T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

B-MAKSİMAL KOMÜTATÖRÜN VE B-MAKSİMAL OPERATÖRÜN KOMÜTATÖRÜNÜN AĞIRLIKLI LEBESQUE VE B-MORREY UZAYINDA SINIRLILIĞI

Veli Semih UYGUR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

MART 2019

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

B-MAKSİMAL KOMÜTATÖRÜN VE B-MAKSİMAL OPERATÖRÜN KOMÜTATÖRÜNÜN AĞIRLIKLI LEBESQUE VE B-MORREY UZAYINDA SINIRLILIĞI

Veli Semih UYGUR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

MART 2019

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

B-MAKSİMAL KOMÜTATÖRÜN VE B-MAKSİMAL OPERATÖRÜN KOMÜTATÖRÜNÜN AĞIRLIKLI LEBESQUE VE B-MORREY UZAYINDA SINIRLILIĞI

Veli Semih UYGUR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafindan FYL-2018-3481 nolu proje ile desteklenmiştir.

MART 2019

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

B-MAKSİMAL KOMÜTATÖRÜN VE B-MAKSİMAL OPERATÖRÜN KOMÜTATÖRÜNÜN AĞIRLIKLI LEBESQUE VE B-MORREY UZAYINDA SINIRLILIĞI

Veli Semih UYGUR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Bu tez ...../...../20..... tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI (Danışman)

Doç. Dr. Melih ERYİĞİT

Dr. Öğr. Üyesi Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

B-MAKSİMAL KOMÜTATÖRÜN VE B-MAKSİMAL OPERATÖRÜN KOMÜTATÖRÜNÜN AĞIRLIKLI LEBESQUE VE B-MORREY UZAYINDA SINIRLILIĞI

Veli Semih UYGUR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI

Mart 2019; 35 sayfa

Bu tezde Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + (\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}), \quad (\nu > 0, \ x_n > 0)$$

ve Δ_B'nin doğurduğu Hardy-Littlewood Maksimal (B-Maksimal) fonksiyonu

$$M_B f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y |f(x)| y_n^{2\nu} dy, \ \ x \in \mathbb{R}_+^n$$

gözönüne alınmıştır.

Çalışmamızın amacı, Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu B-maksimal kömütatörün ve B-maksimal operatörün kömütatörünün ağırlıklı Lebesque $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ uzaylarında ve B-Morrey uzayında sınırlılığını incelemektir.

ANAHTAR KELİMELER: BMO ve $B-BMO$ uzayı, Komütatör, Genelleşmiş kayma, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü, Maksimal fonksiyon, Maksimal fonksiyonun komütatörü, B-Morrey uzayı

JÜRİ: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI

Doç. Dr. Melih ERYİĞİT

Dr. Öğr. Üyesi Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

BOUNDEDNESS OF THE B-MAXİMAL COMMUTATOR AND THE COMMUTATOR OF THE B-MAXİMAL OPERATOR ON WEİGHTED LEBESQUE AND B-MORREY SPACE

Veli Semih UYGUR

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI
March 2019; 35 pages

In the thesis, we consider Laplace-Bessel differential operator

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + (\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}), \quad (\nu > 0, \ \ x_n > 0)$$

and Hardy-Littlewood Maxsimal (B-Maxsimal) function generated by Δ_B

$$M_B f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y |f(x)| y_n^{2\nu} dy, \ \ x \in \mathbb{R}_+^n.$$

The aim of this study is to investigate the boundedness of the B-maximal commutator and the commutator of the B-maximal operator, generated by the Laplace-Bessel differential operator on the weighted Lebesque $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ spaces and B-Morrey space.

KEYWORDS: BMO ve $B{-}BMO$ space, Commutator, Generalized translation, Laplace-Bessel differential operator, Maxsimal function, Maxsimal fonksiyonun komütatörü, B-Morrey uzayı

COMMITTEE: Assoc.Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI
Assoc.Prof.Dr. Melih ERYİĞİT
Asst.Prof.Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Fourier-Bessel harmonik analizinin önemli diferansiyel operatörlerinden biri olarak bilinen Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Levitan 'nın 1951 yılındaki çalışmaları ile ortaya çıkmıştır. İlk n değişkene Laplace ve sonuncu değişkene Bessel diferansiyel operatörünün uygulandığı bu operatör ile birçok matematikçi çalışmış ve çalışmaya devam etmektedir.

Laplace diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen Fourier harmonik analizinin önemli teknik araçlarından birisi de Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür. Hardy-Littlewood maksimal operatörü, birçok operatörün noktasal yakınsama probleminin incelenmesinde oldukça faydalıdır. Bunun yanında Lebesque uzayı, Morrey uzayı gibi birçok fonksiyon uzayında sınırlılığı incelenmiştir.

Bununla birlikte, 1976 yılında Coifman, Rochberg ve Weiss tarafından, T singular integral operatörü ve b, BMO (Bounded Mean Oscillation-Salınımlarının Ortalamaları Sınırlı) uzayından olduğu zaman komütatör operatörün $L_p,\ 1 < p < \infty$ Lebesque uzaylarında sınırlılığı kanıtlanmıştır.

İlerleyen zamanla Fourier harmonik analizinde Riesz potansiyelinin komütatörü, maksimal fonksiyonun komütatörü, maksimal komütatör ve benzeri komütatör operatörler tanımlanıp, birçok fonksiyon uzayında incelenmiştir.

Biz de bu çalışmada Fourier-Bessel harmonik analizinde Laplace-Bessel diferansiyel operatörü tarafından üretilen maksimal komütatörü ve maksimal fonksiyonun komütatör operatörünü tanımladık ve bu operatörlerin sınırlılıklarını uygun Lebesque ve Morrey uzayında inceledik.

