T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BOOLE CEBİRLERİNİN KATEGORİSİ, STONE UZAYLARININ KATEGORİSİ VE ONLARIN DUALİTESİ

Eren DOĞAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kasım 2018

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BOOLE CEBİRLERİNİN KATEGORİSİ, STONE UZAYLARININ KATEGORİSİ VE ONLARIN DUALİTESİ

Eren DOĞAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kasım 2018

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BOOLE CEBİRLERİNİN KATEGORİSİ, STONE UZAYLARININ KATEGORİSİ VE ONLARIN DUALİTESİ

Eren DOĞAN

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez ...../...../201... tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
Prof. Dr. İlham ALİYEV
Prof. Dr. Murat DİKER

ÖZET

BOOLE CEBİRLERİNİN KATEGORİSİ, STONE UZAYLARININ KATEGORİSİ VE ONLARIN DUALİTESİ

Eren DOĞAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Kasım 2018, 43 sayfa

Bu tezin ana konusu, yalnızca denk funktor kavramını kullanarak ünlü Stone dualitesi'nin bir direkt formülizasyonunu vermektir. Buna ek olarak, Boole cebirlerinin ve Boole halkalarının arasındaki çok iyi bilinen denkliği, Boole cebirlerinin ve Boole homomorfizmalarının kategorisi ve Boole halkalarının ve halka homomorfizmalarının kategorisi arasında bir kategorik izomorfizmaya genişlettik. Tezin ana amacını gerçekleştimek için Boole cebirlerinin ve Boole halkalarının kategorisinin dualinden Stone uzaylarının ve sürekli fonksiyonların kategorisine önce bir funktor kurduk ve sonra bu funktorun bir denklik olduğunu gösterdik. Özellikle Stone dualitesinin bu tezdeki formülizasyonu literatürdeki mevcut yaklaşımından, bu tezin sadece denk funktor tanımına dayandırılması yönüyle ayrılır.

ANAHTAR KELİMELER: Boole cebri, Boole halkası, Boole cebirlerinin kategorisi , Stone uzayı, Stone uzaylarının kategorisi, Süzgeç, İdeal, Örgü

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Prof. Dr. Murat DİKER

ABSTRACT

A CATEGORY OF BOOLEAN ALGEBRAS, A CATEGORY OF STONE SPACES AND THEIR DUALITY

Eren DOĞAN

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ

November 2018, 43 pages

The main subject of this thesis is to give a direct formulation of famous Stone duality by making use of only the concept of equivalent functor. In addition to this, we extended the well-known equivalence between Boolean algebras and Boolean rings to a categorical isomorphism between categories of Boolean algebras and Boolean rings. In order to realize the main aim of the thesis, we have first established a functor from the opposite or category of Boolean algebras and Boolean homomorphisms and the category of Stone spaces and continuous functions, and then shown that such a functor is an equivalence. In particular, the formulation of Stone duality, in this thesis differs from the existing approach in the literature in such a way that the present thesis relies on only the definition of equivalent functor.

KEYWORDS: Boolean algebra, Boolean category, Boolean ring, Filter, Functor, Ideal, Lattice, Stone Category, Stone space,

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
Prof. Dr. İlham ALİYEV
Prof. Dr. Murat DİKER

ÖNSÖZ

Bu çalışma süresince başta gerekli kaynakların sağlanması hususunda, çalışmanın aksamadan yürümesinde şahsıma kıymetli görüş ve önerilerini, değerli zamanını ve yakın ilgisini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ'ye, her zaman tüm desteği ile yanımda olan eşim Semra GÜRTAŞ DOĞAN'a, aileme ve Dr. Atakan TEKGÜL'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
AKADEMİK BEYAN v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK TARAMASI 4
2.1. Örgüler ve Boole Cebirleri 4
2.2. Kategoriler ve Funktor Çeşitleri 12
2.2.1. Kategorinin tanımı, temel özellikleri ve kategori örnekleri 12
2.2.2. Funktorlar ve funktor çeşitleri 14
3. MATERYAL VE METOT 17
3.1. Boole Cebirlerinin Kategorisi ve Boole Halkalarının Kategorisi 17
3.2. Boole Cebirleri, Boole Halkaları ve Onların Denkliği 21
3.3. Boole Cebirlerinin Topolojik Gösterimi 26
4. BULGULAR VE TARTIŞMA. 31
4.1. Boole Cebirlerinin Kategorisi ve Boole Halkalarının Kategorisi Arasındaki İzomorfizm 31
4.2. Stone Dualitesi 33
5. SONUÇ 42
6. KAYNAKLAR. 43
ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Boole Cebirlerinin Kategorisi, Stone Uzaylarının Kategorisi ve Onların Dualitesi ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

/ /

Eren DOĞAN

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$inf(A)$	A kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu
$sup(A)$	A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu
$Cl\,(X,\tau)$	Topolojik uzayındaki tüm kaçık kümelerin kümesi
$\mathbf{Set}$	Tüm kümelerin kategorisi
$\mathbf{Top}$	Tüm topolojik uzayların kategorisi
$\mathbf{Grp}$	Tüm grupların kategorisi
$\mathbf{A}^{op}$	$\mathbf{A}$ kategorisinin duali (veya karşıtı)
L	Örgü
$\mathbf{BRNG}$	Boole halkalarının kategorisi
Stone	Stone uzaylarının kategorisi
BA	Boole cebrinin kategorisi
I	İdeal
$PF(L)$	L kümesinin tüm asal filtreleri kümesi
$OB(A)$	A kategorisinin objesi
$\mathbb{T}$	Boole halkası
$\lvert T\rvert$	Boole cebri

1. GİRİŞ

Boole cebirleri George Boole tarafından 1850'li yıllarda sunulmuş ve Klasik Mantığı cebirsel bir matematik yapı ile ifade etme ihtiyacından ortaya çıkmıştır. Boole cebirleri, ki bunlar Boole halkaları veya Boole örgüleri olarak da bilinmektedir, başta matematiksel mantık olmak üzere, matematiğin, mühendisliğin ve temel bilimlerin sayısız alanında kullanıma sahiptir.

Boole cebirlerini bir kümenin altkümelerinden oluşan kümeler ile ifade etme isteği, Marshall Harvey Stone'u 1930'ların ikinci yarısında Boole cebirlerini, günümüzde Stone uzayları (Johnstone 1982) olarak bilinen kompakt, Hausdorff ve sıfır boyutlu topolojik uzaylar ile gösterimi teoremlerini vermeye itmiştir (Stone 1936). Modern terminolojide Stone gösterim teoremleri olarak bilinen bu teoremler (Halmos 1967), sadece Boole cebirleri ile Stone uzayları arasındaki ilişkileri vermiyor, aynı zamanda Boole cebirleri arasında tanımlanan Boole yapı koruyan dönüşümleri (Boolean homomorphisms)'ne karşı Stone uzayları arasında tanımlı sürekli fonksiyonların nasıl belirlendiğini de ifade etmektedir. 1945 ve sonrasında Kategori Teorinin (Adamek 1990; Lane 1971) ortaya çıkması ve geliştirilmesi neticesinde Stone gösterim teoremleri, Boole cebirlerinin ve Boole yapı koruyan dönüşümlerinin kategorisi BA ile Stone uzayları ve sürekli fonksiyonlar kategorisi Stone arasında bir dual denkliği (Morandi 2005) kanıtlamamıza izin verir. Diğer taraftan, Boole halkalarının ve Boole halka yapı koruyan dönüşümlerinin kategorisi, BRNG ile Boole cebirlerinin ve Boole yapı koruyan dönüşümlerinin kategorisi BA arasında bir dual denkliği kurmamıza olanak sağlayacaktır.

Günümüzde Stone dualitesi adı verilen bu dual denklik başta mantık (Clark D. M. and Davey 1998; Halmos 1955; Sambin 1988), topoloji (Erné 2004; Gehrke 2016; Johnstone 1982; Sambin 1988), cebir (Clark D. M. and Davey 1998), bilgisayar bilimleri (Abramsky 1994; Gehrke 2009; Pratt 1995) ve otomasyon teorisi (Gehrke 2009, 2016) olmak üzere bir çok alanda uygulamalara sahiptir. Stone dualitesi genel olarak Dualite Teorisinin (Demirci 2014; Porst 1991) temel bir aracı olmasına karşın, Stone dualitesini, Boole cebirlerinin kategorisi, Stone uzaylarının kategorisini oluşturarak bu iki kategori arasında bir dual denklik olarak ifade eden bir Türkçe kaynak bulunmamaktadır. Bu tezin ana amaçlarından biri bu eksikliği gidermek ve Dualite Teorisi için temel bir kaynak oluşturmaktır.

Bu bağlamda 2. Bölüm, sonraki bölümlerde kullanacağımız, tanımlardan ve cebirsel yapıların özelliklerinden oluşmaktadır. Bir Boole cebiri, dağılmalı, tümlenmiş, her bir eleman ikilisinin en büyük ve en küçük alt sınırı olan her bir elemanının tümleyeni olan ve en büyük ve en küçük elemanı olan bir örgüdür. Filtrelerin ve ideallerin özelliklerinin de bu bölüm içerisinde incelenmesi hedeflenmiştir. Bir kümenin en küçük elemanını içermeyen filtreye öz filtre denir ve bu filtreyi kapsayan başka bir öz filtre yok ise, bu filtreye aynı zamanda maksimal filtre denir.

Bölüm 3'te Boole cebirleri Stone uzayı adı verilen bazı özel topolojik uzaylar yardımı ile karakterize edilecektir. Bir Stone uzayı kompakt, Hausdorff ve 0-boyutludur. Stone uzaylarının bu özellikleri ışığında Boole cebiri tüm asal filtrelerin kümesi ile bir Stone uzayıdır.

Bölüm 4, bizlere tüm objeleri sınıf olan iki eleman arasında tüm morfizmaları barındıran bunun yanı sıra birim ve bileşke işlemlerini koruyan kategori ve iki kategori arasında her objeye karşı yalnız bir obje ve her morfizmaya karşı yalnız bir morfizma getiren fonksiyon olan funktorlar ile ilgili genel bilgiler ve örneklere ayrılmıştır.

Bölüm 5'te bir halka üzerinde tanımlanan işlemler ile tüm elemanları kare-eş (idempotent) ise bu halkalara Boole halkaları denir. Boole halkaları ile Boole cebirleri arasında bir bağlantı vardır. Bu bağıntılar yardımıyla Boole halkalarının kategorisi BRNG ile Boole cebiri kategorisi BA arasında bir izomorfizm kurulacaktır.

Son bölümde, diğer bölümlerin ışığı ve yardımı altında objeleri Boole cebirleri, morfizmaları Boole homomorfizmaları, bileşke işlemi fonksiyonlar arasındaki bileşke işlemi ve birimleri birim fonksiyonlardan oluşan bir Boole cebiri kategorisi BA ile objeleri Stone uzayları, morfizmaları sürekli fonksiyonlar, bileşke işlemi fonksiyonlar arasındaki bileşke işlemi ve birimleri birim fonksiyonlardan oluşan Stone kategorisi arasında bir dualitenin varlığı gösterilecektir. Bu dualiteye Stone dualitesi denir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde örgüler ve boole cebirlerinin sahip olduğu bir kısım kavram, örnek ve önteoremlere yer verilecektir.

2.1. Örgüler ve Boole Cebirleri

Tanım 2.1 *L bir küme ve $\leq$, L üzerinde aşağıdaki üç özelliği sağlayan bir bağıntı ise bu bağıntıya L üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı ve $(L, \leq)$ ikilisine bir kısmi sıralı küme denir (Birkhoff 1948):*
(i) Her $x \in L$ için $x \leq x$ (Yansıma),
(ii) Her $x, y \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (Antisimetri),
(iii) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Geçişlilik).

Tanım 2.2 *$(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve A, L'nin bir altkümesi olsun.*
(i) Her $x \in A$ için $x \leq u$ olacak şekilde bir $u \in L$ öğesi varsa u'ya A'nın bir üst sınırı denir.
(ii) Her $x \in A$ için $l \leq x$ olacak şekilde bir $l \in L$ öğesi varsa l'ye A'nın bir alt sınırı denir.
(iii) Her $x \in A$ için $x \leq u$ olacak şekilde bir $u \in A$ öğesi varsa u'ya A'nın bir en büyük öğesi denir.
(iv) Her $x \in A$ için $l \leq x$ olacak şekilde bir $l \in A$ öğesi varsa l'ye A'nın bir en küçük öğesi denir.

Tanım 2.3 *Tanım 2.2'den A'nın bir en büyük öğesi (en küçük öğesi) varsa $\leq$'nın antisimetri özelliğinden dolayı bu öğe tektir. Bir $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesi verildiği zaman, L'nin en küçük öğesi varsa bu öğe $\perp$ ile, en büyük öğesi varsa bu öğede $\top$ ile gösterilir. $(L, \leq)$'nin hem en küçük öğesi hemde en büyük öğesi varsa, $(L, \leq)$'ye sınırlıdır denir.*

Tanım 2.4 *$(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve A, L'nin bir altkümesi olsun.*
(i) A'nın tüm üst sınırları kümesinin en küçük öğesi varsa bu öğeye A'nın en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $sup(A)$ ile gösterilir.
(ii) A'nın tüm alt sınırları kümesinin en büyük öğesi varsa bu öğeye A'nın en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $inf(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5 *$(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in L$ için $inf(\{x, y\})$ ve $sup(\{x, y\})$ varsa $(L, \leq)$'ye bir örgü denir.*

Bir örgü aynı zamanda belirli bir takım eşitlikleri sağlayan bir cebirsel yapıdır:

Önerme 2.6 *$(L, \leq)$ bir örgü ise*

$$x \wedge y = inf(\{x, y\}) \text{ ve } x \vee y = sup(\{x, y\}) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı $\wedge, \vee : L \times L \to L$ ikili işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlar: Her $x, y, z \in L$ için
(i) $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$
(ii) $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$
(iii) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
(iv) $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$.
Tersine bir L kümesi üzerinde (i-iv) koşullarını sağlayan $\wedge, \vee : L \times L \to L$ ikili işlemleri varsa

$$x \leq y \Longleftrightarrow x = x \wedge y \Longleftrightarrow y = x \vee y$$

ile tanımlanan $\leq$ bağıntısı için $(L, \leq)$ bir örgüdür öyleki $inf(\{x, y\})$ ve $sup(\{x, y\})$ eşitlik (2.1)'i sağlar (Birkhoff 1948).

İspat ((i) ve (ii)) özellikleri tanımdan kolayca görülebilir.
(iii) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ eşitliğini göstermek için öncelikle
$(x \vee y) \vee z \leq x \vee (y \vee z)$ olduğunu görelim; $\vee$ işleminin tanımından yola çıkarak

$$x \leq x \vee (y \vee z) \text{ ve } y \leq y \vee z \leq (y \vee z) \vee x = x \vee (y \vee z)$$

eşitliğini yazabiliriz. Tanım 2.1'e göre $(x \vee y) \vee z \leq x \vee (y \vee z)$ olur. Benzer şekilde $x \vee (y \vee z) \leq (x \vee y) \vee z$ özelliği de elde edililir. Bu iki eşitsizlikten $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ eşitliği elde edilir.
Benzer adımları ve tanımları kullanarak; $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ eşitliğinin doğruluğunu görelim; $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge (y \wedge z)$ ifadesi için $x \wedge (y \wedge z) \leq x$ ve $y \geq y \wedge z \geq (y \wedge z) \wedge x$ ifadelerini yazabiliriz. Buradan $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge (y \wedge z)$ olduğu görülebilir. Aynı şekilde $(x \wedge y) \wedge z \geq x \wedge (y \wedge z)$ ifadesi de elde edileceğinden $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ olduğu

da doğrulanmış olur.

(iv) $x \wedge (x \vee y) = x$ olduğunu yani başka bir ifade ile $inf\{x \vee y, x\} = x$ olduğunu görelim. $x \leq x \vee y$ ve $x \leq x$ olacağından tanıma göre x, $\{x \vee y, x\}$ kümesinin bir alt sınırıdır. z bu kümenin bir alt sınırı olsun, $z \leq x$ olacaktır.Bu ise x in alt sınırların en büyüğü olduğunu gösterir yani $inf\{x \vee y, x\} = x$'dir. Benzer biçimde $x \vee (x \wedge y) = x$ olduğu da görülür.

