associated with generalized Stirling type numbers and Eulerian type polynomials. *Math. Comput. Appl.*, 18 (3): 251-263.

Simsek, Y. 2016. Computation methods for combinatorial sums and Euler type numbers related to new families of numbers. *Math. Method. Appl. Sci.*, 40 (7): 2347-2361.

Simsek, Y. 2016. Apostol type Dahee numbers and Polynomials. *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 26 (3): 1-12.

Simsek, Y. 2017. On Generating Functions for the Special Polynomials. *Filomat*, 31 (1): 9-16.

Simsek, Y. 2018. On Generating Functions for the Special Polynomials. *Appl. Anal. Discr. Math.*, 12(1): 1-35.

Simsek, Y. 2018. Construction of some new families of Apostol-type numbers and polynomials via Dirichlet character and p-adic q-integrals, *Turkish J. Math.*, 42: 557-577.

Simsek, Y., Kim, T., Park, D.W., Ro, Y.S., Jang, L.C. and Rim, S.H. 2004. An explicit formula for the multiple Frobenius-Euler numbers and polynomials. *JP J. Algebra Number Theory Appl.*, 4 (3): 519-529.

Simsek, Y., Yurekli, O. and Kurt, V. 2007. On interpolation functions of the twisted generalized Frobenius-Euler numbers. *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 15 (2): 187-194.

Simsek, Y. and Srivastava, H.M. 2010. A family of p-adic twisted interpolation functions associated with the modified Bernoulli numbers. *Appl. Math. Comput.*, 216: 2976-2987.

Sloane, N.J.A. Sequence A001037 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at http://oeis.org [Son erişim tarihi: 10.03.2018].

Sloane, N.J.A. Sequences: A001348, A001605, A001606, A023394 in the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at http://oeis.org [Son erişim tarihi: 10.03.2018].

Spiegel, M.R. 1971. Calculus of finite differences and difference equations. Schaum's Outline Series in Mathematics, McGraw-Hill Book Company, London, Toronto.

Srivastava, H.M. 2000. Some formulas for the Bernoulli and Euler polynomials at rational arguments. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 129: 77-84.

Srivastava, H.M. and Manocha, H.L. 1984. A Treatise on Generating Functions. Ellis Horwood Limited Publisher, Chichester.

Srivastava, H.M. and Choi, J. 2001. Series Associated with the Zeta and Related Functions. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston and London.

Srivastava, H.M., Ozden, H., Cangul, I.N. and Simsek, Y. 2012. A unified presentation of certain meromorphic functions related to the families of the partial zeta type functions and the L-functions. *Appl. Math. Comput.*, 219: 3903-3913.

Srivastava, H.M. and Choi, J. 2012. Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York.

Stevens B. and Williams, A. 2012. The Coolest Order of Binary Strings, International Conference on Fun with Algorithms (FUN 2012), San Servolo, Italy. LNCS 7288: 322-333.

Stevens, B. and Williams, A. 2014. The Coolest Way to Generate Binary Strings. *Theor. Comput. Syst.*, 54(4): 551-577.

Van Aardenne-Ehrenfest, T. and De Bruijn, N. G. 1951. Circuits and trees in oriented linear graphs. *Simon Stevin*, 28: 203-217.

Velleman, D.J. and Call, G.S. 1995. Permutations and combination locks. *Math. Mag.*, 68 (4): 243-253.

Warty, C., Mattigiri, S., Gambi, E. and Spinsante, S. 2013. De Bruijn Sequences as Secure Spreading Codes for Wireless Communications. *Proc. of International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics(ICACCI-2013)*, 22-25 August, Mysore, India.

Wilf, H. S. 1990. Generatingfunctionology. Academic Press Inc.

Witt, E. 1937. Treue Darstellung Liescher Ringe. *J. Reine Angew. Math.*, 177: 152-160.

ÖZGEÇMİŞ

İREM KÜÇÜKOĞLU

iremkucukoglu90@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora 2014-2018	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Yüksek Lisans 2012-2014	Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Konya
Lisans 2008-2012	Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Konya
Lisans(Çift Anadal) 2009-2013	Selçuk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Konya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi: Mart 2017-Mart 2018	Antalya AKEV Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Yazılım Mühendisliği(İngilizce) Bölümü, Antalya

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Kucukoglu, I., Simsek, Y. and Srivastava, H.M. (2018). A new family of Lerch-type zeta functions interpolating a certain class of higher-order Apostol-type numbers and Apostol-type polynomials. *Quaestiones Mathematicae*, (basımda).