Çalışmamız boyunca değerli bilgi ve zamanını benimle paylaşan, danışmanım Sayın Doç. Dr. Simten Bayrakçı'ya ve desteğini esirgemeyen kıymetli eşim Zeynep Uygur'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum “B-Maksimal Komütatörün ve B-Maksimal Operatörün Komütatörünün Ağırlıklı Lebesque ve B-Morrey Uzayında Sınırlılığı” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

26/03/2019

Veli Semih UYGUR

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n_+$	: Sonuncu değişkeni pozitif, n-boyutlu Reel sayılar kümesi
$B(x,r)$	: $x-$merkezli, $r > 0$ yarıçaplı yuvar
$\|E\|$	: E kümesinin Lebesque ölçümü
$\|E\|_\nu$	: E kümesinin ağırlıklı Lebesque ölçümü

Kısaltmalar:

BMO	: Salınımlarının Ortalamaları Sınırlı fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Fourier-Bessel harmonik analizinin önemli diferansiyel operatörlerinden biri olan Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + (\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}), \quad (\nu > 0, \ \ x_n > 0)$$

biçiminde tanımlanır. Bu operatörün doğurduğu Genelleşmiş Kayma operatörü ise

$$T^y f(x) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{2\nu-1}\alpha \, d\alpha,$$

şeklindedir. 1951 yılında Levitan'nın çalışmaları ile birlikte Laplace-Bessel diferansiyel operatörün doğurduğu Genelleşmiş Kayma operatörü ile birçok Matematikçi çalışmıştır.

Fourier-Bessel harmonik analizinin singüler integraller, potansiyellerden başka en önemli teknik araçlarından birisi de Hardy-Littlewood Maksimal (B-Maksimal) fonksiyonu

$$M_B f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int_{B(0,r)} T^y |f(x)| y_n^{2\nu} dy, \ \ x \in \mathbb{R}_+^n$$

dir. Bu operatörün, önemli fonksiyon uzaylarında sınırlılığını incelemek matematikçilerin araştırma alanı olmuştur.

Bununla birlikte, 1976 yılında Coifman, Rochberg ve Weiss tarafından, T singular integral operatörü ve b, BMO (Bounded Mean Oscillation-Salınımları Ortalamaları Sınırlı) uzayından olduğu zaman formal olarak,

$$[T, b]f = T(bf) - bT(f)$$

ile tanımlanan komütatör operatörün $L_p, \ 1 < p < \infty$ Lebesque uzaylarında sınırlılığı kanıtlanmıştır.

İlerleyen zamanla Fourier harmonik analizinde Riesz potansiyelinin komütatörü, maksimal fonksiyonun komütatörü, maksimal komütatör ve benzeri komütatör operatörler tanımlanıp, birçok fonksiyon uzayında incelenmiştir.

Bizim de bu tez çalışmasında amacımız, Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu B-maksimal kömütatörün ve B-maksimal operatörün kömütatörünün ağırlıklı Lebesque $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ uzaylarında ve B-Morrey uzayında sınırlılığını incelemektir.

Öncelikle Kaynak Taraması adı verilen ilk bölümde, Fourier Harmonik analizinin temel kavramlarından Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun ve BMO uzayının önemli özelliklerini hem konuya daha iyi açıklık getirmek hem de okuyucuya geniş bir Türkçe kaynak olması bakımından detaylı inceledik.

Materyal ve Metot bölümünde Fourier-Bessel harmonik analizinden gerekli tanım ve kavramları verdik. Son olarak Bulgular ve Tartışma bölümünde çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçları gösterdik.

Tez çalışmamız, Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafindan FYL-2018-3481 nolu proje ile desteklenmekte olup, bu kapsamda elde ettiğimiz sonuçları 26-29 Ekim 2018 tarihlerinde Antalya'da düzenlenen "The Mediterranean International Conference of Pure and Applied Mathematics, Related Areas (MICOPAM-2018)" Sempozyumunda sunduk ve "Boundedness of the B-Maksimal Commutators on B-Morrey Spaces", 188-191, Proceedings Book of MICOPAM-2018 olarak yayınlandı.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Fourier Harmonik Analizinden Bazı Bilgiler

Bu bölümde Fourier harmonik analizinin bazı temel tanım ve kavramlarını vereceğiz. Özellikle Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunu ve onun L_p uzayındaki sınırlılığını ve BMO uzayını, önemli özelliklerini, John-Nirenberg eşitsizliğini alt bölümler halinde detaylı inceleyecegiz. Temel kavramlar için Folland (1984) ve Grafakos (2009) kaynaklarına bakılabilir. Diğer özel kavramlar için detaylı bilgiler yanlarında verilen kaynaklarda mevcuttur.

Tanım 2.1. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ *n-boyutlu Öklid uzayı olsun. $E \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir kümesinin Lebesque ölçümü $|E|$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathbb{R}^n de$ x-merkezli $r > 0$ yarıçaplı açık yuvar $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ ile tanımlanır.*

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^n$ *'de ölçülebilir fonksiyonların (klasik) Lebesque uzayı*

$$L_p = L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \right\}$$

ile tanımlanır. Burada $dx = dx_1, dx_2, ..., dx_n$ dir.

$p = \infty$ için $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{L_\infty} < \infty \right\}$,

$$\|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{esssup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \inf \{\lambda > 0 : |\{x : |f(x)| > \lambda\}| = 0\}$$

dir.

L_p, $1 \leq p < \infty$ Lebesque uzayı tam normlu uzay, yani Banach uzayıdır.

Tanım 2.3. $\mathbb{R}^n$ *'de local(yerel) integrallenebilen, ölçülebilir fonksiyonlar kümesi*

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \int\limits_K |f(x)| \, dx < \infty, \forall K \subset \mathbb{R}^n, \ \ K \text{ kompakt} \right\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.4. *(Hölder Eşitsizliği)*

$1 \leq p, q \leq \infty$ olmak üzere $f \in L_p, g \in L_q$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

dir, (Folland (1984)).

