T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

TÜREV VE FARK OPERATÖRLERİNİN DİZİ VE SERİ ANALİZİNDEKİ UYGULAMALARI

Erkan MUNİROĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2018
ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

TÜREV VE FARK OPERATÖRLERİNİN DİZİ VE SERİ ANALİZİNDEKİ UYGULAMALARI

Erkan MUNİROĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2018
ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TÜREV VE FARK OPERATÖRLERİNİN DİZİ VE SERİ ANALİZİNDEKİ UYGULAMALARI

Erkan MUNİROĞLU

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafindan FYL-2018-3621 nolu proje ile desteklenmiştir.

TEMMUZ 2018

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TÜREV VE FARK OPERATÖRLERİNİN DİZİ VE SERİ ANALİZİNDEKİ UYGULAMALARI

Erkan MUNİROĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 13/07/2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Ayhan DİL (Danışman)

Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

Doç Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ

ÖZET

TÜREV VE FARK OPERATÖRLERİNİN DİZİ VE SERİ ANALİZİNDEKİ UYGULAMALARI

Erkan MUNİROĞLU

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ayhan DİL
Temmuz 2018, 48 sayfa

Bu tez çalışması, sırasıyla analizin ve ayrık matematiğin önemli araçlarından olan türev ve fark operatörlerinin, özellikle sayılar teorisi alanında öne çıkan özel polinom ve sayı aileleri ile özel fonksiyonlara uygulanmasını amaçlamaktadır. Öncelikle üzerinde çalışılacak olan özel sayı ve polinom aileleri ile özel fonksiyonlar kombinatorik ve analitik ifadeleri ile tanıtılmaktadır. Daha sonra bunların analizinde kullanılan operatörler, tanımları, örnekleri ve temel özellikleri ile açıklanmaktadır. Sonrasında ise çalışmamız açısından önemli görülen literatürdeki bazı sonuçlar, detaylı bir şekilde verilmektedir. Bulgular bölümünde ise temel operatörler için biraz daha genel sonuçlar elde edilmektedir. Bu sonuçların harmonik ve hiperharmonik sayılar ile Fibonacci sayılarına uygulanmasıyla, hem bu sayılar hem de bu sayıları içeren toplamlar ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmektedir. Literatürde yer alan bazı özdeşliklerin de farklı kanıtları verilmektedir. Ayrıca hem negatif mertebeli hiperharmonik sayılar hem de negatif indisli Fibobacci sayıları tanımlanarak bu tanımların neden "doğal" tanımlar oldukları açıklanmaktadır. Son olarak karmaşık analiz ve sayılar teorisi alanlarının her ikisi açısından önem teşkil eden digamma fonksiyonu operatörler yardımı ile analiz edilmektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Binom katsayıları, Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları, Fark operatörü, Harmonik sayılar, Hiperharmonik sayılar, Türev operatörü.

JÜRİ: Dr. Öğr. Üyesi Ayhan DİL
Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Doç Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ

ABSTRACT

APPLICATIONS OF DERIVATIVE AND DIFFERENCE OPERATORS IN SEQUENCE AND SERIES ANALYSIS

Erkan MUNİROĞLU

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Assistant Prof. Dr. Ayhan DİL
July 2018, 48 pages

In this work, derivative operator and difference operator, which are important tools for mathematical analysis and concrete mathematics, respectively; are applied to some families of polynomials and numbers, and some special functions. First, some families of polynomials and numbers, and some special functions which we use, are described together with their analytical and combinatorical meaning. After that, operators, which we use for analysing some families of polynomials and numbers, and some special functions, are explained by their definitions, examples and fundamental properties. Then, results which we see important in the literature, are explained in detail. In the fourth section, some general results are obtained via operators in question. And then by applying these results to some special numbers and functions, new properties and relations about these numbers are obtained. Also, new identities are obtained via operators being applied to Fibonacci, harmonic and hyperharmonic numbers. Different proofs of some known identities are also given. Besides, it is described that hyperharmonic numbers with negative order and Fibonacci numbers with negative index and explained that why their definitions are natural. Finally, digamma function which is important for both complex analysis and number theory, is analysied via operators which we mention above.

KEYWORDS: Binomial coefficient, Derivative operator, Difference operator, Harmonic numbers, Hyperharmonic numbers, Stirling numbers of first and second kind.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Ayhan DİL (Supervisor)
Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Assoc. Prof. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ

ÖNSÖZ

Analizin en temel araçlarından biri olan türev operatörü yardımı ile önemli sayı ailelerinin açık formunu elde etmek mümkün olabilmektedir. Buradan esinlenerek ayrık matematiğin en temel araçlarından biri olan fark operatörü yardımı ile önemli özdeşliklerin elde edilebileceği fikri üzerinden şekillenen bu çalışma, elementer matematiğe farklı bir açıdan yaklaşmayı amaçlamaktadır. Nitekim bu çalışmada harmonik ve hiperharmonik sayılar ile Fibonacci sayıları için ilginç olabilecek sonuçlar elde edilmektedir.

Tez çalışmama başladığım 2014 yılından bu yana geçen 4 yıllık zorlu serüvende her türlü teknik, lojistik, psikolojik, vb. desteği sunan tez danışmanım Dr. Öğretim Üyesi Ayhan Dil'e teşekkürlerimi bir borç bilirim. Bunun yanında çalışma süresince yanımdan hiç ayrılmayan minik kızım Mısra'ya ve eşim Çiğdem'e teşekkür ederim. Ayrıca tezin son aşamasında teknik destek sağlayan Doç. Dr. Mümin Can'a da teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum " Türev ve Fark Operatörlerinin Dizi ve Seri Analizindeki Uygulamaları " adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

...../...../20.....
Erkan MUNİROĞLU
İmza

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	: Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
B_n	: Bernoulli sayıları
$B_n(x)$	: Bernoulli polinomları
E_n	: Euler sayıları
$E_n(x)$	: Euler polinomları
F_n	: Fibonacci sayıları
H_n	: Harmonik sayılar
$h_n^{(r)}$	: Hiperharmonik sayılar
H_n^r	: Genelleştirilmiş harmonik sayılar
$x^{\underline{n}}$	: Azalan faktöriyel
$(x)_n$	: Artan faktöriyel
$\psi(x)$	: Digamma fonksiyonu
$\psi_n(x)$	: Poligamma fonksiyonu
ϕ_n	: Üstel sayılar
$\phi_n(x)$	: Üstel polinomlar
w_n	: Geometrik sayılar
$w_n(x)$	: Geometrik polinomlar
$\binom{n}{k}$	: Binom katsayıları
$\left[{n \atop k}\right]$	: Birinci çeşit Stirling sayıları
$\left\{{n \atop k}\right\}$	: İkinci çeşit Stirling sayıları

1. GİRİŞ

Geçmişten günümüze kadar olan süreçte "tümevarım" ve "tümdengelim" yöntemleri bilim yöntemi olarak sürekli bir devridaim içerisinde bulunmuşlardır. Rönesans ile başlayan dönemden 19. yüzyılın ortalarına kadar geçen sürede tümevarım, bilim yöntemi olarak kabul görmüştür. 19. yüzyılın sonlarında ise tümevarım hakim bilim yapma yöntemi olarak yerini tümdengelime bırakmış ve tümdengelim yöntemi bu hakimiyetini uzun yıllar sürdürmüştür. Ancak son 20-30 yıllık süreçte dünyanın ileri düzey araştırma merkezlerinde tümdengelim ile tümevarım yöntemlerinin bir arada kullanıldığı çalışmalar ön plana çıkmaktadır. Tümevarım yönetimi ile oluşturulan hipotezler, tümdengelim yönetimi ile test edilmektedir. Bu noktadan hareketle bu çalışmada benzer bir yöntem izlenmektedir.

Analizin en önemli araçlarından biri olan türev operatörü çok geniş bir sahada kullanılmaktadır. Yüksek mertebeden türevler yardımı ile kapalı formdaki önemli sayı aileleri için açık bir form elde etmek mümkün olabilmektedir. Euler (1913), Schwatt (1962) veya daha yakın dönemden Boyadzhiev (2005; 2007; 2009) ve Knopf (2003)'un çalışmalarına baktığımızda ilginç sonuçlar karşımıza çıkmaktadır. Herhangi bir sayı ailesinin üreteç fonksiyonu bilindiğinde bu fonksiyonun seri açılımının da ne olacağı bilinmektedir. Böylelikle bir üreteç fonksiyonuna herhangi bir mertebeden türev operatörü uygulandığında elde edilen sonuçlar ile bu üreteç fonksiyonunun seri açılımına aynı mertebeden türev operatörü uygulandığında elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak önemli olabilecek çeşitli özdeşliklerin elde edilmesine alan açılmaktadır.

Fark operatörü ayrık matematiğin (diğer bir ifade ile sonlu kalkülüsün) türev operatörü olarak görülebilir. Türev operatörü matematiksel analiz için ne kadar önemli bir araç ise fark operatörü de ayrık matematik için aynı derecede önemlidir. Fark operatöründen yola çıkılarak belirli ve belirsiz integralin, üstel ve logaritmik fonksiyonların, vs. ayrık versiyonları tanımlanabilmekte ve böylece sayı dizileri gibi nesnelerin incelenmesi için önemli ve kullanışlı bir kavramlar bütünü ortaya çıkmaktadır. Bunların yanı sıra bilgisayar bilimlerinin temelinde yer alan algoritma analizi, ayrık matematikten çok etkin bir biçimde yararlanmaktadır. Bu tez çalışmasında türev ve fark operatörlerinin birarada kullanılmasının temel motivasyonu buradan gelmektedir.

Herhangi bir fonksiyona türev veya fark operatörü uygulandığında ortaya çıkan genel formlar, tümevarım yöntemi ile elde edilebilmektedir. Bunun sonucu olarak, özel bir fonksiyon veya sayı ailesi seçilip, bu fonksiyonun veya sayı ailesinin herhangi bir mertebeden türevi veya farkı alındığında elde edilecek sonuçlar tümdengelim yöntemi yardımı ile kolayca bulunabilmektedir. Diğer taraftan seçilen özel bir fonksiyona veya sayı ailesine türev veya fark operatörü uygulandığında tümevarım yöntemi uygulanarak elde edilecek sonuç ile tümdengelim yöntemi uygulanarak elde edilecek sonuç birbirine eşit olmak zorundadır. Bu eşitlik bazı ilginç özdeşliklerin kolayca elde edilmesine imkân vermektedir. Nitekim bu çalışmada fark operatörü, harmonik ve hiperharmonik sayılara, Fibonacci sayılarına ve digamma fonksiyonuna uygulanmaktadır. Bu sayı ve fonksiyonlar için, bazıları halihazırda literatürde olan, bazıları ise yeni olan sonuçlar elde edilmektedir. Harmonik sayıları ve binom katsayılarını içeren alterne ve normal toplamlar geçmişten günümüze her dönem üzerinde çalışılan konulardan birisi olmuştur. Bu çalışmada da hem harmonik sayıların çeşitli toplamları hem de hiperharmonik sayıların çeşitli gösterimleri elde edilmektedir.

Fark operatörü aynı zamanda negatif mertebeli hiperharmonik sayılar ve negatif indisli Fibonacci sayılarını da tanımlamamıza imkan vermektedir. Bu tanımlar bu sayıların temel özelliklerini taşıdıkları için doğal bir genelleştirmedirler.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, öncelikle tez kapsamında çalışılacak olan temel kavramlar tanımlanmakta ve bu kavramların bazı önemli özellikleri verilmektedir. İlerleyen bölümlerde ihtiyaç duyulan temel önermeler referansları ile birlikte verilmekte ve böylece tezin literatürdeki yeri ortaya konulmaktadır.

