T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

q-FIBONACCI SAYILARININ BAZI ARİTMETİK ÖZELLİKLERİ

Pınar AYTAÇ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2018

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

q-FIBONACCI SAYILARININ BAZI ARİTMETİK ÖZELLİKLERİ

Pınar AYTAÇ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2018

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q-FIBONACCI SAYILARININ BAZI ARİTMETİK ÖZELLİKLERİ

Pınar AYTAÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafindan ... nolu proje ile desteklenmiştir.

TEMMUZ 2018

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q-FIBONACCI SAYILARININ BAZI ARİTMETİK ÖZELLİKLERİ

Pınar AYTAÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez ...../...../2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet CENKCİ (Danışman)

Doç. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ

Dr. Öğr. Üyesi Ayhan DİL

ÖZET

q-FIBONACCI SAYILARININ BAZI ARİTMETİK ÖZELLİKLERİ

Pınar AYTAÇ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

Temmuz 2018, 65 sayfa

Bu çalışmada, Fibonacci sayıları ile q-Fibonacci sayıları olarak adlandırılan ve Schur tarafından Rogers-Ramanujan Özdeşliklerinin kanıtında kullanılan bir polinomlar dizisi arasındaki ilişki ele alınmıştır. q-Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonları, sağladığı bazı temel bağıntılar ve bazı bölünebilme özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca, q-Fibonacci sayılarının bir genellemesi çalışılmış ve karşılık gelen bölünebilme özellikleri elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Fibonacci sayıları, q-Fibonacci sayıları, Rogers-Ramanujan Özdeşlikleri, Schur polinomları.

JÜRİ: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Doç.Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ
Dr. Öğr. Üyesi Ayhan DİL

ABSTRACT

SOME ARITHMETIC PROPERTIES OF q-FIBONACCI NUMBERS

Pınar AYTAÇ

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
July 2018, 65 pages

We study the relationship between the Fibonacci numbers and a sequence of polynomials, called as the q-Fibonacci numbers, used by Schur in the proof of the Rogers-Ramanujan identities. We investigate generating functions, some basic and arithmetic properties of q-Fibonacci numbers. We also consider a generalization of the q-Fibonacci numbers, and study some arithmetical properties.

KEYWORDS: Fibonacci numbers, q-Fibonacci numbers, Rogers-Ramanujan identities, Schur polynomials.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Assoc. Prof. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ
Asst. Prof. Dr. Ayhan DİL

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taraması ile Bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Bu çalışmanın temel kavramları olan Fibonacci sayıları, q-serileri ve Rogers-Ramanujan Özdeşlikleri, Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taraması bölümünde tanıtılmış ve bunların genel özellikleri ile özel durumları verilmiştir.

Bulgular bölümü iki ana başlık altında toplanmıştır. İlk olarak q-Fibonacci sayılarının tanımı ve q-Fibonacci sayıları kullanılarak Rogers-Ramanujan Özdeşliklerinin kanıtları verilmiştir. Daha sonra q-Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonları ve sağladıkları temel özellikler, özel olarak bazı bölünebilme özellikleri ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasının, çok sayıda uygulamaları ve beklenmedik alanlarda ortaya çıkışları ile amatör ve profesyonel matematikçilerin ilgisini yüzyıllar boyunca çekmiş ve çekmeye devam etmekte olan Fibonacci sayılarının q-serileri teorisinde aldığı yeri gösteren güzel bir örnek olacağı inancındayız.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Prof. Dr. Mehmet CENKCİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans / Doktora Tezi olarak sunduğum "q-FIBONACCI SAYILARININ BAZI ARİTMETİK ÖZELLİKLERİ " adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

...../...../2018

Pınar AYTAÇ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

F_n	: n. Fibonacci sayısı
$p\left(n\right)$	: Parçalanış fonksiyonu
$\left(a;q\right)_n$	: q-çarpım
$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$	: q-binom katsayısı
$F_n\left(q\right)$	: q-Fibonacci sayısı
$\widetilde{F}_n\left(q\right)$	: q-Fibonacci sayısı
$\phi\left(n\right)$	: Euler ϕ-fonksiyonu
$\left(\frac{a}{p}\right)$	: Legendre sembolü
$\left[n\right]_q$	: q-tam sayı

1. GİRİŞ

Tam sayı dizilerinin en önemlilerinden biri olan Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ ile gösterilir. Fibonacci dizisi, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geqslant 2$ tam sayıları için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin terimleri olan F_n sayılarına Fibonacci sayıları denir. Fibonacci sayıları, çok sayıda uygulamaları ve beklenmedik alanlarda ortaya çıkışları ile amatör ve profesyonel matematikçilerin ilgisini yüzyıllar boyunca çekmiş ve çekmeye devam etmektedir.

Fibonacci sayılarının ortaya çıktığı alanlardan birisi parçalanış teorisidir. Bir pozitif n tam sayısının pozitif tam sayıların toplamı şeklinde yazılabilme sayısına n sayısının parçalanışı denir ve $p(n)$ ile gösterilir. Bu yazılışta sıra önemlidir, farklı sıradaki toplamlar aynı kabul edilir. Parçalanış fonksiyonu q-serileri teorisi ile yakın bir ilişkiye sahiptir.

Genel olarak bir q-serisi, $(a;q)_n$ şeklinde olan terimlerin toplamıdır. Burada $(a;q)_n$, negatif olmayan bir n tam sayısı, karmaşık a ve q sayıları için

$$(a)_n = (a;q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - aq^j\right)$$

çarpımı olarak tanımlanır. $n = 0$ ise söz konusu çarpım bir boş çarpımdır ve 1 değerini alır. Herhangi a ve q karmaşık sayıları için $|q| < 1$ olmak üzere

$$(a)_\infty = (a;q)_\infty = \lim_{n\to\infty} (a;q)_n = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - aq^j\right)$$

olarak tanımlanır.

q-serilerine örnekler olarak meşhur

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q)_n} = \frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q)_n} = \frac{1}{(q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty}$$

Rogers-Ramanujan Özdeşlikleri verilebilir. Andrews, 1970 yılında Rogers-Ramanujan Özdeşliklerinin aşağıdaki sonuçtan elde edilebileceğini göstermiştir.

Teorem 1.1. (Andrews 1970) *$\alpha = 0$ veya $\alpha = -1$ olmak üzere*

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2-\alpha j} \begin{bmatrix} n+1+\alpha-j \\ j \end{bmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}+2\alpha j} \begin{bmatrix} n+1 \\ \left\lfloor \frac{n+1-5j}{2} \right\rfloor - \alpha \end{bmatrix}$$

olur. Burada $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$, $n \geqslant m \geqslant 0$ *ise*

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^{m} \frac{1-q^{n-j+1}}{1-q^{j}}$$

ve diğer durumlarda

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = 0$$

olarak tanımlanan q*-binom katsayısı ve* $\lfloor x \rfloor$, x *sayısından büyük olmayan en büyük tam sayıdır.*

Yukarıdaki sonuçta yer alan toplamlar aslında sonlu toplamlardır ve Schur polinomları olarak adlandırılır. Schur polinomları özel olarak

$$F_{n+1}(q) = \sum_{0 \leqslant 2j \leqslant n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}$$

ve

$$\widetilde{F}_{n+1}(q) = \sum_{0 \leqslant 2j \leqslant n} q^{j^2+j} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu polinomlar, sırasıyla,

$$F_n(q) = \begin{cases} 0, & n = 0 \text{ ise;} \\ 1, & n = 1 \text{ ise;} \\ F_{n-1}(q) + q^{n-2} F_{n-2}(q), & n > 1 \text{ ise;} \end{cases}$$

ve

$$\widetilde{F}_n(q) = \begin{cases} 0, & n = 0 \text{ ise;} \\ 1, & n = 1 \text{ ise;} \\ \widetilde{F}_{n-1}(q) + q^{n-1} \widetilde{F}_{n-2}(q), & n > 1 \text{ ise;} \end{cases}$$

indirgeme bağıntıları ile tanımlanmıştır (Schur 1917).

$$F_n(1) = \widetilde{F}_n(1) = F_n$$

olduğundan $F_n(q)$ ve $\widetilde{F}_n(q)$ polinomları Fibonacci sayılarının genellemeleridir ve q-Fibonacci sayıları olarak adlandırılır.

Bu tez çalışmasında, Fibonacci sayıları ile q-Fibonacci sayıları olarak adlandırılan ve Schur tarafından Rogers-Ramanujan Özdeşliklerinin kanıtında kullanılan bir polinomlar dizisi arasındaki ilişkiler ele alınmıştır. q-Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonları, sağladığı bazı temel bağıntılar ve bölünebilme özellikleri ifade edilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Sayılar Teorisinden Temel Kavramlar

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan sayılar teorisinden bazı temel kavramlar özetlenecektir.

Teorem 2.1. (Bölme algoritması) *Verilen a ve b, $b > 0$ tam sayıları için*

$$a = qb + r,\ 0 \leqslant r < b$$

olacak şekilde tek türlü belirli q ile r tam sayıları vardır. q ile r tam sayılarına sırasıyla a sayısının b sayına bölümünde bölen ve kalan denir.

Bölme algoritmasındaki önemli durumlardan biri kalan terimin sıfır olmasıdır.

Tanım 2.2. *$a \neq 0$ ve b tam sayıları için $b = ac$ olacak şekilde bir c tam sayısı varsa b tam sayısı a tam sayısı ile bölünebilir denir ve bu durum $a|b$ ile gösterilir. b tam sayısı a tam sayısı ile bölünemiyorsa bu durum $a \nmid b$ ile gösterilir.*

$a|b$ bölünebilme özelliği için farklı söylemler mevcuttur. $a|b$ ise a sayısı b sayısının bir böleni, a sayısı b sayısının bir çarpanı veya b sayısı a sayısının bir katı olarak adlandırılır.

Herhangi a ile b tam sayıları için $d|a$ ve $d|b$ özelliğinde olan d tam sayısına a ile b tam sayılarının bir ortak böleni denir. 1 sayısı her tam sayının bir böleni olduğundan 1 sayısı a ile b tam sayılarının bir ortak bölenidir. Dolayısıyla, a ile b tam sayılarının pozitif ortak bölenlerinin kümesi boştan faklıdır. Diğer taraftan, her tam sayı sıfırı böldüğünden $a = b = 0$ ise her tam sayı a ile b tam sayılarının bir ortak bölenidir. Bu durum için a ile b tam sayılarının pozitif ortak bölenlerinin kümesinin elemanları sonsuz çokluktadır. Ancak, a ile b tam sayılarından en az biri sıfırdan farklı ise bu sayıların sadece sonlu sayıda pozitif ortak bölenleri vardır. Bu ortak bölenler içinde en büyük olanı a ile b tam sayılarının en büyük ortak böleni olarak adlandırılır.

Tanım 2.3. (Ortak bölenlerin en büyüğü) *a ile b, en az biri sıfırdan faklı olarak verilen iki tam sayı olsun.*

(1) *$d \mid a$ ve $d \mid b$*

(2) *$c \mid a$ ve $c \mid b$ ise $c \leqslant d$*

özelliklerini sağlayan pozitif d tam sayısına a ile b tam sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü denir ve $\mathrm{OBEB}(a,b) = d$ *ile gösterilir.*

Sıfırdan farklı a ile b tam sayıları için $\mathrm{OBEB}(a,b) = 1$ ise a ile b tam sayılarına aralarında asal denir.

İki tam sayının ortak bölenlerinin en büyüğü bu sayıların tüm pozitif bölenleri sıralanıp ortak olan en büyüğü seçilerek belirlenebilir. Ancak bu işlem büyük sayılar için kullanışlı değildir. Bölme algoritmasının tekrarlı uygulamasını içeren daha etkili olan bir yöntem Euclid'in "Elements" isimli kitap serisinin yedinci cildinde verilmiştir. Bu yöntemin Euclid zamanından daha önce bilindiğine dair tarihsel kanıt olmasına rağmen bu yönteme Euclid algoritması denir.

Euclid algoritması şu şekilde ifade edilebilir: a ile b ortak bölenlerinin en büyüğü bulunması istenilen iki tam sayı olsun. $\mathrm{OBEB}(|a|,|b|) = \mathrm{OBEB}(a,b)$ olduğundan $a \geqslant b > 0$ varsayılabilir. İlk adım olarak a ile b sayılarına bölme algoritması uygulanır. Bu durumda,

$$a = q_1 b + r_1, 0 \leqslant r_1 < b$$

elde edilir. $r_1 = 0$ ise $b|a$ dır ve $\mathrm{OBEB}(a,b) = b$ bulunur. $r_1 \neq 0$ ise b sayısı r_1 sayısına bölünerek

$$b = q_2 r_1 + r_2, 0 \leqslant r_2 < r_1$$

olacak şekilde q_2 ile r_2 sayıları bulunur. $r_2 = 0$ ise $\mathrm{OBEB}(a,b) = r_1$ olacağından algoritma durdurulur. Aksi halde önceki adımda olduğu gibi devam edilerek

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, 0 \leqslant r_3 < r_2$$

olacak şekilde q_3 ile r_3 sayıları bulunur. Bölme işlemi sıfır olan bir kalan ortaya çıkana kadar devam eder ($b > r_1 > r_2 > \cdots \geqslant 0$ azalan dizisi b tane tam sayıdan fazla tam sayı içermediğinden bölme işleminde eninde sonunda sıfır olan bir kalan ortaya çıkacaktır). Sıfır olan kalan örneğin, $(n+1)$. adımda ortaya çıksın. Bu adımda $r_n | r_{n-1}$ olsun.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} a &= q_1 b + r_1, 0 \leqslant r_1 < b \\ b &= q_2 r_1 + r_2, 0 \leqslant r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, 0 \leqslant r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, 0 \leqslant r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. r_n, yani yukarıdaki işlemde sıfırdan farklı olan son kalan terim $\mathrm{OBEB}\,(a, b)$ sayısına eşittir.

"Disquisitiones Arithmeticae" kitabının ilk bölümünde Gauss, kongrüentlik kavramını ve yönteme güç veren gösterimi açıklamıştır. Gauss, kongrüansların cebirsel bir eşitliğe benzediği için $\equiv$ gösterimini kullandığını belirtmiştir. Gauss, a ile b gibi iki sayı arasındaki fark n sayısının bir katı ise bu sayıların n sayısına göre kongrüent, n sayısının bir katı değilse n sayısına göre kongrüent olmadığını ifade etmiştir.

Tanım 2.4. *n bir pozitif tam sayı olsun. n sayısı a ile b tam sayılarının farkını bölerse, yani bir k tam sayısı için $a - b = kn$ ise a ile b sayılarına n modülüne göre kongrüenttir denir ve*

$$a \equiv b \pmod{n}$$

ile gösterilir.

17. yüzyıla kadar matematikçilerin üretken olduğu bir dönem ender olarak görülmektedir. Bu yüzyılda Kuzey Avrupa tek başına önceki yüzyıldaki kadar yetenekleriyle ön plana çıkan matematikçiler yetiştirmiştir. Descartes, Pascal, Wallis, Bernoulli, Leibniz ve Newton bu matematikçiler içinde en meşhur olanlarıdır. Aslında bir hukukçu olan Fransız Pierre De Fermat (1601-1665) yukarıda isimleri verilen bilimadamları ölçüsünde bir matematikçidir. Fermat, bilimsel bir kariyeri ve altyapısı olmamasına rağmen konuyu takip edebilen, katkıda bulunabilen son matematikçidir ve "amatör matematikçilerin prensi" olarak anılır. Bilindiği kadarıyla Fermat, herhangi bir matematik eğitimi almamıştır ve 30 yaşına kadar matematik ile ilgili herhangi bir çalışma yapmamıştır. Boş vakitlerinde hobi

olarak matematik ile ilgilendiği söylenebilir. Fermat'nın matematikteki gerçek ilgisi sayılar teorisi üzerine olmuştur. Fermat, çalışmalarının ona getireceği ünden ziyade sadece elde ettiği sonuçların hazzını yaşamayı tercih etmiştir. Ölümünden beş yıl önce olmak üzere sadece tek bir çalışma yayınlamıştır.

Sayılar teorisinde Fermat ile yarışabilecek en önemli kişi Fransa darphanesinde memur olarak çalışan Bernhard Frénicle de Bessy'dir. Frénicle'nin sayılar teorisinde Fermat ile yarışması Fermat'nın birçok gizli sonucunun ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bu sonuçlardan biri p bir asal sayı ve a sayısı p asalı tarafından bölünmeyen bir tam sayı ise p asalının $a^{p-1} - 1$ sayısını bölmesidir. Frénicle'ye yazdığı 18 Ekim 1640 tarihli mektubunda Fermat "çok uzun olmasaydı bu sonucun bir kanıtını gönderebileceğini" ifade etmiştir. Bu sonuç "Fermat'nın küçük teoremi" olarak bilinmektedir. Bu "küçük" teoremin ilk kanıtının Euler tarafından 1736 yılında verilmesi için yaklaşık 100 yıllık bir süre geçmiştir. Ancak, aynı sonuç Leibniz tarafından basılmamış bir çalışmasında 1683 yılında ele alınmıştır.

Teorem 2.5. (Fermat'nın küçük teoremi) *p bir asal sayı ve $p \nmid a$ ise $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ olur.*

Fermat'nın küçük teoremi $p \nmid a$ koşulu kaldırılarak daha genel bir şekilde ifade edilebilir.