Teorem 2.5. *(Folland (1984)) (Fubini Teoremi)* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *ve* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ $\sigma-$*sonlu ölçüm uzayları,* $\mu \times \nu$ *ise* $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ *üzerinde* μ *ve* ν *nin çarpımı olsun. Eğer* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\mu \times \nu$ *ölçümüne göre integrallenebilir ise* $h.h.x \in X$ *için* $\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)$ *ve* $h.h.y \in Y$ *için* $\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)$ *integralleri sonludur ve*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.6. *(Minkowski ve İntegraller İçin Minkowski Eşitsizliği)*

$1 \leq p \leq \infty$ *olmak üzere* $f, g \in L_p$ *olsun. Bu durumda Minkowski eşitsizliği*

$$\|f+g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$$

biçimindedir. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *ve* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ $\sigma-$*sonlu ölçüm uzayları ve* $\varphi(x,y)$ *,* $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ *ölçülebilir fonksiyon ve* $p \geq 1$ *olmak üzere integraller için Minkowski eşitsizliği*

$$\left(\int\limits_X \left(\int\limits_Y |\varphi(x,y)|\, d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_Y \left(\int\limits_X |\varphi(x,y)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

şeklindedir, (Folland (1984)).

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ve $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ 'de kayma (klasik kayma veya öklid kayması) operatörü $\tau^h f(x) = f(x+h), x \in \mathbb{R}^n$ ile tanımlanır. Tek değişkenli halde türevlenebilir f fonksiyonu için aşağıdaki Cauchy probleminin

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \Phi(0,y) = f(y) \end{cases}$$

çözümü $\Phi(x,y) = f(x+y) = \tau^y f(x)$ kayma operatörüdür ve türev tanımından da görülür ki kayma operatörü ile $\frac{d}{dt}$ diferansiyel operatörü arasında sıkı bir bağ vardır.

Kayma operatörü $L_p, 1 \leq p \leq \infty$ uzayında sınırlıdır. Yani, $f \in L_p, 1 \leq p \leq \infty$ için

$$\left\|\tau^h f - f\right\|_{L_p} = \|f\|_{L_p}$$

dir. Ayrıca τ^h operatörünün L_p uzayında sürekliliği ise

$$\lim_{|h|\to 0} \left\|\tau^h f - f\right\|_{L_p} = 0$$

biçimindedir.

2.1.1. Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

Fourier harmonik analizinin en önemli operatörlerinden birisi de Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur. Bu tez çalışması Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun komütatörü üzerine olacağından klasik halde Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunu inceleyelim.

Tanım 2.7. *(Stein (1971,1993)) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,*

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{B\,|(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \tag{2.1}$$

fonksiyonuna Hardy-Littewood maksimal fonksiyonu denir. Burada supremum x-merkezli, $r > 0$ yarıçaplı tüm $B(x,r)$ yuvarları üzerinden alınır. $M : f \to Mf$ operatörüne de Hardy-Littlewood maksimal operatörü denir.

$M(f) = M(|f|) \geq 0$ olduğundan maksimal fonksiyon, pozitif operatördür. Bununla birlikte M operatörü lineer değil, yarı-lineer operatördür. Yani,

$$|M(f_1 + f_2)(x)| \leq |Mf_1(x)| + |Mf_2(x)|$$

$$|M(\alpha f)(x)| = |\alpha|\, |Mf(x)|$$

dir.

Maksimal fonksiyonun (2.1) tanımında değişken değiştirirsek

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,1)| r^n} \int\limits_{B(0,r)} |f(x-y)|\, dy \tag{2.2}$$

olur. Bu tanımdan da görülür ki Hardy-Littewood maksimal fonksiyonu, klasik kayma ile ilişkilendirilir.

Bundan başka Fourier harmonik analizinde birçok maksimal fonksiyon ile çalışılmıştır. Örneğin,

$$M^* f(x) = \sup_{x \in B_x} \frac{1}{|B_x|} \int\limits_{B_x} |f(y)|\, dy$$

burada B_x, x 'i içeren (x merkezde değil) yuvar ;

$$M^{**} f(x) = \sup_{x \in Q_x} \frac{1}{|Q_x|} \int\limits_{Q_x} |f(y)|\, dy$$

burada Q_x, x 'i içeren küpler (kenarları koordinat eksenlerine paralel) dir.

Maksimal fonskiyon, Fourier harmonik analizinde birçok operatörün noktasal yakınsama probleminde önemli rol oynamaktadır.

Örnek 2.8. *$\mathbb{R}$ 'de f fonksiyonu olarak $[a,b]$ aralığının karakteristik fonksiyonunu alalım. Bu durumda $x \in (a,b)$ ise $Mf(x) = 1$ olduğu açıktır. $x \geq b$ olduğunda $(x-r, x+r)$ aralıkları üzerinden hesaplanan ortalamaların en büyüğü $r = x-a$ iken $x \leq a$ olduğunda $(x-r, x+r)$ aralıkları üzerinden hesaplanan ortalamaların en büyüğü ise $r = b-x$ olduğunda elde edilir. Böylece*

$$Mf(x) = \begin{cases} \frac{|b-a|}{2|x-b|} & , \quad x \leq a \\ 1 & , \quad a < x < b \\ \frac{|b-a|}{2|x-a|} & , \quad x \geq b \end{cases}$$

olur. Buradan örnekten görülür ki $f \in L_1(\mathbb{R})$ iken $Mf \notin L_1(\mathbb{R})$ dir.