2.1. Özel Sayı Aileleri

Bu alt bölümde tez çalışması için ihtiyaç duyulan özel polinom ve sayı aileleri ile özel fonksiyonlar tanıtılmaktadır, gerekli görülen yineleme bağıntıları, üreteç fonksiyonları verilmektedir. Burada tanımlar ve bahsedilen özellikler, bazen kombinatorik anlamları da kapsayacak biçimde yer almaktadır.

Binom katsayıları

$k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ şeklinde tanımlanan $\binom{n}{k}$ sayıları *binom katsayıları* olarak adlandırılmaktadır. Özel olarak $\binom{0}{0} := 1$ olarak tanımlanmaktadır. Binom katsayıları $n \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} & , k \geq 0 \\ 0 & , k < 0 \end{cases}$$

biçiminde genelleştirilebilir. Böylece ortaya çıkan sayılar da genelleştirilmiş binom katsayıları olarak adlandırılırlar.

Binom katsayıları, $n \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

yineleme bağıntısını sağlar. Binom katsayıları özellikle binom teoremindeki rolünden dolayı oldukça önemlidir (Graham vd. 1994).

Fibonacci sayıları

Yinelemeli diziler denilince ilk akla gelen Fibonacci sayılarıdır. Binlerce yıldır hala aktif bir çalışma alanı olan Fibonacci sayıları, $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ ve $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ikinci mertebeden doğrusal yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Bu yineleme bağıntısı yardımı ile Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki biçimde elde edilir (Koshy 2001):

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Her ne kadar Fibonacci sayıları bir sayma probleminin öznesi olarak ortaya çıksa da literatürde negatif indisli Fibonacci sayıları ile ilgili çalışmalar da mevcuttur. Negatif indisli Fibonacci sayıları, $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

şeklinde tanımlanmaktadır ve

$$F_{-n} = F_{-n-1} + F_{-n-2}$$

yineleme bağıntısını sağlamaktadırlar (Bera 2017; Dunlap 1997). Bu çalışmanın bulgular bölümünde negatif indisli Fibonacci sayıları için farklı bir tanım önerilmektedir. Elde edilen eşitliklerin doğal bir sonucu olan bu tanım yukarıdaki tanım ile de uyumludur.

Stirling sayıları

Stirling sayıları, klasik olarak birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları olarak iki sınıfa ayrılırlar (Graham vd. 1994; Comtet 1974; Riordan 1958). Birinci çeşit Stirling sayıları genellikle $s_{n,k}$ veya $\left[{n \atop k}\right]$ ile gösterilip kombinatorik olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. Bu çalışmada $\left[{n \atop k}\right]$ gösterimi tercih edilmektedir.

$\left[{n \atop k}\right]$: n elemanlı bir kümenin, k tane çevrimin çarpımı olarak yazılabilen, farklı permütasyonlarının sayısıdır veya n tane kişinin k tane özdeş yuvarlak masaya her masada en az bir kişi olacak biçimde, farklı şekillerde yerleşebilme sayısıdır. Dolayısıyla

$$\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n!$$

eşitliği geçerlidir (Sprugnoli 2014). Birinci çeşit Stirling sayıları,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

yineleme bağıntısını sağlar. Birinci çeşit Stirling sayılarının işaretli versiyonu olarak adlandırılan ve $(-1)^{n-k} \left[{n \atop k}\right]$ ile gösterilen sayılar da literatürde önemlidir. İşaretli birinci çeşit Stirling sayılarının üstel üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Abramowitz ve Stegun 1972):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{(\log(1+x))^k}{k!}.$$

İkinci çeşit Stirling sayıları ise genellikle $S_{n,k}$ veya $\left\{{n \atop k}\right\}$ ile gösterilip aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. Bu çalışmada $\left\{{n \atop k}\right\}$gösterimi tercih edilmektedir. İkinci çeşit Stirling sayıları kombinatorik olarak; n elemanlı bir kümenin boştan farklı ve birbirlerinden ayrık k tane alt kümesinin birleşimi olarak yazılabilme sayısıdır. İkinci çeşit Stirling sayıları,

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$$

yineleme bağıntısını sağlar. Ayrıca ikinci çeşit Stirling sayılarının üstel üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Abramowitz ve Stegun 1972):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^k}{k!}.$$

Harmonik, hiperharmonik ve genelleştirilmiş harmonik sayılar

i) Harmonik seri

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

matematiğin en bilindik kavramlarından birisidir. Bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için harmonik serinin $n.$ kısmi toplamı $n.$ harmonik sayı olarak adlandırılır ve H_n ile gösterilir, yani

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Özel olarak $H_0 := 0$ olarak tanımlanır. Harmonik sayılar ile birinci çeşit Stirling sayıları arasında

$$H_n = \frac{\left[{n+1 \atop 2}\right]}{n!}$$

eşitliği geçerlidir (Graham vd. 1993). Harmonik sayıların üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

şeklindedir (Benjamim vd. 2003; Dil ve Mezö 2008).

ii) $h_n^{(1)} := H_n$ olmak üzere

$$h_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} h_k^{(1)}$$

sayısına $2.$ mertebeden $n.$ hiperharmonik sayı denir. Benzer düşünce ile $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$h_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} h_k^{(r-1)}$$

iç içe toplamlar şeklinde tanımlanan sayıya $r.$ mertebeden $n.$ hiperharmonik sayı adı verilir (Conway ve Guy 1996). Özel olarak, $h_n^{(0)} := \frac{1}{n}$ ve $h_0^{(r)} := 0$ tanımlanır. Aşağıdaki formül yardımıyla hiperharmonik sayılar, harmonik sayılar ve binom katsayıları cinsinden ifade edilebilir (Conway ve Guy 1996; Dil ve Mezo 2009b):

$$h_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r-1} \left(H_{n+r-1} - H_{r-1}\right).$$

Hiperharmonik sayılar için bir kapalı formül

$$h_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+r-k-1}{r-1} \frac{1}{k}$$

şeklinde verilebilir (Dil ve Mezo 2008). Hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(r)} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^r}$$

şeklindedir (Benjamim vd. 2003; Dil ve Mezö 2008).

iii) $\operatorname{Re}(s) > 1$ olacak biçimde bir $s \in \mathbb{C}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

serisi Riemann zeta fonksiyonu olarak adlandırılır ve $\zeta(s)$ olarak gösterilir. $\zeta(s)$ fonksiyonunun aşikar olmayan sıfırlarının yerlerinin belirlenmesi problemi son 150 yılın en önemli araştırma konularından birisidir (Edwards 1974; Apostol 1985). s karmaşık sayısı yerine $m \in \mathbb{Z}^{+}$ alınırsa $\zeta(m)$ serisinin n. kısmi toplamı genelleştirilmiş n. harmonik sayı olarak adlandırılır ve H_n^m ile gösterilir, yani

$$H_n^m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}.$$

Özel olarak $m = 1$ için $H_n^1 = h_n^{(1)} = H_n$ yani n. harmonik sayıdır.

2.2. Özel Fonksiyonlar

Azalan faktöriyel

Azalan faktöriyel,

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Azalan faktöriyel ile Stirling sayıları arasında

$$x^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^n$$

ve

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} x^{\underline{i}}$$

eşitlikleri geçerlidir (Abramowitz ve Stegun 1972; Graham vd. 1993).

Artan faktöriyel (Pochammer sembolü)

Artan faktöriyel,

$$(x)_n = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bazı kaynaklarda $(x)_n$ yerine $x^{\overline{n}}$ gösterimi de karşımıza çıkmaktadır (Abramowitz ve Stegun 1972; Graham vd. 1993). Artan faktöriyel meşhur Euler gamma fonksiyonu ile yakın ilişkilidir.

Euler Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \qquad \mathrm{Re}(z) > 0$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Özel olarak $z = 1$ için, $\Gamma(1) = 1$'dir.

Gamma fonksiyonu ile artan faktöriyel arasında

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

eşitliği vardır (Abramowitz ve Stegun 1972).

Digamma ve poligamma fonksiyonları
Digamma fonksiyonu,

$$\psi\left(z\right)=\frac{d}{dz}\log\left(\Gamma(z)\right)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Digamma fonksiyonu için yansıma bağıntısı (reflection formula)

$$\psi\left(z\right)-\psi\left(1-z\right)=-\pi\cot\pi z$$

ile verilir (Abramowitz ve Stegun 1972). Ayrıca $\psi_0\left(z\right)=\psi\left(z\right)$ olmak üzere poligamma fonksiyonu

$$\psi_n\left(z\right)=\frac{d^n}{dz^n}\psi\left(z\right)=\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\log\left(\Gamma(z)\right)$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde poligamma fonksiyonu için yansıma bağıntısı

$$\psi_n\left(1-z\right)+\left(-1\right)^{n+1}\psi_n\left(z\right)=\left(-1\right)^n\pi\left(\frac{d}{dz}\right)^n\cot\pi z$$

ile verilir (Abramowitz ve Stegun 1972).

2.3. Özel Polinom Aileleri

Üstel polinomlar ve üstel sayılar (Bell sayıları)
$\phi_n\left(x\right)$ üstel polinomları,

$$\phi_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}x^k$$

eşitliği ile tanımlanır. Özel olarak $x=1$ için,

$$\phi_n\left(1\right)=\sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}$$

elde edilir. Buradan n. üstel sayı

$$\phi_n:=\phi_n\left(1\right)$$

şeklinde tanımlanır (Bell 1934-a; Riordan 1958). Stirling sayılarının kombinatorik anlamı göz önünde tutulduğunda; üstel sayılar, n elemanlı bir kümenin boş olmayan ayrık kümelere tüm parçalanışları sayısıdır.

Üstel sayıların üstel üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Comtet 1974):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\frac{x^n}{n!}=e^{e^x}-1.$$

Geometrik polinomlar ve geometrik sayılar (sıralı Bell Sayıları)
$w_n\left(x\right)$ geometrik polinomları,

$$w_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}k!x^k$$

eşitliği ile tanımlanır. Özel olarak $x = 1$ için,

$$w_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k!$$

olur. n. geometrik sayı $w_n = w_n(1)$ şeklinde tanımlanır (Schwatt 1962; Tanny 1974). Geometrik sayılar, kombinatorik anlamda, "kümelerin sıralanışları önemli olmak üzere, n elemanlı bir kümenin boş olmayan ayrık kümelere tüm parçalanışları sayısı" olarak düşünülebilir. Geometrik sayıların üstel üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Boyadzhiev 2005):

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2 - e^x}.$$

Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları

Herhangi bir x karmaşık sayısı için, $B_n(x)$ Bernoulli polinomu,

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \quad (\,|z| < 2\pi)$$

şeklinde tanımlanır. Bernoulli polinomları için,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \, x^{n-k}$$

eşitliği sağlanır. Özel olarak $x = 0$ için, $B_n(0)$ sayıları Bernoulli sayıları olarak adlandırılır ve B_n sembolü ile gösterilir. Dolayısıyla Bernoulli sayılarının üstel üreteç fonksiyonu,

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} \quad (\,|z| < 2\pi)$$

olarak elde edilir. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $B_0 := 1$ olmak üzere, Bernoulli sayıları

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

yineleme bağıntısını sağlar (Apostol 1976).

Euler polinomları ve Euler sayıları

Herhangi bir x karmaşık sayısı için $E_n(x)$ Euler polinomları,

$$\frac{2e^{xz}}{e^z + 1} = \sum_{n=o}^{\infty} E_n(x) \frac{z^n}{n!} \quad (\,|z| < \pi)$$

eşitliği ile tanımlanır. E_n Euler sayıları, $E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right)$ olarak tanımlanır ve

$$\frac{2e^z}{e^{2z} + 1} = \text{sech } z = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{z^n}{n!}$$

üstel üreteç fonksiyonuna sahiptirler (Abramowitz ve Stegun 1972). Ayrıca Euler sayıları ile geometrik polinomlar arasında

$$E_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j w_j \left(-\frac{1}{2}\right)$$

eşitliği sağlanır (Boyadzhiev 2007).