Sonuç 2.6. *p bir asal sayı olmak üzere herhangi bir a tam sayısı için $a^p \equiv a \pmod p$ olur.*

$a^p \equiv a \pmod p$ sonucunun bir kanıtı a üzerinde tümevarım ile elde edilebilir. Gerçekten, $a = 0$ veya $a = 1$ için kongrüans aşikar bir şekilde sağlanır. Kongrüans bir a değeri için sağlansın, yani $a^p \equiv a \pmod p$ olsun. $a + 1$ için $(a+1)^p \equiv (a+1) \pmod p$ olduğu gösterilecektir. Binom teoreminden

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \cdots + \binom{p}{k} a^{p-k} + \cdots + \binom{p}{p-1} a + 1$$

dir. Tümevarımı tamamlamak için $1 \leqslant k \leqslant p-1$ olmak üzere

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod p$$

olduğu gösterilmelidir.

$$k!\binom{p}{k} = p\,(p-1)\cdots(p-k+1) \equiv 0 \pmod{p}$$

olduğundan $p|k!$ veya $p|\binom{p}{k}$ olmalıdır. $1 \leqslant k \leqslant p-1$ olduğundan $p \nmid k!$ dir. Bu yüzden $p|\binom{p}{k}$, yani

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$$

olur. Dolayısıyla,

$$(a+1)^p = a^p + 1 \equiv a + 1 \pmod{p}$$

bulunur. Bu ise tümevarımı tamamlar.

Fermat'nın küçük teoremi, Fermat'nın yaşadığı dönemdeki matematiğe çok fazla katkı yapmamasına rağmen sonraki nesillerde yetişen matematikçiler üzerine önemli bir etki bırakmıştır. Fermat'nın kariyerinin belki de en büyük hayal kırıklığı kendisi tarafından başlatılan bu "yeni" sayılar teorisine diğer matematikçilerin ilgisini çekmemesidir. Fermat'nın sonuçlarını anlayan ve takdir eden bir birinci sınıf bir matematikçinin yetişmesi için bir yüzyıl geçmesi gerekmiştir. Leonhard Euler (1707-1783), Fermat tarafından kanıtsız olarak verilen sonuçları Fermat'nın kullandığı yöntemlerden farklı olmayan yollar ile kanıtlamıştır.

Fermat'nın küçük teoreminin Euler tarafından verilen genellemesinde, asal modül yerine herhangi bir tam sayı modül içeren kongrüanslar ele alınmaktadır. Bunun için Euler, önemli bir aritmetik fonksiyon tanımlamıştır.

Tanım 2.7. *$n \geqslant 1$ tam sayısı için n sayısı ile aralarında asal olan ve n sayısından büyük olmayan pozitif tam sayıların sayısı $\phi(n)$ olarak tanımlanır.*

Teorem 2.8. (Euler) *$n \geqslant 1$ bir tam sayı ve $\mathrm{OBEB}(a,n) = 1$ ise $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ olur.*

$n = p$ bir asal ise $\phi(p) = p - 1$ olur. $p \nmid a$ ise $\mathrm{OBEB}(a,p) = 1$ olduğundan Euler teoremi, Fermat'nın küçük teoremini verir.

Euler teoremi gereği $\mathrm{OBEB}(a,n) = 1$ ise $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ dir. Ancak, a sayısının $a^{\phi(n)}$ sayısından daha küçük olan ve n modülüne göre 1 sayısına kongrüent olan başka kuvvetleri de var olabilir.

Tanım 2.9. *$n > 1$ bir tam sayı ve $\mathrm{OBEB}(a,n) = 1$ olsun. $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ özelliğinde olan en küçük pozitif k tam sayısına a sayısının modülo n mertebesi denir.*

Bir a tam sayısının modülo n mertebesi, olası en büyük mertebe ise a sayısına n sayısının bir ilkel kökü denir.

Tanım 2.10. $\mathrm{OBEB}\,(a,n)=1$ *ve* a *tam sayısının modülo* n *mertebesi* $\phi\,(n)$ *ise* a *sayısına* n *tam sayısının bir ilkel kökü denir.*

Diğer bir ifade ile a tam sayısı n tam sayısının bir ilkel kökü ise $a^{\phi(n)}\equiv 1 \pmod n$ olur, fakat $k<\phi\,(n)$ olan her pozitif k tam sayısı için $a^k\not\equiv 1 \pmod n$ olur.

Tanım 2.11. p *bir tek asal sayı ve* $\mathrm{OBEB}\,(a,p)=1$ *olsun.* $x^2\equiv a \pmod p$ *kuadratik kongrüansının bir çözümü varsa* a *tam sayısına* p *asal sayısının bir kuadratik kalanıdır, aksi halde bir kuadratik kalanı değildir denir.*

Bir a tam sayısının verilen bir p asal sayısı için kuadratik kalan olup olmaması Euler tarafından verilen aşağıdaki kriter ile belirlenebilir.

Teorem 2.12. (Euler kriteri) p *bir tek asal sayı ve* $\mathrm{OBEB}\,(a,p)=1$ *olsun.* a *sayısı* p *asal sayısı için bir kuadratik kalandır* $\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod p$ *olur.*

p bir tek asal sayı ve $\mathrm{OBEB}\,(a,p)=1$ olduğundan Fermat'nın küçük teoremi gereği

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}}+1\right)=a^{p-1}-1\equiv 0 \pmod p$$

elde edilir. Dolayısıyla, ya $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod p$ ya da $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \pmod p$ olur, fakat ikisi birden olmaz. Bu ifade Euler kriterinin denk bir ifadesini verir: p bir tek asal sayı ve $\mathrm{OBEB}\,(a,p)=1$ olsun. a sayısı p asal sayısı için bir kuadratik kalan değildir $\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \pmod p$ olur.

Kuadratik kalanlar üzerine Euler'in yaptığı çalışmalar Fransız matematikçi Legendre (1752-1833) tarafından geliştirilmiştir. Kuadratik kalanlar içeren işlemler Legendre tarafından tanımlanan $\left(\frac{a}{p}\right)$ Legendre sembolünün kullanımı ile oldukça sade hale gelmektedirler.

Tanım 2.13. p *bir tek asal sayı ve* $\mathrm{OBEB}\,(a,p)=1$ *olsun.* $\left(\frac{a}{p}\right)$ *Legendre sembolü*

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases} 1, & a \textit{ sayısı } p \textit{ asalının bir kuadratik kalanı ise,}\\ -1, & a \textit{ sayısı } p \textit{ asalının bir kuadratik kalanı değilse,}\end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Aşağıdaki teorem, Legendre sembolü için bazı temel sonuçları ifade etmektedir.

Teorem 2.14. (Burton 2007) *p bir tek asal sayı ve a ile b, p asal sayısı ile aralarında asal olan tam sayılar olsun. Bu durumda, Legendre sembolü aşağıdaki özellikleri sağlar:*
(a) $a \equiv b \pmod p$ *ise* $\left(\dfrac{a}{p}\right) = \left(\dfrac{b}{p}\right)$ *olur.*
(b) $\left(\dfrac{a^2}{p}\right) = 1$ *olur.*
(c) $\left(\dfrac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$ *olur.*
(d) $\left(\dfrac{ab}{p}\right) = \left(\dfrac{a}{p}\right)\left(\dfrac{b}{p}\right)$ *olur.*
(e) $\left(\dfrac{1}{p}\right) = 1$ *ve* $\left(\dfrac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ *olur.*

Özel olarak $\left(\dfrac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$ özelliği Euler kriterinin Legendre sembolü cinsinden ifadesidir.

2.2. q-Binom Katsayıları

$n \geqslant 1$ tam sayı, a ve q karmaşık sayılar olmak üzere

$$(a)_n = (a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - aq^k\right) = (1-a)(1-aq)\cdots\left(1-aq^{n-1}\right)$$

olsun. a sayısına parametre ve q değişkenine taban denir. $(a)_0 = (a;q)_0 = 1$ olarak kabul edilir. Ayrıca, $|q| < 1$ olmak üzere

$$(a)_\infty = (a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - aq^k\right) = (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\cdots$$

olarak tanımlanır.

a bir reel sayı ve $a > 0$ olmak üzere $(a;q)_n$ çarpımı artan faktöriyelin q parametresi ile elde edilen bir genişlemesidir. Gerçekten,

$$\lim_{q\to 1}\frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n}$$

limiti ele alınsın. L'Hospital kuralı ile

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to 1}\frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n} &= \lim_{q\to 1}\frac{(1-q^a)\left(1-q^{a+1}\right)\cdots\left(1-q^{a+n-1}\right)}{(1-q)^n} \\
&= \lim_{q\to 1}\frac{1-q^a}{1-q}\lim_{q\to 1}\frac{1-q^{a+1}}{1-q}\cdots\lim_{q\to 1}\frac{1-q^{a+n-1}}{1-q} \\
&= a(a+1)\cdots(a+n-1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sağ taraftaki ifade bir artan faktöriyeldir.

$\binom{n}{m}$ binom katsayısının q-benzeri olan $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]$ q-binom katsayısı veya Gauss katsayısı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.15. (Andrews 1976) *m ile n tam sayıları için $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]$ q-binom katsayısı*

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{(q)_n}{(q)_m (q)_{n-m}}, & 0 \leqslant m \leqslant n \text{ ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

q-binom katsayısının

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix}$$

simetri özelliğini sağladığını görmek kolaydır. Ayrıca,

$$(q)_n = (q;q)_n = (1-q)\left(1-q^2\right)\cdots(1-q^n)$$

olduğundan L'Hospital kuralı ile

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} &= \lim_{q\to 1}\frac{(q)_n}{(q)_m\,(q)_{n-m}} \\
&= \lim_{q\to 1}\frac{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots(1-q^m)\left(1-q^{m+1}\right)\left(1-q^{m+2}\right)\cdots(1-q^n)}{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots(1-q^m)\,(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^{n-m}\right)} \\
&= \lim_{q\to 1}\frac{1-q^{m+1}}{1-q}\lim_{q\to 1}\frac{1-q^{m+2}}{1-q^2}\cdots\lim_{q\to 1}\frac{1-q^n}{1-q^{n-m}} \\
&= (m+1)\,\frac{m+2}{2}\frac{m+3}{3}\cdots\frac{n}{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{m}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, $q \to 1$ için q-binom katsayısı bilinen binom katsayısına yakınsar.

$\binom{n}{m}$ binom katsayısı için temel bir bağıntı olan

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Pascal formülü, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]$ q-binom katsayıları için şu şekilde ifade edilir.

Önteorem 2.16. *$n \geqslant 1$ tam sayısı için*

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + q^{n-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

olur.

Kanıt (2.1) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade açılırsa

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} &= \frac{(q)_{n-1}}{(q)_{m-1}(q)_{n-m}} + q^m \frac{(q)_{n-1}}{(q)_m (q)_{n-m-1}} \\
&= \frac{(q)_{n-1}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{m-1})(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-m})} \\
&\quad + \frac{q^m (q)_{n-1}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-m-1})} \\
&= \frac{(1-q^m)(q)_{n-1} + q^m(1-q^{n-m})(q)_{n-1}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-m})} \\
&= \frac{(q)_{n-1}(1-q^m+q^m-q^n)}{(q)_m (q)_{n-m}} = \frac{(q)_n}{(q)_m (q)_{n-m}} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (2.2) ifadesinin sağ tarafı açılırsa

$$\begin{aligned}
q^{n-m}\begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} &= q^{n-m} \frac{(q)_{n-1}}{(q)_{m-1}(q)_{n-m}} + \frac{(q)_{n-1}}{(q)_m (q)_{n-m-1}} \\
&= \frac{q^{n-m}(q)_{n-1}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{m-1})(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-m})} \\
&\quad + \frac{(q)_{n-1}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-m-1})} \\
&= \frac{(1-q^m)q^{n-m}(q)_{n-1} + (1-q^{n-m})(q)_{n-1}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-m})} \\
&= \frac{(q)_{n-1}(q^{n-m}-q^n+1-q^{n-m})}{(q)_m (q)_{n-m}} = \frac{(q)_n}{(q)_m (q)_{n-m}} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

q-binom katsayısı için Pascal formülünden q-binom katsayısının q değişkeninin bir polinomu olduğu görülür.

Önerme 2.17. $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ *q-binom katsayısı q değişkeninin derecesi $m(n-m)$ olan bir polinomudur.*

Kanıt Kanıt n üzerinde tümevarım ile verilecektir. $n=0$ ise $m=0$ olur ve

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{(q)_0}{(q)_0 (q)_0} = 1,$$

derecesi sıfır olan bir polinom olduğundan ifade doğrudur. $n=1$ ise $m=0$ veya $m=1$ olur. $m=0$ ise

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{(q)_1}{(q)_0 (q)_1} = 1,$$

ve $m=1$ ise

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{(q)_1}{(q)_1\,(q)_0}=1,$$

dereceleri sıfır olan polinomlar olduğundan ifade doğrudur. İfade n için doğru, yani

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=a_0q^{m(n-m)}+\cdots$$

olsun. $n+1$ için $\left[\begin{smallmatrix}n+1\\m\end{smallmatrix}\right]$ q-binom katsayısının q değişkenine göre derecesi $m\,(n+1-m)$ olan bir polinom olduğu gösterilecektir. (2.1) eşitliği gereği

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}n+1\\m\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}n\\m-1\end{bmatrix}+q^m\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=a_0q^{(m-1)(n+1-m)}+\cdots+q^m a_0q^{m(n-m)}+\cdots\\ &= a_0q^{m(n-m)+m}+\cdots=a_0q^{m(n+1-m)}+\cdots\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise tümevarımı ve kanıtı tamamlar. □

2.3. Parçalanış Fonksiyonu

n bir pozitif tam sayı olsun. n sayısının pozitif tam sayılarının toplamı şeklinde yazılabilme sayısı $p\,(n)$ ile gösterilsin (bu yazılışta sıra önemlidir, farklı sıradaki toplamlar farklı kabul edilmez). $p\,(n)$ ifadesine parçalanış fonksiyonu denir.

Örneğin,

$$\begin{aligned}p\,(1) &= 1,\;\; (1)\\ p\,(2) &= 2,\;\; (2,1+1)\\ p\,(3) &= 3,\;\; (3,2+1,1+1+1)\\ p\,(4) &= 5,\;\; (4,3+1,2+2,2+1+1,1+1+1+1)\\ p\,(5) &= 7,\;\; \begin{pmatrix}5,4+1,3+2,2+2+1,3+1+1,\\ 2+1+1+1,1+1+1+1+1\end{pmatrix}\\ p\,(6) &= 11,\;\; \begin{pmatrix}6,5+1,4+2,3+3,3+2+1,2+2+2,4+1+1,2+2+1+1,\\ 3+1+1+1,2+1+1+1+1,1+1+1+1+1+1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve $p\,(200)=3972999029388$ olur. $p\,(0)=1$ kabul edilir. Buna sıfırın boş parçalanışı denir. Örneklerden görüldüğü gibi $p\,(n)$ fonksiyonu hızla büyümektedir. Hardy ve Ramanujan, $n\to\infty$ için

$$p\,(n)\sim\frac{1}{4n\sqrt{3}}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

olduğunu, yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{\frac{1}{4n\sqrt{3}}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)} = 1$$

olduğunu göstermişlerdir.

$p(n)$ fonksiyonunun üreteç fonksiyonu Euler tarafından

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^k)\cdots}$$

olarak verilmiştir. Bu eşitliğe Euler bağıntısı denir. Euler bağıntısının ilk olarak yakınsama şartları olmadan formal kanıtı verilecek ve daha sonra yakınsamanın hesaba katıldığı daha matematiksel kanıt ele alınacaktır (bakınız, Berndt 2006).

$\dfrac{1}{(q;q)_\infty}$ çarpımındaki her bir çarpan bir geometrik seri olarak açılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{(q;q)_\infty} &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} \\ &= \left(1+q+q^2+\cdots\right)\left(1+q^2+q^4+\cdots\right)\left(1+q^3+q^6+\cdots\right)\cdots\end{aligned}$$

elde edilir. Sağ taraftaki seriler birer polinom gibi düşünülüp çarpılır ve q teriminin aynı olan kuvvetlerinin katsayıları toplanırsa

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, q^n$$

şeklinde bir kuvvet serisi elde edilir. $a(n) = p(n)$ olduğu gösterilecektir. Sağ taraftaki ilk seriden q^{n_1} terimi, ikinci seriden q^{2n_2} terimi, üçüncü seriden q^{3n_3} terimi ve bu şekilde devam edilerek m. seriden q^{mn_m} terimi alınsın. Bu terimlerin çarpımı

$$q^{n_1}q^{2n_2}q^{3n_3}\cdots q^{mn_m} = q^n$$

olsun. Burada,

$$n = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + mn_m$$

olur. Son ifade

$$n = \left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n_1\text{-tane}}\right) + \left(\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n_2\text{-tane}}\right) + \cdots + \left(\underbrace{m+m+\cdots+m}_{n_m\text{-tane}}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade, n sayısının pozitif tam sayılardan oluşan bir parçalanışıdır. Dolayısıyla, n sayısının her parçalanışı bu türde olan bir q^n terimi oluşturur ve tersine her q^n terimi n sayısının karşılık gelen bir parçalanışından elde edilir. O halde, q^n teriminin katsayısı olan $a\left(n\right)$ katsayısı, n sayısının parçalanışlarının sayısı olan $p\left(n\right)$ ifadesine eşittir.