2- Kucukoglu, I. and Simsek, Y. (2018).Computation of k-ary Lyndon words using generating functions and their differential equations. *Filomat*, (kabul edildi).

3- Kucukoglu, I. and Simsek, Y. (2018). On interpolation functions for the number of k-ary Lyndon words associated with the Apostol–Euler numbers and their applications. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, https://doi.org/10.1007/s13398-017-0471-y.

4- Kucukoglu, I. and Simsek, Y. (2018). Observations on identities and relations for interpolation functions and special numbers. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics* 28(1), 41–56.

5- Kucukoglu, I., Bayad, A. and Simsek, Y. (2017). k-ary Lyndon words and necklaces arising as rational arguments of Hurwitz-Lerch zeta function and Apostol-Bernoulli polynomials. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(6), Article:223.

6- Srivastava, H.M., Kucukoğlu, I. and Simsek, Y. (2017). Partial Differential Equations for a New Family of Numbers and Polynomials Unifying the Apostol-Type Numbers and the Apostol-Type Polynomials. *Journal of Number Theory*, 181, 117–146.

7- Al-Turjman, F., Gunay, M. and Kucukoglu, I. (2017). The road to dynamic Future Internet via content characterization. *Annals of Telecommunications*, 72(3-4), 209–219.

8- Kucukoglu, I. and Simsek, Y. (2017). On k-ary Lyndon words and their generating functions. The 14th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2016). *AIP Conf. Proc.*, 1863, 30000-1–30000-4.

9- Kucukoglu, I. and Simsek, Y. (2016). A Note On Generating Functions For The Unification Of The Bernstein Type Basis Functions. *Filomat*, 30(4), 985–992.

10- Gunay, M., Al-Turjman, F., Kucukoglu, I. and Simsek, Y. (2015). A novel architecture for data-repeaters in the future Internet. *IEEE Can. J. Elect. Comput. Eng.*, 38(4), 300–306.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Kucukoglu I. and Simsek Y. (2017). Numerical evaluations on power series including the numbers of Lyndon words and interpolation functions for the Apostol-type polynomials. Approximation and Computation–Theory and Applications (ACTA 2017), November 30 - December 2, 2017, Belgrade, Serbia, p. 31.

2- Kucukoglu I. and Simsek Y. (2017). Relations Arising From A Family Of Combinatorial Numbers And Bernstein Type Basis Functions. The 6th symposium on generating functions of special numbers and polynomials and their applications (GFSNP2017) within The 15th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2017), September 25-30, 2017, Thessaloniki, GREECE, p. 7.

3- Kucukoglu I. and Simsek Y. (2017). Combinatorial aspect for the special words. Caucasian Mathematics Conference (CMC-II), August 22-24, 2017, Van, TURKEY, p. 96.

4- Kucukoglu I. and Simsek Y. (2017). Combinatorial applications of the generating functions to the Lyndon words. The 30th International Conference of The Jangjeon Mathematical Society (ICJMS 2017), July 12-15, 2017, Algiers, ALGERIA, p. 94.

5- Kucukoglu I. and Simsek Y. (2017). A note on the numbers $Y_n(\lambda)$ and the polynomials $Y_n(x;\lambda)$ and their generating functions. International Conference on Recent Advances In Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2017), May 11-15, 2017, Kusadasi, TURKEY, p. 129.

6- Kucukoglu I. and Simsek Y. (2017). Interpolation functions of the k-ary Lyndon words including Lerch-zeta type functions. International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME 2017), May 10-12, 2017, Yildiz Technical University, Istanbul, TURKEY, p. 159.

7- Kucukoglu I. and Simsek Y. (2016) On k-ary Lyndon Words and Their Generating Function. The 5th symposium on generating functions of special numbers and polynomials and their applications (GFSNP2016) within The 14th International Conference Of Numerical Analysis And Applied Mathematics 2016 (ICNAAM 2016), September 19-25, 2016, Rhodes, GREECE.

8- Kucukoglu I. and Simsek Y. (2016). Remarks and observations on Bezier type curves and their some applications. The 29th International Conference of The Jangjeon Mathematical Society on Number Theory and Special Functions and its Applications(ICJMSNTSFA'2016), 08-10 August 2016, Pondicherry University, Pondicherry, INDIA, p. 8.