2.4. Operatörler

Bu alt bölümde çalışma için ihtiyaç duyulan türev ve fark operatörleri tanıtılmaktadır.

Türev operatörü

f herhangi türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, türev operatörü D ,

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. xD operatörü ise, türevlenebilir bir f fonksiyonu için

$$(xD) f(x) = x \left(\frac{d}{dx} f(x) \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1. *xD operatörü en temel elemana yani x^m fonksiyonuna n defa uygulanırsa:*

$$(xD)^n (x^m) = m^n x^m$$

elde edilir.

Fark operatörü

Fark operatörü Δ ,

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Özel olarak

$$\Delta^0 f(x) = f(x)$$

olarak tanımlanır. Fark operatörü lineerdir. Yani

$$\Delta [af(x) + bg(x)] = a\Delta f(x) + b\Delta g(x)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.2. *$\binom{x}{m}$ genelleştirilmiş binom katsayısı için*

$$\Delta^n \binom{x}{m} = \binom{x}{m-n}$$

sağlanır.

Örnek 2.3. *Azalan faktöriyel için*

$$\Delta^n (x)_k = n!\binom{k}{n} (x+n)_{k-n}$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 2.4. x^{-1} *için*

$$\Delta^n \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x)_{n+2}}$$

elde edilir.

Örnek 2.5. *Geometrik serinin kapalı formuna* n *defa fark operatörü uygulandığında*

$$\Delta^n \left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x-1)_{n+1}}$$

elde edilir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Türev Operatörünün Dizi ve Seri Analizindeki Uygulamaları

Bu çalışmada türev operatörü için zaman zaman D, zaman zaman da $\frac{d}{dx}$ gösterimi tercih edilecektir. Benzer şekilde xD operatörü yerine de $x\frac{d}{dx}$ gösterimi de kullanılabilecektir.

$(xD)^n = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n$ operatörünün tarihçesi Euler'in çalışmalarına kadar uzanmaktadır (Ayaoub 1974; Knopf 2003). xD operatörünün n defa türevlenebilir bir f fonksiyonuna n defa uygulanması ile elde edilen önerme aşağıda verilmektedir:

Önerme 3.6. *$n \in \mathbb{Z}^+$olmak üzere f, n. mertebeden türevlenebilir herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$(xD)^n f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k \frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

elde edilir (Grunert 1843; Knopf 2003).

İspat n üzerinden tümevarım ile yapılabilir. $n = 1$ için,

$$(xD) f(x) = \left\{ {1 \atop 1} \right\} x \frac{df(x)}{dx}$$

olduğundan eşitlik doğrudur. $n = m$ için

$$(xD)^m f(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^m f(x) = \sum_{k=1}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} x^k \frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

doğru olsun. $n = m + 1$ için ,

$$\begin{aligned}
(xD)^{m+1} f(x) &= (xD)(xD)^m f(x) \\
&= x\sum_{k=1}^{m} \frac{d}{dx}(\left\{ {m \atop k} \right\} x^k \frac{d^k f(x)}{dx^k}) \\
&= x\sum_{k=1}^{m} k\left\{ {m \atop k} \right\} x^{k-1} \frac{d^k f(x)}{dx^k} + \left\{ {m \atop k} \right\} x^k \frac{d^{k+1} f(x)}{dx^{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{m} k\left\{ {m \atop k} \right\} x^{k} \frac{d^k f(x)}{dx^k} + \left\{ {m \atop k} \right\} x^{k+1} \frac{d^{k+1} f(x)}{dx^{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{m} k\left\{ {m \atop k} \right\} x^{k} \frac{d^k f(x)}{dx^k} + \sum_{k=2}^{m+1} \left\{ {m \atop k-1} \right\} x^{k} \frac{d^{k} f(x)}{dx^{k}} \\
&= \left\{ {m \atop 1} \right\} x \frac{df(x)}{dx} + \left[\sum_{k=2}^{m} k\left\{ {m \atop k} \right\} x^{k} \frac{d^k f(x)}{dx^k} + \sum_{k=2}^{m} \left\{ {m \atop k-1} \right\} x^{k} \frac{d^{k} f(x)}{dx^{k}} \right] \\
&+ \left\{ {m \atop m} \right\} x^{m+1} \frac{d^{m+1} f(x)}{dx^{m+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Stirling sayılarının yineleme bağıntısı kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
(xD)^{m+1} f(x) &= \left\{ {m \atop 1} \right\} x \frac{df(x)}{dx} + \left[\sum_{k=2}^{m} \left(k \left\{ {m \atop k} \right\} + \left\{ {m \atop k-1} \right\} \right) x^k \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right] \\
&+ \left\{ {m \atop m} \right\} x^{m+1} \frac{d^{m+1} f(x)}{dx^{m+1}} \\
&= \left\{ {m+1 \atop 1} \right\} x \frac{df(x)}{dx} + \left[\sum_{k=2}^{m} \left\{ {m+1 \atop k} \right\} x^k \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right] \\
&+ \left\{ {m+1 \atop m+1} \right\} x^{m+1} \frac{d^{m+1} f(x)}{dx^{m+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ {m+1 \atop k} \right\} x^k \frac{d^k f(x)}{dx^k}
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. □

Önerme 3.7. *f ve g , n defa türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere,*

$$(xD)^n f(x) g(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[(xD)^{n-k} f(x) \right] \left[(xD)^k g(x) \right]$$

elde edilir (Boyadzhiev 2009).

İspat n üzerinden tümevarım ile yapılabilir. □

3.1.1. Harmonik ve hiperharmonik sayılarla ilgili uygulamalar

Aşağıda D ve xD operatörleri yardımı ile elde edilen, harmonik ve hiperharmonik sayılarla ilgili bazı temel sonuçlar yer almaktadır.

Önerme 3.8. *Harmonik sayıların üreteç fonksiyonu için,*

$$D^n \left(-\frac{\ln(1-x)}{1-x} \right) = \frac{n! \left(H_n - \ln(1-x) \right)}{(1-x)^{n+1}}$$

eşitliği sağlanmaktadır (Dil ve Kurt 2012).

İspat n üzerinden tümevarımla gösterilebilir. □

Sonuç 3.9. *Özel olarak,*

$$D^n \left(-\frac{\ln(1-x)}{1-x} \right)_{|x=0} = n! H_n$$

bulunur.

Önerme 3.10. *Hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonu, gamma fonksiyonu ve harmonik sayılar arasında*

$$D^n\left(-\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^r}\right)=\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)}\frac{1}{(1-x)^{n+r}}\left(H_{n+r-1}-H_{r-1}-\ln(1-x)\right)$$

bağıntısı geçerlidir (Dil ve Kurt 2012).

İspat Hiperharmonik sayıların harmonik sayılar cinsinden ifade edilmesini sağlayan Conway-Guy (1996) formülü yardımıyla n üzerinden tümevarımla gösterilebilir. □

Önerme 3.11. *Harmonik sayıların formal serisine m defa xD operatörü uygulandığında*

$$(xD)^m\left(\sum_{n=1}^{\infty}H_nx^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n^mH_nx^n$$

elde edilir (Dil ve Kurt 2012).

İspat n üzerinden tümevarım ile görülebilir. □

Önerme 3.12. *Hiperharmonik sayıların formal serisine m defa xD operatörü uygulandığında*

$$(xD)^m\left(\sum_{n=1}^{\infty}h_n^{(r)}x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n^mh_n^{(r)}x^n$$

elde edilir (Dil ve Kurt 2012).

İspat n üzerinden tümevarımla yapılabilir. □

3.1.2. Bernoulli sayıları ve trigonometrik fonksiyonlarla ilgili uygulamalar

Sıradaki Önerme 3.13 , Önerme 3.15 ve Önerme 3.16 ve devamındaki bazı sonuçlar büyük oranda Knopf'un 2003 yılındaki çalışmasından alınmıştır.

Önerme 3.13. $z\in\mathbb{C}$ *için*

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)|_{z=0}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\,k!}{2^{k+1}}\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}$$

elde edilir (Knopf 2003).

İspat $u = e^z$ olsun. Buradan $u\frac{d}{du} = \frac{d}{dz}$ elde edilir. O halde

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right) = \left(u\frac{d}{du}\right)^n\left(\frac{1}{1+u}\right)$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}\left(u\frac{d}{du}\right)^n\left(\frac{1}{1+u}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\frac{d^k}{du^k}\left(\frac{1}{1+u}\right)u^k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\frac{(-1)^k\, k!}{(1+u)^{k+1}}u^k\end{aligned}$$

elde edilir. u yerine e^z yazılırsa,

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\frac{(-1)^k\, k!}{(1+e^z)^{k+1}}(e^z)^k$$

ve böylece

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)|_{z=0} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\, k!}{2^{k+1}}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

elde edilir.

Sonuç 3.14. *$\tan x$'in Maclaurin açılımı*

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+n+1}\, 2^{2n+1-k}k!\begin{Bmatrix} 2n+1 \\ k \end{Bmatrix}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

olarak bulunur.

□

İspat Önerme 3.13 yardımı ile $\tan x$'in Maclaurin açılımı elde edilecektir. Yani

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d^n}{dx^n}\tan x\right)_{|x=0}\frac{x^n}{n!}$$

şeklinde bir ifade elde edilmelidir. O halde ilk yapılması gereken $\forall\, n$ için

$$\left(\frac{d^n}{dx^n}\tan x\right)_{|x=0}$$

ifadesinin değerini bulmaktır.

$$\tan x = \frac{2i}{e^{2ix}+1} - i$$

özdeşliğinde $z = 2ix$ olarak tanımlanırsa $x = \frac{z}{2i}$ olacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^n}{dx^n}\tan x\right)|_{x=0} &= \frac{d^n}{d\left(\frac{z}{2i}\right)^n}\left(\frac{2i}{e^z+1}-i\right)|_{z=0} \\
&= (2i)^n\,2i\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{1+e^z}\right)|_{z=0} \\
&= 2^{n+1}i^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\,k!}{2^{k+1}}\left\{ {n \atop k} \right\} \\
&= i^{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,2^{n-k}k!\left\{ {n \atop k} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafı reel olduğundan bu, sağ taraftaki reel kısma eşittir. Böylece

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+n+1}\,2^{2n+1-k}k!\left\{ {2n+1 \atop k} \right\}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

elde edilir. □

Önerme 3.15. f, n. *mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,*

$$\frac{d^n}{dz^n}(zf(z)) = z\frac{d^n}{dz^n}(f(z)) + n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f(z))$$

eşitliği sağlanır (Knopf 2003).

İspat Tümevarım yöntemi ile görülebilir. □

Önerme 3.16. $z \in \mathbb{C}$ *için*

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)|_{z=0} = \frac{-n}{2^n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)|_{z=0}$$

elde edilir (Knopf 2003).

İspat Burada

$$\frac{2z}{e^{2z}-1} = \frac{z}{e^z-1} - \frac{z}{e^z+1}$$

özdeşliğinden yararlanılacaktır.

$$\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{2z}{e^{2z}-1}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right) - \lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)$$

$u = 2z$ şeklinde tanımlanırsa,

$$\frac{d^n}{dz^n} = 2^n\frac{d^n}{du^n}$$

olur. O halde,

$$\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{2z}{e^{2z}-1}\right) = \lim_{u\to 0}2^n\frac{d^n}{du^n}\left(\frac{u}{e^u-1}\right)$$

yazılabilir. Şimdi

$$\lim_{u\to 0} 2^n \frac{d^n}{du^n}\left(\frac{u}{e^u-1}\right)$$

ifadesi analiz edilecektir. Öncelikle kolayca görülmesi ve daha önce ispatı yapılan Önerme 3.13 ile uyumlu olması açısından u değişkeni yerine z değişkeni tercih edilecektir. Yani

$$\lim_{z\to 0} 2^n \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)$$

ifadesi ile çalışılacaktır. O halde

$$\lim_{z\to 0} 2^n \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right) - \lim_{z\to 0} \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)$$

yazılabilir. Aynı ifadeler birleştirilirse,

$$(2^n-1)\lim_{z\to 0} \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right) = -\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)|_{z=0}$$

ve buradan

$$\lim_{z\to 0} \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right) = \frac{-1}{(2^n-1)}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)|_{z=0}$$

elde edilir. Önerme 3.15 yardımı ile

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)|_{z=0} &= \frac{d^n}{dz^n}\left(z\frac{1}{e^z+1}\right)|_{z=0}\\ &= z\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)|_{z=0} + n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)|_{z=0}\\ &= n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)|_{z=0}\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte yerine konulursa,

$$\lim_{z\to 0} \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right) = \frac{-n}{(2^n-1)}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)|_{z=0}$$

eşitliği elde edilir. □

Sonuç 3.17. *Bernoulli sayıları için açık bir form*

$$B_n = \frac{n}{2^n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}\,k!}{2^{k+1}}\left\{\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right\}$$

olarak elde edilir (Knopf 2003).