Şimdi, $0 \leqslant q < 1$ olsun ve

$$F_m\left(q\right) = \frac{1}{\left(q;q\right)_m} = \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{1-q^n} \quad \text{ve} \quad F\left(q\right) = \frac{1}{\left(q;q\right)_\infty} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} = \lim_{m\to\infty} F_m\left(q\right)$$

fonksiyonları tanımlansın. $0 \leqslant q < 1$ için $F\left(q\right)$ fonksiyonunu tanımlayan çarpım mutlak yakınsaktır. Çünkü, bu fonksiyonun çarpmaya göre tersi olan $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n\right)$ çarpımı ($\sum q^n$ toplamı mutlak yakınsak olduğundan) mutlak yakınsaktır. Ayrıca, sabitlenmiş her q için

$$F_{m+1}\left(q\right) = \frac{1}{1-q^{m+1}} F_m\left(q\right) \geqslant F_m\left(q\right)$$

olduğundan $\left\{F_m\left(q\right)\right\}$ dizisi artandır. Dolayısıyla, her sabitlenmiş $0 \leqslant q < 1$ ve her m için $F_m\left(q\right) \leqslant F\left(q\right)$ olur. $F_m\left(q\right)$ çarpımı sonlu sayıda mutlak yakınsak olan serilerin çarpımı olduğundan

$$F_m\left(q\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_m\left(n\right) q^n$$

şeklinde bir mutlak yakınsak seri olarak yazılabilir. Burada $p_m\left(n\right)$ katsayısı

$$n = n_1 + 2n_2 + \cdots + mn_m$$

denkleminin çözümlerinin sayısıdır. Diğer bir ifade ile $p_m\left(n\right)$ katsayısı, n sayısının m tane parçadan fazla olmayan parçalar ile parçalanış sayısıdır. $m \geqslant n$ ise $p_m\left(n\right) = p\left(n\right)$ olur. O halde, $m \geqslant n$ olduğunda eşitlik olmak üzere

$$p_m\left(n\right) \leqslant p\left(n\right)$$

olur. Diğer bir ifade ile

$$\lim_{m\to\infty} p_m\left(n\right) = p\left(n\right)$$

olur. Şimdi, $F_m\left(q\right)$ serisi

$$F_m\left(q\right) = \sum_{n=0}^{m} p_m\left(n\right) q^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} p_m\left(n\right) q^n = \sum_{n=0}^{m} p\left(n\right) q^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} p_m\left(n\right) q^n$$

olarak iki parçaya ayrılsın. $q \geqslant 0$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{m} p\left(n\right) q^n \leqslant F_m\left(q\right) \leqslant F\left(q\right)$$

olur. Bu ise $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir. Ayrıca, $p_m(n) \leqslant p(n)$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)\, q^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n \leqslant F(q)$$

olur. Dolayısıyla, sabitlenmiş her q için $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_m(n)\, q^n$ serisi m değişkenine göre mutlak yakınsaktır. $m \to \infty$ için

$$F(q) = \lim_{m\to\infty} F_m(q) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)\, q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} p_m(n)\, q^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n$$

elde edilir. Bu ise $0 \leqslant q < 1$ için Euler bağıntısının kanıtını verir. Analitik devam ile bu sonuç $|q| < 1$ yuvarına genişletilebilir.

Şimdi, bir örnek olarak, her biri 7 sayısından küçük olan ve bir çift sayı ile bir tek sayının toplamından oluşan tüm parçalanışlar ele alınsın (bakınız, Andrews ve Eriksson 2004). Bu parçalanışların her biri (toplamda 9 tane) listelenerek yazılabilir. Ancak, bu parçalanışlar

$$\begin{aligned}
\left(q^2 + q^4 + q^6\right)\left(q^1 + q^3 + q^5\right) &= q^{2+1} + q^{2+3} + q^{2+5} + q^{4+1} \\
&+ q^{4+3} + q^{4+5} + q^{6+1} + q^{6+3} + q^{6+5} \\
&= q^3 + 2q^5 + 3q^7 + 2q^9 + q^{11}
\end{aligned}$$

polinom çarpımında üstler olarak doğal bir şekilde ortaya çıkmaktadır.

Yukarıdaki basit düşünce daha genel parçalanış soruları için kolaylıkla genişletilebilir. Örneğin, $S = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ kümesi r tane pozitif tam sayıdan oluşan bir küme olsun. $r = 3$ ise

$$(1 + q^{n_1})(1 + q^{n_2})(1 + q^{n_3}) = 1 + q^{n_1} + q^{n_2} + q^{n_3} + q^{n_1+n_2} + q^{n_1+n_3} + q^{n_2+n_3} + q^{n_1+n_2+n_3}$$

elde edilir. Bu eşitlikteki kuvvetler, $\{n_1, n_2, n_3\}$ kümesinin farklı elemanları kullanılarak elde edilen tüm parçalanışları gösterir. Daha açık bir ifade ile $S = \{1, 2, 3\}$ ise

$$(1 + q)\left(1 + q^2\right)\left(1 + q^3\right) = 1 + q + q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5 + q^6$$

olur. Bu fonksiyon (bu durum için bir polinom), $\{1, 2, 3\}$ kümesinin farklı elemanlarından oluşan parçalanışları için üreteç fonksiyonudur. q^n teriminin katsayısı, n sayısının bu türde olan parçalanışlarının sayısıdır. Örneğin, q^3 teriminin katsayısı olan 2 sayısı, 3 sayısının $\{1, 2, 3\}$ kümesindeki farklı elemanlarla oluşturulan parçalanışlarının $(3$ ve $2 + 1)$ sayısıdır.

Bu düşünce ile n sayısının $S = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ kümesindeki farklı elemanlarla oluşturulan parçalanışlarının sayısı olan $p_{F,S}(n)$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{F,S}(n)\, q^n = \prod_{k=1}^{r} (1 + q^{n_k}) = \prod_{n \in S} (1 + q^n)$$

bağıntısı elde edilir. Genel olarak, n pozitif tam sayısının farklı sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı olan $p_F(n)$ için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_F(n)\, q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + q^k\right) = (-q; q)_\infty = (1 + q)\left(1 + q^2\right) \cdots \left(1 + q^k\right) \cdots$$

ile verilir.

Şimdi, Euler tarafından verilen ve temel çarpma işlemleri ile kanıtlanabilen meşhur bir sonuç ifade edilecektir.

Teorem 2.18. (Euler Parçalanış Özdeşliği) *Bir pozitif n tam sayısının birbirinden farklı sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı olan $p_F(n)$ sayısı, n sayısının tek sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı olan $p_T(n)$ sayısına eşittir.*

Kanıt n sayısının tek kısımlardan oluşan parçalanışlarının sayısı olan $p_T(n)$ fonksiyonu için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_T(n)\, q^n = \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ tek}}}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k} = \frac{1}{(1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5)\cdots} = \frac{1}{(q; q^2)_\infty}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_F(n)\, q^n &= (-q; q)_\infty = (1 + q)\left(1 + q^2\right)\left(1 + q^3\right)\cdots \\
&= \frac{1 - q^2}{1 - q}\frac{1 - q^4}{1 - q^2}\frac{1 - q^6}{1 - q^3}\frac{1 - q^8}{1 - q^4}\frac{1 - q^{10}}{1 - q^5}\cdots \\
&= \frac{(q^2; q^2)_\infty}{(q; q)_\infty} = \frac{1}{(1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5)\cdots} \\
&= \frac{1}{(q; q^2)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} p_T(n)\, q^n
\end{aligned}$$

bulunur. q^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa Euler Parçalanış Özdeşliği elde edilir. $\square$

Örneğin,

$$\begin{aligned} p_F(6) &= 4 \quad (6, 5+1, 4+2, 3+2+1) \\ p_T(6) &= 4 \quad (5+1, 3+3, 3+1+1+1, 1+1+1+1+1+1) \end{aligned}$$

olur.

2.4. q-Serileri ve Ramanujan Teta Fonksiyonu

Genel olarak bir q-serisi $(a;q)_n$ çarpımlarının toplamıdır. q-serileri teorisinde en dikkat çekici ve önemli olan sonuçlardan ikisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q)_n} = \frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q)_n} = \frac{1}{(q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty}$$

ile verilen Rogers-Ramanujan Özdeşlikleridir. Bu özdeşlikler ilk olarak Rogers tarafından 1894 yılında bulunarak kanıtlanmış ve 1913 yılında Ramanujan tarafından kanıtsız olarak ifade edilmiştir. 1917 yılında Rogers'ın çalışmasını gören Ramanujan, Rogers ile iletişime geçmiş ve ikisi 1919 yılında bu özdeşlikler için yeni bir kanıt yayımlamışlardır. 1917 yılında Schur, bu özdeşlikleri bağımsız olarak keşfetmiş ve kanıtlamıştır.

Birinci Rogers-Ramanujan Özdeşliği, negatif olmayan bir n tam sayısının ardışık parçaları arasındaki fark en az iki olan parçalanışlarının sayısının, 1 veya 4 $\pmod 5$ sayısına denk olan parçalardan oluşan parçalanışlarının sayısına eşit olduğunu ifade eder. Örneğin, 11 sayısının ardışık parçaları arasındaki fark en az iki olan parçalanışları 7 tanedir:

$$\begin{array}{ll} 11 & 7+4 \\ 10+1 & 7+3+1 \\ 9+2 & 6+4+1 \\ 8+3 & \end{array}$$

Diğer taraftan, 11 sayısının $5m+1$ veya $5m+4$ şeklinde olan parçalardan oluşan parçalanışları 7 tanedir:

11	$4+4+1+1+1$
$9+1+1$	$4+1+1+1+1+1+1+1$
$6+4+1$	$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$
$6+1+1+1+1+1$	

İkinci Rogers-Ramanujan Özdeşliği ise negatif olmayan bir n tam sayısının ardışık parçaları arasındaki fark en az iki olan ve en küçük parçanın en az 2 olduğu parçalanışlarının sayısının, 2 veya 3 $\pmod 5$ sayısına denk olan parçalanışlarının sayısına eşit olduğunu ifade eder. Örneğin, 11 sayısının ardışık parçaları arasındaki fark en az iki olan ve en küçük parçanın en az 2 olduğu parçalanışları 4 tanedir:

$$11$$
$$9+2$$
$$8+3$$
$$7+4$$

Diğer taraftan, 11 sayısının $5m+2$ veya $5m+3$ şeklinde olan parçalardan oluşan parçalanışları 4 tanedir:

$$8+3$$
$$7+2+2$$
$$3+3+3+2$$
$$3+2+2+2+2$$

$(a;q)_n$ çarpımlarının toplamı olarak tanımlanan q-serileri için verilen bu tanım fazla tatminkar değildir. Çünkü, q-serileri teorisinde toplamda yer alan parametreler genellikle limit durumunda 0 veya ∞ olarak alınır ve sonuçta toplam $(a;q)_n$ çarpanlarını içermeyebilir. Bazı durumlarda geriye kalan bir teta fonksiyonudur.

Tanım 2.19. (Andrews 1976) *Ramanujan genel teta fonksiyonu $f(a,b)$ ile gösterilir ve*

$$f(a,b)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad |ab|<1$$

olarak tanımlanır.

$f(a,b)$ fonksiyonunun Ramanujan'ın kullandığı gösterimler ile üç özel durumu

$$\begin{aligned}\varphi(q) &= f(q,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2},\\ \psi(q) &= f\left(q,q^3\right) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}},\\ f(-q) &= f\left(-q,-q^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}\end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Andrews 1976). Sağ taraftaki seri ifadelerini elde etmek zor değildir. Gerçekten,

$$\varphi(q) = f(q,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2+n+n^2-n}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2},$$

$$\begin{aligned}\psi(q) &= f\left(q,q^3\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{3n(n-1)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{4n^2-2n}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{-2n(-2n-1)}{2}} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{2n(2n+1)}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{2n(2n+1)}{2}}\\ &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ tek}}}^{\infty} q^{\frac{k(k+1)}{2}} + \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ çift}}}^{\infty} q^{\frac{k(k+1)}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k+1)}{2}}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}f(-q) &= f\left(-q,-q^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{n(n-1)}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n^2} q^{\frac{n^2+n+2n^2-2n}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}\end{aligned}$$

elde edilir.

Ramanujan teta fonksiyonu temel fakat oldukça kullanışlı özelliklere sahiptir.

Önteorem 2.20. (Berndt 1994)

(1) $f(a,b) = f(b,a)$ *olur.*

(2) $f(1,a) = 2f\left(a,a^3\right)$ *olur.*

(3) $f(-1,a) = 0$ *olur.*

(4) *Herhangi bir n tam sayısı için* $f(a,b) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} f\left(a(ab)^n, b(ab)^{-n}\right)$ *olur.*

Kanıt

(1) $f(a,b)$ fonksiyonunun tanımında n yerine $-n$ yazılırsa

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{-n(-n+1)}{2}} b^{\frac{-n(-n-1)}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n+1)}{2}} = f(b,a) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2) $f(a,b)$ fonksiyonunun tanımında a yerine 1 ve b yerine a yazılırsa

$$\begin{aligned} f(1,a) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{\frac{n(n-1)}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} + \sum_{n=2}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) \\ &= 2\left(1 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ çift}}}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ tek}}}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) \\ &= 2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{2n(2n+1)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(2n-1)2n}{2}}\right) \\ &= 2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{4n^2+2n}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{4n^2-2n}{2}}\right) \\ &= 2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n^2-n+3n^2+3n}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n^2+n+3n^2-3n}{2}}\right) \\ &= 2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(a^3\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(a^3\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right) \\ &= 2\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(a^3\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(a^3\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right) \\ &= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(a^3\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2f\left(a,a^3\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

(3) $f(a,b)$ fonksiyonunun tanımında a yerine -1 ve b yerine a yazılırsa

$$\begin{aligned}
f(-1,a) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a^{\frac{n(n-1)}{2}}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a^{\frac{n(n-1)}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a^{\frac{n(n-1)}{2}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{\frac{n(n+1)}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a^{\frac{n(n-1)}{2}}\\
&= 1-1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a^{\frac{n(n-1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{\frac{n(n+1)}{2}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}a^{\frac{n(n+1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{\frac{n(n+1)}{2}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}a^{\frac{n(n+1)}{2}}\left((-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}a^{\frac{n(n+1)}{2}}\left((-1)^{\frac{n^2+3n+2}{2}}+(-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}a^{\frac{n(n+1)}{2}}\left((-1)^{\frac{n^2-n}{2}+\frac{4n+2}{2}}+(-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{\frac{n(n+1)}{2}}\left((-1)^{2n+1}+1\right)=0
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4) $f(a,b)$ fonksiyonunun

$$f(a,b)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{\frac{k(k+1)}{2}}b^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

tanımında k yerine $k+n$ yazılırsa

$$f(a,b)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{\frac{(k+n)(k+n+1)}{2}}b^{\frac{(k+n)(k+n-1)}{2}}$$

elde edilir. a parametresinin kuvveti olan

$$\frac{(k+n)(k+n+1)}{2}$$

ele alınsın.

$$\begin{aligned}
\frac{(k+n)(k+n+1)}{2} &= \frac{k(k+n)+n(k+n)+(k+n)}{2} \\
&= \frac{k^2+kn+kn+n^2+k+n+nk^2-nk^2}{2} \\
&= \frac{n^2+n+nk^2+nk+k^2+k-nk^2+nk}{2} \\
&= \frac{n(n+1)+(n+1)(k^2+k)-n(k^2-k)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\frac{k(k+1)}{2}-n\frac{k(k-1)}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, b parametresinin kuvveti olan

$$\frac{(k+n)(k+n-1)}{2}$$

ele alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{(k+n)(k+n-1)}{2} &= \frac{k(k+n)+n(k+n)-(k+n)}{2} \\
&= \frac{k^2+kn+kn+n^2-k-n+nk^2-nk^2}{2} \\
&= \frac{n^2-n+nk^2+nk+k^2-k-nk^2+nk}{2} \\
&= \frac{n^2-n+n(k^2+k)+(1-n)(k^2-k)}{2} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}+(1-n)\frac{k(k-1)}{2}+n\frac{k(k+1)}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{\frac{(k+n)(k+n+1)}{2}} b^{\frac{(k+n)(k+n-1)}{2}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} a^{(n+1)\frac{k(k+1)}{2}} a^{-n\frac{k(k-1)}{2}} b^{n\frac{k(k+1)}{2}} b^{(1-n)\frac{k(k-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{\frac{k(k+1)}{2}} a^{n\frac{k(k+1)}{2}} b^{n\frac{k(k+1)}{2}} b^{\frac{k(k-1)}{2}} a^{-n\frac{k(k-1)}{2}} b^{-n\frac{k(k-1)}{2}} \\
&= a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(a(ab)^n\right)^{\frac{k(k+1)}{2}} \left(b(ab)^{-n}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} \\
&= a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} f\left(a(ab)^n, b(ab)^{-n}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. □

q-serileri konusunun en önemli teoremlerinden biri q-binom teoremidir (Andrews 1976).

Teorem 2.21. (Binom teoreminin q-benzeri) $|q|<1$ *ve* $|z|<1$ *için*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(q)_n}z^n=\frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}$$

olur.

Kanıt Sağ taraftaki çarpım $|z|<1$ bölgesinin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak olduğundan $|z|<1$ bölgesinde bir analitik fonksiyon temsil eder. Bu yüzden,

$$F(z)=\frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n,\quad |z|<1$$

yazılabilir. Bu tanım gereği $F(0)=1$ olur.

$$\begin{aligned}F(qz)&=\frac{(azq)_\infty}{(zq)_\infty}=\frac{(1-azq)(1-azq^2)(1-azq^3)\cdots}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)\cdots}\\&=\frac{(1-az)(1-azq)(1-azq^2)(1-azq^3)\cdots}{(1-z)(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)\cdots}\frac{1-z}{1-az}\\&=\frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}\frac{1-z}{1-az}=F(z)\frac{1-z}{1-az}\end{aligned}$$

olduğundan

$$(1-z)F(z)=(1-az)F(qz)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $F(z)$ ve $F(qz)$ fonksiyonları için karşılık gelen seri ifadeleri yazılır ve $n\geqslant 1$ için z^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$A_n-A_{n-1}=A_nq^n-aA_{n-1}q^{n-1}$$

veya denk olarak

$$A_n=\frac{1-aq^{n-1}}{1-q^n}A_{n-1},\quad n\geqslant 1$$

elde edilir.

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\tfrac{1-a}{1-q}A_0\\A_2&=\tfrac{1-aq}{1-q^2}A_1\\A_3&=\tfrac{1-aq^2}{1-q^3}A_2\\&\vdots\\A_n&=\tfrac{1-aq^{n-1}}{1-q^n}A_{n-1}\end{aligned}\right.\quad\Rightarrow A_n=\frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}A_0$$

ve $A_0=1$ olduğundan ($F(0)=1$)

$$A_n=\frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}=\frac{(a)_n}{(q)_n}$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar. □

a bir pozitif tam sayı olmak üzere Teorem 2.21'de a yerine q^a yazılsın.