Bir $(L, \leq)$ örgüsünde $inf(\{x, y\})$ ve $sup(\{x, y\})$ öğeleri tüm tez boyunca sırasıyla $x \wedge y$ ve $x \vee y$ ile gösterilecektir. Sınırlı bir $(L, \leq)$ örgüsünde $\bot = sup(\emptyset)$ ve $\top = inf(\emptyset)$ olduğundan bir $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesinin sınırlı bir örğü olması L'nin her sonlu altkümesinin hem infimumu hemde supremumunun var olması olarak ifade edilebilir. $\square$

Tanım 2.7 *Bir $(L, \leq)$ örgüsü aşağıdaki iki özelliğe sahip ise dağılımlıdır denir: Her $x, y, z \in L$ için*

(D1) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$*,*

(D2) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$*.*

Önerme 2.8 *Bir $(L, \leq)$ örgüsünün dağılımlı olması için gerekli ve yeterli koşul (D1) veya (D2) koşulunu sağlamasıdır (Birkhoff 1948).*

Tanım 2.9 *Bir dağılımlı ve sınırlı $(L, \leq)$ örgüsü verilsin. L üzerinde aşağıdaki özelliği sağlayan bir $\;' : L \to L$ tekli işlemi varsa $(L, \leq, ')$ üçlüsüne bir Boole cebiri denir: Her $x \in L$ için*

$$x \wedge x' = \bot, x \vee x' = \top \tag{2.2}$$

(Birkhoff 1948).

NOT: $(L, \leq, ')$ dağılımlı ve sınırlı örgüsü verilsin, her $x \in L$ için x'in tümleyeni olarak tanımlanan yalnız bir tek $x' \in L$ vardır (Birkhoff 1948).

Örnek 2.10 *Her hangi bir X kümesinin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(X)$ kümeler arasındaki kapsama bağıntısı $\subseteq$ ile birlikte bir sınırlı örgüdür. $\emptyset$ ve X bu örgünün sırasıyla en küçük ve en büyük öğesidir. Ayrıca bir A altkümesinin X içindeki tümleyenini A^c ile gösterirsek $^c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $A \mapsto A^c$, işlemi için $(\mathcal{P}(X), \subseteq, ^c)$ üçlüsü bir Boole cebiridir.*

Tanım 2.11 *Bir (X, τ) topolojik uzayını ele alalım. X'in bir altkümesi bu uzayda hem açık hemde kapalı bir küme ise bu kümeye bir kaçık küme denir.*

Örnek 2.12 *Bir (X, τ) topolojik uzayındaki tüm kaçık kümelerin kümesini $Cl\,(X, \tau)$ ile gösterirsek, kümeler arasındaki kapsama bağıntısı ve kümelerin tümleyeni işlemi ile birlikte bir Boole cebiri oluşturur.*

Bu tez boyunca, kolaylık olması için bir $(L, \leq, ')$ Boole cebirinin sıralama ve $'$ işleminin ne olduğu biliniyorsa bu Boole cebirini çoğunlukla L ile göstereceğiz.

Tanım 2.13 *$(L, \leq)$ bir örgü olsun. L'nin boş olmayan bir altkümesi F eğer*
(F1) Her $x, y \in L$ için, $x \in F$ ve $x \leq y \Rightarrow y \in F$,
(F2) Her $x, y \in L$ için, $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$
koşullarını sağlıyorsa F'ye L'nin bir filtresi denir. Eğer F filtresi L'den farklı ise F'ye bir öz filtre denir. Eğer F öz filtresi
(F3) Her $x, y \in L$ için, $x \vee y \in F \Rightarrow x \in F$ veya $y \in F$ koşulunu sağlıyorsa F'ye bir asal filtre (prime filter) denir (Morandi 2005).

Tanım 2.14 *$(L, \leq)$ bir örgü olsun. L'nin boş olmayan bir altkümesi I eğer*
(I1) Her $x, y \in L$ için, $y \in I$ ve $x \leq y \Rightarrow x \in I$,
(I2) Her $x, y \in L$ için, $x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$ koşullarını sağlıyorsa I'ya L'nin bir ideali denir (Morandi 2005).

Tanımlardan kolayca görülebileceği gibi $(L, \leq)$ bir sınırlı örgü ise herhangi bir F filtresi L'nin en büyük elemanı $\top$'yi her zaman bulundurur ve $\{\top\}$ kümesi L'nin en küçük filtresidir. Benzer şekilde herhangi bir I ideali L'nin en küçük elemanı $\bot$'yi her zaman bulundurur ve $\{\bot\}$ kümesi L'nin en küçük idealidir. Ayrıca, L'nin kendiside aynı zamanda hem bir filtre hemde bir idealdir. Filtreler ve idealler birbirlerinin dualleridir. Her $a \in L$ için

$$\uparrow a = \{b \in L : a \leq b\} \quad \text{ve} \quad \downarrow a = \{c \in L : c \leq a\}$$

olarak tanımlanan kümelerin sırasıyla bir filtre ve bir ideal oldukları kolayca görülebilir. Bu tezde ideallerin ve filtrelerin özelliklerinden faydalanacağız. Şimdi bu kavramların daha sonra kullanacağımız çeşitli özelliklerine değinelim.

Önerme 2.15 *Bir $(L, \leq)$ sınırlı örgüsünün bir F filtresi verilsin. F'nin bir öz filtre olması $\perp \notin F$ olmasına denktir.*

İspat $\perp \notin F$ ise $F \neq L$ olduğu açıktır. $F \neq L$ iken $\perp \notin F$ olduğunu görmek için olmayana ergi yöntemi kullanalım. $F \neq L$ ve $\perp \in F$ olsun. Her $x \in L$ için $\perp \leq x$ olduğundan (F1) özelliğinden $x \in F$ olur ki buda $L \subseteq F$ kapsamasını ve dolayısıyla $F = L$ çelişkisini verir. Bu kanıtı bitirir. $\square$

Önerme 2.16 *Bir $(L, \leq)$ örgüsünün elemanları idealler olan ve boş olmayan herhangi bir kümeler ailesinin kesişimi yine bir idealdir.*

İspat $\{I_j \mid j \in J\}$ kümeler ailesinin her bir I_j elemanı L'nin bir ideali olsun. $\bigcap_{j\in J} I_j$ kümesinin bir ideal olduğunu görelim. Tanımdan yola çıkarsak her $j \in J$ için $\perp \in \dot{I}_j$'dir. Dolayısıyla, $\perp \in \bigcap_{j\in J} I_j$ ve $\bigcap_{j\in J} I_j \neq \varnothing$ olur.
(I_1) Herhangi $x, y \in L$ için , $x \leq y$ ve $y \in \bigcap_{j\in J} I_j$ olsun. Her $j \in J$ için, $y \in I_j$, $x \leq y$ ve I_j bir ideal olduğundan $x \in I_j$ olur. Buradan $x \in \bigcap_{j\in J} I_j$ olduğu çıkar.
(I_2) Herhangi $x, y \in L$ için , $x, y \in \bigcap_{j\in J} I_j$ olsun. Her $j \in J$ için , $x, y \in I_j$ ve I_j bir ideal olduğundan, $x \vee y \in I_j$ olur. Buradan $x \vee y \in \bigcap_{j\in J} I_j$ olduğu çıkar. $\square$

Önerme 2.17 $(L, \leq)$ *bir örgü ve $\text{₣} = \{F_i \mid i \in F\}$ L örgüsünün filtrelerinden oluşan ve boş olmayan bir aile olsun. Bu durumda $\bigcap \text{₣} \neq \emptyset$'dir.*

İspat $\text{₣} = \{F_i \mid i \in F\}$ kümeler ailesinin her bir F_i elemanı L'nin bir filtresi olsun. $\bigcap_{i\in F} F_i$ kümesinin bir filtre olduğunu görelim . Filtre tanımdan yola çıkarsak her $i \in F$için $\top \in F_i$ dir dolayısıyla $\bigcap_{i\in F} F_i$ boş değildir . Herhangi $x, y \in L$ için ;
(F_1) Herhangi $x, y \in L$ için , $x \leq y$ ve $x \in \bigcap_{i\in F} F_i$ olsun. Bu durumda her $i \in F$ için, $y \in F_i$, $x \leq y$ ve F_i bir filtre olduğundan $y \in F_i$ olacaktır. Buradan $y \in \bigcap_{i\in F} F_i$ olduğu çıkar.
(F_2) Herhangi $x, y \in L$ için , $x, y \in \bigcap_{i\in F} F_i$ olsun. Her $i \in F$ için , $x, y \in F_i$ ve F_i bir filtre olduğundan, $x \wedge y \in F_i$ olur. Buradan $x \wedge y \in \bigcap_{i\in F} F_i$ olduğu açığa çıkacaktır. Dolayısıyla $\bigcap_{i\in F} F_i$ kümesinin bir filtre olduğu görülmüş olur. $\square$

Önerme 2.18 *Bir $(L, \leq)$ örgüsü ve bunun herhangi bir A altkümesi verilsin. A'yı kapsayan bir en küçük ideal vardır ve bu ideale A'nın ürettiği ideal denir.*

İspat $\mathcal{U}$ kümeler ailesi A'yı kapsayan tüm ideallerin kümesini göstersin. $A \subseteq L$ ve L bir ideal olduğundan $L \in \mathcal{U}$ ve dolayısıyla $\mathcal{U}$ boş değildir. Önerme 2.16'dan dolayı $\bigcap \mathcal{U}$ bir idealdir. $A \subseteq \bigcap \mathcal{U}$ olduğu açıktır. Ayrıca, A'yı kapsayan her hangi bir I ideali için $\bigcap \mathcal{U} \subseteq I$ olduğundan $\bigcap \mathcal{U}$ kümesi A'yı kapsayan en küçük ideal olur. □

Önerme 2.19 *Bir $(L, \leq)$ örgüsü ve bunun herhangi bir B altkümesi verilsin. B'yi kapsayan en küçük filtre vardır ve bu filtreye B'nin ürettiği filtre denir.*

İspat V kümeler ailesi B'yi kapsayan tüm filtrelerin kümesini göstersin. $B \subseteq L$ ve L bir filtre olduğundan $L \in V$ ve dolayısıyla V boş değildir. Önerme 2.17'den dolayı $\bigcap V$ bir filtredir. $B \subseteq \bigcap V$ olduğu açıktır. Ayrıca, B'yi kapsayan her hangi bir F filtresi için$\bigcap V \subseteq F$ olduğundan $\bigcap V$ kümesi B'yi kapsayan en küçük filtre olur. □

Önerme 2.20 *Bir $(L, \leq)$ örgüsü ve bunun herhangi bir A altkümesi verilsin.* $ID(A) = \{x \in L \mid \exists \{a_1, ..., a_n\} \subseteq A$ *öyleki* $x \leq a_1 \vee ... \vee a_n\}$ *kümesi A'nın ürettiği idealdir (Grätzer 2003).*

İspat $A \subseteq ID(A)$ olduğu açıktır. $ID(A)$'nın bir ideal olduğu kolayca görülebilir . Dolayısıyla, $ID(A)$'nın A'nın ürettiği ideal olduğunu göstermek için A'yı kapsayan her I idealinin $ID(A)$'yı kapsadığını görmemiz yetecektir. $x \in ID(A)$ alalım. Bu durumda bir $\{a_1, ..., a_n\}$ alt kümesi vardır öyle ki, $x \leq a_1 \vee ... \vee a_n$'dır. $A \subseteq I$ olduğundan $a_1, ..., a_n \in I$ ve (I2)'den $a_1 \vee ... \vee a_n \in I$ ve (I1)'den $x \in I$ bulunur. Bu $ID(A) \subseteq I$ kapsamasını kanıtlar. □

Önerme 2.21 *Bir $(L, \leq)$ örgüsü ve bunun herhangi bir A altkümesi verilsin.* $FL(A) = \{x \in L \mid \exists \{a_1, ..., a_n\} \subseteq A$ *öyleki* $x \geq a_1 \wedge ... \wedge a_n\}$ *kümesi A'nın ürettiği filtredir (Grätzer 2003).*

İspat $A \subseteq FL(A)$ olduğu açıktır. $FL(A)$'nın bir filtre olduğu kolayca görülebilir . Dolayısıyla, $FL(A)$'nın A'nın ürettiği filtre olduğunu göstermek için A'yı kapsayan her

F filtresinin $FL(A)$'yı kapsadığını görmemiz yetecektir. $x \in FL(A)$ alalım. Bu durumda $x \geq a_1 \wedge ... \wedge a_n$ olacak şekilde bir $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq A$ vardır. $A \subseteq F$ olduğundan $a_1, ..., a_n \in F$ ve (F2)'den $a_1 \wedge ... \wedge a_n \in F$ ve (F1)'den $x \in F$ bulunur. Bu $FL(A) \subseteq F$ kapsamasını kanıtlar. □

Önteorem 2.22 $(Zorn\ Lemma)$ *Kısmî sıralanmış bir kümedeki her zincir üstten sınırlı ise bu kısmi sıralı kümenin en az bir tane maximal öğesi vardır(Burris 1981).*

Tanım 2.23 *F, $(L, \leq)$ örgüsünün bir filtresi olsun. Eğer F'yi kapsayan bir G öz filtresi yoksa F'ye bir maksimal filtre denir.*

Önteorem 2.24 *$(L, \leq)$ dağılımlı bir örgü, I ve F sırasıyla L'nin bir ideali ve bir filtresi olsun. Eğer $I \cap F = \emptyset$ ise $F \subseteq P$ ve $I \cap P = \emptyset$ olacak şekilde en az bir P asal filtresi vardır (Morandi 2005, Grätzer 2003).*

İspat $\mathcal{F}$, F filtresini kapsayan ve I ile arakesiti boş olan tüm filtrelerin kümesi olsun. $F \cap I = \emptyset$ ve $F \subseteq F$ olduğundan $F \in \mathcal{F}$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{F} \neq \emptyset$ olur. $\{P_\alpha : \alpha \in J\}$, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ içinde bir zincir olsun. Önce $\bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$'nın L'nin bir filtresi olduğunu görelim. Her α için $P_\alpha \neq \emptyset$ olduğundan $\bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha \neq \emptyset$ olduğu açıktır. Şimdi $\bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$'nin (F1) ve (F2) özelliklerini sağladığını gösterelim:

(F1) Her hangi $x, y \in L$ için $x \in \bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$ ve $x \leq y$ olsun . Bu durumda, $x \in P_\beta$ olacak şekilde en az bir $\beta \in J$ vardır. P_β bir filtre olduğundan, $x \in P_\beta$ ve $x \leq y$ olması $y \in P_\beta$ olmasını gerektirir. $P_\beta \subseteq \bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$ olduğundan, $y \in \bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$ olacaktır.

(F2) Her hangi $x, y \in L$ için $x, y \in \bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$ olsun. $x \in P_\beta$ ve $y \in P_\gamma$ olacak şekilde $\beta, \gamma \in J$ vardır. $\{P_\alpha : \alpha \in J\}$, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ içinde bir zincir olduğundan $P_\beta \subseteq P_\gamma$ veya $P_\gamma \subseteq P_\beta$'dır. $P_\beta \subseteq P_\gamma$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x, y \in P_\gamma$ olur. P_γ bir filtre olduğundan, $x \wedge y \in P_\gamma$ olur. $P_\gamma \subseteq \bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$ olduğundan, $x \wedge y \in \bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$ olur. $P_\gamma \subseteq P_\beta$ durumu için benzer şekilde $x \wedge y \in \bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$ olduğu görülür.

Dolayısıyla $\bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$, L'nin bir filtresidir. Ayrıca her $a \in J$ için $P_\alpha \cap I = \emptyset$ olduğundan, $\bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha \cap I = \emptyset$ olur . Bununla birlikte, her $a \in J$ için $F \subseteq P_\alpha$ olduğundan, $F \subseteq \bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$ olur. Bu $\bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$'nın $\mathcal{F}$'nin bir elemanı olduğunu kanıtlar. Böylece,her $a \in J$ için $P_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$ olduğundan, $\bigcup\limits_{a \in J} P_\alpha$, $\{P_\alpha : \alpha \in J\}$ kümesinin $(\mathcal{F}, \subseteq)$ içinde bir üst sınırdır. Dolayısıyla, Zorn Lemmaya göre $(\mathcal{F}, \subseteq)$ nin bir P maksimal elemanı vardır. $\mathcal{F}$'nin tanımından, $F \subseteq P$ ve $I \cap P = \emptyset$ olduğu açıktır. Geriye sadece, P filtresinin asal olduğunu göstermek kalır. Bunu için $a \vee b \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olduğunu göstereceğiz. Bunu, olmayana ergini yöntemini kullanarak, $a \vee b \in P$ olduğunu, ancak $a \notin P$ ve $b \notin P$ olduğunu kabul ederek kanıtlayacağız. F_1 ve F_2 sırasıyla $P \cup \{a\}$ ve $P \cup \{b\}$ tarafından üretilmiş filtreler olsunlar. Bu durumda $P \subset F_1$ve $P \subset F_2$ olur. P, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ nin bir maksimal elemanı olduğundan F_1, $F_2 \notin \mathcal{F}$ olacaktır. Aksi takdirde P nin maksimal eleman olması ile çelişir. Buradan her $i = 1, 2$ için $F_i \cap I \neq \emptyset$ olur. Bu durumda $x_i \in F_i \cap I$ olacak şekilde $x_i \in L$'nin varlığını söyleyebiliriz.