Genel olarak, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ iken $Mf \notin L_1(\mathbb{R}^n)$ dir. Bu Mf operatörünün $p = 1$ için güçlü sınırlı olmadığını gösterir. Böylece aşağıdaki Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun Lebesque uzaylarındaki sınırlılığını içeren maksimal teoremi verebiliriz. Bu teoremi $n = 1$ halinde Hardy-Littlewood, $n \geq 2$ için Wiener kanıtlamıştır.

M Maksimal operatörünün $L_p, 1 < p \leq \infty$ uzayındaki sınırlılığını veren agağıdaki (2.4) eşitsizliği, operatörün güçlü (p,p) tipli ve $(2,3)$ eşitsizliği de zayıf $(1,1)$ tipli olması olarak bilinir. Zayıf $(1,1)$ yakınsamanın ispatı Vitali Örtü lemmasına dayanır, öncelikle Vitali Örtü lemasını verelim.

Önteorem 2.9. *(Stein (1971,1993)) (Vitali Örtü Leması) $\mathbb{R}^n$ 'de $\{B_j, j \in J\}$ biçiminde yarıçapları sonlu, keyfi yuvarlar topluluğunu göz önüne alalım. Bu takdirde bu ailenin, $\{B_1, B_2, ..., B_k, ...\}$ şeklinde ikişerli ayrık öyle bir sayılabilir alt ailesi vardır ki*

$$\bigcup_{j \in J} B_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} 5B_k$$

dır.Burada $5B_k$ yuvarının merkezi B_k ile aynıdır, yarıçapı B_k yuvarının yarıçapının 5 katıdır. Ayrıca 5 sayısının bir önemi yoktur, 3 de olabilir.

Teorem 2.10. *(Stein (1971,1993)) (Hardy-Littlewood-Wiener Teoremi)* *a) $f \in L_1$ olsun. Bu durumda $\forall\alpha > 0$ için*

$$|\{x : |Mf(x)| > \alpha\}| \leq \frac{c_1}{\alpha} \|f\|_{L_1} \tag{2.3}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde n 'ye bağlı $c_1 > 0$ sabiti vardır.

b) $f \in L_p$ ve $1 < p \leq \infty$ olsun. Bu durumda

$$\|Mf(x)\|_{L_p} \leq c_2 \|f\|_{L_p} \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde n ve p 'ye bağlı $c_2 > 0$ sabiti vardır.

İspat

a) $f \in L_1$ olsun $\alpha > 0$ için

$$E_\alpha = \{x : |Mf(x)| > \alpha\}$$

diyelim. $\forall x \in E_\alpha$ için öyle bir $B(x, r_x), r_x > 0$ yuvarını seçelim ki

$$\frac{1}{|B(x, r_x)|} \int\limits_{B(x,r_x)} |f(y)|\, dy > \alpha \tag{2.5}$$

eşitsizliği sağlansın. Böylece E_α kümesini örten $\{B(x, r_x)\}_{x \in E_\alpha}$ yuvarlar ailesini elde ederiz. Vitali Örtü lemmasına göre bu ailenin ikişerli ayrık, sayılabilir $\{B(x_i, r_{x_i}), i = 1, 2, ...\}$ alt ailesi vardır ki

$$E_\alpha \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 5r_{x_i})$$

olur. Buradan (2.5) eşitsizliğini de kullanarak

$$\begin{aligned} |E_\alpha| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |B(x_i, 5r_{x_i})| = 5^n \sum_{i=1}^{\infty} |B(x_i, r_{x_i})| \\ &< \frac{5^n}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{B(x_i,r_{x_i})} |f(y)|\, dy = \frac{5^n}{\alpha} \int\limits_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i,r_{x_i})} |f(y)|\, dy \\ &\leq \frac{5^n}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $|\{x : |Mf(x)| > \alpha\}| \leq c_1 \|f\|_{L_1}, c_1 = \frac{5^n}{\alpha}$ olur.

b) $f \in L_\infty$ için

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int |f(y)|\, dy \leq \|f\|_{L_\infty}$$

dir ve eşitsizliğin her iki yanından $x \in \mathbb{R}^n$ için esssup alınırsa

$$\|Mf\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_\infty}$$

elde edilir. Şimdi $f \in L_p$ ve $1 < p \leq \infty$ olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu adı verilen ve $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}$ kümesinin Lebesque ölçümü olarak tanımlanan $d_f(\alpha) = |A_\alpha|$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $d_f(\alpha)$ dağılım fonkiyonu ile $\|f\|_{L_p}$ arasında aşağıdaki eşitlik çok kullanışlıdır:

$$\|f\|_{L_p}^p = p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)d\alpha \tag{2.6}$$

Öncelikle bu eşitliği Fubini teoremini kullanarak gösterelim:

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)d\alpha &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\left|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}\right| d\alpha \\
&= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_\alpha}(x)dx\right) d\alpha \\
&= p\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^\infty \alpha^{p-1}\chi_{A_\alpha}(x)d\alpha\right) dx \\
&= p\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-1}d\alpha\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx \\
&= \|f\|_{L_p}^p
\end{aligned}$$

Ayrıca $f \in L_p$, $1 < p \leq \infty$ fonksiyonunu

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ 0 & , \quad |f(x)| < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

ve

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & , \quad |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ f(x) & , \quad |f(x)| < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

biçiminde parçalayalım. $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ dir.

Kolayca görülür ki

$$f_2 \in L_\infty, \quad \|f_2\|_{L_\infty} < \frac{\alpha}{2}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^{1-p}\,|f_1(x)|^p\,dx \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-p} \int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|\geq\frac{\alpha}{2}\right\}} |f(x)|^p\,dx \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $f_1 \in L_1$ dir. Ayrıca Hardy-Littlewood maksimal operatörü, yarı-lineer olduğundan

$$Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \alpha\} &\leq \left\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf_1(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} + \left\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf_2(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi I_1 ve I_2 tahminlerini hesaplayalım.