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 1}\frac{(q^a)_n}{(q)_n} &= \lim_{q\to 1}\frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})\cdots(1-q^{a+n-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} \\ &= \lim_{q\to 1}\frac{-aq^{a-1}}{-1}\lim_{q\to 1}\frac{-(a+1)q^a}{-2q}\cdots\lim_{q\to 1}\frac{-(a+n-1)q^{a+n-2}}{-nq^{n-1}} \\ &= \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 1}\frac{(zq^a)_\infty}{(z)_\infty} &= \lim_{q\to 1}\frac{(1-zq^a)(1-zq^{a+1})(1-zq^{a+2})\cdots}{(1-z)(1-zq)\cdots(1-zq^{a-1})(1-zq^a)(1-zq^{a+1})\cdots} \\ &= \lim_{q\to 1}\frac{1}{(1-z)(1-zq)\cdots(1-zq^{a-1})} = \frac{1}{(1-z)^a} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^a)_n}{(q)_n}z^n = \frac{(zq^a)_\infty}{(z)_\infty}$$

eşitliğinde formal olarak $q \to 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!}z^n = \frac{1}{(1-z)^a}$$

elde edilir. Son eşitlik analizden bilinen genelleştirilmiş binom teoremidir.

Sonuç 2.22. (Euler) $|q| < 1$ *için*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(q)_n} = \frac{1}{(z)_\infty}, \quad |z| < 1$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(-z)^n}{(q)_n} = (z)_\infty, \quad |z| < \infty$$

olur.

Kanıt İlk ifade Teorem 2.21'de $a = 0$ alınarak elde edilir. İkinci ifade için Teorem 2.21'de z yerine $\frac{z}{a}$ yazılsın. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(q)_n}\frac{z^n}{a^n} = \frac{(z)_\infty}{\left(\frac{z}{a}\right)_\infty}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{(a)_n}{a^n} &= \frac{1}{a^n}(1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\cdots\left(1-aq^{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{a^n}a^n\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{a}-q\right)\left(\frac{1}{a}-q^2\right)\cdots\left(\frac{1}{a}-q^{n-1}\right)\\
&= \left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{a}-q\right)\left(\frac{1}{a}-q^2\right)\cdots\left(\frac{1}{a}-q^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{(z)_\infty}{\left(\frac{z}{a}\right)_\infty} = \frac{(1-z)(1-zq)(1-zq^2)\cdots}{\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(1-\frac{z}{a}q\right)\left(1-\frac{z}{a}q^2\right)\cdots}$$

olduğundan $a \to \infty$ için

$$\frac{(a)_n}{a^n} \to (-1)(-q)\left(-q^2\right)\cdots\left(-q^{n-1}\right) = (-1)^n q^{1+2+\cdots+(n-1)} = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

ve

$$\frac{(z)_\infty}{\left(\frac{z}{a}\right)_\infty} \to (z)_\infty$$

bulunur. □

Dikkat edilirse yukarıdaki kanıtta

$$\lim_{a\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(q)_n}\frac{z^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{a\to\infty}\frac{(a)_n}{(q)_n}\frac{z^n}{a^n}$$

işlemi yapılmıştır. Ancak, bu işlemin mümkün olup olmadığı incelenmemiştir. q-serileri teorisinde toplam sembolü altında limit almanın her zaman mümkün olduğu kanıtlanmadan varsayılır. Burada, bu işlemin doğru olduğu gösterilecektir (bakınız, Berndt 2006).

$|q| \leqslant M < 1$ olan bir M sayısı seçilsin ve ε sayısı, $0 < 2\varepsilon < 1 - M$ olacak şekilde verilsin. $\left|\frac{1}{a}\right| \leqslant \varepsilon$ olmak üzere N_0 sayısı

$$\left|\frac{1}{a}\right| + M^k \geqslant 2\varepsilon, \quad 0 \leqslant k < N_0 \quad \text{ve} \quad \left|\frac{1}{a}\right| + M^{N_0} < 2\varepsilon$$

özelliğinde olan tek türlü belirli pozitif tam sayı olsun. Bu durumda, $\left|\frac{1}{a}\right| \leqslant \varepsilon$ ve $n \geqslant N_0$

için

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(a)_n}{(q)_n}\frac{z^n}{a^n}\right| &= \left|\frac{\frac{1}{a^n}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(1-aq^k\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(1-q^{k+1}\right)}\right| = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1}{a}-q^k\right|}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left|1-q^{k+1}\right|} \\
&\leqslant \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(\left|\frac{1}{a}\right|+M^k\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}|1-M|} \leqslant \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(\left|\frac{1}{a}\right|+M^k\right)}{(1-M)^n} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{N_0-1}\left(\left|\frac{1}{a}\right|+M^k\right)\prod\limits_{k=N_0}^{n-1}\left(\left|\frac{1}{a}\right|+M^k\right)}{(1-M)^n} \\
&\leqslant \frac{\prod\limits_{k=0}^{N_0-1}(1+\varepsilon)\prod\limits_{k=N_0}^{n-1}2\varepsilon}{(1-M)^n} = \frac{(1+\varepsilon)^{N_0}(2\varepsilon)^{n-N_0}}{(1-M)^n} \\
&= \left(\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^{N_0}\left(\frac{2\varepsilon}{1-M}\right)^n
\end{aligned}$$

elde edilir. $2\varepsilon < 1-M$ olduğundan

$$\sum_{n=N_0}^{\infty}\left(\frac{2\varepsilon}{1-M}\right)^n < \infty$$

olur. Dolayısıyla, Weierstrass M-testi gereği

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(q)_n}\frac{z^n}{a^n}$$

serisi $\left|\dfrac{1}{a}\right| \leqslant \varepsilon$ için düzgün yakınsaktır. Bu yüzden, toplam sembolü altında $a \to \infty$ limiti alınabilir.

Binom teoreminin q-benzeri, q-serileri teorisinde en temel sonuçlardan biridir. Aşağıdaki teorem ile verilen Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği de teta fonksiyonları teorisinde önemli ve kullanışlı sonuçlardan biridir (Berndt 2006).

Teorem 2.23. (Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği) *$z \neq 0$ ve $|q| < 1$ için*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \left(-zq;q^2\right)_\infty\left(-\frac{q}{z};q^2\right)_\infty\left(q^2;q^2\right)_\infty$$

olur.

Kanıt Sonuç 2.22'de verilen

$$(z)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} (-z)^n}{(q)_n}$$

ifadesinde q yerine q^2 ve z yerine $-zq$ yazılsın. Bu durumda,

$$\left(-zq;q^2\right)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)} z^n q^n}{(q^2;q^2)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} &= \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})} \\
&= \frac{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\cdots} \\
&= \frac{(q^{2n+2};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\left(-zq;q^2\right)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{n^2} \left(q^{2n+2};q^2\right)_\infty$$

bulunur. $(q^{2n+2};q^2)_\infty = (1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})(1-q^{2n+6})\ldots$ çarpımı $n<0$ için sıfır olduğundan

$$\left(-zq;q^2\right)_\infty = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{n^2} \left(q^{2n+2};q^2\right)_\infty = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} \left(q^{2n+2};q^2\right)_\infty$$

elde edilir.

$$(z)_\infty = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{r(r-1)}{2}} (-z)^r}{(q)_r}$$

ifadesinde q yerine q^2 ve z yerine q^{2n+2} yazılırsa

$$\left(q^{2n+2};q^2\right)_\infty = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{q^{r(r-1)} (-1)^r q^{2nr+2r}}{(q^2;q^2)_r}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\left(-zq;q^2\right)_\infty &= \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{q^{r(r-1)} (-1)^r q^{2nr+2r}}{(q^2;q^2)_r} \\
&= \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r q^{r^2+2nr+n^2} q^r z^n}{(q^2;q^2)_r} \\
&= \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r q^r z^{-r}}{(q^2;q^2)_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{n+r} q^{(n+r)^2} \\
&= \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{q}{z}\right)^r}{(q^2;q^2)_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 2.22'de elde edilen

$$\frac{1}{(z)_\infty} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{(q)_r}$$

ifadesinde z yerine $-\frac{q}{z}$ ve q yerine q^2 alınırsa $\left|\frac{q}{z}\right| < 1$ için

$$\frac{1}{\left(-\frac{q}{z}; q^2\right)_\infty} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{q}{z}\right)^r}{(q^2; q^2)_r}$$

bulunur. Dolayısıyla, $\left|\frac{q}{z}\right| < 1$ için

$$\left(-zq; q^2\right)_\infty = \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{q}{z}\right)^r}{(q^2; q^2)_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty \left(-\frac{q}{z}; q^2\right)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2}$$

veya denk olarak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \left(-zq; q^2\right)_\infty \left(-\frac{q}{z}; q^2\right)_\infty \left(q^2; q^2\right)_\infty$$

elde edilir. Analitik devam ile bu sonuç tüm $z \neq 0$ için geçerli olur. Bu ise Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinin kanıtını tamamlar. □

Ramanujan teta fonksiyonu gösterimi ile Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği

$$f(a, b) = (-a; ab)_\infty (-b; ab)_\infty (ab; ab)_\infty$$

olarak ifade edilir. Gerçekten,

$$f(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n^2}{2}} b^{\frac{n^2}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{-\frac{n}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(ab)^{\frac{1}{2}}\right]^{n^2} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^n$$

olduğundan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \left(-zq; q^2\right)_\infty \left(-\frac{q}{z}; q^2\right)_\infty \left(q^2; q^2\right)_\infty$$

Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinde q yerine $(ab)^{\frac{1}{2}}$ ve z yerine $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} f(a, b) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(ab)^{\frac{1}{2}}\right]^{n^2} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^n \\ &= \left(-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} (ab)^{\frac{1}{2}}; ab\right)_\infty \left(-\frac{(ab)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}; ab\right)_\infty (ab; ab)_\infty \\ &= (-a; ab)_\infty (-b; ab)_\infty (ab; ab)_\infty \end{aligned}$$

elde edilir.

2.5. Fibonacci Sayıları ve Bazı Özellikleri

Orta çağ Avrupasının en önemli matematikçilerinden birisi, Fibonacci ismiyle çalışmalar yapan Pisa'lı Leonardo'dur (1180-1250). Babasının mesleği nedeniyle Akdeniz Bölgesinde İspanya, Mısır, Suriye ve Yunanistan'a seyahat eden Fibonacci İtalya'ya dönüşte Latin Batı'ya İslam aritmetiğini ve cebirsel matematiksel uygulamalarını tanıtan meşhur "Liber Abaci" (Sayma Üzerine) başlıklı kitabını yayınlamıştır. Birçok başarısına rağmen Fibonacci, bu kitabında yer alan pozitif tam sayıların özel bir dizisini adıyla eşleştiren 19. yüzyıl matematikçilerinden Eduoard Lucas sayesinde tanınmıştır. Kitabındaki meşhur tavşan problemi ile bağlantılı olan tam sayıların

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

dizisinin terimlerine Fibonacci sayıları ve bu diziye Fibonacci sayıları dizisi denir. Fibonacci sayıları doğada beklenmedik bir şekilde ortaya çıkar. Örneğin, zambak çiçeğinin 3, düğün çiçeğinin 5, kadife çiçeğinin 13, yıldız çiçeğinin 21 ve papatyanın 34, 55 veya 89 tane taç yaprağı vardır. Merkezden saat yönü ve saat yönünün aksi doğrultularda yayılan iki sarmaldan oluşan ayçiçeği tohumları saat yönünde olan sarmalda 34 ve saat yönünün aksi yönde olan sarmalda 55 tanedir. Büyük başlı ayçiçeklerde bu sayılar sırasıyla 55 ve 89 olmaktadır. Ayrıca, ananas meyvesinin ve köknar palamutunun kesitlerinde Fibonacci sayılarına rastlanmaktadır (Burton 2007).

F_n ile gösterilen Fibonacci sayıları dizisinin terimleri

$$\begin{aligned}
1 &= 1+0 \text{ veya } F_2 = F_1 + F_0 \\
2 &= 1+1 \text{ veya } F_3 = F_2 + F_1 \\
3 &= 2+1 \text{ veya } F_4 = F_3 + F_2 \\
5 &= 3+2 \text{ veya } F_5 = F_4 + F_3 \\
8 &= 5+3 \text{ veya } F_6 = F_5 + F_4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

özelliğini sağlar. Dolayısıyla, Fibonacci sayıları dizisinin genel formülü

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

ve $n \geqslant 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.3}$$

şeklindedir. Yani, Fibonacci sayıları dizisinin ikinci teriminden sonraki her terimi kendisinden hemen önceki iki terimin toplamıdır. Bu türde olan dizilere, yani her terimi önceki terimlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde olan dizilere indirgemeli diziler denir. Fibonacci sayıları dizisi matematik tarihinde bilinen ilk indirgemeli dizilerdendir.

1843 yılında Fransız matematikçi Jacques-Philippe-Marie Binet, F_n Fibonacci sayısını indisi olan n tam sayısı cinsinden belirleyen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{2.4}$$

bağıntısını vermiştir. Bu formüle Binet formülü denir. Binet formülü, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olan

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

sayılarının kullanılması ile elde edilir. Gerçekten, α ile β sayıları $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olduğundan

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \beta^2 = \beta + 1$$

olur. İlk eşitlik α^n ile ikinci eşitlik β^n ile çarpılırsa

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n, \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$$

elde edilir. Buradan,

$$\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n - \beta^{n+1} - \beta^n$$

ve

$$\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

bulunur.

$$H_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

yazılırsa son bağıntı $n \geqslant 1$ için

$$H_{n+2} = H_{n+1} + H_n$$

haline gelir. Ayrıca,

$$\alpha+\beta=1, \alpha-\beta=\sqrt{5}, \alpha\beta=-1$$

olduğundan

$$H_1=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1, H_2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta=1$$

bulunur. Dolayısıyla, $H_1, H_2, H_3, \ldots$ dizisi tam olarak Fibonacci sayıları dizisidir. Buradan, $n \geqslant 1$ için

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

elde edilir.

Bir $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ile tanımlanır. Üreteç fonksiyonları diziler ile ilgili problemleri fonksiyonlarla ilgili olan problemlere dönüştürür. Fonksiyonlarla çalışmak için daha fazla araçlar olduğundan üreteç fonksiyonları sayesinde bu araçlar, diziler ile ilgili olan problemlere uygulanabilir. Örneğin,

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{ve} \quad B(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

iki üreteç fonksiyonu olmak üzere bu fonksiyonların çarpımı

$$A(x)B(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.24. (Koshy 2001) *Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n=\frac{x}{1-x-x^2}$$

şeklindedir.

Kanıt F_n Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu $F(x)$ olsun. Bu durumda

$$F(x)=F_0+F_1x+F_2x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

olur.

$$xF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n$$

ve

$$x^2 F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

olduğundan

$$x + xF(x) + x^2 F(x) = x + F_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \{F_{n-1} + F_{n-2}\} x^n$$

elde edilir. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $n \geqslant 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olduğundan

$$x + xF(x) + x^2 F(x) = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F(x)$$

bulunur. Son eşitlikten $F(x)$ çözülürse

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

elde edilir. □

Üreteç fonksiyonu kullanılarak Fibonacci sayılarının bazı özelliklerini elde etmek mümkündür.

Teorem 2.25. (Koshy 2001) $n \geqslant 1$ *tam sayısı için*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

olur.

Kanıt Sol taraftan

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} F_k\right)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} F_k\right)x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} F_k\right)x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} F_k\right)x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} F_k\right)x^n \\
&= F_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} F_k - \sum_{k=0}^{n-1} F_k\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}F_k\right)x^n=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n$$

elde edilir. Teorem 2.24 gereği

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}F_k\right)x^n &= \frac{x}{(1-x)\left(1-x-x^2\right)}=\frac{1+x}{1-x-x^2}-\frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1-x-x^2}-x\right)-\frac{1}{1-x}\\ &= -\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x^2}\left(-x+\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\right)\\ &= -\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty}F_nx^n=-\frac{1}{1-x}+\sum_{n=2}^{\infty}F_nx^{n-2}\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{F_{n+2}-1\right\}x^n\end{aligned}$$

bulunur. Her iki taraftan x^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 2.26. (Koshy 2001) F_n *Fibonacci sayısı için*

$$F_{n+m}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1} \tag{2.5}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt m sayısı sabitlensin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\left(1-x-x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+m}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}F_{n+m}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+m}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+m}x^{n+2}\\ &= F_m+F_{m+1}x+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n+m}x^n\\ &\quad -F_mx-\sum_{n=1}^{\infty}F_{n+m}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+m}x^{n+2}\\ &= F_m-F_mx+F_{m+1}x+\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+m+2}x^{n+2}\\ &\quad -\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+m+1}x^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+m}x^{n+2}\\ &= F_m+\left(F_{m+1}-F_m\right)x\\ &\quad +\sum_{n=0}^{\infty}\left(F_{n+m+2}-F_{n+m+1}-F_{n+m}\right)x^{n+2}\\ &= F_m+xF_{m+1}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+m}x^n &= \frac{F_m + xF_{m-1}}{1-x-x^2} = F_m \frac{1}{x}\frac{x}{1-x-x^2} + F_{m-1}\frac{x}{1-x-x^2} \\
&= F_m \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + F_{m-1}\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= F_m \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n-1} + F_{m-1}\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= F_m \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n-1} + F_{m-1}\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= F_m \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n + F_{m-1}\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n\right) x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraftan x^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen bulunur. □

Teorem 2.25, Fibonacci sayılarının indirgeme bağıntısı ve tümevarım yardımıyla, Teorem 2.26 ise çifte tümevarımla kanıtlanabilir. Bu tez çalışmasında söz konusu sonuçların q-benzerlerinin kanıtları üreteç fonksiyonları kullanılarak verildiğinden bu sonuçlar da üreteç fonksiyonları kullanılarak kanıtlanmıştır.