İspat Önerme 3.16 yardımı ile Bernoulli sayıları için açık bir form elde etmek mümkündür. Bernoulli sayılarının üstel üreteç fonksiyonunun,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x-1}$$

olduğu bilinmektedir. Eşitliğin sağ tarafındaki fonksiyonun Maclaurin açılımı bulunup, eşitliğin sol tarafındaki serinin katsayıları ile karşılaştırılırsa Bernoulli sayıları için açık bir form elde edilebilecektir. O halde,

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right)\frac{x^n}{n!}$$

eşitliğinde

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)$$

ifadesinin değeri Önerme 3.13 ve Önerme 3.15 yardımı ile bulunabilir.

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x-1}\right) &= \frac{-n}{2^n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)_{|x=0}\\ &= \frac{-n}{2^n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}}\left\{\begin{matrix} n-1\\ k\end{matrix}\right\}\\ &= \frac{n}{2^n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1} k!}{2^{k+1}}\left\{\begin{matrix} n-1\\ k\end{matrix}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlikte yerine konulursa,

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1} k!}{2^{k+1}}\left\{\begin{matrix} n-1\\ k\end{matrix}\right\}\right)\frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir ve iki serinin katsayıları karşılaştırıldığında

$$B_n=\frac{n}{2^n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1} k!}{2^{k+1}}\left\{\begin{matrix} n-1\\ k\end{matrix}\right\}$$

bulunur. □

Sonuç 3.18. *$x\cot x$ 'in Maclaurin açılımı*

$$x\cot x=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}nx^{2n}}{(2^{2n}-1)(2n)!}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^k k!}{2^k}\left\{\begin{matrix} 2n-1\\ k\end{matrix}\right\}$$

olarak bulunur (Knopf 2003).

İspat

$$x\cot x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{d^n}{dx^n}(x\cot x)\right)\frac{x^n}{n!}$$

şeklinde bir ifade elde edilecektir. Bunun için

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(x\cot x\right)$$

ifadesinin değerini bulmak gerekmektedir.

$$x\cot x=\frac{2ix}{e^{2ix}-1}+ix$$

özdeşliğinden yararlanarak. $z=2ix$ tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(x\cot x\right)&=\lim_{z\to 0}\left(2i\right)^n\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)\\&=\left(2i\right)^n\frac{-n}{\left(2^n-1\right)}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)_{|z=0}\\&=\left(2i\right)^n\frac{-n}{\left(2^n-1\right)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^k k!}{2^{k+1}}\left\{\begin{matrix}n-1\\k\end{matrix}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned}x\cot x&=\operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(2i\right)^n\frac{-n}{\left(2^n-1\right)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^k k!}{2^{k+1}}\left\{\begin{matrix}n-1\\k\end{matrix}\right\}\frac{x^n}{n!}\right)\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{2^{2n}nx^{2n}}{\left(2^{2n}-1\right)\left(2n\right)!}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\left(-1\right)^k k!}{2^k}\left\{\begin{matrix}2n-1\\k\end{matrix}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 3.19. *$x\csc x$'in Maclaurin açılımı*

$$x\ \csc x=1+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{2^{2n}-2}{2^{2n}-1}\right)\frac{nx^{2n}}{\left(2n\right)!}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\left(-1\right)^k k!}{2^k}\left\{\begin{matrix}2n-1\\k\end{matrix}\right\}\right)$$

olarak bulunur (Knopf 2003).

İspat

$$x\csc x=\frac{ix}{e^{ix}+1}+\frac{ix}{e^{ix}-1}$$

özdeşliğinden yararlanılacaktır. $z=ix$ şeklinde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(x\csc x\right)&=i^n\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)+i^n\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)\\&=i^n\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)_{z=0}+i^n\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)\\&=i^n n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^k k!}{2^{k+1}}\left\{\begin{matrix}n-1\\k\end{matrix}\right\}+i^n\frac{-n}{\left(2^n-1\right)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^k k!}{2^{k+1}}\left\{\begin{matrix}n-1\\k\end{matrix}\right\}\\&=\left(\frac{2^n-2}{2^n-1}\right)ni^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^k k!}{2^{k+1}}\left\{\begin{matrix}n-1\\k\end{matrix}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} x\ \csc x &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(x\csc x\right)\right)\frac{x^n}{n!} \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n-2}{2^n-1}\right)ni^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k\,k!}{2^{k+1}}\left\{{n-1 \atop k}\right\}\frac{x^n}{n!}\right) \\ &= 1+\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2^{2n}-2}{2^{2n}-1}\right)\frac{nx^{2n}}{(2n)!}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^k\,k!}{2^k}\left\{{2n-1 \atop k}\right\}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Son olarak $\sec x$'in Maclaurin açılımı verilecektir.

$$a_{n,k}=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(2j+1)^n$$

olmak üzere, $\sec x$'in Maclaurin açılımı

$$\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2n}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{2n}a_{2n,k}2^{-k}$$

şeklindedir (Knopf 2003).

3.2. Türevsel, Üstel ve Geometrik Polinomlarla İlgili Uygulamalar

n. mertebeden türev operatörünün bazı trigonometrik fonksiyonlara uygulanması bunlarla sınırlı değildir. Şimdi literatürde türevsel polinom (derivative polynomial) olarak bilinen ve trigonometrik fonksiyonların n. mertebeden türevleri yardımı ile elde edilen polinom aileleri ve bu polinomlar arasındaki ilişkiler ele alınacaktır.

$\tan x$ **fonksiyonunun türevsel polinomu:**

$\tan x$ fonksiyonunun hangi mertebeden türevi alınırsa alınsın her seferinde elde edilen ifade $\tan x$ cinsinden yazılabilmektedir. Böylece $\forall\, n\in\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}$ için bir $P_n(\tan x)$ polinomu elde edilebilmektedir. $P_n(\tan x)$ polinomu, $\tan x$ fonksiyonunun türevsel polinomu olarak adlandırılmaktadır ve

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n\tan x=P_n(\tan x)$$

eşitliğini sağlamaktadır (Hoffman 1995). Dolayısıyla bu eşitlik $z\in\mathbb{C}$ için $P_n(z)$ polinomunun $\tan x$'teki değeri olarak okunabilir. Burada $P_n(z)$ polinomunun mertebesi $n+1$ olur. Ayrıca $P_n(\tan x)$ polinom dizisinin üstel üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$f(x,t)=\tan(x+t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\tan x)\frac{t^n}{n!}.$$

Çünkü

$$\begin{aligned}\tan(x+t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n \tan(x+t)\,|_{t=0}\right]\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\tan x+t)|_{t=0}\right]\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}P_n(\tan x)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

$\sec x$ **fonksiyonunun türevsel polinomu:**

$\sec x$ fonksiyonunun hangi mertebeden türevi alınırsa alınsın her seferinde elde edilen ifade $\sec x$ ile $\tan x$'e bağlı bir polinomun çarpımı cinsinden yazılabilmektedir. Böylece $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için bir $\sec x\; Q_n(\tan x)$ polinomu elde edilebilmektedir. Burada $Q_n(\tan x)$, $\sec x$'in türevsel polinomu olarak adlandırılmaktadır ve

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \sec x = \sec x\; Q_n(\tan x)$$

eşitliği sağlanmaktadır (Hoffman 1995). Dolaysı ile $z \in \mathbb{C}$ için $Q_n(z)$ polinomunun mertebesi n'dir. $Q_n(\tan x)$ polinom dizisinin üstel üreteç fonksiyonu şu şekildedir :

$$f(x,t) = \frac{\sec(x+t)}{\sec x} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\tan x)\,\frac{t^n}{n!}.$$

Çünkü

$$\begin{aligned}\sec(x+t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n \sec(x+t)\,|_{t=0}\right]\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sec x Q_n(\tan(x+t))\right]|_{t=0}\frac{t^n}{n!}\\ &= \sec x\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(\tan x)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

sağlanır.

$\tanh x$ **fonksiyonunun türevsel polinomu:**

$\tanh x$ fonksiyonunun hangi mertebeden türevi alınırsa alınsın her seferinde elde edilen ifade $\tanh x$'e bağlı bir polinom cinsinden yazılabilmektedir. Böylece $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için bir $C_n(\tanh x)$ polinomu elde edilebilmektedir. $\tanh x$ fonksiyonunun türevsel polinomu, $C_n(\tanh x)$ ile gösterilmektedir ve

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \tanh x = C_n(\tanh x)$$

eşitliğini sağlamaktadır (Boyadzhiev 2007). Dolayısıyla bu eşitlik $z \in \mathbb{C}$ için $C_n(z)$ polinomunun $\tanh x$'teki değeri olarak okunabilir. Burada $C_n(z)$ polinomunun mertebesi

$n+1$'dir. Ayrıca $C_n\left(\tanh x\right)$ polinom dizisinin üstel üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$f\left(x,t\right)=\tanh(x+t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(\tanh x\right)\frac{t^n}{n!}.$$

Çünkü

$$\begin{aligned}\tanh(x+t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n\tanh\left(x+t\right)|_{t=0}\right]\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n(\tanh x+t)|_{t=0}\right]\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}C_n(\tanh x)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

$\coth x$ **fonksiyonunun türevsel polinomu:**

$\coth x$ fonksiyonunun hangi mertebeden türevi alınırsa alınsın her seferinde elde edilen ifade $\coth x$'e bağlı bir polinom cinsinden yazılabilmektedir. Böylece $\forall\ n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ için bir $C_n\left(\coth x\right)$ polinomu elde edilebilmektedir. $\coth x$ fonksiyonunun türevsel polinomu, $C_n\left(\coth x\right)$ ile gösterilmektedir ve

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n\coth x=C_n\left(\coth x\right)$$

eşitliğini sağlamaktadır (Boyadzhiev 2007). $\tanh x$ ve $\coth x$ fonksiyonlarının $n.$ mertebeden türevleri alındığında ortaya çıkan ifadenin her ikisinin de $C_n\left(z\right)$ tipinde polinomlar olmaları tesadüf değildir. Her iki fonksiyonun yüksek mertebeden türevleri aynı diferansiyel denklemi sağlamaktadır (Boyazdzhiev 2007). $C_n\left(\coth x\right)$ polinom dizisinin üstel üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$f\left(x,t\right)=\coth(x+t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(\coth x\right)\frac{t^n}{n!}.$$

Çünkü

$$\begin{aligned}\coth(x+t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n\coth\left(x+t\right)|_{t=0}\right]\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n\left(\coth(x+t)\right)|_{t=0}\right]\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(\coth x\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

$\operatorname{sech} x$ **fonksiyonunun türevsel polinomu:**

$\operatorname{sech} x$ fonksiyonunun hangi mertebeden türevi alınırsa alınsın her seferinde elde edilen ifade $\operatorname{sech} x$ ile $\tanh x$ fonksiyonuna bağlı bir polinomun çarpımı cinsinden yazılabilmektedir. Böylece $\forall\ n \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}$ için bir $\operatorname{sech} x\ S_n(\tanh x)$ polinomu elde edilmektedir. $\operatorname{sech} x$ fonksiyonunun türevsel polinomu, $S_n(\tanh x)$ ile gösterilmektedir ve