$f_2 \in L_\infty$ olduğundan

$$\|Mf_2(x)\| \leq \|Mf_2\|_{L_\infty} \leq \|f_2\|_{L_\infty} \leq \frac{\alpha}{2}$$

olur. Bu ise

$$I_2 = \left|\left\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf_2(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right| = 0$$

olması demektir. $f_1 \in L_1$ ve maksimal operatör zayıf $(1,1)$ tipli olduğundan

$$I_1 = \left|\left\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf_1(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right| \leq \frac{c}{\alpha}\,\|f_1\|_{L_1}$$

olur. Son olarak (2.6) eşitsizliğini maksimal fonksiyon Mf için yeniden yazarsak ve son bulduğumuz tahmini de kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\|Mf\|_{L_p}^p &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{Mf}(\alpha)d\alpha = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\left|\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf(x)|>\alpha\}\right| d\alpha \\
&\le cp\int_0^\infty \alpha^{p-2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\,dx\right) d\alpha \\
&= cp\int_0^\infty \alpha^{p-2}\left(\int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\ge\frac{\alpha}{2}\right\}} |f(x)|\,dx\right) d\alpha \\
&= cp\int_0^\infty \alpha^{p-2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\ge\frac{\alpha}{2}\right\}}(x)dx\right) d\alpha \\
&= cp\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\left(\int_0^\infty \alpha^{p-2}\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\ge\frac{\alpha}{2}\right\}}(x)d\alpha\right) dx \\
&= cp\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\left(\int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2}d\alpha\right) dx \\
&= c_1\|f\|_{L_p}^p
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. □

2.1.2. BMO uzayı

Klasik Fourier analizindeki önemli fonksiyon uzaylarından birisi de BMO(Bounded Mean Oscillation-Salınımları Ortalamaları Sınırlı) uzayıdır. Bu kısımda BMO uzayını tanıtıp önemli özelliklerini ve John-Nirenberg eşitsizliğini göreceğiz. Daha sonra da çalışmamız için gerekli olacak $B-BMO$ uzayını vereceğiz.

BMO uzayları Kanadalı Matematikçi Louis Nirenberg (1925-) ve Alman Matematikçi Fritz John (1910-1994) tarafından fiziksel problemlerin kısmi diferansiyel denklemler ile çözümlerinin araştırılmaları esnasında tanımlanmış ve birçok özellikleri çalışılmıştır. Bu uzaylar John-Nirenberg uzayları olarak da bilinir.

Daha sonra C.L. Fefferman (1949-) ve E.Stein (1931-2018) BMO uzayının dualinin H^1-Hardy uzayı olduğunu kanıtlamıştır. BMO uzayları L_∞ uzayına benzer özellikler göstermesine rağmen onlardan daha iyidir. Şöyle ki analizin birçok operatörü, örneğin, klasik singüler integraller L_∞ dan L_∞ 'a sınırlı etki göstermezken L_∞ dan BMO uzayına sınırlı etkiler.

Tanım 2.11. *BMO uzayı,* $BMO = BMO(\mathbb{R}^n) = \{f : f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{BMO} < \infty\}$,

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{Q\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q|\, dx,$$

$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q f(x)dx$ *ile tanımlanır. Burada supremum,* $\mathbb{R}^n$ *'nin kenarları koordinat eksenlerine paralel tüm* Q *küpleri üzerinden alınır. (Grafakos (2009))*

Herhangi $f, g \in BMO$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$(\lambda f + g)_Q = \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q (\lambda f(x) + g(x))\, dx = \lambda f_Q + g_Q$$

olduğundan $\lambda f + g \in BMO$ ve BMO uzayı lineer uzaydır. Bundan başka $\|f\|_{BMO}$ fonksiyonunun norm olduğunu şöyle görebiliriz:

$$\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) + g(x) - (f+g)_Q|\, dx \leq \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q|\, dx + \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |g(x) - g_Q|\, dx$$

eşitsizliğinin her iki yanından $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ler üzerinden supremum alırsak

$$\|f + g\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}$$

üçgen eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\|\lambda f\|_{BMO} = \sup_{Q\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |\lambda f(x) - (\lambda f)_Q|\, dx = |\lambda|\, \|f\|_{BMO}$$

dir.

Bundan başka, $f = 0$ iken $\|f\|_{BMO} = 0$ dır. Fakat $\|f\|_{BMO} = 0$ olması $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = f_Q$ olması demektir ki bu f fonksiyonunun sabit olduğunu gösterir. Bu bize $\|f\|_{BMO}$ nin yarı-norm olduğunu verir, bununla birlikte sabit fonksiyon için de $\|f\|_{BMO} = 0$ olduğundan $\|f\|_{BMO}$ norm kabul edilir. Yani bu uzayda tüm sabit fonksiyonlar çakışık ve sıfır fonksiyonu olarak düşünülür.

Böylece BMO uzayı normlu uzaydır. BMO uzayının önemli özelliklerini teoremler halinde aşağıda vereceğiz. Detaylı bilgiler için Grafakos (2009)'a bakabilirsiniz.