Bu tez çalışmasında q-benzeri ifade edilecek olan diğer bir Fibonacci bağıntısı Cassini formülüdür.

Teorem 2.27. (Cassini formülü) $n \geqslant 1$ *tam sayısı için*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

olur.

Kanıt n üzerinde tümevarım yapılacaktır. $n = 1$ için

$$F_0F_2 - F_1^2 = -1 = (-1)^1$$

olduğundan ifade $n = 1$ için doğrudur. İfade bir pozitif k tam sayısı için doğru olsun, yani

$$F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$$

olsun.

$$\begin{aligned} F_kF_{k+2}-F_{k+1}^2 &= (F_{k+1}-F_{k-1})(F_k+F_{k+1})-F_{k+1}^2 \\ &= F_kF_{k+1}+F_{k+1}^2-F_kF_{k-1}-F_{k-1}F_{k+1}-F_{k+1}^2 \\ &= F_kF_{k+1}-F_kF_{k-1}-F_k^2-(-1)^k \\ &= F_kF_{k+1}-F_k(F_{k-1}+F_k)+(-1)^{k+1} \\ &= F_kF_{k+1}-F_kF_{k+1}+(-1)^{k+1}=(-1)^{k+1} \end{aligned}$$

olduğundan ifade $k+1$ için de doğrudur. Bu ise tümevarımı ve kanıtı tamamlar. □

Fibonacci sayılarının ilginç özelliklerinden biri ardışık iki Fibonacci sayısının aralarında asal olmasıdır.

Teorem 2.28. (Burton 2007) *Her* $n \geqslant 1$ *tam sayısı için* $\mathrm{OBEB}(F_n, F_{n+1}) = 1$ *olur.*

Kanıt $d>1$ tam sayısının F_n ve F_{n+1} Fibonacci sayılarını aynı anda böldüğü varsayılsın. Bu durumda, farkları olan $F_{n+1}-F_n=F_{n-1}$ sayısı da d tarafından bölünür. $F_n-F_{n-1}=F_{n-2}$ ve $d|F_{n-1}$ olduğundan F_{n-2} sayısı da d tarafından bölünür. Bu şekilde devam edilerek $d|F_{n-3}, d|F_{n-4}, \ldots, d|F_1$ elde edilir. Ancak, $F_1=1$ olduğundan F_1 sayısı $d>1$ olan bir tam sayı tarafından bölünemez. Bu çelişki ile $d=1$ elde edilir. □

Fibonacci sayılarının önemli özelliklerinden bir diğeri de iki Fibonacci sayısının ortak bölenlerinin en büyüğünün yine bir Fibonacci sayısı olmasıdır. Bu sonucun kanıtı için Teorem 2.26'da verilen (2.5) eşitliği ile aşağıdaki sonuçlara ihtiyaç vardır.

Teorem 2.29. (Burton 2007) $m \geqslant 1$ *ve* $n \geqslant 1$ *tam sayıları için* $F_m|F_{mn}$ *olur.*

Kanıt n üzerinde tümevarım yapılacaktır. $n=1$ için $F_m|F_m$ olduğundan ifade doğrudur. $n=1,2,\ldots,k$ için ifade doğru olsun. (2.5) eşitliği kullanılarak

$$F_{m(k+1)} = F_{mk+k} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$$

bulunur. Tümevarım adımı gereği $F_m|F_{mk}$ olduğundan bu eşitliğin sağ tarafı (dolayısıyla sol tarafı) F_m ile bölünür. Bu ise tümevarımı ve kanıtı tamamlar. □

Önteorem 2.30. (Burton 2007) $m=qn+r$ *ise* $\mathrm{OBEB}(F_m, F_n) = \mathrm{OBEB}(F_n, F_r)$ *olur.*

Kanıt (2.5) eşitliği gereği

$$\begin{aligned}\mathrm{OBEB}\,(F_m, F_n) &= \mathrm{OBEB}\,(F_{qn+r}, F_n)\\ &= \mathrm{OBEB}\,(F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n)\end{aligned}$$

bulunur. $b|c$ olmak üzere $\mathrm{OBEB}\,(a+c, b) = \mathrm{OBEB}\,(a, b)$ olduğundan Teorem 2.29 kullanılarak

$$\mathrm{OBEB}\,(F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n) = \mathrm{OBEB}\,(F_{qn-1}F_r, F_n)$$

elde edilir.

Şimdi, $\mathrm{OBEB}\,(F_{qn-1}, F_n) = 1$ olduğu gösterilecektir. Bunun için

$$\mathrm{OBEB}\,(F_{qn-1}, F_n) = d$$

yazılsın. $d|F_n$ ve $F_n|F_{qn}$ bağıntılarından $d|F_{qn}$ elde edilir. Dolayısıyla, d sayısı F_{qn-1} ve F_{qn} ardışık Fibonacci sayılarının bir pozitif ortak bölenidir. Ardışık Fibonacci sayıları Teorem 2.28 gereği aralarında asla olduğundan $d = 1$ bulunur. $\mathrm{OBEB}\,(a, c) = 1$ ise $\mathrm{OBEB}\,(a, bc) = \mathrm{OBEB}\,(a, b)$ olduğundan

$$\mathrm{OBEB}\,(F_m, F_n) = \mathrm{OBEB}\,(F_{qn-1}F_r, F_n) = \mathrm{OBEB}\,(F_r, F_n)$$

elde dilir. Bu ise kanıtı tamamlar. □

Teorem 2.31. (Burton 2007) *İki Fibonacci sayısının ortak bölenlerinin en büyüğü yine bir Fibonacci sayısıdır. Özel olarak,* $d = \mathrm{OBEB}\,(m, n)$ *olmak üzere* $\mathrm{OBEB}\,(F_m, F_n) = F_d$ *olur.*

Kanıt $m \geqslant n$ olsun. m ile n sayıları için Euclid algoritması uygulanırsa

$$\begin{aligned}
m &= q_1 n + r_1, && 0 < r_1 < n\\
n &= q_2 r_1 + r_2, && 0 < r_2 < r_1\\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 && 0 < r_3 < r_2\\
&\vdots && \vdots\\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, && 0 < r_n < r_{n-1}\\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0
\end{aligned}$$

denklemler sistemi elde edilir. Önteorem 2.30 gereği

$$\mathrm{OBEB}\left(F_m, F_n\right)=\mathrm{OBEB}\left(F_n, F_{r_1}\right)=\mathrm{OBEB}\left(F_{r_1}, F_{r_2}\right)=\cdots=\mathrm{OBEB}\left(F_{r_{n-1}}, F_{r_n}\right)$$

bulunur. $r_n|r_{n-1}$ olduğundan Teorem 2.29 gereği $F_{r_n}|F_{r_{n-1}}$ elde edilir. Buradan,

$$\mathrm{OBEB}\left(F_{r_{n-1}}, F_{r_n}\right)=F_{r_n}$$

bulunur. r_n sayısı Euclid algoritmasındaki sıfırdan farklı olan en son kalan olduğundan $\mathrm{OBEB}\,(m, n)$ sayısına eşit olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\mathrm{OBEB}\left(F_m, F_n\right)=F_{\mathrm{OBEB}(m, n)}$$

elde edilir. □

Teorem 2.31 kullanılarak $F_m|F_n$ ise $m|n$ sonucu elde edilebilir. Bu sonuç, Teorem 2.29 ile verilen ifadenin tersidir. Gerçekten, $F_m|F_n$ ise $\mathrm{OBEB}\left(F_m, F_n\right)=F_m$ olur. Teorem 2.31 gereği $\mathrm{OBEB}\left(F_m, F_n\right)=F_{\mathrm{OBEB}(m, n)}$ olduğundan $\mathrm{OBEB}\,(m, n)=m$ olur. Bu ise $m|n$ demektir.

Sonuç 2.32. *$n \geqslant m \geqslant 3$ tam sayıları için $F_m|F_n \Leftrightarrow m|n$ olmasıdır.*

Bu sonuç gereği $n>4$ tam sayısı bir birleşik sayı ise F_n Fibonacci sayısı da bir birleşik sayıdır. Dolayısıyla, asal olan Fibonacci sayıları için n indisi de asal olmalıdır ($F_2=1$ ve $F_4=3$ istisnaları hariç). Ancak, p bir asal sayı olduğunda F_p bir birleşik sayı olabilir. Örneğin, $F_{19}=37 \cdot 113$ bir birleşik sayıdır. Asal olan Fibonacci sayıları oldukça nadirdir. Şu ana kadar sadece 31 tane asal olan Fibonacci sayısı bilinmektedir. Bunların en büyüğü F_{81839} Fibonacci sayısıdır.

Bu bölümde son olarak Fibonacci sayılarının asal çarpanları ile ilgili bazı sonuçlar ele alınacaktır. $2|F_2$, $3|F_3$ ve $5|F_5$ olduğundan $p>5$ olan p asal sayılarını incelemek yeterlidir.

Teorem 2.33. (Burton 2007) *$p>5$ olan bir asal sayı için $p|F_{p-1}$ veya $p|F_{p+1}$ olur, fakat ikisi birden olmaz.*

Kanıt Binet formülü gereği

$$F_p=\frac{\alpha^p-\beta^p}{\sqrt{5}}$$

olur. α ve β sayılarının p. kuvvetleri binom teoremi kullanılarak açılırsa

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{1}{2^p\sqrt{5}}\left[1+\binom{p}{1}\sqrt{5}+\binom{p}{2}5+\binom{p}{3}5\sqrt{5}+\cdots+\binom{p}{p}5^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{5}\right] \\ &\quad -\frac{1}{2^p\sqrt{5}}\left[1-\binom{p}{1}\sqrt{5}+\binom{p}{2}5-\binom{p}{3}5\sqrt{5}+\cdots-\binom{p}{p}5^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{5}\right] \\ &= \frac{1}{2^{p-1}}\left[\binom{p}{1}+\binom{p}{3}5+\binom{p}{5}5^2+\cdots+\binom{p}{p}5^{\frac{p-1}{2}}\right] \end{aligned}$$

elde edilir. $1 \leqslant k \leqslant p-1$ için $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod p$ ve Fermat'nın küçük teoremi gereği $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ olduğundan

$$F_p \equiv 2^{p-1}F_p \equiv \binom{p}{p}5^{\frac{p-1}{2}} = 5^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

bulunur. Teorem 2.14(c) ve Legendre sembolünün tanımı gereği

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{5}{p}\right) \equiv \mp 1 \pmod p$$

olduğundan $F_p^2 \equiv 1 \pmod p$ elde edilir. Teorem 2.27 ile verilen

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Cassini formülünde $n = p$ yazılırsa

$$F_p^2 = F_{p-1}F_{p+1} + (-1)^{p-1}$$

elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak

$$F_{p-1}F_{p+1} + (-1)^{p-1} = F_{p-1}F_{p+1} + 1 = F_p^2 \equiv 1 \pmod p,$$

yani

$$F_{p-1}F_{p+1} \equiv 0 \pmod p$$

elde edilir. Dolayısıyla, F_{p-1}veya F_{p+1} sayılarından biri p tarafından bölünür ve ikisi aynı anda p tarafından bölünmez. Çünkü, $\mathrm{OBEB}\,(p-1, p+1) = 2$ olduğundan Teorem 2.31 gereği

$$\mathrm{OBEB}\,(F_{p-1}, F_{p+1}) = F_2 = 1$$

olur. □

Teorem 2.33'ün kanıtında olduğu gibi Binet formülü ve binom teoremi kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 2.34. *$p > 5$ bir asal sayı olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır:*
(1) $F_p \equiv \left(\frac{5}{p}\right) \pmod p$
(2) $F_{p+1} \equiv \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{5}{p}\right)\right] \pmod p$
(3) $F_{p-1} \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{5}{p}\right)\right] \pmod p$

Kanıt

(1) Teorem 2.33'ün kanıtından elde edilir.

(2) Teorem 2.33'ün kanıtında olduğu gibi Binet formülü ve binom teoremi kullanılarak

$$2^p F_{p+1} = \binom{p+1}{1} + \binom{p+1}{3}5 + \binom{p+1}{5}5^2 + \cdots + \binom{p+1}{p}5^{\frac{p-1}{2}}$$

elde edilir. Fermat'nın küçük teoreminden

$$2F_{p+1} \equiv 1 + 5^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

ve Euler kriteri gereği

$$F_{p+1} \equiv \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{5}{p}\right)\right] \pmod p$$

bulunur.

(3) Benzer şekilde Binet formülü ve binom teoremi kullanılarak

$$2^{p-2} F_{p-1} = \binom{p-1}{1} + \binom{p-1}{3}5 + \binom{p-1}{5}5^2 + \cdots + \binom{p-1}{p-2}5^{\frac{p-3}{2}}$$

elde edilir. Buradan

$$2^{p-2}F_{p-1} \equiv -\left(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{\frac{p-3}{2}}\right) = -\frac{1 - 5^{\frac{p-1}{2}}}{1-5} = \frac{1}{4}\left(1 - 5^{\frac{p-1}{2}}\right) \pmod p$$

Fermat'nın küçük teoremi ve Euler kriteri gereği

$$F_{p-1} \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{5}{p}\right)\right] \pmod p$$

elde edilir. □

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. q-Fibonacci Sayıları ve Rogers-Ramanujan Özdeşlikleri

Bu bölümde q-Fibonacci sayılarının tanımı ve Rogers-Ramanujan Özdeşlikleri ile ilişkileri ele alınacaktır.

Bölüm 2.5'de belirtildiği gibi Fibonacci sayıları

$$F_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \text{ ise}, \\ 1, & n = 1 \text{ ise}, \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & n > 1 \text{ ise}, \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Daha az bilinen

$$F_n(q) = \begin{cases} 0, & n = 0 \text{ ise}, \\ 1, & n = 1 \text{ ise}, \\ F_{n-1}(q) + q^{n-2} F_{n-2}(q), & n > 1 \text{ ise}, \end{cases} \tag{3.1}$$

polinomlar dizisi ilk olarak Schur (Schur 1917) tarafından tanımlanmıştır. $F_n(1) = F_n$ olduğu açıktır. $F_n(q)$ polinomu

$$F_{n+1}(q) = \sum_{0 \leqslant 2j \leqslant n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

ve

$$F_{n+1}(q) = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ \lfloor \frac{n-5j}{2} \rfloor \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

toplam gösterimlerine sahiptir.

$F_n(q)$ polinomlarından farklı olarak Schur (Schur 1917),

$$\widetilde{F}_n(q) = \begin{cases} 0, & n = 0 \text{ ise}, \\ 1, & n = 1 \text{ ise}, \\ \widetilde{F}_{n-1}(q) + q^{n-1} \widetilde{F}_{n-2}(q), & n > 1 \text{ ise}, \end{cases} \tag{3.4}$$

polinomlar dizisini de tanımlamıştır. $\widetilde{F}_n(1) = F_n$ olduğu açıktır ve $\widetilde{F}_n(q)$ polinomu

$$\widetilde{F}_{n+1}(q) = \sum_{0 \leqslant 2j \leqslant n} q^{j^2+j} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

ile

$$\widetilde{F}_{n+1}(q) = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2+j} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ \lfloor \frac{n+1-5j}{2} \rfloor + 1 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

eşitliklerini sağlar.

$F_n(q)$ ile $\widetilde{F}_n(q)$ polinomlarına q-Fibonacci sayıları veya Schur polinomları denir. Schur polinomlarının sağladıkları (3.2) ve (3.5) özellikleri Bölüm 3.2'de gösterilecektir. Bu polinomlar tarafından sağlanan (3.3) ve (3.6) eşitlikleri, Andrews tarafından verilen aşağıdaki ifadenin sonuçlarıdır.

Teorem 3.1. (Andrews 1970) *$\alpha = 0$ veya $\alpha = -1$ olmak üzere*

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2-\alpha j} \begin{bmatrix} n+1+\alpha-j \\ j \end{bmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}+2\alpha j} \begin{bmatrix} n+1 \\ \lfloor \frac{n+1-5j}{2} \rfloor - \alpha \end{bmatrix}$$

olur.

Kanıt Eşitliğin sol tarafı $L_n(\alpha; q)$ ve sağ tarafı $R_n(\alpha; q)$ olsun, yani

$$L_n(\alpha; q) = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2-\alpha j} \begin{bmatrix} n+1+\alpha-j \\ j \end{bmatrix},$$

ve

$$R_n(\alpha; q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}+2\alpha j} \begin{bmatrix} n+1 \\ \lfloor \frac{n+1-5j}{2} \rfloor - \alpha \end{bmatrix}$$

yazılsın. Bu toplamlardaki q-binom katsayılarının varlığı gereği $L_n(\alpha; q)$ ile $R_n(\alpha; q)$ birer polinomdur. Teoremin kanıtı için

$$L_0(0; q) = R_0(0; q) = 1, \tag{3.7}$$

$$L_1(0; q) = R_1(0; q) = 1 + q, \tag{3.8}$$

$$L_0(-1; q) = R_0(-1; q) = 1, \tag{3.9}$$

$$L_1(-1; q) = R_1(-1; q) = 1 \tag{3.10}$$

ve $n > 1$ için

$$L_n(\alpha; q) = L_{n-1}(\alpha; q) + q^n L_{n-2}(\alpha; q), \tag{3.11}$$

$$R_n(\alpha; q) = R_{n-1}(\alpha; q) + q^n R_{n-2}(\alpha; q) \tag{3.12}$$

olduğu gösterilecektir.