Önerme 2.21'den dolayı, $a_1 \wedge ... \wedge a_n \leq x_1$ olacak şekilde $a_1, ..., a_n \in P \cup \{a\}$ vardır. $K = \{a_{k_1}, a_{k_2} ..., a_{k_m}\}$ kümesi $i \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere a'dan farklı tüm a_i lerin kümesini göstersin. $K \neq \emptyset$ için $p_1 = a_{k_1} \wedge a_{k_2} \wedge ... \wedge a_{k_m}$ ve $K = \emptyset$ için $p_1 = \top$ olarak tanımlanırsa, $p_1 \in P$ olur. Ayrıca, $a_1 \wedge ... \wedge a_n = p_1 \wedge a$ olduğundan $p_1 \wedge a \leq x_1$ olur. Benzer şekilde $p_2 \wedge b \leq x_2$ olacak şekilde bir $p_2 \in P$'nin var olduğu görülür. $p_1 \wedge a \leq x_1$ ve $p_2 \wedge b \leq x_2$ eşitsizliklerini ve L'nin dağılımlı olduğunu kullanarak

$$x_1 \vee x_2 \geq (p_1 \wedge a) \vee (p_2 \wedge b) = (p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee a) \wedge (p_2 \vee b) \wedge (a \vee b) \qquad (2.3)$$

yazabiliriz. $a \vee b \in P$, $(p_1 \vee p_2) \in P$ olduğu için ve P bir filtre olduğundan $(p_1 \vee p_2) \wedge (a \vee b) \in P$ olacaktır. Diğer taraftan $(p_1 \vee a) \wedge (p_2 \vee b) \in P$ olduğu benzer şekilde görülebilir. P'nin bir filtre olması ve dolayısıyla (F2) özelliğinden $[(p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee a) \wedge (p_2 \vee b) \wedge (a \vee b)] \in P$ olacaktır. (2.3) eşitsizliği ve (F1) özelliğinden $x_1 \vee x_2 \in P$ olacaktır. Ayrıca, I bir ideal ve $x_1, x_2 \in I$ olduğundan $x_1 \vee x_2 \in I$ ve böylece $x_1 \vee x_2 \in I \cap P$ elde edilir. Ancak bu sonuç $I \cap P = \emptyset$ olması ile çelişir. Bu çelişki baştaki $a \notin P$ ve $b \notin P$ kabulümüzün yanlış olduğunu kanıtlar. Bu nedenle $a \in P$ ya da $b \in P$ olur. Sonuç olarak, P bir asal filtre olur. □

Önerme 2.25 P, $(L, \leq)$ *sınırlı örgüsünün bir filtresi olsun* P *bir asal filtre ise aynı zamanda maksimal filtredir.*

İspat P *bir asal filtre olsun. Her* $x, y \in L$ *için* $x \vee y \in P \Rightarrow x \in P$ *veya* $y \in P$ *koşulunun sağlandığını biliyoruz. Burada* P*'yi kapsayan bir öz filtre olmadığını göstermeye çalışmalıyız. Olmayana ergi yöntemini kullanalım;* $P \subset Q$ *olacak şekilde* L*'nin bir*

Q öz filtresi var olsun. Bu durumda $x \in Q$ ancak $x \notin P$ olacak şekilde en az bir tane $x \in L$ vardır. $x^{'} \vee x = \top \in P$ olmalıdır. Dolayısıyla, $x^{'} \in P$ ve $P \subset Q$ olduğundan, $x^{'} \in Q$ olur. Q bir filtre olduğundan (F2) özelliğinden dolayı $x^{'} \wedge x = \perp \in Q$ olur. Bu durum ise Q filtresininin bir öz filtre olması ile çelişir. Dolayısıyla istediğimiz sonuca ulaşırız. □

2.2. Kategoriler ve Funktor Çeşitleri

Bu bölümde kategoriler ve funktorlar ile ilgili temel bilgileri vereceğiz. Burada verilecek tanım ve örnekler için (Adamek 1990) kaynak olarak kullanılacaktır. Kategori kavramı aksiyomatik sınıf teorisine dayanmaktadır. Aksiyomatik sınıf teorisinde tüm nesnelerin birer sınıf (class) olduğu kabul edilir ve sınıflar $A, B, ...$ gibi büyük harfler ile gösterilerek, sınıflar arasında aitlik bağıntısı adı verilen bir $\in$ bagıntısının olduğu kabul edilir. $A \in B$ ifadesi A sınıfı B sınıfına aittir veya A, B'nin bir elemanıdır diye okunur. $A \in B$ olacak şekilde en az bir tane B sınıfı varsa A sınıfına bir küme (set) denir. Ancak verilen bir A sınıfı için $A \in B$ olacak şekilde her zaman bir B sınıfı var olmayabilir. Bu durumda A'ye bir has sınıf (proper class) denir. Örneğin tüm kümelerin sınıfı bir küme değildir, yani bir has sınıftır. Sınıf teorisi, Russell paradoksu veya benzeri paradoksları ortadan kaldırmak ve kümeler teorisine alternatif daha kapsamlı bir teori oluşturmak için geliştirilmiştir. Sınıf teorisine ilişkin bu temel bilgiler bu tezde kullanılacak olan kategorik kavramlar için yeterlidir. Bu nedenle, sınıf teorisine ilişkin daha fazla bilgi burada verilmeyecektir.

2.2.1. Kategorinin tanımı, temel özellikleri ve kategori örnekleri

Tanım 2.26 *Bir $\mathbf{A}$ kategorisi aşağıdaki bilgilerden oluşan bir $(Ob(\mathbf{A}), hom, id, \circ)$ dörtlüsüdür.*

(1) $Ob(\mathbf{A})$, elemanları $\mathbf{A}$ kategorisinin objeleri (kısaca $\mathbf{A}$-objeler) olarak okunan bir sınıftır.

(2) Her $A, B \in Ob(\mathbf{A})$ için $hom(A, B)$, elemanları A objesinden B objesine $\mathbf{A}$ kategorisinin morfizmaları (kısaca $\mathbf{A}$-morfizmaları) olarak okunan bir kümedir.

Her $\mathbf{A}$-morfizması $f \in hom(A, B)$, $f : A \longrightarrow B$ veya $A \xrightarrow{f} B$ ile gösterilir. Ayrıca, şu *koşul sağlanır:*

(a) Her $A, B, A', B' \in Ob(\mathbf{A})$ *ve* $(A, B) \neq (A', B')$ *için,* $hom(A, B) \cap hom(A', B') = \emptyset$.

(3) Her $A \in Ob(\mathbf{A})$ *için* A *üzerindeki birim morfizma (kısaca* $\mathbf{A}$*-birim) diye okunan bir* $A \xrightarrow{id_A} A$ *morfizması vardır.*

(4) Her $A_1 \xrightarrow{f} A_2$ *ve* $A_2 \xrightarrow{g} A_3$ *morfizmaları için* f *ile* g*'nin bileşkesi olarak okunan bir* $A_1 \xrightarrow{gof} A_3$ *morfizmasını karşı getiren bir bileşke kuralı vardır ve aşağıdaki iki koşul sağlanır:*

(b) bileşke birleşme özelliğine sahiptir. Yani, her $A_1 \xrightarrow{f} A_2$, $A_2 \xrightarrow{g} A_3$ *ve* $A_3 \xrightarrow{h} A_4$ *morfizmaları için*

$(hog)\,of = ho(gof)$ *eşitliği sağlanır.*

(c) $\mathbf{A}$*-birimler bileşkenin birimidir. Yani, her* $A, B \in Ob(\mathbf{A})$ *ve her* $A \xrightarrow{f} B$ *morfizması için*

$id_B of = foid_A = f$ *eşitliği sağlanır.*

Bir $\mathbf{A} = (Ob(\mathbf{A}), hom, id, \circ)$ kategorisi verildiği zaman, $Mor(\mathbf{A})$ ile göstereceğimiz ve $\mathbf{A}$ kategorisinin tüm morfizmalarının sınıfı, tüm $hom(A, B)$ kümelerinin birleşimi olarak tanımlanır. Herhangi bir $\mathbf{A}$-morfizması $A \xrightarrow{f} B$ için A'ya f'nin tanım bölgesi denir ve $dom(f)$ ile gösterilir. B'ye f'nin değer bölgesi denir ve $cod(f)$ ile gösterilir. Kategori tanımındaki (a) koşulundan dolayı her $\mathbf{A}$-morfizmasının bir ve yanlız bir tane tanım bölgesi ve değer bölgesi vardır. Diğer bir deyişle, her $\mathbf{A}$-morfizmasının tanım ve değer bölgeleri tek türlü olarak belirlidir. Ayrıca, kategori tanımındaki (c) koşulundan dolayı, her $A \in Ob(\mathbf{A})$ için A üzerindeki birim morfizma $A \xrightarrow{id_A} A$ tektir. Birden fazla kategori ile ilgilenme durumunda bir karışıklık olmaması için hom ve $\circ$'yi bazen $hom_{\mathbf{A}}$ ve $\circ_{\mathbf{A}}$ notasyonları ile de göstereceğiz.

Şimdi bazı kategori örnekleri verelim: Burada birkaç kategori örneği ile konumuzu genişletelim.

Örnek 2.27 *Aşağıdaki tüm kategorilerde bileşke olarak fonksiyonların bileşkesi ve birim morfizmler olarak birim fonksiyonlar alınmıştır.*

(1) Tüm kümelerin kategorisi $\mathbf{Set}$ *ile gösterilen bir kategoridir. Bu kategorinin objeleri kümelerden ve morfizmaları kümeler arasındaki fonksiyonlardan oluşur.*

(2) Tüm topolojik uzayların kategorisi $\mathbf{Top}$ ile gösterilen bir kategoridir. Bu kategorinin objeleri topolojik uzaylardan ve morfizmaları topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlardan oluşur.
(3) Tüm grupların kategorisi $\mathbf{Grp}$ ile gösterilen bir kategoridir. Bu kategorinin objeleri gruplardan ve morfizmaları gruplar arasındaki grup homomorfizmalarından oluşur.

Tanım 2.28 *Verilen bir $\mathbf{A} = (Ob(\mathbf{A}), hom, id, \circ)$ kategorisi için, $\mathbf{A}$ kategorisinin duali (veya karşıtı) $\mathbf{A}^{op}$ şeklinde gösterilen bir kategoridir ve $\mathbf{A}^{op} = (Ob(\mathbf{A}), hom^{op}, id, \circ^{op})$ şeklinde tanımlanır. Burada, her $A, B \in Ob(\mathbf{A})$ ve her $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C \in Mor(\mathbf{A})$ için*

$$hom^{op}(B, A) = hom(A, B) \text{ ve } f \circ^{op} g = g \circ f$$

eşitlikleri ile hom^{op} ve $\circ^{op}$ tanımlanır.

Bu tez boyunca, verilen herhangi bir $\mathbf{A}$-morfizması $A \xrightarrow{f} B$'ye karşı gelen $\mathbf{A}^{op}$-morfizmasını bir karışıklık olmaması için $B \xrightarrow{f^{op}} A$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.29 *$\mathbf{A} = (Ob(\mathbf{A}), hom, id, \circ)$ bir kategori ve $A \xrightarrow{f} B$ bir morfizma olsun. Eğer $g \circ f = id_A$ ve $f \circ g = id_B$ olacak şekilde bir $B \xrightarrow{g} A$ morfizması varsa f'ye A'dan B'ye bir $\mathbf{A}$-izomorfizması yada kısaca bir izomorfizma denir.*

$A \xrightarrow{f} B$ bir $\mathbf{A}$-izomorfizma ise buna karşı gelen $\mathbf{A}$-morfizması $B \xrightarrow{g} A$ tektir ve buna f'nin tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir.

Tanım 2.30 *$\mathbf{A}$ bir kategori ve $A, B \in Ob(\mathbf{A})$ olsun. Eğer A'dan B'ye bir izomorfizma varsa A ve B izomorftur denir ve $A \cong B$ ile gösterilir.*

2.2.2. Funktorlar ve funktor çeşitleri

Tanım 2.31 *$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ kategorileri verilsin. $\mathbf{A}$'dan $\mathbf{B}$'ye bir F funktoru aşağıdaki iki özelliği saglayan, her $\mathbf{A}$-objesi A'yı bir ve yanlız bir $\mathbf{B}$-objesi $F(A)$'ya ve her $\mathbf{A}$-morfizması $A \xrightarrow{f} B$'yı bir ve yanlız bir tane $\mathbf{B}$-morfizması $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$'ya eşleyen bir fonksiyondur:*
(i) F bileşkeyi korur. Yani, her $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C \in Mor(\mathbf{A})$ için
$F(gof) = F(g)oF(f)$'dır.
(ii) F birim morfizmaları korur. Yani, her $\mathbf{A}$-objesi A için $F(id_A) = id_{F(A)}$'dır.

Bir $\mathbf{A}$ kategorisinin objeleri birim morfizmaları olarak düşünülebilir. Bu durumda $\mathbf{A}$'dan $\mathbf{B}$'ye bir F funktoru bileşkeyi ve birim morfizmaları koruyan $Mor\,(\mathbf{A})$'dan $Mor\,(\mathbf{B})$'ye bir fonksiyondan başka birşey değildir. $\mathbf{A}$'dan $\mathbf{B}$'ye bir F funktoru,
$F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ yada $\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B}$ notasyonları ile ifade edilir. Bir $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ funktoru tanımlanırken her $\mathbf{A}$-morfizması $A \xrightarrow{f} B$ için

$$F\left(A \xrightarrow{f} B\right) = F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Örnek 2.32 *Her hangi bir $\mathbf{A}$ kategorisi için*

$$id_{\mathbf{A}}\left(A \xrightarrow{f} B\right) = A \xrightarrow{f} B$$

eşitliği ile bir $id_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ funktoru tanımlanır. Buna birim funktor denir.

Tanım 2.33 *$F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ bir funktor olsun. $A, B \in Ob\,(\mathbf{A})$ için*

$$F_{AB} : hom_{\mathbf{A}}(A, B) \to hom_{\mathbf{B}}(F(A), F(B))$$

fonksiyonu F funktorunun $hom_{\mathbf{A}}(A, B)$ ve $hom_{\mathbf{B}}(F(A), F(B))$ kümelerine kısıtlanışını göstersin.
(i) Her $A, B \in Ob\,(\mathbf{A})$ için F_{AB} fonksiyonu bire-bir ise F funktoruna güvenilir (faithfull) denir.
(ii) Her $A, B \in Ob\,(\mathbf{A})$ için F_{AB} fonksiyonu örten ise F funktoruna dolu (full) denir.

Tanım 2.34 *$F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ bir funktor olmak üzere; her $\mathbf{B}$-objesi B için $F\,(A) \cong B$ olacak şekilde en az bir $\mathbf{A}$-objesi A varsa F'ye izomorfizm-yoğun (isomorphism-dense) denir.*

Tanım 2.35 *Bir $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ funktoru eğer güvenilir, dolu ve izomorfizm-yoğun ise bu funktora bir denklik denir.*

Tanım 2.36 *$F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ bir funktor olsun. Eğer F, güvenilir, dolu ve objeler üzerinde bire-bir ve örten ise F'ye bir izomorfizm (isomorphism) denir.*

Denk ve izomorfizm tanımlarından kolayca görüleceği üzere, bir funktorun izomorfizm olması onun bir denklik olmasını gerektirir. Ancak, bunun tersi genelde doğru değildir. Sonuç olarak, bir funktorun bir izomorfizm olması onun bir denklik olmasından çok daha güçlü bir özelliktir.