Teorem 2.12. *Grafakos (2009)*

i) $L_\infty \subsetneqq BMO$, $\|f\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{L_\infty}$.

ii) Her $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ *için*

$$\sup_{Q\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q|\, dx \leq A,\ A > 0$$

olacak şekilde $c_Q > 0$ *sabiti varsa* $f \in BMO$ *ve* $\|f\|_{BMO} \leq 2A$ *dir.*

iii)

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_{Q\in\mathbb{R}^n} \inf_{C_Q} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q|\, dx \leq \|f\|_{BMO}.$$

iv)

$$\left\|\tau^h f\right\|_{BMO} = \|f\|_{BMO},\quad \left\|\delta^\lambda f\right\|_{BMO} = \|f\|_{BMO},$$

burada $\tau^h f(x) = f(x-h)$, $h \in \mathbb{R}^n$ *ve* $\delta^\lambda f(x) = f(\lambda x)$, $\lambda > 0$ *dir.*

v) $\||f|\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{BMO}$, $\|\max(f,g)\|_{BMO} \leq \frac{3}{2}(\|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO})$,

$$\|\min(f,g)\|_{BMO} \leq \frac{3}{2}(\|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}).$$

İspat i) $f \in L_\infty$ alalım.

$$|f_Q| \leq \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x)|\, dx \leq \operatorname{esssup}|f(x)| \frac{1}{|Q|}|Q| = \|f\|_{L_\infty}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q|\, dx &\leq \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x)|\, dx + |f_Q| \frac{1}{|Q|}|Q| \\ &\leq \operatorname{esssup}|f(x)| \frac{1}{|Q|}|Q| + |f_Q| \\ &\leq \|f\|_{L_\infty} + \|f\|_{L_\infty} \end{aligned}$$

eşitsizliğinin her iki yanından $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ler üzerinden supremum aldığımızda $f \in BMO$ ve $\|f\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{L_\infty}$ eşitsizliğini elde ederiz. Kapsama kesindir. Kolayca görmek mümkündür ki $f(x) = \log|x| \in BMO$ iken $f \notin L_\infty$ dir.

ii) Herhangi $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ için

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q|\, dx \leq A$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $c_Q > 0$ sabiti var olsun. Ayrıca

$$|c_Q - f_Q| = \left| \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q c_Q dx - \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q f(x) dx \right| \le \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q| \, dx \le A$$

olduğundan

$$\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q| \, dx \le \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q| \, dx + \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |c_Q - f_Q| \, dx \le 2A$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki yanından $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ler üzerinden supremum alırsak $f \in BMO$ ve $\|f\|_{BMO} \le 2A$ bulunur.

iii)

$$\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q| \, dx \le \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q| \, dx + |f_Q - c_Q|$$

olduğundan ve

$$\inf_{c_Q} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q| \, dx \le \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q| \, dx$$

eşitsizliğinden

$$\inf_{c_Q} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q| \, dx \le \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q| \, dx$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki yanından $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ler üerinden supremum alınırsa

$$\sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} \inf_{c_Q} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q| \, dx \le \|f\|_{BMO}$$

bulunur. Ayrıca

$$|f_Q - c_Q| = \left| \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q f(x) dx - \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q c_Q dx \right| \le \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q| \, dx$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q| \, dx &\le \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q| \, dx + |f_Q - c_Q| \\ &\le \frac{2}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - c_Q| \, dx \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki yanından önce c_Q lar üzerinden infimum sonra da $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ler üzerinden supremum alınırsa

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_{Q\subseteq\mathbb{R}^n} \inf_{c_Q} \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x)-c_Q|\,dx$$

bulunur.

iv) $f \in BMO,\, h \in \mathbb{R}^n$ ve $\tau^h f(x) = f(x-h)$ olmak üzere $z = x - h$, $dz = dx$ değişken değiştirmesi ile kolayca $\left\|\tau^h f\right\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$ olduğunu görebiliriz.

Bundan başka $\lambda > 0$ için $\delta^\lambda f(x) = f(\lambda x)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
(\delta^\lambda f)_Q &= \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \delta^\lambda f(x)dx = \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q f(\lambda x)dx = ...z = \lambda x\ ,\ dz = \lambda dx... \\
&= \frac{1}{|\lambda Q|}\int\limits_{\lambda Q} f(z)dz = f_{\lambda Q}, \\
\left\|\delta^\lambda f\right\|_{BMO} &= \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \left|\delta^\lambda f(x) - (\delta^\lambda f)_Q\right| dx \\
&= \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(\lambda x) - f_{\lambda Q}|\,dx,\ ...z = \lambda x,\ dz = \lambda dx... \\
&= \sup_{\lambda Q} \frac{1}{|\lambda Q|}\int\limits_{\lambda Q} |f(z) - f_{\lambda Q}|\,dz = \|f\|_{BMO}
\end{aligned}$$

elde edilir.

v) iii) ifadesindeki

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_{Q\in\mathbb{R}^n} \inf_{C_Q} \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x)-c_Q|\,dx \leq \|f\|_{BMO}$$

eşitsizliğinde $f = |f|$ ve $c_Q = |f_Q|$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\||f|\|_{BMO} &\leq \sup_{Q\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q ||f(x)| - |f_Q||\,dx \\
&\leq \sup_{Q\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x) - f_Q|\,dx = \|f\|_{BMO}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\max(f,g) = \frac{|f-g| + (f+g)}{2} \text{ ve } \min(f,g) = \frac{(f+g) - |f-g|}{2}$$

eşitliklerinden $\|\max(f,g)\|_{BMO}$ ve $\|\min(f,g)\|_{BMO}$ normları için istenilen eşitsizlikler hemen çıkar. □

$\|f\|_{BMO}$ normunu $Q \in \mathbb{R}^n$ küpleri yerine $B(x,r)$ yuvarları üzerinden de aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} \left|f(y) - f_{B(x,r)}\right| dy,$$

burada $B(x,r)$, $x \in \mathbb{R}^n$ merkezli ve $r > 0$ yarıçaplı yuvar ve

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(y)dy$$

biçimindedir.

Aşağıda Calderon-Zygmund ayrışımı kullanılarak John-Nirenberg (1961) tarafından kanıtlanan John-Nirenberg eşitsizliğini göreceğiz. Bu eşitsizlik sonuçları itibariyle ve uygulamalarda önemli bir yere sahiptir.