(3.7)-(3.10) eşitliklerinin kanıtları kolaylıkla elde edilir. Gerçekten, q-binom katsayısının tanımı gereği

$$L_0(0; q) = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2} \begin{bmatrix} 1-j \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$$

$$
\begin{aligned}
R_0(0;q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}\begin{bmatrix}1\\ \lfloor\frac{1-5j}{2}\rfloor\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=1,\\
L_1(0;q) &= \sum_{j=0}^{\infty}q^{j^2}\begin{bmatrix}2-j\\ j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+q\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=1+q,\\
R_1(0;q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}\begin{bmatrix}2\\ \lfloor\frac{2-5j}{2}\rfloor\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\frac{1-q^2}{1-q}=1+q,\\
L_0(-1;q) &= \sum_{j=0}^{\infty}q^{j^2+j}\begin{bmatrix}-j\\ j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=1,\\
R_0(-1;q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}\begin{bmatrix}1\\ \lfloor\frac{1-5j}{2}\rfloor+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=1,\\
L_1(-1;q) &= \sum_{j=0}^{\infty}q^{j^2+j}\begin{bmatrix}1-j\\ j\end{bmatrix}=1,\\
R_1(-1;q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}\begin{bmatrix}2\\ \lfloor\frac{2-5j}{2}\rfloor+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=1
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.11) ifadesinin kanıtı için Önteorem 2.16'da verilen

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n-1\\m-1\end{bmatrix}+q^m\begin{bmatrix}n-1\\m\end{bmatrix} \tag{2.1}$$

ve

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n-1\\m\end{bmatrix}+q^{n-m}\begin{bmatrix}n-1\\m-1\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

eşitlikleri kullanılacaktır. (2.2) eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
L_n(\alpha;q) &= \sum_{j=0}^{\infty}q^{j^2-\alpha j}\begin{bmatrix}n+1+\alpha-j\\ j\end{bmatrix}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}q^{j^2-\alpha j}\left(\begin{bmatrix}n+1+\alpha-j\\ j\end{bmatrix}+q^{n+1+\alpha-2j}\begin{bmatrix}n+\alpha-j\\ j-1\end{bmatrix}\right)\\
&= L_{n-1}(\alpha;q)+q^n\sum_{j=0}^{\infty}q^{(j-1)^2-\alpha(j-1)}\begin{bmatrix}n+\alpha-j\\ j-1\end{bmatrix}\\
&= L_{n-1}(\alpha;q)+q^n\sum_{j=-1}^{\infty}q^{j^2-\alpha j}\begin{bmatrix}n-1+\alpha-j\\ j\end{bmatrix}\\
&= L_{n-1}(\alpha;q)+q^n\sum_{j=0}^{\infty}q^{j^2-\alpha j}\begin{bmatrix}(n-2)+1+\alpha-j\\ j\end{bmatrix}\\
&= L_{n-1}(\alpha;q)+q^nL_{n-2}(\alpha;q)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(3.12) eşitliğinin kanıtı daha karmaşıktır. İlk olarak

$$
\begin{aligned}
R_{2n}(\alpha;q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}+2\alpha j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ \lfloor \frac{2n+1-5j}{2} \rfloor - \alpha \end{bmatrix} \\
&= \left(\sum_{\substack{j=-\infty \\ j \text{ çift}}}^{\infty} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \text{ tek}}}^{\infty} \right) (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}+2\alpha j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ \lfloor \frac{2n+1-5j}{2} \rfloor - \alpha \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(10j+1)+4\alpha j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ \lfloor \frac{2n+1-10j}{2} \rfloor - \alpha \end{bmatrix} \\
&\quad - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{(2j+1)(5j+3)+4\alpha j+2\alpha} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ \lfloor \frac{2n+1-10j-5}{2} \rfloor - \alpha \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(10j+1)+4\alpha j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j-\alpha \end{bmatrix} \\
&\quad - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{(2j+1)(5j+3)+4\alpha j+2\alpha} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2-5j-\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
R_{2n+1}(\alpha;q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}+2\alpha j} \begin{bmatrix} 2n+2 \\ \lfloor \frac{2n+2-5j}{2} \rfloor - \alpha \end{bmatrix} \\
&= \left(\sum_{\substack{j=-\infty \\ j \text{ çift}}}^{\infty} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \text{ tek}}}^{\infty} \right) (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}+2\alpha j} \begin{bmatrix} 2n+2 \\ \lfloor \frac{2n+2-5j}{2} \rfloor - \alpha \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(10j+1)+4\alpha j} \begin{bmatrix} 2n+2 \\ n+1-5j-\alpha \end{bmatrix} \\
&\quad - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{(2j+1)(5j+3)+4\alpha j+2\alpha} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ \lfloor n-5j-\frac{3}{2} \rfloor - \alpha \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(10j+1)+4\alpha j} \begin{bmatrix} 2n+2 \\ n+1-5j-\alpha \end{bmatrix} \\
&\quad - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{(2j+1)(5j+3)+4\alpha j+2\alpha} \begin{bmatrix} 2n+2 \\ n-2-5j-\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi, (2.1) ve (2.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
&R_{2n}(\alpha;q) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(10j+1)+4\alpha j}\left(\begin{bmatrix}2n\\ n-5j-\alpha\end{bmatrix}+q^{n+1+5j+\alpha}\begin{bmatrix}2n\\ n-1-5j-\alpha\end{bmatrix}\right)\\
&- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{(2j+1)(5j+3)+4\alpha j+2\alpha}\left(\begin{bmatrix}2n\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix}+q^{n-2-5j-\alpha}\begin{bmatrix}2n\\ n-2-5j-\alpha\end{bmatrix}\right)\\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(10j+1)+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n\\ n-5j-\alpha\end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{(2j+1)(5j+3)+4\alpha j+2\alpha}\begin{bmatrix}2n\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&\quad +q^{n+1+\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+6j+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n\\ n-1-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&\quad -q^{n+1+\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+6j+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n\\ n-2-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&= R_{2n-1}(\alpha;q)\\
&\quad +q^{n+1+\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+6j+4\alpha j}\left(\begin{bmatrix}2n-1\\ n-2-5j-\alpha\end{bmatrix}+q^{n-1-5j-\alpha}\begin{bmatrix}2n-1\\ n-1-5j-\alpha\end{bmatrix}\right)\\
&\quad -q^{n+1+\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+6j+4\alpha j}\left(\begin{bmatrix}2n-1\\ n-2-5j-\alpha\end{bmatrix}+q^{n+2+5j+\alpha}\begin{bmatrix}2n-1\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix}\right)\\
&= R_{2n-1}(\alpha;q)+q^{n+1+\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+j+n-1-\alpha+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n-1\\ n-1-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&\quad -q^{n+1+\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+11j+4\alpha j+n+2+\alpha}\begin{bmatrix}2n-1\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&= R_{2n-1}(\alpha;q)+q^{2n}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+j+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n-1\\ n-1-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&\quad -q^{2n}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+11j+3+4\alpha j+2\alpha}\begin{bmatrix}2n-1\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&= R_{2n-1}(\alpha;q)+q^{2n}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(10j+1)+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n-1\\ n-1-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&\quad -q^{2n}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{(2j+1)(5j+3)+4\alpha j+2\alpha}\begin{bmatrix}2n-1\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&= R_{2n-1}(\alpha;q)+q^{2n}R_{2n-2}(\alpha;q)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, tekrar (2.1) ve (2.2) eşitlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&R_{2n+1}(\alpha;q) \\
= &\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(10j+1)+4\alpha j}\left(\begin{bmatrix}2n+1\\ n-5j-\alpha\end{bmatrix}+q^{n+1-5j-\alpha}\begin{bmatrix}2n+1\\ n+1-5j-\alpha\end{bmatrix}\right) \\
&-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{(2j+1)(5j+3)+4\alpha j+2\alpha}\left(\begin{bmatrix}2n+1\\ n-2-5j-\alpha\end{bmatrix}+q^{n+4+5j+\alpha}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix}\right) \\
= &\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(10j+1)+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-5j-\alpha\end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{(2j+1)(5j+3)+4\alpha j+2\alpha}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-2-5j-\alpha\end{bmatrix} \\
&+q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2-4j+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n+1\\ n+1-5j-\alpha\end{bmatrix} \\
&-q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+16j+6+4\alpha j+4\alpha}\begin{bmatrix}2n+1\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix} \\
= &R_{2n}(\alpha;q) \\
&+q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2-4j+4\alpha j}\left(\begin{bmatrix}2n\\ n+1-5j-\alpha\end{bmatrix}+q^{n+5j+\alpha}\begin{bmatrix}2n\\ n-5j-\alpha\end{bmatrix}\right) \\
&-q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+16j+6+4\alpha j+4\alpha}\left(\begin{bmatrix}2n\\ n-4-5j-\alpha\end{bmatrix}+q^{n-3-5j-\alpha}\begin{bmatrix}2n\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix}\right) \\
= &R_{2n}(\alpha;q)+q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+j+n+\alpha+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n\\ n-5j-\alpha\end{bmatrix} \\
&-q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+11j+3+4\alpha j+n+3\alpha}\begin{bmatrix}2n\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix} \\
&+q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2-4j+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n\\ n+1-5j-\alpha\end{bmatrix} \\
&-q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+16j+6+4\alpha j+4\alpha}\begin{bmatrix}2n\\ n-4-5j-\alpha\end{bmatrix} \\
= &R_{2n}(\alpha;q)+q^{2n+1}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+j+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n\\ n-5j-\alpha\end{bmatrix} \\
&-q^{2n+1}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2+11j+3+4\alpha j+2\alpha}\begin{bmatrix}2n\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix} \\
&+q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2-4j+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n\\ n+1-5j-\alpha\end{bmatrix} \\
&-q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10(j-1)^2+16(j-1)+6+4\alpha(j-1)+4\alpha}\begin{bmatrix}2n\\ n-4-5(j-1)-\alpha\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
R_{2n+1}(\alpha;q) &= R_{2n}(\alpha;q) + q^{2n+1}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j(10j+1)+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n\\ n-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&\quad -q^{2n+1}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{(2j+1)(5j+3)+4\alpha j+2\alpha}\begin{bmatrix}2n\\ n-3-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&\quad +q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2-4j+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n\\ n+1-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&\quad -q^{n+1-\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{10j^2-4j+4\alpha j}\begin{bmatrix}2n\\ n+1-5j-\alpha\end{bmatrix}\\
&= R_{2n}(\alpha;q) + q^{2n+1}R_{2n-2}(\alpha;q)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, genel olarak

$$R_n(\alpha;q) = R_{n-1}(\alpha;q) + q^n R_{n-2}(\alpha;q)$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar. □

Teorem 3.1'de $\alpha = 0$ yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2}\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}\begin{bmatrix}n+1\\ \lfloor\frac{n+1-5j}{2}\rfloor\end{bmatrix}$$

elde edilir. Sol tarafta yer alan $\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix}$ q-binom katsayısı $n+1-j < j$ olduğunda, yani $2j > n+1$ olduğunda sıfır olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{0\leqslant 2j\leqslant n+1} q^{j^2}\begin{bmatrix}n+1-j\\ j\end{bmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}\begin{bmatrix}n+1\\ \lfloor\frac{n+1-5j}{2}\rfloor\end{bmatrix}$$

elde edilir. n yerine $n-1$ yazılırsa (3.2) gereği (3.3) ifadesi elde edilir.

Benzer şekilde Teorem 3.1'de $\alpha = -1$ yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2+j}\begin{bmatrix}n-j\\ j\end{bmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}\begin{bmatrix}n+1\\ \lfloor\frac{n+1-5j}{2}\rfloor+1\end{bmatrix}$$

bulunur. Sol taraftaki seride q-binom katsayısı $n-j < j$ olduğunda, yani $2j > n$ olduğunda sıfır olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{0\leqslant 2j\leqslant n} q^{j^2+j}\begin{bmatrix}n-j\\ j\end{bmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}\begin{bmatrix}n+1\\ \lfloor\frac{n+1-5j}{2}\rfloor+1\end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu ise (3.5) eşitliği ile beraber (3.6) ifadesini verir.

Birinci Rogers-Ramanujan Özdeşliği, $n \to \infty$ için (3.3) eşitliğinin sağ tarafı olan

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \, q^{\frac{j(5j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ \left\lfloor \frac{n-5j}{2} \right\rfloor \end{bmatrix}$$

bağıntısından elde edilir. Gerçekten,

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2} \prod_{i=1}^{j} \frac{1-q^{n-j-i+1}}{1-q^i}$$

eşitliğinde $n \to \infty$ için

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2} \prod_{i=1}^{j} \frac{1}{1-q^i} &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} q^{j^2} \prod_{i=1}^{j} \frac{1}{1-q^i} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^j)} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(q;q)_j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(q;q)_j} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \, q^{\frac{j(5j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ \left\lfloor \frac{n-5j}{2} \right\rfloor \end{bmatrix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \, q^{\frac{j(5j+1)}{2}} \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-5j}{2} \right\rfloor} \frac{1-q^{\left\lfloor \frac{n-5j}{2} \right\rfloor -i+1}}{1-q^i}$$

eşitliğinde $n \to \infty$ için

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \, q^{\frac{j(5j+1)}{2}} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i} = \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \, q^{\frac{j(5j+1)}{2}}$$

elde edilir. Tanım 2.19 ile verilen Ramanujan genel teta serisinde $a = -q^2$ ve $b = -q^3$ yazılırsa

$$\begin{aligned} f\left(-q^2,-q^3\right) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} \, q^{j(j+1)} \, (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}} \, q^{\frac{3j(j-1)}{2}} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j^2} \, q^{\frac{2j^2+2j+3j^2-3j}{2}} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \, q^{\frac{j(5j-1)}{2}} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \, q^{\frac{j(5j+1)}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 2.23 ile verilen Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinin Ramanujan genel teta fonksiyonu cinsinden gösterimi olan

$$f\,(a,b) = (-a;ab)_\infty \, (-b;ab)_\infty \, (ab;ab)_\infty$$

eşitliği gereği

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}} = f\left(-q^2,-q^3\right) = \left(q^2;q^5\right)_\infty \left(q^3;q^5\right)_\infty \left(q^5;q^5\right)_\infty$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{j^2}}{(q;q)_j} &= \frac{1}{(q;q)_\infty}\left(q^2;q^5\right)_\infty \left(q^3;q^5\right)_\infty \left(q^5;q^5\right)_\infty \\ &= \frac{1}{\left(q;q^5\right)_\infty \left(q^4;q^5\right)_\infty} = \prod_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^{5j+1}\right)\left(1-q^{5j+4}\right)}\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise birinci Rogers-Ramanujan Özdeşliğidir.

Benzer şekilde, (3.6) eşitliğinin her iki tarafında $n\to\infty$ limiti alınırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{j^2+j}}{(q;q)_j} = \frac{1}{\left(q^2;q^5\right)_\infty \left(q^3;q^5\right)_\infty} = \prod_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^{5j+2}\right)\left(1-q^{5j+3}\right)}$$

bulunur. Bu ise ikinci Rogers-Ramanujan Özdeşliğidir.

3.2. q-Fibonacci Sayılarının Üreteç Fonksiyonları

$F_n(q)$ ve $\widetilde{F}_n(q)$ q-Fibonacci sayılarının sağladığı (3.2) ve (3.5) polinom gösterimleri ile çok sayıda diğer özellikleri, bu sayıların üreteç fonksiyonları kullanılarak elde edilebilir. Bu bölümde ilk olarak $F_n(q)$ q-Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu verilerek (3.2) eşitliğinin kanıtı ele alınacaktır. Daha sonra, $\widetilde{F}_n(q)$ q-Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu ile (3.5) ifadesinin kanıtı verilecektir. Bu bölümdeki sonuçlar Andrews (Andrews 2004) tarafından verilmiştir.

$f(x)$ bir polinom olmak üzere η operatörü

$$\eta f(x) = f(qx)$$

olarak tanımlansın.

Teorem 3.2. *$F_n(q)$ q-Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n(q)\,x^n = \frac{1}{1-x-x^2\eta}x$$

şeklindedir.

Kanıt Kanıt için

$$\left(1-x-x^2\eta\right)\sum_{n=0}^{\infty}F_n\left(q\right)x^n=x$$

olduğunu göstermek yeterlidir. η operatörünün tanımından

$$\begin{aligned}\left(1-x-x^2\eta\right)\sum_{n=0}^{\infty}F_n\left(q\right)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}F_n\left(q\right)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}F_n\left(q\right)x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}F_n\left(q\right)q^nx^{n+2}\\ &= F_0\left(q\right)+F_1\left(q\right)+\sum_{n=2}^{\infty}F_n\left(q\right)x^n\\ &\quad -F_0\left(q\right)x-\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}\left(q\right)x^n-\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}\left(q\right)q^{n-2}x^n\\ &= F_0\left(q\right)+\left[F_1\left(q\right)-F_0\left(q\right)\right]x\\ &\quad +\sum_{n=2}^{\infty}\left[F_n\left(q\right)-\left(F_{n-1}\left(q\right)+q^{n-2}F_{n-2}\left(q\right)\right)\right]x^n\end{aligned}$$

bulunur. $F_n\left(q\right)$ q-Fibonacci sayısının tanımından

$$\left(1-x-x^2\eta\right)\sum_{n=0}^{\infty}F_n\left(q\right)x^n=x$$

elde edilir. □

(3.2) eşitliğinin kanıtı için aşağıdaki ifadelere ihtiyaç vardır.

Önteorem 3.3. $n\geqslant 0$ *tam sayısı için*

$$\left(x+x^2\eta\right)^nx=x^{n+1}\sum_{k=0}^{n}x^kq^{k^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$$

olur.

Kanıt Önteoremde verilen eşitliğin kanıtı için n üzerinde tümevarım kullanılacaktır. $n=0$ için önteoremdeki eşitlikten $x=x$ elde edilir. Dolayısıyla, ifade $n=0$ için doğrudur. İfade n için doğru olsun, yani

$$\left(x+x^2\eta\right)^nx=x^{n+1}\sum_{k=0}^{n}x^kq^{k^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$$

olsun. η operatörünün tanımı ve (2.2) ile verilen Pascal formülünün q-benzeri gereği

$$\begin{aligned}
\left(x+x^2\eta\right)^{n+1}x &= \left(x+x^2\eta\right)\left(x+x^2\eta\right)^n x = \left(x+x^2\eta\right)^n x^{n+1}\sum_{k=0}^{n} x^k q^{k^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \\
&= x^{n+2}\sum_{k=0}^{n} x^k q^{k^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + x^{n+3}\sum_{k=0}^{n} x^k q^{k^2+n+1+k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \\
&= x^{n+2}\sum_{k=0}^{n} x^k q^{k^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + x^{n+2}\sum_{k=0}^{n} x^{k+1} q^{k^2+n+1+k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \\
&= x^{n+2}\sum_{k=0}^{n} x^k q^{k^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + x^{n+2}\sum_{k=1}^{n+1} x^k q^{(k-1)^2+n+k}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \\
&= x^{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} x^k q^{k^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + x^{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} x^k q^{k^2} q^{n-k+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \\
&= x^{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} x^k q^{k^2}\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}\right) \\
&= x^{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} x^k q^{k^2}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise tümevarımı ve kanıtı tamamlar. □

Önteorem 3.3'ün bir sonucu olarak aşağıdaki ifade elde edilir.