9- Kucukoglu I. and Simsek Y. (2016). Some special numbers and polynomials related to k-ary Lyndon words. The International Conference of Analysis and Its Applications(ICAA'2016), July 12-15, 2016, Kırşehir, TURKEY, p. 153.

10- Gunay M., Kucukoglu I. and Al-Turjman F. (2015). A Novel Method to Characterize Data Requests in the Future Internet. The 28th International Conference of The Jangjeon Mathematical Society (ICJMS2015), 15-19 May 2015, Antalya, TURKEY, p. 118.

11- Kucukoglu I. and Simsek Y. (2015). Unification of the B-Splines by using generating functions for the Bernstein type basis functions. The 28th International Conference of The Jangjeon Mathematical Society (ICJMS2015), 15-19 May 2015, Antalya, TURKEY, p. 45.

12- Küçükoğlu İ. and Türkmen R. (2014). Some Singular Value Inequalities for Positive Semidefinite Matrices. Karatekin Mathematics Days 2014 (KMD 2014), June 11-13, 2014, Çankırı, TURKEY, p. 221.

13- Küçükoğlu İ. and Baykan Ö. K. (2013). DWT-SVD Based Image Watermarking Using Artificial Bee Colony Algorithm. 4. International Conference On Matrix Analysis and Applications (ICMAA-2013), Konya, TURKEY, p. 20.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Küçükoğlu İ. ve Şimşek Y. (2015). Bernstein Tipli Baz Fonksiyonları ve Bunların Simülasyonu Üzerine. XXVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu (UMS2015), 7-9 Eylül 2015, Antalya, Türkiye, Sayfa: 33-34.

Düzenleme komitesinde yer aldığı ulusal Bilimsel toplantılar

1- 24. Ulusal Matematik Sempozyumu (UMS2015), 7-9 Eylül 2015, Antalya-Türkiye, Düzenleme Kurulu Üyesi (2015).

Düzenleme komitesinde yer aldığı uluslararası bilimsel toplantılar

1- The 28th International Conference of The Jangjeon Mathematical Society (ICJMS2015), 15-19 May 2015, Antalya - Turkey, Member of the Local Orginizing Committee (2015).

Ödüller, Başarılar ve Burslar

1- Selçuk Üniversitesi, Matematik Bölümü, Bölüm Birincisi (3.70/4.00), 2012.

2- TÜBİTAK-BİDEB, 2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Doktora Bursu (Yurt içi Doktora Bursu), 2014-2018.

3- RESEARCH EXCELLENCE AWARD (Araştırma Mükemmeliyet Ödülü), "Remarks and observations on Bezier type curves and their some applications" başlıklı sunumu nedeniyle, Yer: ICJMSNTSFA'2016 - The 29th International Conference of "The Jangjeon Mathematical Society" on Number Theory and Special Functions and its Applications" 08-10 August 2016, Pondicherry University, Pondicherry, India.

4- YOUNG RESEARCHER AWARD (Genç Araştırmacı Ödülü), "Combinatorial applications of the generating functions to the Lyndon words" başlıklı mükemmel bilimsel araştırma sunusu nedeniyle, Yer: ICJMS'2017 - The 30th International Conference of "The Jangjeon Mathematical Society" on Pure and Applied Mathematics, 12-15 July 2017, Algiers, Algeria.

5- TÜBİTAK-UBYT Uluslararası Bilimsel Yayınlar Teşvik Programı'ndan SCI-E yayın teşvik ödülü, 2016.

Araştırma Projeleri ve Görevleri

1- Araştırmacı, BAP/Normal Araştırma Projesi, Proje Başlığı: " Lyndon kelimelerinin sayılarını ve kombinatorik toplamları içeren kuvvet serilerinin inşası ve bunların hesaplamalı algoritmaları ", Proje No: "FBA-2018-3292", Antalya Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 22 Şubat 2018 tarihinden itibaren desteklenmektedir.

2- Araştırmacı, BAP/Doktora Tez Projesi, Proje Başlığı: " Sonlu leksikografikal sıralı alfabe üzerinde tanımlı kelimeler ve De Bruijn tipli dizileri içeren üreteç fonksiyonları ve bunların uygulamaları ", Proje No: "FDK-2017-2375", Antalya Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 10 Nisan 2017 tarihinden itibaren desteklenmektedir.