Teorem 2.13. *(Grafakos (2009)) (John-Nirenberg Eşitsizliği)*

$\forall f \in BMO$, $\forall Q \subseteq \mathbb{R}^n$ *ve* $\forall \alpha > 0$ *için*

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \alpha\}| \leq e\,|Q|\, e^{-A\alpha/\|f\|_{BMO}},\ A = \frac{1}{2^n e}$$

eşitsizliği sağlanır.

John-Nirenberg eşitsizliğinin iki önemli sonucu ile bu kesimi bitirelim.

Sonuç 2.14. *Her BMO fonksiyonu, herhangi $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ küpü üzerinden üstel integrallenebilirdir. Yani, $\beta < \frac{1}{2^n e}$ olmak üzere*

$$\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q e^{\beta\left|f(x)-f_Q\right|/\|f\|_{BMO}} dx \leq 1 + \frac{2^n e^2 \beta}{1 - 2^n e \beta}$$

eşitsizliği sağlanır. (Grafakos (2009)).

İspat Herhangi $f \in BMO$, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ alalım ve $\beta < \frac{1}{2^n e}$ olsun. $f \in BMO$ olduğundan

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q|\, dx < \infty$$

dir. Öncelikle φ, $[0,\infty)$ aralığında artan, $\varphi(0)=0$, sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve $d_f(\alpha)=|\{x\in Q:|f(x)|>\alpha\}|$ fonksiyonu da f 'nin dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$\int_Q \varphi(|f(x)|)dx=\int_0^\infty \varphi'(\alpha)d_f(\alpha)d\alpha$$

eşitliğini Fubini teoremini kullanarak görelim:

$$\begin{aligned}
\int_Q \varphi(|f(x)|)dx &= \int_Q \left(\int_0^{|f(x)|}\varphi'(\alpha)d\alpha\right)dx\\
&= \int_Q \left(\int_0^{\infty}\varphi'(\alpha)\chi_{\{x\in Q:|f(x)|>\alpha\}}(x)d\alpha\right)dx\\
&= \int_0^{\infty}\varphi'(\alpha)\left(\int_Q \chi_{\{x\in Q:|f(x)|>\alpha\}}(x)dx\right)d\alpha\\
&= \int_0^{\infty}\varphi'(\alpha)d_f(\alpha)d\alpha.
\end{aligned}$$

Şimdi bu eşitlikte φ fonksiyonu olarak $\varphi(t)=e^t-1$ alalım. Buradan

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(e^{|f(x)|}-1\right)dx=\frac{1}{|Q|}\int_0^\infty e^\alpha\left|\{x\in Q:|f(x)|>\alpha\}\right|d\alpha$$

ve

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{|f(x)|}dx=1+\frac{1}{|Q|}\int_0^\infty e^\alpha\left|\{x\in Q:|f(x)|>\alpha\}\right|da$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $f(x)=\frac{\beta\left|f(x)-f_Q\right|}{\|f\|_{BMO}}$ yazalım ve John-Nirenberg eşitsizliğini uygulayalım. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\beta\left|f(x)-f_Q\right|/\|f\|_{BMO}}dx &= 1+\frac{1}{|Q|}\int_0^\infty e^\alpha\left|\left\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>\frac{\alpha\,\|f\|_{BMO}}{\beta}\right\}\right|d\alpha\\
&\leq 1+\frac{1}{|Q|}\int_0^\infty e^\alpha e\ |Q|\ e^{-\frac{1}{2^ne}\frac{\alpha\|f\|_{BMO}}{\beta}\frac{1}{\|f\|_{BMO}}}d\alpha\\
&= 1+e\int_0^\infty e^\alpha e^{-c\alpha}d\alpha\ ,\ c=\frac{1}{2^ne\beta}\ ,\ c>1\\
&= 1+\frac{e}{c+1}=1+\frac{2^nn^2\beta}{1-2^ne\beta}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 2.15. $1 < p < \infty$ *için öyle* $c_1 > 0$ *ve* $c_2 > 0$ *sabitleri vardır ki*

$$c_1 \|f\|_{BMO} \leq \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_2 \|f\|_{BMO}$$

dir. (Grafakos (2009)).

İspat Sonuç 2.14'in ispatında φ olarak $\varphi(t) = t^p$ alalım ve f yerine de $|f(x) - f_Q|$ yazarak John-Nirenberg eşitsizliğini uygulayalım. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx &= \frac{1}{|Q|} \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \left| \{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \alpha\} \right| d\alpha \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \int_0^\infty p\alpha^{p-1} e \, |Q| \, e^{-A\alpha/\|f\|_{BMO}} d\alpha \ , \ A = \frac{1}{2^n e} \\
&= pe \int_0^\infty \alpha^{p-1} e^{-A\alpha/\|f\|_{BMO}} d\alpha \\
&= ...\beta = \frac{A\alpha}{\|f\|_{BMO}} \ , \ d_\beta = \frac{A}{\|f\|_{BMO}} d\alpha ... \\
&= pe \left(\frac{\|f\|_{BMO}}{A} \right)^{p-1} \left(\frac{\|f\|_{BMO}}{A} \right) \int_0^\infty \beta^{p-1} e^{-\beta} d\beta \\
&= pe \left(\frac{\|f\|_{BMO}}{A} \right)^p \Gamma(p)
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin her iki yanından $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ üzerinden supremum ve p. dereceden kök alırsak

$$\sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_2 \|f\|_{BMO}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_2 = \left(\frac{p\Gamma(p)e}{A^p} \right)^{\frac{1}{p}}$ dir.