Sonuç 3.4. *$F_n(q)$ q-Fibonacci sayıları için*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(q)\, x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1} q^{k^2}}{(x;q)_{k+1}}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt Teorem 3.2 ve Önteorem 3.3 gereği

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} F_n(q)\, x^n &= \frac{1}{1-x-x^2\eta}x = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x+x^2\eta\right)^n x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\sum_{k=0}^{n} x^k q^{k^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x^{n+k+1} x^k q^{k^2}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} q^{k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} q^{k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k \\ n \end{bmatrix} x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.21 ile verilen binom teoreminin q-benzeri gereği

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k\\ n\end{bmatrix}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q)_{n+k}}{(q)_k\,(q)_n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(q^{k+1}\right)_n}{(q)_n}x^n\\ &= \frac{\left(q^{k+1}x\right)_\infty}{(x)_\infty}=\frac{1}{(1-x)\,(1-qx)\cdots(1-q^kx)}\\ &= \frac{1}{(x;q)_{k+1}}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n\,(q)\,x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}q^{k^2}}{(x;q)_{k+1}}$$

bulunur. □

Sonuç 3.4'ün kanıtı kullanılarak $F_n\,(q)$ q-Fibonacci sayılarının sağladığı (3.2) bağıntısı elde edilir.

Sonuç 3.5. *$F_n\,(q)$ q-Fibonacci sayıları için*

$$F_n\,(q)=\sum_{k=0}^{\infty}q^{k^2}\begin{bmatrix}n-k-1\\ k\end{bmatrix}$$

olur.

Kanıt Sonuç 3.4'ün kanıtında elde edilen

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n\,(q)\,x^n=\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k+1}q^{k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k\\ k\end{bmatrix}x^n$$

eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}F_n\,(q)\,x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^{k^2}\begin{bmatrix}n+k\\ k\end{bmatrix}\right)x^{n+2k+1}\\ &= \sum_{n=2k+1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^{k^2}\begin{bmatrix}n-k-1\\ k\end{bmatrix}\right)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^{k^2}\begin{bmatrix}n-k-1\\ k\end{bmatrix}\right)x^n\end{aligned}$$

bulunur. x^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

Sonuç 3.5'de n yerine $n+1$ yazılırsa, $2k > n$ olduğunda q-binom katsayısı sıfır olacağından (3.2) bağıntısı elde edilir.

$F_n(q)$ q-Fibonacci sayıları için yukarıda ele alınan ve kanıtlanan sonuçlar kullanılarak $\widetilde{F}_n(q)$ q-Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{F}_n(q)\, x^n = \frac{1}{1-x-qx^2\eta} x$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,

$$\left(x+qx^2\eta\right)^n x = x^{n+1} \sum_{k=0}^{n} x^k q^{k^2+k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{F}_n(q)\, x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1} q^{k^2+k}}{(x;q)_{k+1}}$$

ve

$$\widetilde{F}_n(q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2+k} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}$$

eşitlikleri sırasıyla Önteorem 3.3, Sonuç 3.4 ve Sonuç 3.5'in kanıtlarında kullanılan düşüncelerle kanıtlanır. Son eşitlikten, $\widetilde{F}_n(q)$ q-Fibonacci sayılarının sağladığı (3.5) bağıntısı elde edilir.

3.3. q-Fibonacci Sayılarının Bazı Özellikleri

q-Fibonacci sayıları, bilinen Fibonacci sayılarının sağladığı özelliklere benzer özellikler sağlarlar. Örneğin, Fibonacci sayılarının sağladığı Teorem 2.25 ile verilen

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{k+2} - 1$$

eşitliğinin q-benzeri aşağıdaki şekildedir.

Teorem 3.6. (Andrews 2004) $F_n(q)$ *q-Fibonacci sayıları için*

$$F_{n+2}(q) - 1 = \sum_{k=1}^{n} q^k F_k(q)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt $F_n(q)$ q-Fibonacci sayısının üreteç fonksiyonu ve η operatörünün tanımından

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left[F_{n+2}(q)-1\right]x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}F_{n+2}(q)\,x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=-\frac{1}{1-x}+\sum_{n=2}^{\infty}F_n(q)\,x^{n-2}\\
&= -\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty}F_n(q)\,x^n\\
&= -\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x^2}\left(-F_0(q)-F_1(q)\,x+\sum_{n=0}^{\infty}F_n(q)\,x^n\right)\\
&= -\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x^2}\left(-x+\sum_{n=0}^{\infty}F_n(q)\,x^n\right)\\
&= -\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}F_n(q)\,x^n\\
&= -\frac{1}{x(1-x)}+\frac{1}{x^2}\frac{1}{1-x-x^2\eta}x\\
&= -\frac{1}{1-x}\frac{1-x-x^2\eta}{x^2}\frac{1}{1-x-x^2\eta}x\\
&\quad+\frac{1-x}{x^2(1-x)}\frac{1}{1-x-x^2\eta}x\\
&= -\frac{1}{1-x}\frac{1-x-x^2\eta}{x^2}\frac{1}{1-x-x^2\eta}x\\
&\quad+\frac{1}{x^2(1-x)}\frac{1}{1-x-x^2\eta}x-\frac{1}{x(1-x)}\frac{1}{1-x-x^2\eta}x\\
&= \frac{1}{1-x}\left(-\frac{1}{x^2}\left(1-x-x^2\eta\right)+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{1-x-x^2\eta}x\\
&= \frac{1}{1-x}\left(\frac{-1+x+x^2\eta+1-x}{x^2}\right)\frac{1}{1-x-x^2\eta}x\\
&= \frac{1}{1-x}\eta\frac{1}{1-x-x^2\eta}x=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-xq-x^2q^2\eta}xq\\
&= \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}F_n(q)\,(xq)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{n=0}^{\infty}F_n(q)\,q^nx^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}q^kF_k(q)\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}q^kF_k(q)\right)x^n
\end{aligned}$$

yani

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[F_{n+2}(q)-1\right]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}q^kF_k(q)\right)x^n$$

elde edilir. x^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen bulunur. $\square$

Fibonacci sayılarının sağladığı Teorem 2.26 ile verilen

$$F_{m+n}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n-1}$$

eşitliğinin q-benzerini elde etmek için $F_n(q)$ q-Fibonacci sayılarının bir genellemesi kullanılacaktır (Andrews 2004).

t bir parametre olmak üzere $F_n(t,q)$ polinomu

$$F_n(t,q) = \begin{cases} 0, & n=0 \text{ ise}, \\ 1, & n=1 \text{ ise}, \\ F_{n-1}(t,q) + tq^{n-2}F_{n-2}(t,q), & n>1 \text{ ise}. \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $F_n(t,q)$ polinomunun üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t,q)\, x^n = \frac{1}{1-x-tx^2\eta} x$$

şeklindedir. Bu eşitliğin doğruluğu Teorem 3.2'nin kanıtındaki adımlar takip edilerek gösterilebilir. Üreteç fonksiyonu kullanılarak $F_n(t,q)$ polinomları için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.7. (Andrews 2004) *$n \geqslant 0$ ve $m \geqslant 1$ tam sayıları için*

$$F_{m+n}(t,q) = F_m(t,q)\, F_{n+1}\left(tq^{m-1}, q\right) + tq^{m-1}F_{m-1}(t,q)\, F_n(tq^m, q)$$

elde edilir.

Kanıt $m \geqslant 1$ olmak üzere üreteç fonksiyonu ve η operatörü tanımlarından

$$\begin{aligned}
&\left(1-x-tx^2q^m\eta\right)\sum_{n=0}^{\infty} F_{m+n}(t,q)\, x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_{m+n}(t,q)\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} F_{m+n}(t,q)\, x^{n+1} - t\sum_{n=0}^{\infty} F_{m+n}(t,q)\, q^{m+n}x^{n+2} \\
&= F_m(t,q) + xF_{m+1}(t,q) + \sum_{n=2}^{\infty} F_{m+n}(t,q)\, x^n \\
&\quad -xF_m(t,q) - \sum_{n=1}^{\infty} F_{m+n}(t,q)\, x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} F_{m+n}(t,q)\, tq^{m+n}x^{n+2} \\
&= F_m(t,q) + x\left[F_{m+1}(t,q) - F_m(t,q)\right] \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left[F_{m+n}(t,q) - F_{m+n-1}(t,q) - tq^{m+n-2}F_{m+n-2}(t,q)\right] x^n \\
&= F_m(t,q) + x\left[F_m(t,q) + tq^{m-1}F_{m-1}(t,q) - F_m(t,q)\right] \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left[F_{m+n}(t,q) - F_{m+n}(t,q)\right] x^n \\
&= F_m(t,q) + xtq^{m-1}F_{m-1}(t,q)
\end{aligned}$$

veya denk olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{m+n}(t,q)\, x^n = \frac{1}{1-x-tx^2q^m\eta}\left(F_m(t,q) + xtq^{m-1}F_{m-1}(t,q)\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte t yerine tq^{-m} yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{m+n}\left(tq^{-m},q\right) x^n = \frac{1}{1-x-tx^2\eta}\left(F_m\left(tq^{-m},q\right) + xtq^{-1}F_{m-1}\left(tq^{-m},q\right)\right)$$

bulunur. $m=1$ ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}\left(tq^{-1},q\right) x^n = \frac{1}{1-x-tx^2\eta}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} F_{m+n}\left(tq^{-m},q\right) x^n &= F_m\left(tq^{-m},q\right)\frac{1}{1-x-tx^2\eta} \\
&+ tq^{-1}F_{m-1}\left(tq^{-m},q\right)\frac{1}{1-x-tx^2\eta}x \\
&= F_m\left(tq^{-m},q\right)\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}\left(tq^{-1},q\right)x^n \\
&+ tq^{-1}F_{m-1}\left(tq^{-m},q\right)\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t,q)\,x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. x^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen bağıntı kanıtlanmış olur. □

$F_n(t,q)$ polinomunun tanımı ve tümevarım kullanılarak Teorem 2.27 ile verilen $n \geqslant 1$ için

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Cassini formülünün q-benzeri aşağıdaki şekilde elde edilir.

Teorem 3.8. (Cigler 2003) $n \geqslant 1$ *tam sayısı için*

$$F_{n-1}(q,q)\,F_{n+1}(q) - F_n(q,q)\,F_n(q) = (-1)^n\, q^{\binom{n}{2}}$$

olur.

Kanıt $n=1$ için eşitliğin sol tarafı

$$F_0(q,q)\,F_2(q) - F_1(q,q)\,F_1(q) = -1$$

ve sağ tarafı

$$(-1)^1 q^{\binom{1}{2}} = -1$$

olduğundan ifade $n = 1$ için doğrudur. İfade n için doğru olsun. $n + 1$ için

$$\begin{aligned}
& F_n(q,q) F_{n+2}(q) - F_{n+1}(q,q) F_{n+1}(q) \\
= \; & \left[F_{n-1}(q,q) + q^{n-1} F_{n-2}(q,q)\right] \left[F_{n+1}(q) + q^n F_n(q)\right] \\
& - \left[F_n(q,q) + q^n F_{n-1}(q,q)\right] \left[F_n(q) + q^{n-1} F_{n-1}(q)\right] \\
= \; & F_{n-1}(q,q) F_{n+1}(q) + q^{n-1} F_{n-2}(q,q) F_{n+1}(q) + q^{2n-1} F_{n-2}(q,q) F_n(q) \\
& - F_n(q,q) F_n(q) - q^{n-1} F_n(q,q) F_{n-1}(q) - q^{2n-1} F_{n-1}(q,q) F_{n-1}(q) \\
= \; & F_{n-1}(q,q) F_{n+1}(q) - F_n(q,q) F_n(q) \\
& + q^{2n-1} \left[F_{n-2}(q,q) F_n(q) - F_{n-1}(q,q) F_{n-1}(q)\right] \\
& + q^{n-1} F_{n-2}(q,q) \left\{F_n(q) + q^{n-1} F_{n-1}(q)\right\} \\
& - q^{n-1} F_{n-1}(q) \left\{F_{n-1}(q,q) + q^{n-1} F_{n-2}(q,q)\right\} \\
= \; & (-1)^n q^{\binom{n}{2}} + q^{2n-1} (-1)^{n-1} q^{\binom{n-1}{2}} \\
& + q^{n-1} \left[F_{n-2}(q,q) F_n(q) - F_{n-1}(q,q) F_{n-1}(q)\right] \\
& + q^{2n-2} \left[F_{n-2}(q,q) F_{n-1}(q) - F_{n-2}(q,q) F_{n-1}(q)\right] \\
= \; & (-1)^n q^{\binom{n}{2}} + q^{2n-1} (-1)^{n-1} q^{\binom{n-1}{2}} + q^{n-1} (-1)^{n-1} q^{\binom{n-1}{2}} \\
= \; & (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} + (-1)^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2n-1} + (-1)^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n-1} \\
= \; & (-1)^{n+1} \left[-q^{\frac{n(n-1)}{2}} + q^{\frac{n^2-3n+2+4n-2}{2}} + q^{\frac{n^2-3n+2+2n-2}{2}}\right] \\
= \; & (-1)^{n+1} \left[-q^{\frac{n(n-1)}{2}} + q^{\frac{n(n+1)}{2}} + q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right] = (-1)^{n+1} q^{\frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar. □

3.4. q-Fibonacci Sayılarının Bazı Bölünebilme Özellikleri

q-Fibonacci sayıları bölünebilme anlamında da bilinen Fibonacci sayılarının sağladığı özelliklere benzer özellikler sağlarlar.

Pozitif n tam sayısı için $[n]_q$ q-tam sayısı

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.9. (Pan 2006) $p \neq 5$ *bir tek asal sayı olmak üzere*

$$F_{p+1}(q) \equiv \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{5}{p}\right)\right) \pmod{[p]_q} \tag{3.13}$$

ve $1 \leqslant \alpha_p \leqslant 4$, $p\alpha_p \equiv 1 \pmod 5$ *özelliğinde olan* α_p *tam sayısı için*

$$\widetilde{F}_p(q) \equiv \left(\frac{5}{p}\right) q^{(p\alpha_p-1)/5} \pmod{[p]_q} \tag{3.14}$$

kongrüansları sağlanır.

Kanıt İlk olarak (3.13) denkliği kanıtlanacaktır. (3.3) eşitliği ile verilen

$$F_{n+1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ \left\lfloor \frac{n-5j}{2} \right\rfloor \end{bmatrix}$$

ifadesinde n yerine p asalı yazılırsa

$$F_{p+1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}} \begin{bmatrix} p \\ \left\lfloor \frac{p-5j}{2} \right\rfloor \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}$ q-binom katsayısı için

$$\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} \equiv \begin{cases} 1 \pmod{[p]_q}, & k=0 \text{ veya } k=p \text{ ise}, \\ 0 \pmod{[p]_q}, & 1 \leqslant k \leqslant p-1 \text{ ise}, \end{cases} \tag{3.15}$$

kongrüansları geçerli olduğundan

$$J = \left\{ j : \left\lfloor \frac{p-5j}{2} \right\rfloor = 0 \text{ veya } p \right\}$$

olmak üzere

$$F_{p+1}(q) \equiv \sum_{j\in J} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}} \pmod{[p]_q}$$

olur. $p \neq 5$ olduğundan p asalı $p = 5m+1$, $5m+2$, $5m+3$ ve $5m+4$ gösterimlerinden birine sahiptir. Her bir gösterim için $\left\lfloor \frac{p-5j}{2} \right\rfloor = 0$ veya p ifadesi incelendiğinde

$$J = \left\{ j : \left\lfloor \frac{p-5j}{2} \right\rfloor = 0 \text{ veya } p \right\} = \begin{cases} \left\{\frac{p-1}{5}\right\}, & p \equiv 1 \pmod 5 \text{ ise}, \\ \left\{-\frac{p+1}{5}\right\}, & p \equiv 4 \pmod 5 \text{ ise}, \\ \emptyset, & p \equiv \pm 2 \pmod 5 \text{ ise}, \end{cases}$$

elde edilir. $p \equiv 1 \pmod 5$ ise

$$\begin{aligned} F_{p+1}(q) &= (-1)^{\frac{p-1}{5}} q^{\frac{\frac{p-1}{2}\left(5\frac{p-1}{5}+1\right)}{2}} = q^{\frac{p(p-1)}{10}} = 1 - \frac{1-q^p}{1-q}(1-q)\frac{1-q^{\frac{p(p-1)}{10}}}{1-q^p} \\ &= 1 - [p]_q (1-q) \frac{1-q^{\frac{p(p-1)}{10}}}{1-q^p} \equiv 1 \pmod{[p]_q} \end{aligned}$$

ve $p \equiv 4 \pmod 5$ ise

$$\begin{aligned} F_{p+1}(q) &= (-1)^{-\frac{p+1}{5}} q^{\frac{-\frac{p+1}{2}\left(-5\frac{p+1}{5}+1\right)}{2}} = q^{\frac{p(p+1)}{10}} = 1 - \frac{1-q^p}{1-q}(1-q)\frac{1-q^{\frac{p(p+1)}{10}}}{1-q^p} \\ &= 1 - [p]_q (1-q) \frac{1-q^{\frac{p(p+1)}{10}}}{1-q^p} \equiv 1 \pmod{[p]_q} \end{aligned}$$

bulunur. $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ ise $F_{p+1}(q)$ için karşılık gelen toplam bir boş toplam olacağından

$$F_{p+1}(q) \equiv 0 \pmod{[p]_q}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left(\frac{5}{p}\right) \equiv \begin{cases} 1, & p \equiv \pm 1 \pmod 5 \text{ ise,} \\ -1, & p \equiv \pm 2 \pmod 5 \text{ ise,} \end{cases}$$

olduğundan

$$F_{p+1}(q) \equiv \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{5}{p}\right)\right) \pmod{[p]_q}$$

bulunur.