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \operatorname{sech} x = \operatorname{sech} x\ S_n(\tanh x)$$

eşitliğini sağlamaktadır (Boyadzhiev 2007). Dolayısıyla bu eşitlik $z \in \mathbb{C}$ için $S_n(z)$'nin $\tanh x$'teki değeri ile $\operatorname{sech} x$'in çarpımı olarak okunabilir Burada $S_n(z)$'nin mertebesi n'dir. Ayrıca $S_n(\tanh x)$ polinom dizisinin üstel üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$f(x,t) = \frac{\operatorname{sech}(x+t)}{\operatorname{sech} x} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\tanh x)\frac{t^n}{n!}.$$

Çünkü

$$\begin{aligned}
\operatorname{sech}(x+t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n \operatorname{sech}(x+t)\,|_{t=0}\right]\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\operatorname{sech}(x+t)\ \ S_n(\tanh(x+t))\right]|_{t=0}\frac{t^n}{n!} \\
&= \operatorname{sech} x \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\tanh x)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

$\operatorname{csch} x$ **fonksiyonunun türevsel polinomu:**

$\operatorname{csch} x$ fonksiyonunun hangi mertebeden türevi alınırsa alınsın her seferinde elde edilen ifade $\operatorname{csch} x$ ile $\coth x$'e bağlı bir polinomun çarpımı cinsinden yazılabilmektedir. Böylece $\forall\ n \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}$ için bir $\operatorname{csch} x\ S_n(\coth x)$ polinomu elde edilmektedir. $\operatorname{csch} x$ fonksiyonunun türevsel polinomu, $S_n(\coth x)$ ile gösterilmektedir ve

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \operatorname{csch} x = \operatorname{csch} x\ S_n(\coth x)$$

eşitliğini sağlamaktadır (Boyadzhiev 2007). $\operatorname{sech} x$ ve $\operatorname{csch} x$ fonksiyonlarının $n.$ mertebeden türevleri alındığında ortaya çıkan ifadenin her ikisinin de $S_n(z)$ tipinde polinomlar olmaları tesadüf değildir. Her iki fonksiyonun yüksek mertebeden türevleri aynı diferansiyel denklemi sağlamaktadır (Boyazdzhiev 2007). $S_n(\coth x)$ polinom dizisinin üstel üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$f(x,t) = \frac{\operatorname{csch}\ (x+t)}{\operatorname{csch} x} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\coth x)\frac{t^n}{n!}.$$

Çünkü

$$\begin{aligned}
\operatorname{csch}\ (x+t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\operatorname{csch}\ (x+t)\,|_{t=0}\right]\frac{t^{n}}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\operatorname{csch}\ (x+t)\ S_{n}\left(\coth(x+t)\right)\right]|_{t=0}\frac{t^{n}}{n!}\\
&= \operatorname{csch}x\sum_{n=0}^{\infty}S_{n}\left(\coth x\right)\frac{t^{n}}{n!}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 3.20. *xD operatörünün uygulama sahası oldukça geniştir. En çok bilinen örneklerden biri de xD operatörünün geometrik seriye uygulanmasıdır.*

$$(xD)^{n}\left(\frac{1}{1-x}\right)=(xD)^{n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}k^{n}x^{k}.$$

Ayrıca

$$(xD)^{n}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x}w_{n}\left(\frac{x}{1-x}\right)\quad (\ |x|<1 \textit{ için})$$

eşitliği de sağlanmaktadır (Boyadzhiev 2005). Bu özdeşliğin genel halini veren önerme aşağıdaki gibidir. Bu önerme sayesinde türevsel polinomlarla ilgili birçok önemli sonuç elde edilebilmektedir.

Önerme 3.21. *$a,b\in\mathbb{C}$ olmak üzere, $x^{b}\neq 1$ ve $n=0,1,2,...$ için*

$$(xD)^{n}\frac{x^{a}}{1-x^{b}}=\frac{x^{a}}{1-x^{b}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^{j}w_{j}\left(\frac{x^{b}}{1-x^{b}}\right)$$

sağlanır (Boyadzhiev 2007).

İspat $a,b\in\mathbb{C}$ ve $x^{b}\neq 1$ olsun.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{i=0}^{\infty}x^{i}\qquad (|x|<1 \text{ için})$$

eşitliğinde x yerine x^{b} yazılıp, eşitliğin her iki tarafı x^{a} ile çarpılırsa,

$$\frac{x^{a}}{1-x^{b}}=x^{a}\sum_{i=0}^{\infty}\left(x^{b}\right)^{i}=\sum_{i=0}^{\infty}x^{a+bi}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}(xD)^n \frac{x^a}{1-x^b} &= \sum_{i=0}^{\infty}(a+bi)^n x^{a+bi} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}(bi)^j\right)x^{a+bi} \\ &= x^a\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j i^j \left(x^b\right)^i \\ &= x^a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j\sum_{i=0}^{\infty} i^j \left(x^b\right)^i\end{aligned}$$

ve Örnek 3.20 yardımı ile

$$\begin{aligned}(xD)^n \frac{x^a}{1-x^b} &= x^a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j\frac{1}{1-x^b}w_j\left(\frac{x^b}{1-x^b}\right) \\ &= \frac{x^a}{1-x^b}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j w_j\left(\frac{x^b}{1-x^b}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.22. $a,b\in\mathbb{C}$ *olmak üzere,* $x^b\neq 1$ *ve* $n=0,1,2,...$ *için*

$$(xD)^n \frac{x^a}{1+x^b} = \frac{x^a}{1+x^b}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j w_j\left(\frac{-x^b}{1+x^b}\right)$$

eşitliği sağlanır (Boyadzhiev 2007).

İspat Bir öncekine benzer şekilde kanıtlanır. □

Önerme 3.23. C_n, $\coth\theta$ *fonksiyonunun türevsel polinomu olsun.* $n\in\mathbb{N}_0$ *için*

$$C_n(\coth\theta) = (-1)^n\frac{2^{n+1}}{1-e^{-2\theta}}w_n\left(\frac{e^{-2\theta}}{1-e^{-2\theta}}\right)$$

eşitliği sağlanır (Boyadzhiev 2007).

İspat

$$\coth\theta = \frac{e^\theta+e^{-\theta}}{e^\theta-e^{-\theta}} = \frac{2}{1-e^{-2\theta}}-1$$

olduğu bilinmektedir. $x=e^\theta$ olsun. O halde,

$$x\frac{d}{dx} = e^\theta\frac{d}{de^\theta} = \frac{d}{d\theta}$$

ve buradan

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n = \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} C_n\left(\coth\theta\right) &= \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n \coth\theta = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{2}{1-x^{-2}} - 1\right) \\ &= 2\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{1-x^{-2}}\right) \end{aligned}$$

ve Önerme 3.21 yardımı ile,

$$\begin{aligned} C_n\left(\coth\theta\right) &= 2\frac{1}{1-x^{-2}}\left(-2\right)^n w_n\left(\frac{x^{-2}}{1-x^{-2}}\right) \\ &= (-1)^n 2^{n+1}\frac{1}{1-x^{-2}} w_n\left(\frac{x^{-2}}{1-x^{-2}}\right) \\ &= (-1)^n \frac{2^{n+1}}{1-e^{-2\theta}} w_n\left(\frac{e^{-2\theta}}{1-e^{-2\theta}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.24. $\tan\theta$ *fonksiyonunun türevsel polinomu* P_n *için*

$$P_n\left(\tan\theta\right) = \frac{(2i)^{n+1}}{1+e^{2i\theta}} w_n\left(\frac{-e^{2i\theta}}{1+e^{2i\theta}}\right)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

İspat

$$\tan\theta = \frac{2i}{1+e^{2i\theta}} - i$$

şeklinde yazılabilmektedir (Knopf 2003). $x = e^\theta$ olsun. O halde,

$$x\frac{d}{dx} = e^\theta \frac{d}{de^\theta} = \frac{d}{d\theta}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} P_n\left(\tan\theta\right) &= \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n \tan\theta = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{2i}{1+x^{2i}} - i\right) \\ &= 2i\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{1+x^{2i}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Önerme 3.22 yardımı ile

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{1+x^{2i}}\right) = \frac{1}{1+x^{2i}}\left(2i\right)^n w_n\left(\frac{-x^{2i}}{1+x^{2i}}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} P_n(\tan\theta) &= \frac{(2i)^{n+1}}{1+x^{2i}} w_n\left(\frac{-x^{2i}}{1+x^{2i}}\right) \\ &= \frac{(2i)^{n+1}}{1+e^{2i\theta}} w_n\left(\frac{-e^{2i\theta}}{1+e^{2i\theta}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 3.25. *Önerme 3.24 'de özel olarak $\theta = 0$ alınırsa,*

$$\begin{aligned} P_n(\tan\theta) &= P_n(0) \\ &= \frac{(2i)^{n+1}}{2} w_n\left(\frac{-1}{2}\right) \\ &= 2^n i^{n+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} j! \frac{1}{2^j} \end{aligned}$$

elde edilir. Graham vd. (1996) tarafindan verilen özdeşlik yardımı ile,

$$P_n(0) = i^{n+1} \frac{2^{n+1}}{n+1} \left(1 - 2^{n+1}\right) B_{n+1}$$

yazılabilir. $n = 2k$ için,

$$\begin{aligned} P_{2k}(0) &= i^{2k+1} \frac{2^{2k+1}}{2k+1} \left(1 - 2^{2k+1}\right) B_{2k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir, çünkü $k \geq 1$ için $B_{2k+1} = 0$'dır. $n = 2k - 1$ için,

$$P_{2k-1}(0) = (-1)^k \frac{2^{2k}}{2k} \left(1 - 2^{2k}\right) B_{2k}$$

elde edilir (Boyadzhiev 2007).

Önerme 3.26. $\tan\theta$ *fonksiyonunun türevsel polinomu ile* $\tanh\theta$*'nın türevsel polinomu arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir (Boyadzhiev 2007):*

$$P_n(\tan\theta) = -i^{n+1} C_n(i \tan\theta).$$

İspat

$$\tan\theta = \frac{2i}{1+e^{2i\theta}} - i$$

şeklinde yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned} \tan\theta &= -i\left(-\frac{2}{1+e^{2i\theta}} + 1\right) \\ &= -i \tanh(i\theta) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned} P_n(\tan\theta) &= \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n \tan\theta = \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (-i\tanh(i\theta)) \\ &= -i\left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\tanh(i\theta)) \\ &= -i^{n+1}C_n(\tanh(i\theta)) \\ &= -i^{n+1}C_n(i\tan\theta) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 3.27. *Özel olarak $\theta = 0$ alınırsa,*

$$P_n(0) = -i^{n+1}C_n(0)$$

ve buradan

$$\begin{aligned} C_n(0) &= -\frac{1}{i^{n+1}}P_n(0) \\ &= -\frac{1}{i^{n+1}}\frac{(2i)^{n+1}}{2}w_n\left(\frac{-1}{2}\right) \\ &= -2^n w_n\left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $n = 2k$ için,

$$P_{2k}(0) = 0 = -i^{2k+1}C_{2k}(0)$$

olduğundan $C_{2k}(0) = 0$'dır. Benzer şekilde $n = 2k-1$ için,

$$P_{2k-1}(0) = (-1)^{k+1}C_{2k-1}(0)$$

ve buradan Sonuç 3.25 yardımı ile ,

$$\begin{aligned} C_{2k-1}(0) &= (-1)^{k+1}P_{2k-1}(0) \\ &= \frac{2^{2k}}{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k} \end{aligned}$$

elde edilir (Boyadzhiev 2007).