Tanım 2.37 *Eğer verilen* $\mathbf{A}$ *ve* $\mathbf{B}$ *kategorileri arasında bir* $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *denkliği (izomorfizmi) varsa, bu iki kategoriye denk (izomorfik) kategoriler denir.*

Tanım 2.38 $\mathbf{A}$ *ve* $\mathbf{B}$ *kategorileri verilsin. Eğer* $\mathbf{A}$*'nın duali* $\mathbf{A}^{op}$*,* $\mathbf{B}$*'ye denk ise* $\mathbf{A}$ *ve* $\mathbf{B}$ *dual olarak denktir yada kısaca dual kategorilerdir.*

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde Boole cebirleri ve Boole halkalarının genel özellikleri incelenerek aralarındaki yakın ilişkiler ortaya konulacaktır.

3.1. Boole Cebirlerinin Kategorisi ve Boole Halkalarının Kategorisi

Tanım 3.39 *$(L, \leq, ')$ ve $(K, \leq, ')$ Boole cebirleri ve $f : L \to K$ bir fonksiyon olsun. Eğer f aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $f : (L, \leq, ') \longrightarrow (K, \leq, ')$'ye bir Boole homomorfizması denir:*

$(i) f(\top) = \top$ *ve* $f(\bot) = \bot$

$(ii) f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ *ve* $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$

$(iii) f(a') = F(a)'$

Objeleri Boole cebirleri, morfizmaları Boole homomorfizmaları, bileşke işlemi fonksiyonlar arasındaki bileşke işlemi ve birimleri birim fonksiyonlardan oluşan bir kategori vardır. Bu kategoriyi $\mathbf{BA}$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.40 *$\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ işlemine göre her elemanı idempotent olan, yani her $x \in T$ için $x = x^2$ eşitliğini sağlayan birimli ve değişmeli bir halkaya bir Boole halkası denir (Halmos 1967).*

$\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ Boole halkaları ile çalışırken; Boole halkalarının özelliklerininden faydalanıp ve bu bağlamda birkaç çıkarımda bulunup çalışmalarımızı sürdüreceğiz.

Önerme 3.41 *Verilen bir $\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ Boole halkası için $x \leq_{\mathbb{T}} y \Leftrightarrow x.y = x$ ile tanımlanan $\leq_{\mathbb{T}}$, T üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.*

İspat Her $x, y, z \in T$ için kısmi sıralama bağıntısı

(i) $x \leq_{\mathbb{T}} x$'dir:

$x = x^2$ olduğundan $x \leq_{\mathbb{T}} x$ olduğu açıktır.

(ii) $x \leq_{\mathbb{T}} y$ ve $y \leq_{\mathbb{T}} x$ ise $x = y$'dir:

$x \leq_{\mathbb{T}} y$ ise $x.y = x$, $y \leq_{\mathbb{T}} x$ ise $y.x = y$ 'dir. Çalıştığımız birimli ve değişmeli halka olduğundan dolayı $x = x.y = y.x = y$ olacaktır.

(iii) $x \leq_{\mathbb{T}} y$ ve $y \leq_{\mathbb{T}} z$ ise $x \leq_{\mathbb{T}} z$:

$x \leq_{\mathbb{T}} y$ ise $x.y = x$ ve $y \leq_{\mathbb{T}} z$ ise $y.z = y$ olacaktır ki bu durumda

$$x.z = (x.y).z = x.(y.z) = x.y = x$$

olur. Bu da $x \leq_{\mathbb{T}} z$'yı verir. Üç durumdan yola çıkarak kısmi sıralama bağıntısı elde edilir. □

Önerme 3.42 $\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ *Boole halkası için her elemanın toplamsal tersi kendisine eşittir (Halmos 1967).*

İspat Her $x, y \in T$ için

$$\begin{aligned} (x+y) &= (x+y)^2 = x^2 + x.y + y.x + y^2 = x + x.y + y.x + y \\ &\Rightarrow x.y + y.x = 0_{\mathbb{T}}. \end{aligned}$$

Son eşitlikte $y = 1_{\mathbb{T}}$ alınırsa

$$x + x = 0_{\mathbb{T}} \Rightarrow x = -x.$$

□

Önerme 3.43 $\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ *bir Boole Halkası olmak üzere* $a, b \in T$ *için;* $a.b = -a.b$*'dir (Halmos 1967).*

İspat İfademizin doğruğunu göstermek için Önerme 3.42'den ve Boole halkalarının idempotentlik özelliğinden faydalanacağız; $a, b \in T$ için;

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + a.b + a.b + b^2 \\ \Rightarrow a+b &= a + a.b + b.a + b \\ \Rightarrow \quad 0_{\mathbb{T}} &= a.b + a.b \\ \Rightarrow -a.b &= a.b \end{aligned}$$

olduğunu görmüş oluruz. □

Önerme 3.44 $\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ *Boole halkası üzerinde tanımlı* $\leq_{\mathbb{T}}$ *kısmi sıralama bağıntısına göre* $\mathbb{T}$*'nin toplamsal birim elemanı* $0_{\mathbb{T}}$ *ve çarpımsal birim elemanı* $1_{\mathbb{T}}$ *sırasıyla en küçük ve en büyük elemanlardır.*

İspat *Tanımladığımız kısmi sıralama bağıntısına göre; her* $x \in T$ *için*

$i)$ $0_{\mathbb{T}}.x = 0_{\mathbb{T}}$ *ve buradan* $0_{\mathbb{T}} \leq_{\mathbb{T}} x$ *olacaktır.*

$ii)$ $1_{\mathbb{T}}.x = 1_{\mathbb{T}}$*'dir. Dolayısıyla* $x \leq_{\mathbb{T}} 1_{\mathbb{T}}$ *olur.* □

Önerme 3.45 $\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ *bir Boole halkası olmak üzere* $(T, \leq_{\mathbb{T}})$ *kısmi sıralı kümesinde her* $x, y \in T$ *için* $\inf\{x, y\} = x.y$*'dir (Halmos 1967).*

İspat

$$(x.y).x = x^2.y = x.y \text{ ve diğer taraftan } (x.y).y = x.y^2 = x.y$$

olacaktır. Buradan $x.y$ x *ve* y *için birer alt sınırdır.* a, x *ve* y *için bir alt sınır olsun. Bu durumda* $a.x = a$ *ve* $a.y = a$ *olur yani* $a \leq_{\mathbb{T}} x$ *ve* $a \leq_{\mathbb{T}} y$ *olur. Diğer taraftan*

$$a.(x.y) = (a.x).y = a.y = a \text{ olur.}$$

Buradan $a \leq_{\mathbb{T}} x.y$ *olur ki bu durumda* $\inf\{x, y\} = x.y$ *elde edilir.* □

Önerme 3.46 $\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ *bir Boole halkası olmak üzere* $(T, \leq_{\mathbb{T}})$ *kısmi sıralı kümesinde her* $x, y \in T$ *için* $\sup\{x, y\} = x + y + x.y$*'dir (Halmos 1967).*

İspat *Tanım* 3.40*'tan faydalanarak*

$$x.(x + y + x.y) = x^2 + x.y + x^2.y = x + x.y + x.y = x + 0_{\mathbb{T}} = x$$

elde edilir ve benzer şekilde $y.(x + y + x.y) = y$ *olur. Buradan*

$$x \leq_{\mathbb{T}} (x + y + x.y) \text{ ve } y \leq_{\mathbb{T}} (x + y + x.y)$$

dir. Diğer taraftan $x \leq_{\mathbb{T}} b$ *ve* $y \leq_{\mathbb{T}} b$ *olacak şekilde her hangi bir* $b \in T$ *için*

$$(x + y + x.y).b = x.b + y.b + x.y.b \overset{\text{Önerme 3.45'ten}}{=} x + y + x.y$$

olur. Buradan ise $(x + y + x.y) \leq_{\mathbb{T}} b$ *olacaktır.* □

Önerme 3.47 *$(T, \leq_{\mathbb{T}})$ sınırlı bir örgüdür.*

İspat İstenen Önerme 3.44, Önerme 3.45 ve Önerme 3.46'nın bir sonucudur. $\square$

$(T, \leq_{\mathbb{T}})$ sınırlı örgüsünde herhangi $x, y \in T$ için $inf\,\{x, y\}$ ve $\sup\{x, y\}$'yi sırasıyla $x \wedge_{\mathbb{T}} y$ ve $x \vee_{\mathbb{T}} y$ ile göstereceğiz.

Önerme 3.48 *$\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ bir Boole halkası olsun. $(T, \leq_{\mathbb{T}})$ sınırlı örgüsü dağılmalıdır.*

İspat Önerme 2.8'den dolayı, $(T, \leq_{\mathbb{T}})$ sınırlı örgüsünün dağılmalı olduğunu göstermek için $\vee_{\mathbb{T}}$işleminin $\wedge_{\mathbb{T}}$işlemi üzerine dağılabildiğini görmemiz yeterli olacaktır.
Her $x, y \in T$ için

$$x \vee_{\mathbb{T}} (y \wedge_{\mathbb{T}} z) = (x \vee_{\mathbb{T}} y) \wedge_{\mathbb{T}} (x \vee_{\mathbb{T}} z)$$

eşitliği için Önermeler 3.45, 3.46 ve 3.47'de yapmış olduğumuz tanımlamalardan yararlanarak gösterelim;

$$x \vee_{\mathbb{T}} (y \wedge_{\mathbb{T}} z) = x + (y \wedge_{\mathbb{T}} z) + x.(y \wedge_{\mathbb{T}} z) = x + (y.z) + x.(y.z) \tag{3.4}$$

ve

$$\begin{aligned}
& (x \vee_{\mathbb{T}} y) \wedge_{\mathbb{T}} (x \vee_{\mathbb{T}} z) = (x + y + x.y).(x + z + x.z) \\
= \; & x^2 + x.z + x^2 z + y.x + y.z + y.x.z + x^2 z + x.y.z + x^2.y.z \\
= \; & x + x.z + x.z + y.x + y.z + y.x.z + x.z + x.y.z + x.y.z \\
= \; & x + y.z + x.y.z. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

(3.4) ve (3.5) eşitliklerinden

$$x \vee_{\mathbb{T}} (y \wedge_{\mathbb{T}} z) = (x \vee_{\mathbb{T}} y) \wedge_{\mathbb{T}} (x \vee_{\mathbb{T}} z)$$

elde etmiş oluruz. $\square$

Tanım 3.49 *$(T, +, ., 0, 1)$ ve $(N+, ., 0, 1)$ Boole halkaları olmak üzere, eğer h aşağıdaki koşulları sağlıyor ise $h : (T, +, ., 0, 1) \longrightarrow (N+, ., 0, 1)$' ye bir halka homomorfizması denir.*

$i)$ $h(x+y) = h(x) + h(y)$

$ii)$ $h(x.y) = h(x).h(y)$

$iii)$ $h(0) = 0$

$iv)$ $h(1) = 1.$

Objeleri Boole halkaları, morfizmaları birimleri koruyan halka homomorfizmaları olan Boole halkalarının kategorisini tezimiz boyunca $\mathbf{BRNG}$ ile göstereceğiz.

3.2. Boole Cebirleri, Boole Halkaları ve Onların Denkliği

Önerme 3.50 $\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ *bir Boole halkası olsun.* $\lambda_{\mathbb{T}} : T \to T$*,* $\lambda_{\mathbb{T}}(x) = 1_{\mathbb{T}} - x$ *olmak üzere,* $B_{\mathbb{T}} = (T, \leq_{\mathbb{T}}, \lambda_{\mathbb{T}})$ *bir Boole cebiridir.*

İspat Önerme 3.48'den dolayı ifademizin doğruluğunu göstermek için her $x \in T$ için $x \wedge_{\mathbb{T}} \lambda_{\mathbb{T}}(x) = 0_{\mathbb{T}}$ ve $x \vee_{\mathbb{T}} \lambda_{\mathbb{T}}(x) = 1_{\mathbb{T}}$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

$i)$ Önerme 3.45'ten

$$x \wedge_{\mathbb{T}} \lambda_{\mathbb{T}}(x) = x.(1_{\mathbb{T}} - x) = x - x^2 = x - x = 0_{\mathbb{T}} \quad \text{olacaktır.}$$

$ii)$ Önerme 3.46'dan

$$\begin{aligned} x \vee_{\mathbb{T}} \lambda_{\mathbb{T}}(x) &= x + \lambda_{\mathbb{T}}(x) + x.\lambda_{\mathbb{T}}(x) = x + 1_{\mathbb{T}} - x + x.(1_{\mathbb{T}} - x) \\ &= 1_{\mathbb{T}} + x - x^2 = 1_{\mathbb{T}} + 0_{\mathbb{T}} = 1_{\mathbb{T}} \end{aligned}$$

olacaktır. □

Önerme 3.51 $|T| = (T, \leq, ')$ *bir Boole cebiri olsun.*

$i)$ $x \cdot_{|T|} y = x \wedge y$

$ii)$ $x +_{|T|} y = x \vee y$

ile $+_{|T|}$ *ve* $\cdot_{|T|}$ *işlemlerini tanımlayalım. Bu durumda* $H_{|T|} = \left(T, +_{|T|}, \cdot_{|T|}\right)$ *bir Boole halkasıdır.*

İspat Boole halkalarının tanımı gereği tanımladığımız işlemlerin birimli, değişmeli ve idempotent halka özelliklerini sağladığını göstermemiz yeterli olacaktır.

$i)$ Her $x, y \in T$ için $x._{|T|} x = x = x \wedge x$ olacaktır. Dolayısıyla idempotent olduğunu görmüş oluruz.

$ii)$ Tanım gereği her $x \in T$ için $x \geq \perp_{|T|} \Leftrightarrow x = x \vee \perp_{|T|}$'dir. Bu çift gerektirmeden faydalanarak

$$x +_{|T|} \perp_{|T|} = x \vee \perp_{|T|} = x$$

olur. Bu durumda $\perp_{|T|}$, $H_{|T|}$'ın $+_{|T|}$ işlemine göre birimi olacaktır.

Benzer şekilde hareket edersek her $x \in T$ için $x \leq \top_{|T|} \Leftrightarrow x = x \wedge \top_{|T|}$'dir.

Dolayısıyla $x._{|T|} \top_{|T|} = x \wedge \top_{|T|} = x$ olur. Bu durumda $\top_{|T|}$, $H_{|T|}$'ın $._{|T|}$ işlemine göre birimi olur.

$iii)$ Her $x, y \in T$ için $x \vee y = \sup\{x, y\}$ olduğunu ifade etmiştik. Bu eşitlikten yararlanarak

$$x +_{|T|} y = x \vee y = y \vee x = y +_{|T|} x$$

olduğu görülür.

$iv)$ Her $x, y, z \in T$ için

$$x +_{|T|} (y +_{|T|} z) = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = (x +_{|T|} y) +_{|T|} z$$

olur.

$v)$ Her $x, y \in T$ için

$$x._{|T|} y = x \wedge y = y \wedge x = y._{|T|} x$$

olur.

$vi)$ Her $x, y, z \in T$ için

$$x._{|T|}(y._{|T|}z) = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = (x._{|T|}y)._{|T|}z$$

olacağı görülür.

$vii)$ Her $x, y, z \in T$ için

$$x._{|T|} (y +_{|T|} z) = x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x._{|T|}y) +_{|T|} (x._{|T|}y)$$

olur. $(i - vii)$ özelliklerinden dolayı $H_{|T|} = \left(T, +_{|T|}, ._{|T|}\right)$ bir Boole halkası olur. $\square$

Önerme 3.52 $\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ *bir Boole halkası olmak üzere her* $a, b \in T$ *için* $a + b = (a \wedge_{\mathbb{T}} \lambda_{\mathbb{T}}(b)) \vee_{\mathbb{T}} (\lambda_{\mathbb{T}}(a) \wedge_{\mathbb{T}} b)$*'dir.*

İspat $a, b \in B$ *için*

$$\begin{aligned}
(a \wedge_{\mathbb{T}} \lambda_{\mathbb{T}}(b)) \vee_{\mathbb{T}} (\lambda_{\mathbb{T}}(a) \wedge_{\mathbb{T}} b) &= [a.(1_{\mathbb{T}} - b)] + [(1_{\mathbb{T}} - a).b] + [a.(1_{\mathbb{T}} - b)].[(1_{\mathbb{T}} - a).b] \\
&= a - a.b + b - a.b + [(a - a.b).(b - a.b)] \\
&= [a + b - a.b - a.b \ + [a.b - a^2.b - a.b^2 + a^2.b^2] \\
&= a + b - a.b - a.b \ + [a.b - a.b - a.b + a.b] \\
&= a + b - a.b + a.b + 0_{\mathbb{T}} \\
&= a + b \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.53 *Verilen bir* $\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ *Boole halkası için,* $H_{B_{\mathbb{T}}} = \mathbb{T}$*'dir.*

İspat Verilen bir $\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}})$ Boole halkası için ve verilen bir $B_{\mathbb{T}} = (T, \leq_{\mathbb{T}}, \lambda_{\mathbb{T}})$ Boole cebiri için

$$\inf\{x, y\} = x \wedge_{\mathbb{T}} y = x.y \quad \text{ve} \quad \sup\{x, y\} = x \vee_{\mathbb{T}} y = x + y + x.y$$

olduğu göz önünde tutularak

$i)$ $a ._{B_{\mathbb{T}}} b = a.b$,

$ii)$ $a +_{B_{\mathbb{T}}} b = a + b$,

$iii)$ $1_{H_{B_{\mathbb{T}}}} = 1_{\mathbb{T}}$ ve

$iv)$ $0_{H_{B_{\mathbb{T}}}} = 0_{\mathbb{T}}$

eşitliklerini gösterirsek $H_{B_{\mathbb{T}}} = \mathbb{T}$ olur.