Şimdi (3.14) ifadesi kanıtlanacaktır. (3.6) ifadesinden

$$\widetilde{F}_p(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}} \begin{bmatrix} p \\ \left\lfloor \frac{p-5j}{2} \right\rfloor + 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan (3.15) gereği

$$J = \left\{ j : \left\lfloor \frac{p-5j}{2} \right\rfloor + 1 = 0 \text{ veya } p \right\}$$

olmak üzere

$$\widetilde{F}_p(q) \equiv \sum_{j \in J}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}} \pmod{[p]_q}$$

olur. $p \neq 5$ olduğundan p asalı $p = 5m+1$, $5m+2$, $5m+3$ ve $5m+4$ gösterimlerinden birine sahiptir. Her bir gösterim için $\left\lfloor \frac{p-5j}{2} \right\rfloor + 1 = 0$ veya p ifadesi incelendiğinde

$$J = \left\{ j : \left\lfloor \frac{p-5j}{2} \right\rfloor + 1 = 0 \text{ veya } p \right\} = \begin{cases} \left\{-\frac{p-1}{5}\right\}, & p \equiv 1 \pmod 5 \text{ ise,} \\ \left\{-\frac{p-2}{5}\right\}, & p \equiv 2 \pmod 5 \text{ ise,} \\ \left\{\frac{p+2}{5}\right\}, & p \equiv 3 \pmod 5 \text{ ise,} \\ \left\{\frac{p+1}{5}\right\}, & p \equiv 4 \pmod 5 \text{ ise,} \end{cases}$$

elde edilir. $p \equiv 1 \pmod 5$ ise $p = 5m+1$, m çift ve $j = -\frac{p-1}{5}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_p(q) &= (-1)^{-\frac{p-1}{5}} q^{\frac{-\frac{p-1}{2}\left(-5\frac{p-1}{5}-3\right)}{2}} = q^{\frac{(p-1)(p+2)}{10}} = q^{\frac{p-1}{5}} - q^{\frac{p-1}{5}} + q^{\frac{p-1}{5}\frac{p+2}{2}} \\
&= q^{\frac{p-1}{5}} - q^{\frac{p-1}{5}}\left(1 - q^{\frac{p(p-1)}{10}}\right) = q^{\frac{p-1}{5}} - q^{\frac{p-1}{5}} \frac{1-q^{\frac{p(p-1)}{10}}}{1-q^p}\frac{1-q^p}{1-q} \\
&= q^{\frac{p-1}{5}} - q^{\frac{p-1}{5}} [p]_q \frac{1-q^{\frac{p(p-1)}{10}}}{1-q^p} \equiv q^{\frac{p-1}{5}} \pmod{[p]_q}
\end{aligned}$$

bulunur. $p \equiv 2 \pmod 5$ ise $p = 5m+2$, m tek ve $j = -\frac{p-2}{5}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_p(q) &= (-1)^{-\frac{p-2}{5}} q^{\frac{-\frac{p-2}{2}\left(-5\frac{p-2}{5}-3\right)}{2}} = -q^{\frac{(p-2)(p+1)}{10}} = q^{\frac{3p-1}{5}} - q^{\frac{3p-1}{5}} - q^{\frac{p-2}{5}\frac{p+1}{2}} \\
&= -q^{\frac{3p-1}{5}} + q^{\frac{3p-1}{5}}\left(1 - q^{\frac{p(p-7)}{10}}\right) = -q^{\frac{3p-1}{5}} + q^{\frac{3p-1}{5}} \frac{1-q^{\frac{p(p-7)}{10}}}{1-q^p}\frac{1-q^p}{1-q} \\
&= -q^{\frac{3p-1}{5}} + q^{\frac{3p-1}{5}} [p]_q \frac{1-q^{\frac{p(p-7)}{10}}}{1-q^p} \equiv -q^{\frac{3p-1}{5}} \pmod{[p]_q}
\end{aligned}$$

bulunur. $p \equiv 3 \pmod 5$ ise $p = 5m+3$, m çift ve $j = \frac{p+2}{5}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_p(q) &= (-1)^{\frac{p+2}{5}} q^{\frac{\frac{p+2}{2}\left(5\frac{p+2}{5}-3\right)}{2}} = -q^{\frac{(p-1)(p+2)}{10}} = q^{\frac{2p-1}{5}} - q^{\frac{2p-1}{5}} - q^{\frac{p-1}{5}\frac{p+2}{2}} \\
&= -q^{\frac{2p-1}{5}} + q^{\frac{2p-1}{5}}\left(1 - q^{\frac{p(p-3)}{10}}\right) = -q^{\frac{2p-1}{5}} + q^{\frac{2p-1}{5}} \frac{1-q^{\frac{p(p-3)}{10}}}{1-q^p}\frac{1-q^p}{1-q} \\
&= -q^{\frac{2p-1}{5}} + q^{\frac{2p-1}{5}} [p]_q \frac{1-q^{\frac{p(p-3)}{10}}}{1-q^p} \equiv -q^{\frac{2p-1}{5}} \pmod{[p]_q}
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak, $p \equiv 4 \pmod 5$ ise $p = 5m+4$, m tek ve $j = \frac{p+1}{5}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_p(q) &= (-1)^{\frac{p+1}{5}} q^{\frac{\frac{p+1}{2}\left(5\frac{p+1}{5}-3\right)}{2}} = q^{\frac{(p-2)(p+1)}{10}} = q^{\frac{4p-1}{5}} - q^{\frac{4p-1}{5}} + q^{\frac{p-2}{5}\frac{p+1}{2}} \\
&= q^{\frac{4p-1}{5}} - q^{\frac{4p-1}{5}}\left(1 - q^{\frac{p(p-9)}{10}}\right) = q^{\frac{4p-1}{5}} - q^{\frac{4p-1}{5}} \frac{1-q^{\frac{p(p-9)}{10}}}{1-q^p}\frac{1-q^p}{1-q} \\
&= q^{\frac{4p-1}{5}} - q^{\frac{4p-1}{5}} [p]_q \frac{1-q^{\frac{p(p-9)}{10}}}{1-q^p} \equiv q^{\frac{4p-1}{5}} \pmod{[p]_q}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\widetilde{F}_p(q) \equiv \begin{cases} q^{\frac{p-1}{5}}, & p \equiv 1 \pmod 5 \text{ ise}, \\ -q^{\frac{3p-1}{5}}, & p \equiv 2 \pmod 5 \text{ ise}, \\ -q^{\frac{2p-1}{5}}, & p \equiv 3 \pmod 5 \text{ ise}, \\ q^{\frac{4p-1}{5}}, & p \equiv 4 \pmod 5 \text{ ise}, \end{cases}$$

veya denk olarak

$$\widetilde{F}_p(q) \equiv \left(\frac{5}{p}\right) q^{\frac{\alpha_p p-1}{5}} \pmod{[p]_q}$$

elde edilir. □

Teorem 3.1'de $q = 1$ alınırsa $\alpha = 0$ için

$$F_{n+2} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+1-j}{j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \binom{n+1}{\left\lfloor \frac{n+1-5j}{2} \right\rfloor}$$

elde edilir. İlk eşitlik iyi bilinen bir bağıntıdır (Koshy 2001, sayfa 155). İkinci eşitlik ise ilk olarak Andrews (Andrews 1970) tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmasında Andrews,

$$F_{k,n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{\left\lfloor \frac{n-(2k+1)j}{2} \right\rfloor}$$

şeklinde tanımladığı sayıları detaylı olarak incelemiştir ($F_{2,n} = F_{n+1}$). Özel olarak, $p \not\equiv \pm 1 \pmod{(2k+1)}$ şeklinde olan herhangi bir p asal sayısı için $p | F_{k,p}$ olduğunu göstermiştir.

$F_{k,n}$ sayılarından motivasyon ile

$$F_{k,n+1}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j((2k+1)j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ \left\lfloor \frac{n-1-(2k+1)j}{2} \right\rfloor \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

tanımlansın. $F_{2,n+1}(q) = F_{n+1}(q)$ olduğu açıktır. Teorem 3.1'in kanıtındaki düşünce ile $F_{k,n}(q)$ için indirgeme bağıntıları elde etmek mümkündür. Örneğin, $k = 3$ için

$$\begin{aligned} F_{3,n+3}(q) &= F_{3,n+2}(q) + \left(q^n + q^{n-1}\right) F_{3,n+1}(q) \\ &\quad - q^{n-1} F_{3,n}(q) + \left(q^{n-1} - q^{2n-3}\right) F_{3,n-1}(q) \end{aligned}$$

elde edilir (Andrews 1970).

Teorem 3.10. *$p \neq 2k+1$ asal sayı olmak üzere*

$$F_{k,p+2}(q) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{[p]_q}, & p \equiv 1 \text{ veya } -1 \pmod{(2k+1)} \text{ ise,} \\ 0 \pmod{[p]_q}, & p \not\equiv \pm 1 \pmod{(2k+1)} \text{ ise,} \end{cases}$$

olur.

Kanıt $p \neq 2k+1$ olmak üzere (3.16) eşitliğinden

$$F_{k,p+2}(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j((2k+1)j+1)}{2}} \begin{bmatrix} p \\ \left\lfloor \frac{p-(2k+1)j}{2} \right\rfloor \end{bmatrix}$$

olur. (3.15) ifadesi gereği

$$F_{k,p+2}(q) \equiv \sum_{j \in J} (-1)^j q^{\frac{j((2k+1)j+1)}{2}} \pmod{[p]_q}$$

elde edilir. Burada,

$$J = \left\{ j : \left\lfloor \frac{p-(2k+1)j}{2} \right\rfloor = 0 \text{ veya } p \right\}$$

kümesidir. $\left\lfloor \frac{p-(2k+1)j}{2} \right\rfloor = 0$ veya p ifadesi incelendiğinde

$$J = \begin{cases} \left\{ \frac{p-1}{2k+1} \right\}, & p \equiv 1 \pmod{(2k+1)} \text{ ise,} \\ \left\{ -\frac{p+1}{2k+1} \right\}, & p \equiv -1 \pmod{(2k+1)} \text{ ise,} \\ \emptyset, & p \not\equiv \pm 1 \pmod{(2k+1)} \text{ ise,} \end{cases}$$

elde edilir. $p \equiv 1 \pmod{(2k+1)}$ ise

$$\begin{aligned} F_{k,p+2}(q) &= (-1)^{\frac{p-1}{2k+1}} q^{\frac{\frac{p-1}{2k+1}\left((2k+1)\frac{p-1}{2k+1}+1\right)}{2}} = q^{\frac{p(p-1)}{2(2k+1)}} \\ &= 1 - \frac{1-q^p}{1-q}(1-q)\frac{1-(q^p)^{\frac{p-1}{2(2k+1)}}}{1-q^p} \\ &= 1 - [p]_q (1-q) \frac{1-(q^p)^{\frac{p-1}{2(2k+1)}}}{1-q^p} \equiv 1 \pmod{[p]_q} \end{aligned}$$

ve $p \equiv -1 \pmod{(2k+1)}$ ise

$$\begin{aligned} F_{k,p+2}(q) &= (-1)^{-\frac{p+1}{2k+1}} q^{\frac{-\frac{p+1}{2k+1}\left(-(2k+1)\frac{p+1}{2k+1}+1\right)}{2}} = q^{\frac{p(p+1)}{2(2k+1)}} \\ &= 1 - \frac{1-q^p}{1-q}(1-q)\frac{1-(q^p)^{\frac{p+1}{2(2k+1)}}}{1-q^p} \\ &= 1 - [p]_q (1-q) \frac{1-(q^p)^{\frac{p+1}{2(2k+1)}}}{1-q^p} \equiv 1 \pmod{[p]_q} \end{aligned}$$

bulunur. $p \not\equiv \pm 1 \pmod{(2k+1)}$ ise $F_{p+1}(q)$ için karşılık gelen toplam bir boş toplam olacağından

$$F_{k,p+2}(q) \equiv 0 \pmod{[p]_q}$$

olur. Bu ise kanıtı tamamlar. □

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Fibonacci sayıları ile q-Fibonacci sayıları olarak adlandırılan ve Schur tarafından Rogers-Ramanujan Özdeşliklerinin kanıtında kullanılan bir polinomlar dizisi arasındaki ilişki ele alınmıştır. q-Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonları, sağladığı bazı temel bağıntılar ve bazı bölünebilme özellikleri elde edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

Alladi, K. and Berkovich, A. 2002. New weighted Rogers-Ramanujan partition theorems and their implications. *Trans. Amer. Math. Soc.* 354: 2557-2577.

Andrews, G.E. 1969. Some formulae for the Fibonacci sequence with generalizations, *Fibonacci Quart.* 7: 113-130.

Andrews, G.E. 1970. A polynomial identity which implies the Rogers-Ramanujan identities, *Scripta Math.* 28: 297-305.

Andrews, G.E. 1984. Multiple series Rogers-Ramanujan type identities, *Pacific J. Math.* 114: 267-283.

Andrews, G.E. 1976. The Theory of Partitions, Addison-Wesley Publishing, Reading, MA, 252 sayfa.

Andrews, G.E. 2004. Fibonacci numbers and the Rogers-Ramanujan identities, *Fibonacci Quart.* 42: 3-19.

Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R. 1999. Special Functions, Cambridge University Press, 664 sayfa.

Andrews, G.E. and Eriksson, K. 2004. Integer Partitions, Cambridge University Press, Cambridge, 141 sayfa.

Andrews, G.E. and Berndt, B.C. 2005. Ramanujan's Lost Notebook, Part I, Springer-Verlag, New York, 437 sayfa.

Andrews, G.E. and Berndt, B.C. 2008. Ramanujan's Lost Notebook, Part II, Springer-Verlag, New York, 418 sayfa.

Bailey, W.N. 1949. Identities of the Rogers-Ramanujan type, *Proc. London Math. Soc.* 50: 1-10.

Berndt, B.C. 1985. Ramanujan's Notebooks, Part I, Springer-Verlag, New York, 357 sayfa.

Berndt, B.C. 1989. Ramanujan's Notebooks, Part II, Springer-Verlag, New York, 354 sayfa.

Berndt, B.C. 1991. Ramanujan's Notebooks, Part III, Springer-Verlag, New York, 510 sayfa.

Berndt, B.C. 1994. Ramanujan's Notebooks, Part IV, Springer-Verlag, New York, 451 sayfa.

Berndt, B.C. 1998. Ramanujan's Notebooks, Part V, Springer-Verlag, New York, 624 sayfa.

Berndt, B.C. 2006. Number Theory in the Spirit of Ramanujan, American Mathematical Society, Providence, RI, 187 sayfa.

Bressoud, D. 1983. An easy proof of the Rogers-Ramanujan identities, *J. Number Theory* 16: 235-241.

Burton, D.M. 2007. Elementary Number Theory, Sixth Edition, McGraw-Hill, New York, 434 sayfa.

Carlitz, L. 1975. Fibonacci notes 4: q-Fibonacci polynomials, *Fibonacci Quart.* 13: 97-102.

Cigler, J. 2003. q-Fibonacci polynomials, *Fibonacci Quart.* 41: 31-40.

Chan, H.-C. 2007. From Andrews' formula for the Fibonacci numbers to the Rogers-Ramanujan identities, *Fibonacci Quart.* 45: 221-239.

Chan, H.-C. 2010. On the Andrews-Schur proof of the Rogers-Ramanujan identities, *The Ramanujan J.* 23: 417-431.

Garrett, K., Ismail, M. and Stanton, D. 1999. Variants of the Rogers-Ramanujan identities, *Adv. Appl. Math.* 23: 274-299.

Gasper, G. and Rahman, M. 2004. Basic Hypergeometric Series, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 428 sayfa.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers With Applications, John Wiley and Sons Inc., 652 sayfa.

Pan, H. 2006. Arithmetic properties of q-Fibonacci numbers and q-Pell numbers, *Discrete Math.* 306: 2118-2127.

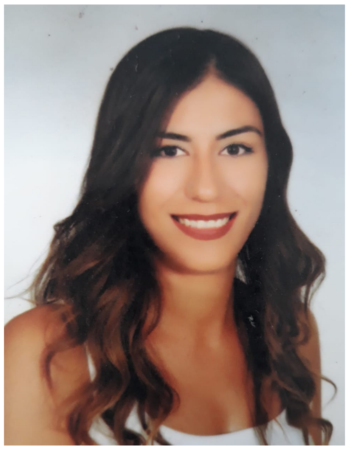
Prodinger, H. 2000. Lecture notes on the course q-series in combinatorics and number theory, http://finanz.math.tu-graz.ac.at/ prodinger/teach.htm.

Schur, I. 1917. Ein Beitrag zur Additiven Zahlentheorie, Sitzungsber, Akad. Wissensch. Berlin, Phys.-Math. Klasse, pp. 302-321.

Sills, A. 2003. Finite Rogers-Ramanujan type identities, *Electron. J. Comb.* 10: Art. No. R13.

Slater, L.J. 1952. Further identities of the Rogers-Ramanujan type. *Proc. London Math. Soc.* 54: 147-167.

ÖZGEÇMİŞ



PINAR AYTAÇ

pinn0707@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Lisans:	Osmangazi Üniversitesi
2009-2013	Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü
Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2015-2018	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen:	Antalya Başarı Temel Lisesi
2013-devam	