Önerme 3.28. *S_n, sech θ fonksiyonunun türevsel polinomu olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\text{sech }\theta) &= \text{sech }\theta\, S_n(\tanh\ \theta) \\ &= \frac{e^\theta}{1+e^{2\theta}}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^{j+1}w_j\left(\frac{-e^{2\theta}}{1+e^{2\theta}}\right) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır (Boyadzhiev 2007).

İspat

$$\text{sech } \theta = \frac{2e^{\theta}}{1+e^{2\theta}}$$

özdeşliğinden yararlanılacaktır. $x = e^{\theta}$ olsun. O halde,

$$x\frac{d}{dx} = e^{\theta}\frac{d}{de^{\theta}} = \frac{d}{d\theta}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\text{sech } \theta) &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \\ &= 2\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{x}{1+x^2}\right) \end{aligned}$$

ve buradan Önerme 3.22 yardımı ile

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\text{sech } \theta) &= 2\frac{x}{1+x^2}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^j w_j\left(\frac{-x^2}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{e^{\theta}}{1+e^{2\theta}}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^{j+1} w_j\left(\frac{-e^{2\theta}}{1+e^{2\theta}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} S_n(\tanh \theta) &= \frac{1}{\text{sech } \theta}\left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\text{sech } \theta) \\ &= \frac{1+e^{2\theta}}{2e^{\theta}}\frac{e^{\theta}}{1+e^{2\theta}}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^{j+1} w_j\left(\frac{-e^{2\theta}}{1+e^{2\theta}}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^{j} w_j\left(\frac{-e^{2\theta}}{1+e^{2\theta}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. □

Sonuç 3.29. *Önerme 3.28 'de özel olarak $\theta = 0$ alınırsa,*

$$S_n(0) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j w_j\left(-\frac{1}{2}\right)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafının n. Euler sayısına eşit olduğu kaynak taramasında bahsedilmişti. Böylece $S_n(0) = E_n$ olur. Euler sayıları ile Bernoulli sayıları arasındaki bir ilişki aşağıdaki gibidir (Boyadzhiev 2007):

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j w_j\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{2^{j+1}}{j+1}\left(1-2^{j+1}\right)B_{j+1}. \end{aligned}$$

Önerme 3.30. $S_n(\coth\ \theta)$, $\operatorname{csch}\theta$ *fonksiyonunun türevsel polinomu olmak üzere,*

$$S_n(\coth\ \theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^j w_j\left(\frac{e^{2\theta}}{1-e^{2\theta}}\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$\operatorname{csch}\theta = \frac{-2e^{\theta}}{1-e^{2\theta}}$$

olduğu bilinmektedir. $x = e^{\theta}$ olsun. O halde,

$$x\frac{d}{dx} = e^{\theta}\frac{d}{de^{\theta}} = \frac{d}{d\theta}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\theta}\right)^n(\operatorname{csch}\theta) &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)\\ &= -2\left(x\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{x}{1-x^2}\right)\end{aligned}$$

ve Önerme 3.21 yardımı ile

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\theta}\right)^n(\operatorname{csch}\theta) &= -2\frac{x}{1-x^2}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^j w_j\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\\ &= \frac{e^{\theta}}{e^{2\theta}-1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^{j+1} w_j\left(\frac{e^{2\theta}}{1-e^{2\theta}}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left(\frac{d}{d\theta}\right)^n(\operatorname{csch}\theta) = \operatorname{csch}\theta\ S_n(\coth\ \theta)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}S_n\ (\coth\theta) &= \frac{1}{\operatorname{csch}\theta}\left(\frac{d}{d\theta}\right)^n(\operatorname{csch}\theta)\\ &= \frac{1-e^{2\theta}}{-2e^{\theta}}\frac{e^{\theta}}{e^{2\theta}-1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^{j+1} w_j\left(\frac{e^{2\theta}}{1-e^{2\theta}}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^j w_j\left(\frac{e^{2\theta}}{1-e^{2\theta}}\right)\end{aligned}$$

bulunur. □

Önerme 3.31. $Q_n(\tan\theta)$, $\sec\theta$ *fonksiyonunun türevsel polinomu olmak üzere,*

$$Q_n(\tan\theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^j w_j\left(\frac{-e^{2\theta}}{1+e^{2\theta}}\right)$$

elde edilir.

İspat

$$\sec\ \theta = \frac{2e^{\theta}}{1+e^{2\theta}}$$

olduğu bilinmektedir. $x = e^{\theta}$ olsun. O halde,

$$x\frac{d}{dx} = e^{\theta}\frac{d}{de^{\theta}} = \frac{d}{d\theta}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\sec\ \theta) &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\\ &= 2\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{x}{1+x^2}\right)\end{aligned}$$

ve Önerme 3.22 yardımı ile

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\sec\ \theta) &= 2\frac{x}{1+x^2}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^j w_j\left(\frac{-x^2}{1+x^2}\right)\\ &= \frac{e^{\theta}}{1+e^{2\theta}}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^{j+1} w_j\left(\frac{-e^{2\theta}}{1+e^{2\theta}}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\sec\theta) = \sec\theta\, Q_n\left(\tan\theta\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}Q_n\ (\tan\theta) &= \frac{1}{\sec\ \theta}\left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\sec\ \theta)\\ &= \frac{1+e^{2\theta}}{2e^{\theta}}\frac{e^{\theta}}{1+e^{2\theta}}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^{j+1} w_j\left(\frac{-e^{2\theta}}{1+e^{2\theta}}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}2^{j} w_j\left(\frac{-e^{2\theta}}{1+e^{2\theta}}\right)\end{aligned}$$

bulunur. □

Önerme 3.32. *C_n, $\tanh\theta$ fonksiyonunun türevsel polinomu olmak üzere,*

$$C_n\left(\tanh\theta\right) = -\frac{2^{n+1}}{1+e^{2\theta}}w_n\left(\frac{-e^{2\theta}}{1+e^{2\theta}}\right)$$

elde edilir.

İspat

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1}$$

olduğu bilinmektedir. $x = e^{\theta}$ olsun. O halde,

$$x\frac{d}{dx} = e^{\theta}\frac{d}{de^{\theta}} = \frac{d}{d\theta}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\tanh\ \theta) &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \\ &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) \\ &= -2\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \end{aligned}$$

ve Önerme 3.22 yardımı ile

$$\begin{aligned} C_n(\tanh\theta) &= \left(\frac{d}{d\theta}\right)^n (\tanh\ \theta) \\ &= -2\frac{1}{1+x^2}2^n w_n\left(\frac{-x^2}{1+x^2}\right) \\ &= -\frac{2^{n+1}}{1+x^2}w_n\left(\frac{-x^2}{1+x^2}\right) \\ &= -\frac{2^{n+1}}{1+e^{2\theta}}w_n\left(\frac{-e^{2\theta}}{1+e^{2\theta}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.33. *f, bir tam fonksiyon olsun ve $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ile gösterilsin. $0 \le r < R$ olmak üzere $A = \{z;\ r < |z| < R\}$ ve g, A' da analitik bir fonksiyon olsun ve $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n x^n$ ile gösterilsin. Eğer $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f(n) x^n$ serisi A'da mutlak yakınsak ise*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f(n) x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} \frac{d^k g(x)}{dx^k} x^k$$

eşitliği $\forall\ x \in A$ için sağlanır (Boyazdzhiev 2005).

İspat Verilenlerden

$$(xD)^m g(x) = (xD)^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n n^m x^n$$

yazılabilir. Ayrıca Önerme 3.6 yardımı ile

$$(xD)^m g(x) = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} \frac{d^k g(x)}{dx^k} x^k$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n n^m x^n = \sum_{k=0}^{m} \begin{Bmatrix} m \\ k \end{Bmatrix} \frac{d^k g(x)}{dx^k} x^k$$

bulunur. Şimdi her iki tarafı $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere a_m ile çarpalım. Sonra da her $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için elde ettiğimiz eşitlikleri alt alta toplayalım. Buradan

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n n^m x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{k=0}^{m} \begin{Bmatrix} m \\ k \end{Bmatrix} \frac{d^k g(x)}{dx^k} x^k$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n n^m x^n &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_m c_n n^m x^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m n^m \right) c_n x^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f(n) x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu iki eşitlik yardımı ile istenen sonuç elde edilir. □

Şimdi Teorem 3.33 yardımı ile geometrik ve üstel polinomların nasıl elde edildiğine bakılacaktır. Yukarıdaki teoremde özel olarak $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ seçilirse, g analitik bir fonksiyon olduğundan c_n katsayıları $g(x)$'in Maclaurin açılımındaki $\frac{g^{(n)}(0)}{n!}$'e eşit olacaktır. Benzer şekilde f, bir tam fonksiyon olduğundan a_n katsayıları $f(x)$'in Maclaurin açılımındaki $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$'e eşit olacaktır. O halde son durumda m indisi n ile değiştirilirse eşitlik

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f(n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \frac{d^k g(x)}{dx^k} x^k$$

halini alır.

Eğer $g(x) = e^x$ seçilirse, $g^{(n)}(0) = 1$ ve $g^{(k)}(x) = e^x$ olduğundan bu eşitlik

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} x^n = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^k$$

halini alır. Buradaki $\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k$ ifadesinin n. üstel polinom olarak adlandırıldığından ve $\phi_n(x)$ ile gösterildiğinden ilk bölümde bahsedilmişti. Eğer $g(x) = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$ için) seçilirse, $g^{(n)}(0) = n!$ ve $g^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! f(n) x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} k! \left(\frac{x}{1-x} \right)^k$$

elde edilir. Ayrıca $w_n\left(x\right)=\sum\limits_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}k!x^k$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!f\left(n\right)x^n=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}w_n\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

elde edilir.

Önerme 3.34. *$z\in\mathbb{C}$ olmak üzere, üstel polinomlar ile geometrik polinomlar arasında aşağıdaki eşitlik sağlanır (Boyadzhiev 2005):*

$$w_n\left(z\right)=\int\limits_{0}^{\infty}\phi_n\left(z\lambda\right)e^{-\lambda}d\lambda.$$

İspat Kısmi integralleme yardımı ile gösterilebilir. □

Bu bölümde son olarak bulgular bölümünde yararlandığımız, fark operatörü ile ilgili en temel teoremlerden birine yer verilecektir. Fark operatörünün herhangi bir fonksiyona n defa uygulanması ile elde edilecek genel ifadeyi veren teorem aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.35. *$n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ olmak üzere, herhangi bir f fonksiyonu için*

$$\Delta^n f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^{n-i}\binom{n}{i}f\left(x+i\right)$$

eşitliği sağlanır (Abramowitz ve Stegun 1972; Quaintance ve Gould 2016).

İspat Tümevarımla yapılabilir. $n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ olsun. $n=1$ için

$$\Delta f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{1}\left(-1\right)^{1-i}\binom{1}{i}f\left(x+i\right)=f\left(x+1\right)-f\left(x\right)$$

olduğundan doğrudur. $n\in\mathbb{Z}^+$ için

$$\Delta^n f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^{n-i}\binom{n}{i}f\left(x+i\right)$$

olsun.

$$\Delta^{n+1} f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n+1}\left(-1\right)^{n-i+1}\binom{n+1}{i}f\left(x+i\right)$$

eşitliğinin sağlandığını göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1} f(x) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \left[f(x+i+1) - f(x+i) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i-1} f(x+i) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i} f(x+i) \\
&= (-1)^{n+1} f(x) + \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i+1} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] f(x+i) \right) \\
&+ f(x+n+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \binom{n+1}{i} f(x+i)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, çalışmada elde edilen önerme, teorem ve sonuçlar yer almaktadır.

Teorem 4.36. *Türevlenebilir herhangi f ve g fonksiyonlarının çarpımına n defa xD operatörü uygulandığında*

$$(xD)^n f(x) g(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k} \left\{ {n \atop k} \right\} \binom{k}{i} \frac{d^i f(x)}{dx^i} \frac{d^{k-i} g(x)}{dx^{k-i}} x^k$$

elde edilir.