$i)$ $a ._{B_{\mathbb{T}}} b = a \wedge_{\mathbb{T}} b = a.b$ elde edilir.

$ii)$ Kısmi sıralama bağıntılarının özelliklerinden ve Önerme 3.52'den faydalanarak

$$\begin{aligned}
a +_{B_{\mathbb{T}}} b &= (a \vee_{\mathbb{T}} b) = (a \wedge_{\mathbb{T}} \lambda_{\mathbb{T}}(b)) \vee_{\mathbb{T}} (\lambda_{\mathbb{T}}(a) \wedge_{\mathbb{T}} b) \\
&= (a \wedge_{\mathbb{T}} \lambda_{\mathbb{T}}(b)) + (\lambda_{\mathbb{T}}(a) \wedge_{\mathbb{T}} b) + (a \wedge_{\mathbb{T}} \lambda_{\mathbb{T}}(b)).(\lambda_{\mathbb{T}}(a) \wedge_{\mathbb{T}} b) \\
&= a.(1_{\mathbb{T}} - b) + (1_{\mathbb{T}} - a).b + [a.(1_{\mathbb{T}} - b)].[(1_{\mathbb{T}} - a).b] \\
&= a - a.b + b - a.b + [(a - a.b).(b - a.b)] \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bununla birlikte,

$$
\begin{aligned}
& a-a.b+b-a.b+[(a-a.b).(b-a.b)] \\
= \quad & a+b-a.b-a.b+[a.b-a.b-a.b+a.b] \\
= \quad & [a+b-a.b-a.b] \\
\overset{\text{Önerme 3.43'ten}}{=} \quad & a+b-a.b+a.b \\
= \quad & [\,a+b-0_{\mathbb{T}}]=a+b
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Eşitlik (3.7) ve (3.8)'den $a+_{B_{\mathbb{T}}} b=a+b$ elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
iii)\quad 1_{H_{B_{\mathbb{T}}}} &= a+_{B_{\mathbb{T}}}\lambda_{\mathbb{T}}(a)=(a\vee_{\mathbb{T}}\lambda_{\mathbb{T}}(a))=a+\lambda_{\mathbb{T}}(a)+a.\lambda_{\mathbb{T}}(a) \\
&= a+(1_{\mathbb{T}}-a)+a.(1_{\mathbb{T}}-a)\;=a+1_{\mathbb{T}}-a+a-a \\
&= 1_{\mathbb{T}}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $1_{H_{B_{\mathbb{T}}}}=1_{\mathbb{T}}$ olduğunu söyleyebiliriz.

$iv)$ $0_{\mathbb{T}}=a-_{\mathbb{T}}a=a-_{\mathbb{T}}a^2=a.(1_{\mathbb{T}}-a)=a._{B_{\mathbb{T}}}\lambda_{\mathbb{T}}(a)=a\wedge_{\mathbb{T}}\lambda_{\mathbb{T}}(a)=0_{H_{B_{\mathbb{T}}}}$ □

Önerme 3.54 *Verilen bir $|T|=(T,\leq,')$ Boole cebiri için $B_{H_{|T|}}=|T|$'dir.*

İspat Verilen bir $|T|=(T,\leq,')$ Boole cebiri için $H_{|T|}=\left(T,+_{|T|},\cdot_{|T|}\right)$ Boole halkası içindeki $+_{|T|}$ ve $\cdot_{|T|}$ işlemlerinin tanımı göz önünde tutularak,

$x\leq_{H_{|T|}}y\Leftrightarrow x\leq y$ için

(i) $x\wedge_{H_{|T|}}y=x\wedge y$,

(ii) $x\vee_{H_{|T|}}y=x\vee y$,

(iii) $\lambda_{H_{|T|}}(x)=x'$,

(iv) $\top_{B_{H_{|T|}}}=\top_T$,

(v) $\perp_{B_{H_{|T|}}}=\perp_T$

olduğunu gösterirsek $B_{H_{|T|}}=|T|$ olduğunu söyleyebiliriz.

$$i)\ x\wedge_{H_{|T|}}y=x\cdot_{|T|}y=x\wedge y$$

eşitliği sağlanır

$$ii)\ x\vee_{H_{|T|}}y=x+_{|T|}y+_{|T|}x\cdot_{|T|}y=(x\vee y)\vee(x\wedge y)=x\vee y$$

olacaktır.

$$iii)\; x \wedge \lambda_{H_{|T|}}(x) \overset{(i)'den}{=} x \wedge_{H_{|T|}} \lambda_{H_{|T|}}(x) = x \cdot_{|T|} \lambda_{H_{|T|}}(x) = x \wedge \lambda_{H_{|T|}}(x)$$
$$= \perp_T = x \wedge x^{'} \quad (3.9)$$

ve

$$x \vee \lambda_{H_{|T|}}(x) \overset{(ii)'den}{=} x \vee_{H_{|T|}} \lambda_{H_{|T|}}(x) = x +_{|T|} \lambda_{H_{|T|}}(x) +_{|T|} x \cdot_{|T|} \lambda_{H_{|T|}}(x)$$
$$= x +_{|T|} \lambda_{H_{|T|}}(x) +_{|T|} \perp_T = \top_T = x \vee x^{'} \quad (3.10)$$

(3.9) ve (3.10) eşitliklerinden ve x'in tümleyeni $x^{'}$ tek olduğundan

$$\lambda_{H_{|T|}}(x) = x^{'}$$

olur.

$$iv)\; \lambda_{H_{|T|}}(x \vee_{H_{|T|}} y) = (\lambda_{H_{|T|}}(x) \wedge_{H_{|T|}} \lambda_{H_{|T|}}(y))$$

eşitliği ile ifade edilen De Morgan kuralını hatırlayalım.

$$\begin{aligned}
\top_{B_{H_{|T|}}} &= (x \vee_{H_{|T|}} y) \vee_{H_{|T|}} \lambda_{H_{|T|}}(x \vee_{H_{|T|}} y) \\
&\overset{De\, Morgan\, kuralından}{=} (x \vee_{H_{|T|}} y) \vee_{H_{|T|}} (\lambda_{H_{|T|}}(x) \wedge_{H_{|T|}} \lambda_{H_{|T|}}(y)) \\
&= (x \vee_{H_{|T|}} y) +_{|T|} (\lambda_{H_{|T|}}(x) \wedge_{H_{|T|}} \lambda_{H_{|T|}}(y)) \\
&\quad +_{|T|}(x \vee_{H_{|T|}} y) \cdot_{|T|} (\lambda_{H_{|T|}}(x) \wedge_{H_{|T|}} \lambda_{H_{|T|}}(y)) \\
&= (x +_{|T|} y + x \cdot_{|T|} y) +_{|T|} (x^{'} \cdot_{|T|} y^{'}) \\
&\quad +_{|T|}[(x +_{|T|} y + x \cdot_{|T|} y) \cdot_{|T|} (x^{'} \cdot_{|T|} y^{'})] \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Önerme 3.45 ve Önerme 3.46'dan faydalanarak $x +_{|T|} y + x \cdot_{|T|} y = x \vee y$ ve $x^{'} \cdot_{|T|} y^{'} = x^{'} \wedge y^{'}$ yazabiliriz. Bu eşitlikleri kullanırsak;

$$\begin{aligned}
&(x +_{|T|} y + x \cdot_{|T|} y) +_{|T|} (x^{'} \cdot_{|T|} y^{'}) +_{|T|} [(x +_{|T|} y + x \cdot_{|T|} y) \cdot_{|T|} (x^{'} \cdot_{|T|} y^{'})] \\
= \;& (x \vee y) +_{|T|} (x^{'} \wedge y^{'}) +_{|T|} [(x \vee y) \cdot_{|T|} (x^{'} \wedge y^{'})] \\
= \;& (x \vee y) \vee (x^{'} \wedge y^{'}) \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Eşitlik (3.11) ve (3.12)'den $\top_{B_{H_{|T|}}} = (x \vee y) \vee (x^{'} \wedge y^{'})$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\top_{B_{H_{|T|}}} &= (x \vee y) \vee (x^{'} \wedge y^{'}) = x \vee [y \vee (x^{'} \wedge y^{'})] \\
&= x \vee [(y \vee x^{'}) \wedge (y \vee y^{'})] \\
&= x \vee [(y \vee x^{'}) \wedge \top_T] \\
&= x \vee y \vee x^{'} = \top_T \vee y \\
&= \top_T
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız.

$$\begin{aligned}
v)\ \bot_{B_{H_{|T|}}} &= (x \vee_{H_{|T|}} y) \wedge_{H_{|T|}} \lambda_{H_{|T|}}(x \vee_{H_{|T|}} y) \\
&\overset{De\ Morgan\ kuralından}{=} (x \vee_{H_{|T|}} y) \wedge_{H_{|T|}} (\lambda_{H_{|T|}}(x) \wedge_{H_{|T|}} \lambda_{H_{|T|}}(y)) \\
&= (x \vee_{H_{|T|}} y) \cdot_{|T|} (\lambda_{H_{|T|}}(x) \wedge_{H_{|T|}} \lambda_{H_{|T|}}(y)) \\
&= [x +_{|T|} y + x \cdot_{|T|} y] \cdot_{|T|} [(x^{'} \cdot_{|T|} y^{'})] \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Önerme 3.46 ve Önerme 3.45'ten faydalanarak;

$$\begin{aligned}
& [x +_{|T|} y + x \cdot_{|T|} y] \cdot_{|T|} [(x^{'} \cdot_{|T|} y^{'})] \\
= \ & (x \vee y) \wedge (x^{'} \wedge y^{'}) = (x \wedge (x^{'} \wedge y^{'})) \vee (y \wedge (x^{'} \wedge y^{'})) \\
= \ & (\bot_T \wedge y^{'}) \vee (\bot_T \wedge x^{'}) = \bot_T \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Eşitlik (3.13) ve (3.14)'ten $\bot_{B_{H_{|T|}}} = \bot_T$ elde edilir. □

Sonuç 3.55 *Boole cebirleri ve Boole halkaları denk kavramlardır.*

Konumuzun ekseninden sapmamak için Boole halkalarının daha fazla özelliklerine değinmeden şunu ifade edebiliriz: Bir Boole cebiri her elemanlanının karesi kendisine eşit olan bir Boole halkasıdır yada tümleyenli dağılmalı kafes yapısına sahip olan kısmi sıralı bir kümedir.

3.3. Boole Cebirlerinin Topolojik Gösterimi

Bu bölümde amacımız Boole cebirlerinin Stone uzayı adı verilen bazı özel topolojik uzaylar yardımıyla karakterize edilebileceğini göstermektir. Bunun için şimdi vereceğimiz bazı hazırlıklara ihtiyacımız vardır.

Tanım 3.56 *(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x,y\in X$ ve $x\neq y$ için $x\in G$, $y\in H$ ve $G\cap H=\emptyset$ olacak biçimde $G,H\in\tau$ var ise (X,τ) topolojik uzayına Hausdorff'tur denir.*

Tanım 3.57 *Bir (X,τ) topolojik uzayının kaçık kümelerden oluşan bir tabanı varsa bu topolojik uzaya 0-boyutlu (zero dimensional) uzay denir.*

Tanım 3.58 *(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X'nın her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa (X,τ)'ya kompakttır (tıkızdır) denir. Yani, $X=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$ olacak şekilde seçilen τ'nun her $\{U_i\mid i\in I\}$ alt ailesi için $X=U_{i_1}\cup...\cup U_{i_n}$ olacak şekilde I damga kümesinin sonlu bir $\{i_1,...,i_n\}$ altkümesinin bulunmasıdır.*

Önteorem 3.59 *(X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{S}$, τ'nun bir alttabanı olsun. (X,τ)'nun kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul X'nın $\mathcal{S}$'nin bazı elemanlarından oluşan her açık örtüsünden sonlu bir altörtü seçilebilmesidir (Morandi 2005).*

Tanım 3.60 *Bir (X,τ) topolojik uzayı kompakt, Hausdorff ve 0-boyutlu ise bu topolojik uzaya Stone uzayı denir (Johnstone 1982; Morandi 2005).*

Önerme 3.61 *Bir $(L,\leq,')$ Boole cebirinde her $a,b\in L$ için ve her $a\in L$ için $\varphi(a)$, a noktasını bulunduran tüm asal filtrelerin kümesi olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır:*
(i) $\varphi(a)\cap\varphi(b)=\varphi(a\wedge b)$,
(ii) $\varphi(a)\cup\varphi(b)=\varphi(a\vee b)$,
(iii) $\varphi(a)^c=\varphi(a')$.
İspat *Her $a,b\in L$ için;*
(i) $P\in\varphi(a)\cap\varphi(b)$ olsun. Bu durumda $P\in\varphi(a)$ ve $P\in\varphi(b)$ olacaktır. Dolayısıyla $a\in P$ ve $b\in P$ olur. Tanım 2.13'ten $a\wedge b\in P$ olduğunu söyleyebiliriz. Buradan $P\in\varphi(a\wedge b)$'dir.
Diğer taraftan $P\in\varphi(a\wedge b)$ olsun bu durumda $a\wedge b\in P$ olur. $a\wedge b\in P$ ve $a\wedge b\leq a$ olduğundan (I_1)'den $a\in P$ olur. Benzer şekilde $b\in P$ olur. Buradan $P\in\varphi(a)$ ve $P\in\varphi(b)$ dolayısıyla $P\in\varphi(a)\cap\varphi(b)$ olacaktır. Bu iki duruma bakarak çift taraflı kapsamaların olduğu görülür.
(ii) $P\in\varphi(a\vee b)$ için tanım gereği $a\vee b\in P$ olacaktır diğer yandan Tanım 2.13'ten P asal filtre olduğundan $a\in P$ ya da $b\in P$ olacaktır. Buradan $P\in\varphi(a)\cup\varphi(b)$ olur. Diğer

taraftan $P \in \varphi(a) \cup \varphi(b)$ *için* $P \in \varphi(a)$ *ya da* $P \in \varphi(b)$ *olacaktır. O zaman* $a \in P$ *ya da* $b \in P$*'dır. Bu durumda* $a \vee b \in P$ *olur. Son durumda* $P \in \varphi(a \vee b)$ *den bahsedebiliriz. Buradan* $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b)$ *eşitliği elde ederiz.*

(iii) $\varphi(a)^c = \varphi(a')$ *olduğunu görelim.*

Her hangi bir $P \in \varphi(a^{'})$ *için* $P \in \varphi(a)^c$ *olacaktır. Eğer* $P \in \varphi(a)$ *olursa* $a \in P$ *olacaktır. Ayrıca, kabulümüz gereği* $a' \in P$ *olur ve dolayısıyla,* $a' \wedge a = \bot \in P$ *olacaktır. Fakat asal filtrelerin bir sınırlı örgünün en küçük elemanını içermediğini biliyoruz (Önerme 2.15'ten). Bu çelişkiden dolayı,* $P \notin \varphi(a)$ *veya denk olarak* $P \in \varphi(a)^c$ *olur. Diğer taraftan* $P \in \varphi(a)^c$ *olsun.* $a \vee a' = \top \in P$ *olduğunu biliyoruz. Bu durumda,* $a \in P$ *veya* $a' \in P$*'dir (Tanım 2.13, (F3)'ten).* $P \in \varphi(a)^c$ *olduğundan* $P \notin \varphi(a)$ *olacaktır. Dolayısıyla* $a' \in P$ *olacağını söyleyebiliriz. Son durumda* $P \in \varphi(a')$ *elde edilir. Buradan göstermek istediğimiz* $\varphi(a)^c = \varphi(a')$ *eşitlik gerçekleşmiş olacaktır.* □

Önerme 3.62 L *bir Boole cebiri olsun.* $PF(L)$ *ile* L *Boole cebirinin tüm asal filtrelerinin kümesini gösterelim.* $\beta(L) = \{\varphi(a) |\ a \in L\}$ *kümeler ailesi* $PF(L)$ *üzerinde bir* $\tau(L)$ *topolojisi için tabandır.*

İspat $\beta(L)$ ailesinin taban olma koşullarını sağladığını görmek yeterlidir. Bunun için şu iki koşulun sağlandığını göstereceğiz:

(B1) $\bigcup \beta(L) = PF(L)$,

(B2) Her $B_1, B_2 \in \beta(L)$ ve $x \in B_1 \cap B_2$ için $\exists B_3 \in \beta(L)$ öyleki $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$'dır.