İspat n üzerinden tümevarımla görülür. □

Not: Bu teoremde $f(x) = 1$ alınırsa Önerme 3.6 bir sonuç olarak ortaya çıkar.

Teorem 4.37. $n \in \mathbb{Z}^+$ *için*

$$\Delta^n (xf(x)) = x\, \Delta^n f(x) + n\, \Delta^{n-1} f(x+1)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

İspat n üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $n = 1$ için

$$\begin{aligned} \Delta(xf(x)) &= (x+1) f(x+1) - xf(x) \\ &= x[f(x+1) - f(x)] + f(x+1) \end{aligned}$$

olduğundan doğrudur. $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\Delta^n (xf(x)) = x\, \Delta^n f(x) + n\, \Delta^{n-1} f(x+1)$$

olsun.

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1}(xf(x)) &= \Delta(\Delta^n (xf(x))) \\ &= \Delta\big(x\, \Delta^n f(x) + n\, \Delta^{n-1} f(x+1)\big) \\ &= \Delta(x\, \Delta^n f(x)) + n\Delta^n f(x+1) \\ &= (x+1)\, \Delta^n f(x+1) - x\, \Delta^n f(x) + n\Delta^n f(x+1) \\ &= x[\Delta^n f(x+1) - \Delta^n f(x)] + (n+1)\, \Delta^n f(x+1) \\ &= x\Delta^{n+1} f(x) + (n+1)\, \Delta^n f(x+1) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Aşağıdaki önerme fark operatörünün harmonik sayılarla ilişkilerinin kurulması bakımından önemlidir. Burada indis karmaşası yaşanmaması açısından operatörler k. mertebeden uygulanacaktır.

Sonuç 4.38. *$f(n) = H_n$ için,*

$$\Delta^k H_n = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(n+1)_k}$$

elde edilir.

İspat k üzerinden tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $f(n) = H_n$ olsun. $k = 1$ için

$$\Delta H_n = \frac{1}{n+1}$$

olduğundan doğrudur. $k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\Delta^k H_n = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(n+1)_k}$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\Delta^{k+1} H_n &= \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(n+2)_k} - \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(n+1)_k} \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)! \left[\frac{1}{(n+2)_k} - \frac{1}{(n+1)_k}\right] \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(n+1)_{k+1}}(-k) \\
&= \frac{(-1)^{k+2} k!}{(n+1)_{k+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.39. *$k \geq 2$ tamsayısı için*

$$\Delta^k (nH_n) = \frac{(-1)^k (k-2)!}{(n+1)_{k-1}}$$

elde edilir.

İspat $f(n)$ yerine H_n alınırsa, Teorem 4.37 yardımı ile

$$\begin{aligned}
\Delta^k (nH_n) &= n\, \Delta^k H_n + k\, \Delta^{k-1} H_{n+1} \\
&= n\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(n+1)_k} + k\frac{(-1)^k (k-2)!}{(n+2)_{k-1}} \\
&= \frac{(-1)^k (k-2)!}{(n+1)_{k-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.40. $k \geq 2$ *tamsayısı için*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (n+i)\, H_{n+i} = \frac{(-1)^k (k-2)!}{(n+1)_{k-1}}$$

eşitliği sağlanır.

İspat Sonuç 3.35 ve Teorem 4.39 yardımı ile istenen sonuç elde edilir. □

Sonuç 4.41. $k \geq 2$ *tamsayısı için*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i}\, i\, H_i = \frac{(-1)^k}{k-1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat Sonuç 4.40 eşitliğinde özel olarak $n = 0$ alınırsa istenen sonuç elde edilir. □

Sonuç 4.42. $k \geq 2$ *tamsayısı için*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} H_{n+i} = \frac{(k-1)!}{(n+1)_k}$$

elde edilir.

İspat $f(n)$ yerine H_n alınırsa Teorem 3.35 yardımı ile

$$\Delta^k H_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} H_{n+i}$$

elde edilir. Diğer yandan Sonuç 4.38 yardımı ile

$$\Delta^k H_n = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{(n+1)_k}$$

elde edilir. O halde iki eşitlikten

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} H_{n+i} = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{(n+1)_k}$$

ve buradan da

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} H_{n+i} = \frac{(k-1)!}{(n+1)_k}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.43. *$k \in \mathbb{Z}^+$ için*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} H_i = \frac{1}{k}$$

elde edilir.

İspat Sonuç 4.42 'de $n = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} H_i &= \frac{(k-1)!}{(1)_k} \\ &= \frac{(k-1)!}{k!} \\ &= \frac{1}{k}\end{aligned}$$

elde edilir. □

Not: Riordan (1964; 1979) tarafından verilen

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} b_i \Leftrightarrow b_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} \binom{k}{i} a_i$$

önermesinde $a_k = H_k$ ve $b_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{k} & k \in \mathbb{Z}^+ \\ 0, & k = 0 \end{cases}$ alınırsa,

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} \binom{k}{i} H_i = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

eşitliği doğru olduğundan (Bknz. Sonuç 4.43) ve $a_0 = H_0 = 0 = b_0$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} \frac{1}{i} = H_k$$

bilinen özdeşliği elde edilir.

Sonuç 4.44. *Harmonik sayıların alterne binom katsayılı toplamı için,*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n+1}{i+1} H_i = \begin{cases} 2H_n, & n \text{ çift} \\ 0, & n \text{ tek} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat Sonuç 4.43 'de

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} H_i = \frac{1}{k}$$

elde edilmişti. Eşitliğin her iki tarafından 1'den n'ye kadar toplam alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}H_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=H_n$$

elde edilir. Burada $0\leq i\leq k\leq n$ olduğundan indis değişikliği ile

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}H_i\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}=H_n$$

elde edilir.

$$\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}=\binom{n+1}{i+1}$$

eşitliği yardımı ile (Graham vd. 1994)

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n+1}{i+1}H_i=H_n$$

elde edilir.
Not: Bu eşitlik aynı zamanda Wang (2010)'ın çalışmasında Riordan sıraları yöntemi ile elde edilmiştir. Eşitlik düzenlendiğinde istenilen sonuç elde edilir. □

$h_n^{(r)}$ hiperharmonik sayısı alt indisin bir fonksiyonu olarak göz önüne alındığında aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.45. $f(n)=h_n^{(r)}$ *için,*

$$\Delta^k h_n^{(r)}=h_{n+k}^{(r-k)}$$

elde edilir.

İspat k üzerinden tümevarım ile görülür. □

Eğer $h_n^{(r)}$ hiperharmonik sayısı üst indisin bir fonksiyonu olarak göz önüne alındığında ise aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.46. $f(r)=h_n^{(r)}$ *için,*

$$\Delta^k h_n^{(r)}=h_{n-k}^{(r+k)}$$

elde edilir.

İspat r üzerinden tümevarım ile görülür. □

Önerme 4.47. $r,k\in\mathbb{Z}^+$ *olmak üzere*

$$h_{n-k}^{(r+k)}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}h_n^{(r+i)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat Teorem 3.35 ve Önerme 4.46 yardımı ile istenilen sonuç elde edilir. □

Önerme 4.48. *Hiperharmonik sayılar, katsayıları alterne binom sayıları olacak biçimde birbirleri cinsinden ifade edilebilirler. Yani*

$$h_{n+k}^{(r-k)} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} h_{n+i}^{(r)}$$

olur.

İspat Teorem 3.35 ve Önerme 4.45 yardımı ile

$$\Delta^k h_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} h_{n+i}^{(r)} = h_{n+k}^{(r-k)}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.49. $k \in \mathbb{Z}^+$ *için mertebesi* $-k$ *olan* $(n+k)$ *. hiperharmonik sayı*

$$h_{n+k}^{(-k)} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} \binom{k}{i} \frac{1}{n+i}$$

eşitliği ile elde edilir.

İspat Önerme 4.48 'te özel olarak $r = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} h_{n+k}^{(-k)} &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} h_{n+i}^{(0)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{1}{n+i} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Not: Bu önermede elde edilen $h_{n+k}^{(-k)}$ sayılarına, negatif mertebeli hiperharmonik sayılar adını vereceğiz. Bu sayılar da

$$h_{n+k}^{(r)} = \sum_{j=0}^{n+k} h_j^{(r-1)}$$

bağıntısını sağlarlar.

Önerme 4.50. *Fark operatörü* $\sinh x$ *ve* $\cosh x$ *fonksiyonlarına uygulandığında*

$$\Delta^k \sinh x = \frac{(e-1)^k}{2} \frac{e^{2x+k} + (-1)^{k+1}}{e^{x+k}}$$

ve

$$\Delta^k \cosh x = \frac{(e-1)^k}{2} \frac{e^{2x+k} + (-1)^{k}}{e^{x+k}}$$

elde edilir.

İspat k üzerinden tümevarım ile görülür. □

Sonuç 4.51. $\sinh x$ *ve* $\cosh x$ *fonksiyonları için sırasıyla*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \sinh (x+i) = \frac{(e-1)^k}{2} \frac{e^{2x+k} + (-1)^{k+1}}{e^{x+k}}$$

ve

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cosh (x+i) = \frac{(e-1)^k}{2} \frac{e^{2x+k} + (-1)^{k}}{e^{x+k}}$$

eşitlikleri elde edilir.

İspat Teorem 3.35 ve Önerme 4.50 yardımı ile istenilen sonuç elde edilir. □

Önerme 4.52. *Digamma fonksiyonuna* k*. mertebeden fark operatörü uygulandığında*

$$\Delta^k \psi (x) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{(x)_k}$$

elde edilir.

İspat k üzerinden tümevarımla görülür. □

Sonuç 4.53. *Gamma fonksiyonu için*

$$\frac{(k-1)!}{(x)_k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \psi (x+i)$$

eşitliği sağlanır.

İspat Teorem 3.35 ve Önerme 4.52 yardımı ile görülür. □

Not: Sonuç 4.53 'de özel olarak $k=1$ alınırsa,

$$\psi (x+1) = \psi (x) + \frac{1}{x}$$

bilinen özdeşliği elde edilir.

Önerme 4.54. $n \geq 0$ *olmak üzere*

$$\Delta^k F_n = F_{n-k}$$

elde edilir.

İspat k üzerinden tümevarımla yapılabilir. □

Sonuç 4.55. *Negatif indisli Fibonacci sayıları*

$$F_{-k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_i$$

olarak elde edilir.

İspat Teorem 3.35 yardımı ile

$$\Delta^k F_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_{n+i}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca Önerme 4.54 yardımı ile

$$F_{n-k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_{n+i}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $n = 0$ için,

$$F_{-k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_i$$

elde edilir. □

Not: Eşitliğin sağ tarafı $k > 0$ için anlamlı olduğundan Fibonacci sayılarını negatif indisler için genelleştirebildik. Örneğin $F_{-1} = 1$, $F_{-2} = -1$, $F_{-3} = 2$'dir.

Sonuç 4.56. *Negatif indisli Fibonacci sayıları, Fibonacci sayılarının bilinen yineleme bağıntısını sağlar. Yani $\forall\, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için*

$$F_{-k} = F_{-k-1} + F_{-k-2}$$

sağlanır.