(B1) Her $P \in PF(L)$ için $P \neq \emptyset$ olduğundan $a \in P$ olacak şekilde en az bir tane $a \in L$ vardır. $\varphi(a)$'nın tanımından $P \in \varphi(a)$ olur. $\varphi(a) \subseteq \bigcup \beta(L)$ olduğundan $P \in \bigcup \beta(L)$ olur.

Bu $PF(L) \subseteq \bigcup \beta(L)$ olduğunu kanıtlar. Ters kapsama aşikar olduğundan $\bigcup \beta(L) = PF(L)$ olur.

(B2) $B_1, B_2 \in \beta(L)$ ve $x \in B_1 \cap B_2$ olsun. Bu durumda en az bir $a_1 \in L$ ve en az bir $a_2 \in L$ vardır öyle ki, $B_1 = \varphi(a_1)$ ve $B_2 = \varphi(a_2)$'dır. $\varphi(a_1) \cap \varphi(a_2) = \varphi(a_1 \wedge a_2)$ eşitliği Önerme 3.61 (i)'den biliniyor. Dolayısıyla istenen $B_3 \in \beta(L)$ kümesini $B_3 = \varphi(a_1) \cap \varphi(a_2)$ olarak seçmek yeterlidir. □

Bu bölümde, verilen bir L Boole cebiri için $St(L) = (PF(L), \tau(L))$ ikilisinin bir Stone uzayı olduğunu göstereceğiz. Bunun için birazdan vereceğimiz Yardımcı önermelere ihtiyacımız olacaktır.

Önteorem 3.63 *Her L Boole cebiri için $St(L) = (PF(L), \tau(L))$ 0-boyutlu bir topolojik uzaydır.*

İspat $\beta(L) = \{\varphi(a) |\ a \in L\}$'nin $\tau(L)$'nın bir tabanı olduğunu biliyoruz. Her $a \in L$ için $\varphi(a)$'nın kaçık bir küme olduğunu göstereceğiz. $\varphi(a) \in \beta(L) \subseteq \tau(L)$ olduğundan $\varphi(a)$ açık bir kümedir. $\varphi(a)$'nın kapalı olduğunu yani $\varphi(a)$'nın $PF(L)$ içindeki tümleyeni $\varphi(a)^c$'nın açık bir küme olduğunu göstereceğiz. $\varphi(a)^c = \varphi(a')$ olduğunu Önerme 3.61 (iii)'ten biliyoruz $\varphi(a)^c = \varphi(a') \in \beta(L) \subseteq \tau(L)$ olduğundan $\varphi(a)^c$ açık olur. □

Önteorem 3.64 *Her L Boole cebiri için $St(L) = (PF(L), \tau(L))$ bir Hausdorff topolojik uzayıdır.*

İspat $P \neq Q$ olmak üzere P,$Q \in PF(L)$ alalım. Bu durumda $P \nsubseteq Q$ veya $Q \nsubseteq P$'dır. Kabul edelim ki $P \nsubseteq Q$ olsun. O zaman bir $a \in P$ vardır öyle ki, $a \notin Q$'dir. $P \in \varphi(a)$ ve $Q \in \varphi(a)^c$ olur. Ayrıca, $\varphi(a)$,$\varphi(a)^c \in \tau(L)$ ve $\varphi(a) \cap \varphi(a)^c = \emptyset$ olduğundan $St(L)$ bir Hausdorff uzayı olur. □

Teorem 3.65 *Her L Boole cebiri için $St(L) = (PF(L), \tau(L))$ bir Stone uzayıdır.*

İspat Önteorem 3.63 ve Önteorem 3.64'ü göz önünde tutarsak, isteneni kanıtlamamız için $St(L)$'nin bir kompakt uzay olduğunu göstermemiz yeterlidir.
$\beta(L) = \{\varphi(a) |\ a \in L\}$, $\tau(L)$'nin bir tabanı olduğundan aynı zamanda bu topoloji için bir alttabandır. $PF(L)$'nin $\beta(L)$ içinden seçilen her hangi bir $\{\varphi(a_i) \mid i \in I\}$ açık örtüsünü alalım. Yani, $PF(L) = \bigcup\limits_{i \in I} \varphi(a_i)$ olsun. $A = \{a_i \mid i \in I\}$ kümesinin ürettiği ideal $ID(A)$'yı göz önüne alalım. $\top \in ID(A)$ olduğunu görelim. Aksine, $\top \notin ID(A)$ olduğunu kabul edersek, $F = \{\top\}$'nın L'nin bir filtresi ve $ID(A) \cap F = \emptyset$ olduğundan Önteorem 2.24'ten dolayı $F \subseteq P$ ve $ID(A) \cap P = \emptyset$ olacak şekilde en az bir tane P asal filtresi vardır.

$$P \in PF(L) = \bigcup_{i \in I} \varphi(a_i) \Longrightarrow (\exists k \in I)\,(P \in \varphi(a_k) \Longrightarrow a_k \in P)$$

olur. Dolayısıyla,

$$a_k \in A \subseteq ID(A) \Longrightarrow a_k \in ID(A) \cap P \Longrightarrow ID(A) \cap P \neq \emptyset\text{'dir.}$$

$ID(A) \cap P \neq \emptyset$ olması $ID(A) \cap P = \emptyset$ ile çelişir. Bu çelişki $\top \in ID(A)$ olduğunu kanıtlar. Önerme 2.20'den dolayı bir $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq A$ alt kümesi vardır öyle ki, $\top \leq a_1 \vee ... \vee a_n$'dır ve

$$\begin{aligned} PF(L) &= \varphi(\top) \subseteq \varphi(a_1 \vee ... \vee a_n) = \varphi(a_1) \cup ... \cup \varphi(a_n) \\ &\Longrightarrow PF(L) = \varphi(a_1) \cup ... \cup \varphi(a_n) \text{'dir.} \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $\{\varphi(a_1), ..., \varphi(a_n)\}$, $\{\varphi(a_i) \,|\, i \in I\}$'nin sonlu bir altörtüsü olur ve Önteorem 3.59'dan dolayı $St(L)$ kompakt olur. □

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde şu ana kadar yaptığımız tanım ve ispatları kullanarak, Boole cebirlerinin kategorisi ve Boole halkalarının kategorisi arasında tanımlanan funktorlarin izomorfizm olduğunun yanısıra Boole cebirlerinin kategorisi ile Stone uzaylarının kategorisi arasında, tanımlanan funktorlar yardımıyla birbirinin dualleri olduğu gösterilecektir.

4.1. Boole Cebirlerinin Kategorisi ve Boole Halkalarının Kategorisi Arasındaki İzomorfizm

Önerme 4.66 $Br : \mathbf{BA} \to \mathbf{BRNG}$ *olmak üzere;* $Br(|T| \xrightarrow{f} |N|) = H_{|T|} \xrightarrow{f} H_{|N|}$ *eşitliği ile tanımlanan fonksiyon bir funktordur.*

İspat $Br : \mathbf{BA} \to \mathbf{BRNG}$ *funktor olduğunu göstermek için* $|T| \xrightarrow{f} |N|$ *bir* $\mathbf{BA}$*-morfizması iken* $H_{|T|} \xrightarrow{f} H_{|N|}$*'nın bir* $\mathbf{BRNG}$*-morfizması olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.* $|T| \xrightarrow{f} |N|$ *bir* $\mathbf{BA}$*-morfizması olsun.* $H_{|T|} \xrightarrow{f} H_{|N|}$ *fonksiyonunun bir halka homomorfizması olduğunu göstermeliyiz:*

$i)$ *Her* $a, b \in H_{|T|}$ *için Önerme 3.53'ü kullanarak*

$$f(a +_{|T|} b) = f(a) +_{|N|} f(b)$$

olduğunu görelim;

$a +_{|T|} b = a \vee b$ *eşitliğini ele alalım;* $|T| \xrightarrow{f} |N|$ $\mathbf{BA}$*-morfizması olduğundan dolayı*

$$f(a +_{|T|} b) = f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = f(a) +_{|N|} f(b)\text{'dir.}$$

$ii)$ *Benzer şekilde* $a ._{|T|} b = a \wedge b$ *eşitliğini ele alalım;* $|T| \xrightarrow{f} |N|$ $\mathbf{BA}$*-morfizması olduğundan dolayı*

$$f(a ._{|T|} b) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) = f(a) ._{|N|} f(b)$$

olur.

$iii)$ $|T| \xrightarrow{f} |N|$ $\mathbf{BA}$*-morfizması olduğundan dolayı herhangi bir* $a \in T$ *için*

$$f(0_{H_{|T|}}) = f(0_{H_{|T|}} ._{|T|} a) = f(0_{H_{|T|}} \wedge a) = f(0_{H_{|T|}}) \wedge f(a) = 0_{H_{|N|}} \wedge f(a) = 0_{H_{|N|}}$$

olacaktır.
$iv)$ $|T| \xrightarrow{f} |N|$ $\mathbf{BA}$-morfizması olduğundan dolayı herhangi bir $a \in T$ için

$$f(1_{H_{|T|}}) = f(a +_{|T|} a^{'}) = f(a \vee a^{'}) = f(a) \vee f(a^{'}) = f(a) \vee f(a)^{'} = f(a) +_{|N|} f(a)^{'} = 1_{H_{|N|}}$$

elde edilir. Böylece, Br'nin bir funktor olduğunu görmüş oluruz. □

Önerme 4.67 $Br : \mathbf{BA} \to \mathbf{BRNG}$ *funktoru bir izomorfizmdir.*

İspat $Br : \mathbf{BA} \to \mathbf{BRNG}$ funkorunun izomorfizm olduğunu söyleyebilmek için, Br'nin güvenilir, dolu ve objeler üzerinde bire-bir ve örten olduğunu göstermemiz gerekir.
(a) Her hangi $|T| \xrightarrow{f} |N|$ ve $|T| \xrightarrow{g} |N|$ için f, $g \in mor(BA)$ olmak üzere

$$Br(f) = Br(g) \Rightarrow f = Br(f) = Br(g) = g \Rightarrow f = g$$

olacaktır. Yani, Br güvenilirdir.
(b) Br'nin dolu olduğunu göstermek için, herhangi $|T|, |N| \in Ob(B\mathbf{A})$ ve $Br(\ |T|) \xrightarrow{f} Br(\ |N|) \in mor(\mathbf{BRNG})$ için $Br(g) = f$ olacak şekilde en az bir $|T| \xrightarrow{g} |N| \in mor(\mathbf{BA})$'nin varlığını göstereceğiz. $Br(\ |T|) = H_{|T|}$ ve $Br(\ |N|) = H_{|N|}$ olduğundan, $H_{|T|} \xrightarrow{f} H_{|N|} \in mor(\mathbf{BRNG})$ olur.
$|T| \xrightarrow{f} |N| \in mor(\mathbf{BA})$ olduğunu gösterirsek, istenilen g morfizmasını
$|T| \xrightarrow{f} |N|$ morfizması olarak seçebileceğimiz açıktır. $f \in mor(\mathbf{BRNG})$ olduğu için Önerme 4.66'ya geri dönersek:
$i) f(a +_{|T|} b) = f(a) +_{|N|} f(b)$
$ii) f(a._{|T|} b) = f(a)._{|N|} f(b)$
olduğunu biliyoruz. Buradan

$$f(a \vee b) = f(a +_{|T|} b) = f(a) +_{|N|} f(b) = f(a) \vee f(b)$$

$$f(a \wedge b) = f(a._{|T|} b) = f(a)._{|N|} f(b) = f(a) \wedge f(b)$$

$f(\perp) = \perp$ ve $f(\top) = \top$ eşitlikleri elde edilir. Böylece $|T| \xrightarrow{f} |N| \in mor(\mathbf{BA})$ olduğunu ifade edebiliriz.
Son bölümde Br'nin objeler üzerinde bire-bir ve örten olduğunu gösterelim.

Br'nin objeler üzerinde örten olduğunu göstermek için;
her $\mathbb{T} = (T, +, ., 0_{\mathbb{T}}, 1_{\mathbb{T}}) \in Ob(\mathbf{BRNG})$ için $Br(A) = \mathbb{T}$ olacak şekilde en az bir $A \in Ob(\mathbf{BA})$'nin varlığını göstermemiz gerekir. Önerme 3.53'de değinmiş olduğumuz özelliğe geri dönersek; $H_{B_{\mathbb{T}}} = \mathbb{T}$ olduğunu görmüştük. Bu durumda $A = B_{\mathbb{T}}$ seçildiği zaman, $Br(A) = Br(B_{\mathbb{T}}) = H_{B_{\mathbb{T}}} = \mathbb{T}$ eşitliğini elde ederiz. Son olarak Br'nin objeler üzerinde bire-bir olduğunu göstermek için;
her $|T|_1$, $|T|_2 \in Ob(\mathbf{BA})$ için $Br(\ |T|_1) = Br(\ |T|_2) \Rightarrow |T|_1 = |T|_2$ olduğunu görelim. Bunun için Önerme 3.54'ü kullanırsak,

$$Br(|T|_1) = Br(|T|_2) \Rightarrow H_{|T|_1} = Br(|T|_1) = Br(|T|_2) = H_{|T|_2}$$

$$\Rightarrow |T|_1 = B_{H_{|T|_1}} = B_{H_{|T|_2}} = |T|_2$$

elde ederiz. □

4.2. Stone Dualitesi

Objeleri Stone uzayları, morfizmaları sürekli fonksiyonlar, bileşke işlemi fonksiyonlar arasındaki bileşke işlemi ve birimleri birim fonksiyonlardan oluşan bir kategori vardır. Bu kategoriyi $\mathbf{Stone}$ ile göstereceğiz. Stone dualitesi $\mathbf{BA}$ ve $\mathbf{Stone}$ kategorilerinin dual olarak denk olduklarını ifade eder. Bu bölümde amacımız bu dualiteyi formülize etmek ve açıkça kurmaktır.
Verilen bir Boole cebiri B ve her $a \in B$ için $\varphi(a) = \{F \in PF(B) \mid a \in F\}$ olmak üzere $\beta(B) = \{\varphi(a) \mid a \in B\}$ kümeler ailesinin $St(B) = (PF(B), \tau(B))$ Stone uzayının kaçık alt kümelerden oluşan bir tabanı olduğunu hatırlayalım.

Önteorem 4.68 *Her B Boole cebiri için C, $St(B) = (PF(B), \tau(B))$ Stone uzayının her hangi bir kaçık alt kümesi ise $\varphi(a) = C$ olacak şekilde en az bir $a \in B$ vardır.*

İspat Her $a \in B$ için $\varphi(a)$'nın $St(B)$'nin kaçık bir altkümesi olduğunu önceki bölümde görmüştük. C , $St(B)$ uzayında bir kaçık alt küme olsun;

$\beta(B) = \{\varphi(a) \mid a \in B\}$ kümesi $\tau(B)$ için bir taban olduğunu biliyoruz. Bu durumda $C = \cup\varphi(a_i)$, $a_i \in A$ olacak şekilde $A \subseteq B$ bulabiliriz. C kompakt bir küme olduğundan

$$C = \varphi(a_1) \cup ... \cup \varphi(a_n) = \varphi(a_1 \vee ... \vee a_n)$$

olacak şekilde $a_1, ...a_n \in A$ vardır. Bu isteneni verir. □

Önteorem 4.69 *Her hangi bir B Boole cebri için $F_B(b) = \varphi(b)$ ile tanımlanan $F_B : B \to Cl(St(B))$ fonksiyonu $\mathbf{BA}$ kategorisinde bir izomorfizmdir.*

İspat Öncelikle $Cl(St(B))$ifadesinin bir Boole cebiri olduğunu göstermeliyiz. Burada iki kaçık kümenin kesişimi ve birleşimin yine bir kaçık küme olacağı ve yine bir kaçık kümenin tümleyeninin yine bir kaçık küme olduğu açıktır. $PF(B)$ ve $\emptyset$ nin de kaçık küme olduğu biliyoruz. Böylece $Cl(St(B))$ kümesi kapsama bağıntısı ve tümleyen işlemi ile birlikte bir Boole cebiri oluşturur. F_B nin kuruluşundan iyi tanımlı ve Önteorem 4.68'den örten olduğunu söyleyebiliriz. Üstelik Önerme 3.61 $'$den $\varphi(a) \cup \varphi(b) = \varphi(a \vee b)$, $\varphi(a) \cap \varphi(b) = \varphi(a \wedge b)$ ile birlikte bir Boole homomorfizmasıdır ve yine Önerme 3.61' den $\varphi(a)^c = \varphi(a')$ olduğunu biliyoruz. Önteorem 3.63'ten açıktır ki bir filtre aynı anda a ve a' elemanlarını içermez ancak maximal filtreler ikisinden birini içerir. Son olarak F_B nin birebir olduğunu görelim: $a, b \in B$ olmak üzere $a \neq b$ alalım. Bu durumda $a \nleq b$ veya $b \nleq a$'dır. $a \nleq b$ olduğunu varsayalım.Önceki bölümlerdeki filtre ve ideallerin özellikleri ve Tanım 2.14'ten yararlanarak $F = \uparrow a$ filtresini ve $I = \downarrow b$idealini ele alalım. $a \nleq b$ kabulümüzden ve Tanım 2.13'ten dolayı $F \cap I = \emptyset$ olacaktır. Önteorem 2.24'ün ışığı altında $F \subseteq P$ ve $I \cap P = \emptyset$ olacak şekilde en az bir P asal filtresinin varlığını biliyoruz. Buradan, $a \in F \subseteq P$ olduğundan $P \in \varphi(a)$ olur. Ayrıca, $b \in I$ ve $I \cap P = \emptyset$ olduğundan $P \notin \varphi(b)$ olur. Dolayısıyla, $\varphi(a) \neq \varphi(b)$olur. Benzer şekilde, $b \nleq a$ için, $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ olur. □

Tanım 4.70 *Verilen herhangi bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için, $f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ile tanımlanan $f^{\leftarrow} : P(Y) \longrightarrow P(X)$ fonksiyonuna f'nin terse doğru kuvvet kümesi operatörü (backward powerset operator) denir.*

Burada $f^{\leftarrow}(B)$, genellikle $f^{-1}(B)$ şeklinde de gösterilen ve B'nin f altındaki ters görüntüsü olarak okunan kümeden başka bir şey değildir.

Önteorem 4.71 *(X, τ) bir Stone uzayı olmak üzere $G_X(x) = \{U \in Cl\,(X, \tau) : x \in U\}$ ile tanımlanan*

$$G_X : (X, \tau) \to (PF(Cl\,(X, \tau)), \tau(Cl\,(X, \tau)))$$

fonksiyonu bir homeomorfizmdir.

İspat G_X in iyi tanımlı olduğunu görmek için öncelikle $G_X(x)$ in $Cl(X,\tau)$'in bir asal filtresi olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için Tanım 2.13'teki (F1), (F2) ve (F3) koşullarının sağlandığını ve G_X'in bir öz filtre olduğunu göstereceğiz.
(F1) $U, V \in Cl(X,\tau)$ için

$$U \in G_X(x) \text{ ve } U \subseteq V \Rightarrow x \in U \subseteq V \Rightarrow V \in G_X(x)\text{'dir.}$$

(F2) $U, V \in Cl(X,\tau)$ için

$$U, V \in G_X(x) \Rightarrow x \in U \text{ ve } y \in V \Rightarrow x \in U \cap V \Rightarrow U \cap V \in G_X(x)\text{'dir.}$$

(F3) $U, V \in Cl(X,\tau)$ için

$$U \cup V \in G_X(x) \Rightarrow x \in U \cup V \Rightarrow x \in U \text{ veya } x \in V$$

$$\Rightarrow U \in G_X(x) \text{ veya } V \in G_X(x)\text{'dir.}$$

$X \in Cl(X,\tau)$ ve $x \in X$ olduğundan $X \in G_X(x)$ ve dolayısıyla $G_X(x) \neq \emptyset$ olur. Ayrıca $\emptyset \in Cl(X,\tau)$ ancak $\emptyset \notin G_X(x)$ olduğundan $G_X(x) \neq Cl(X,\tau)$ olur, ve dolayısla G_X bir öz filtredir.
Şimdi $G_X : (X,\tau) \to (PF(Cl\,(X,\tau)), \tau(Cl\,(X,\tau)))$ fonksiyonun sürekli olduğunu görelim; $\beta\,(Cl(X,\tau))$, $\tau(Cl\,(X,\tau))$'nın bir tabanı olmak üzere her $U \in \beta\,(Cl(X,\tau))$ için $(G_X)^{\leftarrow}(U) \in \tau$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\beta\,(Cl(X,\tau))$'nın tanımından, $U = \varphi(V)$ olacak şekilde en az bir tane $V \in Cl(X,\tau)$ vardır. $V \in \tau$ olduğundan $(G_X)^{\leftarrow}(U) = V$ olduğunu gösterirsek $(G_X)^{\leftarrow}(U) \in \tau$ olacağı açıktır.

$$x \in (G_X)^{\leftarrow}(U) \Rightarrow G_X(x) \in U \Rightarrow G_X(x) \in \varphi(V)\text{'dır.}$$

$G_X(x)$, $Cl(X,\tau)$'in bir asal filtresi olduğundan, $\varphi(V)$'nin tanımından ve $G_X(x) \in \varphi(V)$ olduğundan $V \in G_X(x)$ ve dolayısyla $x \in V$ olur. Tersine,

$$x \in V \Rightarrow V \in G_X(x) \Rightarrow G_X(x) \in \varphi(V) \Rightarrow G_X(x) \in U \Rightarrow x \in (G_X)^{\leftarrow}(U)$$

olduğundan, $(G_X)^{\leftarrow}(U) = V$ elde edilir.
(X,τ), bir Stone uzayı olmak üzere Hausdorff ve 0 boyutlu olmasından dolayı Tanım

3.56 ve Tanım 3.57'de göz önünde bulundurarak; herhangi bir $z \in X$ için $\{z\} = \cap G_X(z)$ yazabiliriz. Çünkü Tanım 3.56 ve 0 boyutlu olması gereği tamamen bağlantısız olacaktır . Buradan (X, τ) 0 boyutlu bir Stone uzayının elemanlarını ayrık kümeler olarak yazabiliriz. Bu durumda $G_X(x) = G_X(y)$ eşitliği için $x \in V \Rightarrow V \in G_X(x) \in \varphi(V)$ alalım, diğer taraftan $y \in U \Rightarrow U \in G_X(x) \in \varphi(U)$ olduğundan yukarıda belirttiğimiz üzere

$$G_X(x) = \{V \in Cl\,(X, \tau) : x \in V\} = G_X(y) = \{U \in Cl\,(X, \tau) : y \in U\}$$

tek türlü belirlenecektir, yani $G_X(x) = G_X(y)$ ise $x = y$ olacaktır. Bu durum ise G_X'in birebir olduğunu kanıtlar.

G_X aynı zamanda örtendir. Bunu görelim; her hangi bir $P \in PF(Cl\,(X, \tau))$ alalım. P, $Cl\,(X, \tau)$'nın bir asal filtresidir. $\cap P$ kümesini göz önüne alalım: $\cap P$ kümesi boş küme değildir. Çünkü (X, τ) bir kompakt uzay ve P, kompakt bir uzayın bir elemanı olduğundan kompaktlığın tanımı gereği ve kaçık bir küme olmasından dolayı kapalı alt kümelerden oluşur. P aynı zamanda sonlu arakesit özelliğine sahip bir kümeler ailesidir. Çünkü P maksimal filtredir dolayısıyla Tanım 2.13 ve Tanım 2.23'ten $A \in P$ ve $A \subset T$ ise $T \subset P$ olduğunu söyleyebiliriz. $T = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ alalım. Bu durumda $P \subset T$ olacaktır ve P maksimal filtre olduğundan dolayı $P = T$ olacaktır. Şimdi, $\cap P$'nin $\{z\}$ şeklinde bir tek nokta kümesi olduğunu göstereceğiz. Olmayana ergi yöntemi kullanarak, tersine $\cap P$'nin bir tek nokta kümesi olmadığını varsayalım. İki farklı $x, y \in \cap P$ var olsunlar . (X, τ) bir Stone uzayı olduğundan dolayı aynı zamanda Hausdorfftur. Tanım 3.56 yardımı ile, $x \in U$ ve $y \in X \backslash U$ olacak şekilde kaçık bir U kümesi alalım. Daha fazlasını söylemek gerekirse $U \in P$ yada $X \backslash U \in P$ olur. Eğer $U \in P$ ise almış olduğumuz U kümesinin tanımından $y \notin \cap P$ olacaktır. Benzer bir çelişki $X \backslash U \in P$ olunca da elde edilir. Böylece bazı $z \in X$ ler için $\cap P = \{z\}$ olur. O halde,

$$A \in P \Rightarrow z \in A \text{ ve } A \in Cl\,(X, \tau) \Rightarrow A \in G_X(z)$$

ve dolayısıyla, $P \subseteq G_X(z)$ olur. P ve $G_X(x)$, $Cl(X, \tau)$ de asal filtreler olduğundan Tanım 2.23'ten maksimal filtrelerdir. Bu nedenle, $P \subseteq G_X(z)$ kapsaması $P = G_X(z)$ eşitliğini gerektirir. Bu G_X'in örtenliğini kanıtlar. G_X birebir ve örten olduğundan $G_X^{-1} : PF(Cl\,(X, \tau)) \to X$ ters fonksiyonu vardır. Son olarak,

$G_X : (X, \tau) \to (PF(Cl\,(X, \tau)), \tau(Cl\,(X, \tau)))$ dönüşümünün bir homeomorfizm olduğunu söyleyebilmek için

$$G_X^{-1} : (PF(Cl\,(X, \tau)), \tau(Cl\,(X, \tau))) \to (X, \tau)$$

ters fonksiyonunun sürekli olduğunu görmeliyiz. Bunun için,
$G_X : (X, \tau) \to (PF(Cl\,(X, \tau)), \tau(Cl\,(X, \tau)))$ fonksiyonun sürekli olduğunu gösterdiğimiz benzer yol göstereceğiz. Yani her hangi bir $U \in \tau$ için $\left(G_X^{-1}\right)^{\leftarrow}(U) \in \tau(Cl\,(X, \tau))$ olduğunu göstereceğiz. $U \in \tau$ için tanımlardan $U = \varphi(V)$ olacak şekilde en az bir $V \in X$ vardır. Buradan $V \in \tau(Cl\,(X, \tau))$ olacağından dolayı $V = \left(G_X^{-1}\right)^{\leftarrow}(U)$ olduğunu göstereceğiz. Gerçekten

$$x \in \left(G_X^{-1}\right)^{\leftarrow}(U) \Rightarrow G_X^{-1}(x) \in U \Rightarrow G_X^{-1}(x) \in \varphi(V)$$

olduğu kolayca görülebilir. $G_X^{-1}(x)$, τ için bir asal filtre olduğundan $x \in V$ olur ki bu durumda ise $\left(G_X^{-1}\right)^{\leftarrow}(U) \in \tau(Cl\,(X, \tau))$ olacağını görürüz. $\square$

Önerme 4.72 $St(A \xrightarrow{u} B) = St(A) \xrightarrow{St(u)} St(B)$ *eşitliği ile tanımlanan* $St : \mathbf{BA}^{op} \to \mathbf{Stone}$ *fonksiyonu bir funktordur. Burada, her* $A \xrightarrow{u} B \in Mor\,(\mathbf{BA}^{op})$ *için* $St(u) : PF(A) \to PF(B)$ *fonksiyonu*

$$St(u)(P) = (u^{op})^{\leftarrow}(P), \forall P \in PF(A)$$

ile tanımlanır.

İspat St fonksiyonun bileşke işlemini ve birim morfizmaları koruduğu açıktır. Bu nedenle, St'nin bir funktor olduğunu göstermek için, $\mathbf{BA}^{op}$' da alınan her $A \xrightarrow{u} B$ morfizması için $St(u) : PF(A) \to PF(B)$ fonksiyonunun $\mathbf{Stone}$ kategorisinde bir $St(u) : St(A) \longrightarrow St(B)$ morfizması olduğunu göstermek yeterli olacaktır.
Öncelikle $St(u) : PF(A) \to PF(B)$' nin gerçekten bir fonksiyon olduğunu göstermeliyiz. Yani herhangi bir $P \in PF(A)$ için $St(u)(P) \in PF(B)$, yani $St(u)(P)$'nin B'nin bir asal filtresi olduğunu göstereceğiz. Bunun için herhangi bir $P \in PF(A)$ için aşağıdaki özelliklerin gerçeklendiğini göstereceğiz:

(1) Her $b_1, b_2 \in B$ için , $b_1 \in St(u)(P)$ ve $b_1 \leqslant b_2 \Rightarrow b_2 \in St(u)(P)$:

$$\begin{aligned} b_1, b_2 &\in B, b_1 \leqslant b_2 \text{ ve} \\ b_1 &\in St(u)(P) = (u^{op})^{\leftarrow}(P) \text{ olsun.} \\ u^{op}(b_1) &\in P\text{'dir.} \end{aligned}$$

$b_1 \leqslant b_2, u^{op}(b_1) \leqslant u^{op}(b_2)$ ve Tanım 2.13 yardımı ile $u^{op}(b_2) \in P \Longrightarrow b_2 \in (u^{op})^{\leftarrow}(P)$ olur.

(2) Her $b_1, b_2 \in B$ için, $b_1, b_2 \in St(u)(P) \Rightarrow b_1 \wedge b_2 \in St(u)(P)$'dir:
b_1, $b_2 \in St(u)(P) = (u^{op})^{\leftarrow}(P)$ için $u^{op}(b_1), u^{op}(b_2) \in P$ olduğunu biliyoruz.
$P \in PF(A)$ olduğundan dolayı filtrenin tanımı gereği (Tanım 2.13'ten)
$u^{op}(b_1) \wedge u^{op}(b_2) \in P$'dir. Ayrıca,

$$u^{op}(b_1) \wedge u^{op}(b_2) = u^{op}(b_1 \wedge b_2) \text{ olduğundan}, u^{op}(b_1 \wedge b_2) \in P \text{ olur.}$$

Dolayısıyla,

$$u^{op}(b_1 \wedge b_2) \in P \Rightarrow b_1 \wedge b_2 \in (u^{op})^{\leftarrow}(P) = St(u)(P)$$

elde edilir.

(3) Her $b_1, b_2 \in B$ için, $b_1 \vee b_2 \in St(u)(P) \Rightarrow b_1 \in St(u)(P)$ veya $b_2 \in St(u)(P)$:
Bu gerektirmenin doğruluğunu göstermek için $b_1 \vee b_2 \in St(u)(P)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u^{op}(b_1 \vee b_2) \in P$ olacaktır.
Ayrıca, $u^{op}(b_1 \vee b_2) = u^{op}(b_1) \vee u^{op}(b_2)$ olduğundan, $u^{op}(b_1) \vee u^{op}(b_2) \in P$ olur.
Böylece P bir asal filtre olduğundan (Tanım 2.13'ten) $u^{op}(b_1) \in P$ veya $u^{op}(b_2) \in P$ olur. Dolayısıyla,

$$b_1 \in (u^{op})^{\leftarrow}(P) = St(u)(P) \text{ veya } b_2 \in (u^{op})^{\leftarrow}(P) = St(u)(P) \text{ olacaktır.}$$

(4) $St(u)(P) \neq \varnothing$'dir:
P asal filtresi için $P \in PF(A)$ olduğundan dolayı filtrenin tanımı gereği
(Tanım 2.13'ten) $P \neq \varnothing$'dir. Sırasıyla A'nın ve B'nin en büyük elemanları, $\top_A$ ve $\top_B$ olsun. Bu durumda $\top_A \in P$ olduğunu önceki bölümlerden biliyoruz. $u^{op} : B \to A$ bir Boole cebiri homomorfizması olduğundan $u^{op}(\top_B) = \top_A \in P$ olacaktır. $St(u)(P)$'nin tanımından, $\top_B \in (u^{op})^{\leftarrow}(P) = St(u)(P)$ ve dolayısıyla $St(u)(P) \neq \varnothing$ olur.