İspat Sonuç 4.55 yardımı ile

$$\begin{aligned}
F_{-k-1} + F_{-k-2} &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k+1-i} \binom{k+1}{i} F_i + \sum_{i=0}^{k+2} (-1)^{k+2-i} \binom{k+2}{i} F_i \\
&= F_{k+2} + \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{k-i} \left[\binom{k+2}{i} - \binom{k+1}{i} \right] F_i \\
&= F_{k+2} + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k-i} \binom{k+1}{i-1} F_i \\
&= \sum_{i=1}^{k+2} (-1)^{k-i} \binom{k+1}{i-1} F_i
\end{aligned}$$

yazılabilir ve

$$\binom{k+1}{i-1} = \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i-2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
F_{-k-1} + F_{-k-2} &= \sum_{i=1}^{k+2} (-1)^{k-i} \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i-2} \right] F_i \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k-i} \binom{k}{i-1} F_i + \sum_{i=2}^{k+2} (-1)^{k-i} \binom{k}{i-2} F_i \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i+1} \binom{k}{i} F_{i+1} + \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i+2} \binom{k}{i} F_{i+2} \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} [F_{i+2} - F_{i+1}] \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_i \\
&= F_{-k}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Not: Sonuç olarak $\forall k \in \mathbb{Z}$ için,

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$$

eşitliği sağlanır ve buradaki F_k sayıları Fibonacci sayılarının bir genelleştirmesidir. Bu sonuç yardımı ile elde edilen ilk birkaç negatif indisli Fibonacci sayısının aslında pozitif indisli karşılıklarının alterneleri olduğu göze çarpmaktadır. Buradan hareketle aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 4.57. *Negatif indisli Fibonacci sayıları ile pozitif indisli Fibonacci sayıları arasında aşağıdaki eşitlik geçerlidir.*

$$F_{-k} = (-1)^{k+1} F_k$$

İspat k üzerinden tümevarım ile görülebilir.

$$F_{-k} = (-1)^{k+1} F_k$$

ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Sonuç 4.56 'de

$$F_{-k} = F_{-k-1} + F_{-k-2}$$

olduğu gösterilmişti. O halde

$$F_{-k+1} = F_{-k} + F_{-k-1}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} F_{-k-1} &= F_{-k+1} - F_{-k} \\ &= (-1)^k F_{k-1} + (-1)^k F_k \\ &= (-1)^k [F_{k-1} + F_k] \\ &= (-1)^k F_{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Not: Bu sonuç bazı kaynaklarda- örneğin Bera (2017) ve Dunlap (1997)- negatif indisli Fibonacci sayılarının tanımlanmasında kullanılmaktadır.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışması, konu kapsamı itibarı ile analiz ve fonksiyonlar teorisi, sayılar teorisi, ayrık matematik ve kombinatorik alanları ile ilişkilidir. Özelde ise yüzlerce yıldır üzerinde çalışılan klasik konular ile güncel kavramlar arasında bir geçiş yapmaktadır. Bu bakımdan farklı matematik altyapısına sahip okuyucular için yararlı olacağı düşünülmektedir.

Çalışmada temel olarak üç çeşit operatör, birkaç özel sayı, polinom ve fonksiyon ailesi üzerinde uygulanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu operatörler ile özel sayı, polinom ve fonksiyon aileleri, kullanım alanı en yaygın olanlardan seçilmişlerdir. Ancak operatörler teorisi başlı başına bir çalışma sahasıdır. Doğrusal cebir, fonksiyonel analiz, bilgisayar bilimleri gibi alanlarda birçok farklı operatör üzerine çalışılmaktadır. Diğer taraftan tez kapsamında yer vermediğimiz daha pek çok önemli sayı ve polinom ailesi literatürde yer almaktadır. Böylelikle bu tez çalışmasının, hem farklı operatörlerin hem de başka sayı, polinom ve fonksiyon ailelerinin çalışıldığı yeni araştırmalara öncülük etme potansiyeli söz konusu olmaktadır.

Materyal ve metot bölümünde trigonometrik fonksiyonlar ile üstel ve logaritmik fonksiyonları kapsayan seriler üzerinde incelemeler yapılmıştır. Hem bu serilerin hem de sonuç olarak elde edilen açık ve kapalı formüllerin analizi birçok kullanışlı formül ortaya çıkarmıştır. Benzer tekniklerin gelecekte daha başka fonksiyonların analizinde kullanılması mümkün görünmektedir.

Bulgular ve tartışma bölümünde özellikle fark operatörü yardımıyla yeni sonuçlar elde edilmiş ve bazı mevcut sonuçlara farklı kanıtlar verilmiştir. Ayrıca negatif mertebeli hiperharmonik sayıların ve negatif indisli Fibonacci sayılarının tanımlanması tezin kazanımlarındandır.

Referans alınan kaynaklar göz önüne alındığında 18. yüzyıldan günümüze kadar uzanan geniş bir yelpaze söz konusudur. Bu çalışmaların incelenmesi sırasında tez konusunun tarihsel sürecini de gözden geçirme fırsatı ortaya çıkmıştır. Bu tez çalışması sonrasında edinilen kültürün daha da derinleştirilerek devam ettirilmesi hedeflenmektedir.

6. KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series:55, 10th Printing, Washington, 1046 p.

Apostol, T. M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York, 338 p.

Ayoub, R. 1974. Euler and the Zeta function. *American Mathematical Monthly*, 81(10): 1067-1086.

Bell, E. T. 1934a. Exponential polynomials. *Annals of Mathematics*, 35(2): 258–277.

Bell, E. T. 1934b. Exponential numbers. *American Mathematical Monthly* 41(7): 411-419.

Benjamin, A.T., Gaebler, D. and Gaebler, R. 2003. A combinatorial approach to hyperharmonic numbers. *Integers:The Electronic Journal of Combinatorial. Number Theory,* 3: 1–9.

Benjamin, A.T. and Quinn, J. J. 2003. Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof. MAA Press, 208 p.

Bera, S. 2017. Fibonacci and Lucas identities with the coefficients in arithmetic progression. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)*, 13(1): 57-63

Berndt, B.C. 1985. Ramanujan's Notebooks Part I. Springer, New York.

Borwein, J.M. and Girgensohn, R. 1996. Evaluation of triple Euler sums. *Electronic Journal of Combinatorics*, 3: 1-27.

Bowman, D. and Bradley, D.M. 2001. Multiple polylogarithms: A brief survey. *Contemporary Mathematics*. 291:71-92.

Boyadzhiev, K. N. 2005. A series transformation formula and related polynomials. *International Journal of Mathematics and Mathematical Science,* 23: 3849-3866.

Boyadzhiev, K. 2007. Derivative polynomials for $tanh$, tan, $sech$ and sec in explicit form. *Fibonacci Quarterly*, 45(4): 291-303.

Boyadzhiev, K. N. 2009. Exponential polynomials, Stirling numbers and evaluation of some gamma integrals. *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2009, ID168672: 1-18.

Cereceda, J. L. 2015. An introduction to hyperharmonic numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(3): 461-469.

Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. Revised and Enlarged Edition, D. Riedel Publishing Company, Dordrecht/Boston, 343 p.

Conway, J.H. and Guy, R.K. 1996. The Book of Numbers. Springer-Verlag, New York. 310 p.

Dil, A., Kurt, V. and Cenkci, M. 2007. Algorithms for Bernoulli and allied polynomials. *Journal of Integer Sequences,* Vol. 10, Article 07.5.4: 1-14.

Dil, A. and Mezo, I. 2008. A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers. *Applied Mathematics and Computation,* 206(2): 942–951.

Dil, A. and Kurt, V. 2011. Polynomials related to harmonic numbers and evaluation of harmonic number series II. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 5(2): 212-229.

Dil, A. and Kurt, V. 2012. Polynomials related to harmonic numbers and evaluation of harmonic number series I. *Integers*, 12: 1-18.

Dil, A. and Boyadzhiev, K. N. 2015. Euler sums of hyperharmonic numbers. *Journal of Number Theory*, 147: 490-498.

Dunlap, R. A. 1997. The Golden Ratio and Fibonacci Number. World Scientific Publishing Co. Ptc. Ltd, Singapore, 172 p.

Edwards, H. M. 1974. Riemann's Zeta Function. New York: Dover, 315 p.

Euler, L. 1913. De Transformatione Serierum. *Opera Omnia/Series Prima*, Vol. X, Teubner.

Flajolet, P. and Salvy, B. 1998. Euler sums and Contour integral representations. *Experimental Mathematics*, 7(1): 15-35.

Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. 1993. Concrete Mathematics. Addison Wesley, 657 p.

Grunert, J. A. 1843. Uber die summerung der reihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 25: 240-279.

Hoffman, M. E. 1995. Derivative polynomials for tangent and secant, *The American Mathematical Monthly*, 102(1): 23-30.

Ireland, K. and Rosen, M. 1990. A Classical Introduction to Modern Number Theory. Second Edition, Springer-Verlag, New York. 389 p.

Jordan, C. 1965. Calculus of Finite Differences. Third Edition, Chelsea Publishing Company, New York, 652 p.

Kamano, K. 2011. Dirichlet series associated with hyperharmonic numbers. *Memoirs of the Osaka Institute of Technology*, 56: 11-15.

Knopf, P. M. 2003. The Operator $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$ and its applications to series. *Mat. Mag.*, 76(5): 364-371.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. NY: Wiley, New York, 672 p.

Mezo, I. and Dil, A. 2009. Euler- Seidel method for certain combinatorial numbers and a new characterization of Fibonacci sequence. *Central European Journal of Mathematics*, 7(2): 310-321.

Mezo, I. and Dil, A. 2009. Hyperharmonic series involving Hurwitz zeta function. *Journal of Number Theory*, 130(2010): 360-369.

Mezo, I. 2014. Nonlinear Euler sums. *Pacific Journal of Mathematics,* 272(1): 201-226.

Niven, I., Zuckerman, H. and Montgomery, H. 1991. An Introduction to the Theory of Numbers. 5th Ed., John Wiley, New York. 529 p.

Oldham, K., Mayland, J. and Spanier J. 2009. An Atlas of Functions, Springer, 748 p.

Paule, P., Schneider, C. 2003. Computer proofs of a new family of harmonic number İdentities. *Advances in Applied Mathematics*, 31: 359-378.

Quaintance, J., Gould, H.W. 2016. Combinatorial Identities for Stirling Numbers. World Scientific, Singapore, 260 p.

Riordan, J. 1958. An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley&Sons Inc., New York, 244 p.

Riordan J. 1964. Inverse relations and combinatorial identities. *The American Mathematical Monthly*, 71(5): 485-498.

Riordan J. 1979. Combinatorial Identities. R. Krieger, 256 p.

Schwatt, I. J. 1962. An Introduction to the Operations with Series. Chelsea Publishing Company, New York, 287 p.

Shen, L. C. 1995. Remarks on some integrals and series involving the Stirling numbers and $\zeta(n)$. *Transactions of the American Mathematical Society,* 347: 1391–1399.

Sprugnoli, R. 2014. An Introduction to Mathematical Methods in Combinatorics. Create Space Independent Publishing Platform, 100 p.

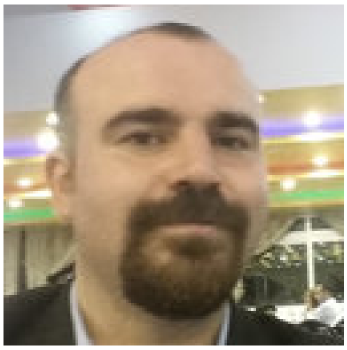
Stanley, R. P. 2015. Catalan Numbers. Cambridge University Press, 215 p.

Tanny, S. M. 1974. On some numbers related to the Bell numbers. *Canadian Mathematical Bulletin*, 17(5): 733-738.

Wang, W. 2010. Riordan arrays and harmonic number identities. *Computers and Mathematics with Application*s, 60: 1494-1509.

ÖZGEÇMİŞ

ERKAN MUNİROĞLU
munirogluerkan@gmail.com



ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2014-2017	Ankara Üniversitesi SBF, Maliye (Kamu Ekonomisi), Ankara
Lisans 2003-2007	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi 2015-Devam Ediyor	Ankara Üniversitesi SBF, Maliye (Kamu Ekonomisi) Bölümü, Ankara
Araştırma Görevlisi 2014-2015	Gaziantep Üniversitesi İİBF, Maliye Bölümü, Gaziantep

ESERLER