(5) $St(u)(P) \neq B$'dir:

Sırasıyla A'nın ve B'nin en küçük elemanları, $\perp_A$ ve $\perp_B$ olsunlar. (Tanım 2.13'ten) $\perp_A \notin P$ olduğunu biliyoruz. $u^{op} : B \to A$ bir Boole cebiri homomorfizması olduğundan $u^{op}(\perp_B) = \perp_A \notin P$ olur. $St(u)(P)$'nin tanımından, $\perp_B \notin (u^{op})^{\leftarrow}(P) = St(u)(P)$ olur. $\perp_B \in B$ olduğundan, hemen $St(u)(P) \neq B$ elde edilir.

İkinci olarak, $St(u) : St(A) \longrightarrow St(B)$ fonksiyonun sürekli olduğunu göstermeliyiz. $St(A) = (PF(A), \tau(A))$ ve $St(B) = (PF(B), \tau(B))$ olduğunu, bununla birlikte $\beta(A) = \{\varphi(a) | \ a \in A\}$'nın $\tau(A)$'nın bir tabanı ve $\beta(B) = \{\varphi(b) | \ b \in B\}$'nın da $\tau(B)$'nin bir tabanı olduğunu hatırlayalım. Her $G \epsilon \beta(B)$ için $St(u)^{\leftarrow}(G) \in \tau(A)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Verilen her hangi bir $G \in \beta(B)$ için $G = \varphi(b)$ olacak şekilde en az bir $b \in B$ vardır. $St(u)^{\leftarrow}(\varphi(b)) = \varphi(u^{op}(b))$ olduğundan

$$St(u)^{\leftarrow}(G) = St(u)^{\leftarrow}(\varphi(b)) = \varphi(u^{op}(b)) \in \beta(A)$$

olur. Böylece, $\beta(A) \subseteq \tau(A)$ olduğundan, $St(u)^{\leftarrow}(G) \in \tau(A)$ olur. Elde edilen bu sonuç, $St(u) : St(A) \to St(B)$'nun $\mathbf{Stone}$ kategorisinde bir morfizm olduğunu gösterir. □

Önerme 4.73 $St : \mathbf{BA}^{op} \to \mathbf{Stone}$ *bir güvenilir funktordur.*

İspat $A \xrightarrow{u_1} B$, $A \xrightarrow{u_2} B \in Mor(\mathbf{BA}^{op})$ olsunlar, yani $B \xrightarrow{u_1^{op}} A$ ve $B \xrightarrow{u_2^{op}} A$, $\mathbf{BA}$ kategorisinde morfizimlerdir. Farzedelim ki $St(u_1) = St(u_2)$ olsun. Amacımız $u_1 = u_2$ göstermektir. Bu amaçla, her $b \in B$ için $u_1^{op}(b) = u_2^{op}(b)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunu kanıtlamak için olmayana ergi yöntemi kullanacağız. Tersine, $u_1^{op}(b) \neq u_2^{op}(b)$ olacak şekilde en az bir tane $b \in B$'nin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$u_1^{op}(b) \nleq u_2^{op}(b) \text{ veya } u_2^{op}(b) \nleq u_1^{op}(b)\text{'dir.}$$

$u_1^{op}(b) \nleq u_2^{op}(b)$ durumunu göz önüne alalım. $F =\uparrow u_1^{op}(b)$ bir filtredir ve $I =\downarrow u_2^{op}(b)$ bir idealdir. $u_1^{op}(b) \nleq u_2^{op}(b)$ olduğundan $F \cap I = \varnothing$ olur. Önteorem 2.24'ten $F \subseteq P_0$ ve $P_0 \cap I = \varnothing$ olacak şekilde en az bir tane P_0 asal filtresi vardır. Böylece, $u_1^{op}(b) \in F \subseteq P_0$ ve $u_2^{op}(b) \in I$ olduğundan $u_1^{op}(b) \in P_0$ ve $u_2^{op}(b) \notin P_0$ olur. Buradan, $b \in (u_1^{op})^{\leftarrow}(P_0)$ ve $b \notin (u_2^{op})^{\leftarrow}(P_0)$ olacağı açıktır ve bu da $(u_1^{op})^{\leftarrow}(P_0) \neq (u_2^{op})^{\leftarrow}(P_0)$ eşitsizliğini kanıtlar. Ancak, $St(u_1) = St(u_2)$ olduğundan, $St(u_1)(P_0) = St(u_2)(P_0)$'dır ve bu eşitlikten faydalanarak,

$$(u_1^{op})^{\leftarrow}(P_0) = St(u_1)(P_0) = St(u_2)(P_0) = (u_1^{op})^{\leftarrow}(P_0)$$

olur. Bu ise $(u_1^{op})^{\leftarrow}(P_0) \neq (u_2^{op})^{\leftarrow}(P_0)$ olması ile çelişir. $u_2^{op}(b) \nleq u_1^{op}(b)$ durumu için, benzer bir çelişki elde ederiz. Bu kanıtı tamamlar. □

Önerme 4.74 $Cl : \mathbf{Stone} \to \mathbf{BA}^{op}$ *fonksiyonu*

$$Cl((X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\vartheta)) = Cl(X,\tau) \xrightarrow{Cl(f)} Cl(Y,\vartheta)$$

ile tanımlanan bir funktordur. Burada, $Cl(f)$ $\mathbf{BA}^{op}$*-morfizması,* $Cl(f)^{op}(G) = f^{\leftarrow}(G)$ *eşitliği ile tanımlanan* $Cl(f)^{op} : Cl(Y,\vartheta) \to Cl(X,\tau)$ $\mathbf{BA}$*-morfizması'nın karşıtıdır.*

İspat Cl'nin bileşke işlemini ve birim morfizmaları koruyan bir dönüşüm olduğu aşikardır. Cl'nin morfizmaları morfizmalara dönüştürdüğünü görmemiz yeterlidir. Bunun için her hangi bir $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\vartheta)$ $\mathbf{Stone}$-morfizması alırsak, her $G, G_1, G_2 \in Cl(Y,\vartheta)$ için

(i)
$$Cl(f)^{op}(\emptyset) = f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset, Cl(f)^{op}(Y) = f^{\leftarrow}(Y) = X,$$

(ii)
$$\begin{aligned} Cl(f)^{op}(G_1 \cap G_2) &= f^{\leftarrow}(G_1 \cap G_2) = f^{\leftarrow}(G_1) \cap f^{\leftarrow}(G_2) \\ &= Cl(f)^{op}(G_1) \cap Cl(f)^{op}(G_2), \\ Cl(f)^{op}(G_1 \cup G_2) &= f^{\leftarrow}(G_1 \cup G_2) = f^{\leftarrow}(G_1) \cup f^{\leftarrow}(G_2) \\ &= Cl(f)^{op}(G_1) \cup Cl(f)^{op}(G_2), \end{aligned}$$

(iii)
$$Cl(f)^{op}(G^c) = f^{\leftarrow}(G^c) = f^{\leftarrow}(G)^c = Cl(f)^{op}(G)^c$$

olduğundan $Cl(f)^{op} : Cl(Y,\vartheta) \longrightarrow Cl(X,\tau)$ bir $\mathbf{BA}$-morfizm ve dolayısıyla $Cl(X,\tau) \xrightarrow{Cl(f)} Cl(Y,\vartheta)$ bir $\mathbf{BA}^{op}$-morfizm olur. □

Önerme 4.75 St *funktoru doludur.*

İspat $A, B \epsilon Ob(\mathbf{BA}^{op})$ alalım ve $St(A) \xrightarrow{f} St(B)$ $\mathbf{Stone}$ kategorisinde bir morfizim olsun. St'nin bir dolu funktor olduğunu göstermek için, $f = St(u)$ olacak şekilde en az bir tane $A \xrightarrow{u} B$ $\mathbf{BA}^{op}$-morfizminin var olduğunu göstereceğiz.
Önteorem 4.69 dan, $F_A(a) = \varphi(a)$ ve $F_B(b) = \varphi(b)$ eşitlikleri ile tanımlanan

$$F_A : A \longrightarrow Cl(St(A)) \text{ ve} F_B : B \longrightarrow Cl(St(B))$$

fonksiyonlarının $\mathbf{BA}$-kategorisinde izomorfizmler olduğunu biliyoruz.
$Cl(St(B)) \stackrel{Cl(f)^{op}}{\longrightarrow} Cl(St(A))$ $\mathbf{BA}$-morfizmini göz önünde tutarak, $u^{op} : B \to A$ $\mathbf{BA}$ -morfizmini $u^{op} = F_A^{-1} o Cl(f)^{op} o F_B$ eşitliği ile tanımlayalım. Şimdi $St(u) = f$ eşitliğinin sağlandığını görelim. Verilen her hangi bir $b \in B$ için $a = u^{op}(b)$ denirse,

$$\begin{aligned} a &= u^{op}(b) = F_A^{-1}(Cl(f)^{op}(F_B(b))) = F_A^{-1}(f^{\longleftarrow}(\varphi(b))) \\ &\Rightarrow \varphi(a) = F_A(a) = F_A(u^{op}(b)) = f^{\longleftarrow}(\varphi(b)) \end{aligned}$$

ve sonuç olarak,

$$\varphi(a) = f^{\longleftarrow}(\varphi(b)) \tag{4.15}$$

elde ederiz. İstenilen eşitliği göstermek için, her $P \in PF(A)$ için $St(u)(P) = f(P)$ olduğunu kanıtlayacağız.

$St(u)(P) = (u^{op})^{\longleftarrow}(P)$ olduğundan, her $b \in St(u)(P)$ için $a = u^{op}(b) \in P$'dır. $P \in PF(A)$ olduğundan $P \in \varphi(a)$ olur. (4.15) eşitliğini kullanırsak,

$$P \in f^{\longleftarrow}(\varphi(b)) \Rightarrow f(P) \in \varphi(b) \Rightarrow b \in f(P)$$

olur, bu da $St(u)(P) \subseteq f(P)$ kapsamasını kanıtlar. Şimdi de ters kapsamı doğrulamak için, $b \in f(P)$ alalım. $f(P) \in PF(B)$ ve $b \in f(P)$ olduğundan $f(P) \in \varphi(b)$ olur. Buradan $P \in f^{\longleftarrow}(\varphi(b))$ yazabiliriz. $a = u^{op}(b)$ denirse, (4.15) eşitliğinden

$$P \in \varphi(a) \Rightarrow a = u^{op}(b) \in P \Rightarrow b \in (u^{op})^{\longleftarrow}(P) \Rightarrow b \in St(u)(P)$$

elde edilir ki bu da $f(P) \subseteq St(u)(P)$ kapsamasını kanıtlar. □

Önerme 4.76 *St funktoru bir denkliktir.*

İspat St'nin güvenilir ve dolu olduğunu daha önce gösterdiğimiz için, sadece St' nin izomorfizm-yoğun olduğunu görmemiz yeterli olacaktır. Bu amaçla, her (X,τ) Stone uzayı için $St(A) \cong (X,\tau)$, yani $St(A)$, (X,τ)'ya homeomorf olacak şekilde en az bir tane A Boole cebirinin var olduğunu görmeliyiz. Önteorem 4.71'den dolayı (X,τ) Stone uzayının $St(Cl(X,\tau))$ Stone uzayına homeomorf olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, aranılan A Boole cebirini $Cl(X,\tau)$ Boole cebiri olarak seçmek yeterlidir. □

Sonuç 4.77 $\mathbf{BA}$ *ve* $\mathbf{Stone}$ *biri birine dual kategorilerdir (Johnstone 1982).*

5. SONUÇ

Bu tez çalışması bünyesinde, ilk olarak Boole cebirleri ve Boole halkalarının temel özelliklerinin ışığı altında objeleri; Boole cebirleri, morfizmaları; Boole homomorfizmaları, bileşke işlemi ve birimleri birim fonksiyonlardan oluşan $\mathbf{BA}$ kategorisi ile objeleri Boole halkaları, morfizmaları birimleri koruyan halka homomorfizmaları olan Boole halkalarını kategorisi $\mathbf{BRNG}$ arasında bir funktor tanımlamış ve bu funktorun izomorfizm olduğu gösterilmiştir. Çalışmamızın son kısmında Stone uzayı adı verilen Hausdorff, kompakt ve sıfır boyutlu olan özel topolojik uzay ve Boole cebirleri arasında filtrelerin özellikleri yardımıyla aralarında bir ilişki tanımlanmıştır. Devamında BA'nın duali olan $\mathbf{BA}^{op}$ ile objeleri Stone uzayı, morfizmaları sürekli fonksiyonlar, bileşke işlemi foksiyonlar arasındaki bileşke işlemi ve birimleri birim fonksiyonlar olan Stone uzaylarının kategorisi $\mathbf{Stone}$ arasında iki funktor tanımlanmıştır. Bu tanımlanan funktorlar ışığında $\mathbf{BA}$ ile $\mathbf{Stone}$'nun dual olduğu gösterilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Abramsky, S. and Gabbay, D. M. and Maibaum T. S. E. (eds.) 1994. Domain theory, Handbook of Logic in Computer Science, volume 3. Clarendon Press.

Adamek, J. and Herrlich, H. and Strecker G. E. 1990. Abstract and concrete categories: the joy of cats. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley-Interscience, free web version edition.

Birkhoff, G. 1948. Lattice theory. CP25. American Mathematical Society, revised edition.

Burris, S. and Sankappanavar, H. P. 1981. A Course in Universal Algebra. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1 edition.

Clark D. M. and Davey, B. A. 1998. Natural dualities for the working algebraist. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.

Demirci, M. 2014. Fundamental duality of abstract categories and its applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 256:73 – 94.

Erné, M. 2004. General stone duality. *Topology and its Applications*, 137:125 – 158.

Gehrke, M. 2009. Stone duality and the recognisable languages over an algebra. *In* A. Kurz, M. Lenisa, A. Tarlecki (eds.), Algebra and Coalgebra in Computer Science, pp. 236–250, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.

Gehrke, M. 2016. Stone Duality, Topological Algebra, and recognition. *Journal of Pure and Applied Algebra*, pp. 2711–2747.

Grätzer, G. 2003. General lattice theory. Birkhäuser, 2nd edition.

Halmos, P. R. 1955. Algebraic logic, i. monadic boolean algebras. compositio mathematica. , 12:217–249.

Halmos, P. R. 1967. Lectures on Boolean Algebras - Van Nostrand. Van Nostrand mathematical studies. Van Nostrand, reprint edition edition.

Johnstone, P. T. 1982. Stone spaces. Cambridge studies in advanced mathematics 3. Cambridge University Press, 1 edition.

Lane, S. Mac 1971. Categories for the working mathematician. SPRINGER-VERLAG, 6 edition.

Morandi, P. J. 2005. Dualities in lattice theory, mathematical notes http://sierra.nmsu.edu/morandi/, [son erişim tarihi: 30.09.2018].

Porst, H.E. and Tholen, W. and Herrlich H. (Eds.) 1991. Concrete dualities, in Category theory at work. Research and exposition in mathematics 18. Heldermann Verlag.

Pratt, V.R. 1995. The Stone gamut: A coordinatization of mathematics. *In* Logic in Computer Science, pp. 444–454. IEEE Computer Society.

Sambin, G. and Vaccaro, V. 1988. Topology and duality in modal logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 37:249–296.

Stone, M. H. 1936. The theory of representations for boolean algebras. *Journal of Symbolic Logic*, 1:118–119.

ÖZGEÇMİŞ

Eren DOĞAN

E-mail:erndgn@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2015-2018	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Antalya
Lisans 2005-2009	Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya
Lise 2000-2004	Karatay Yabancı Dil Ağırlıklı Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Matematik Öğretmeni 2018-Devam Ediyor	Özel Onadım Eğitim Bilimleri Anadolu Lisesi
Kurum Müdürü ve Matematik Öğretmeni 2017-2018	Özel Lara Onadım Eğitim Bilimleri Ortaokulu
Matematik Öğretmeni 2015-2017	Özel Adalya Anadolu Lisesi
Matematik-Geometri Öğretmeni 2011-2015	Antalya Açı Dershanesi