Ayrıca $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q 1 \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

buluruz. Bu son eşitsizliğin her iki yanından $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ler üzerinden supremum alırsak

$$c_1 \left\| f \right\|_{BMO} \leq \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \ , \ c_1 = 1$$

bulunur. □

Bu son sonuç, $\|f\|_{BMO}$ normunun $\sup\limits_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$ ifadesine denk olduğunu gösterir. Yani,

$$\|f\|_{BMO} \equiv \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Fourier-Bessel Harmonik Analizinden Bazı Bilgiler

Tez çalışmamız Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen operatörler üzerine olduğundan bu kesimde Fourier-Bessel harmonik analizinin bizim için gerekli olacak temel tanım ve kavramlarını göreceğiz.

Fourier-Bessel harmonik analizinin temel çalışma aracı olan Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + (\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}), \quad (\nu > 0, \ \ x_n > 0)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu operatör, ilk $n-1$ değişkene Laplace diferansiyel operatörünün ve sonuncu değişkene de Bessel diferansiyel operatörü

$$B_\nu = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\nu}{t}\frac{d}{dt}, \ \ \nu > 0, \ \ t > 0$$

nin uygulanması ile ortaya çıkmaktadır. Burada $\nu > 0$ verilmiş bir sabittir.

Analiz ve uygulamalarında önemli bir diferansiyel operatör olarak bilinen Bessel diferansiyel operatörü B_ν için aşağıdaki sınır-değer probleminin

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x\Phi = B_y\Phi, \ \ 0 < x, \ y < \infty \\ \Phi(0,y) = f(y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(0,y) = 0 \end{array} \right\}$$

çözümü olan $\Phi(x,y)$ fonksiyonu

$$\Phi(x,y) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 - 2xy\cos\theta + y^2}\right) \sin^{2\nu-1}\theta \, d\theta$$

Bessel kayma operatörü olarak bilinir (Delsarte (1938), Levitan (1951)).

Bessel kayma operatörünü $S^y f(x), \ x > 0$ ile gösterirsek

$$S^y f(x) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 - 2xy\cos\theta + y^2}\right) \sin^{2\nu-1}\theta d\theta$$

dir. $S^y f$ 'in tanımındaki katsayıya, birimleştirici katsayı denir ve

$$\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} = \left(\int_0^\pi \sin^{2\nu-1}\theta d\theta \right)^{-1}$$

eşitliğini sağlar.

Bessel kayma operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki teoremler ile vereceğiz, detaylı bilgiler için Levitan (1951)'e bakılabilir.

Teorem 3.16. *i)* $S^y 1 = 1,\ S^0 f(x) = f(x),\ S^y f(x) = S^x f(y),\ S^{-y} f(x) = S^y f(x).$

ii) $S^y\left(\alpha f(x) + g(x)\right) = \alpha S^y f(x) + S^y g(x),\ \alpha \in \mathbb{R}.$

iii) $f \geq 0$ *ise* $S^y f(x) \geq 0.$

iv) $|S^y f(x)| \leq S^y |f(x)| \leq \sup\limits_{x \geq 0} |f(x)|$

v) $S_x^y S_x^z f(x) = S_x^z S_x^y f(x)$

İspat

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^{2\nu-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}$$

olduğundan $S^y 1 = 1$ dir ve tanımdan $y = 0$ için $S^0 f(x) = f(x)$ kolayca görülür.

Ayrıca Bessel kaymasının tanımında x ile y değişkenleri birbirine göre simetrik olduğundan $S^y f(x) = S^x f(y)$ dir.

Bundan başka integralde $\theta = \pi - \varphi,\ \ (0 \leq \varphi \leq \pi)$ değişken değişimi yaparsak, $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ ve $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$ olduğundan $S^{-y} f(x) = S^y f(x)$ olduğu görülür.

$ii), iii), iv)$ tanımdan direk elde edilir.

$v)$ özelliğindeki $S_x^y f(x)$ ifadesi x değişkenine y kayması uygulandığını gösterir. Bu eşitlik, x 'e z kayması sonra y kayması vermek ile önce y kayması sonra z kayması vermenin aynı olduğunu söyler. (Klasik kaymada bu özellik $f(x+y+z) = f(x+z+y)$ biçimindedir). □

Bessel kayma operatörü için ispatsız vereceğimiz aşağıdaki teoremi, ilerde tanımlayacağımız Genelleşmiş Kayma için kullanacağız.

Teorem 3.17. *Levitan(1951) Bessel kayma operatörü için*

$$\int\limits_0^{\infty} \left(S^y f(x)\right) g(x) \sin^{2\nu-1}\theta d\theta = \int\limits_0^{\infty} f(x)(S^y g(x)) \sin^{2\nu-1}\theta d\theta$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 3.18. $\mathbb{R}^n_+$ *uzayı,* $\mathbb{R}^n_+ = \{x : x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$ *ile tanımlanır. Bu uzayda* x *merkezli* $r > 0$ *yarıçaplı yuvar,* $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n_+ : |x - y| < r\}$ *ile gösterilir ve* E*,* $\mathbb{R}^n_+$ *uzayının herhangi ölçülebilir kümesi olmak üzere onun Lebesque ölçümü de* $|E|_\nu = \int\limits_E x_n^{2\nu} dx,\ \nu > 0$ *şeklindedir.*

Tanım 3.19. *Laplace-Bessel diferansiyel operatörüne karşılık gelen Genelleşmiş Kayma operatörü* $T^y,\ y \in \mathbb{R}^n_+$

$$T^y f(x) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{2\nu-1}\alpha\, d\alpha,$$

ile tanımlanır.

Genelleşmiş Kayma operatörü, $\mathbb{R}^n_+$ uzayındaki fonskiyonların ilk $n - 1$ değişkenine Öklid kayması ve n. değişkene de Bessel kayması uygulanmasıyla ortaya çıkmıştır. Öklid kayması ile Bessel kaymasının komposizyonu olan genelleşmiş kayma operatörü T^y ile birçok matematikçi çalışmalar yapmış ve yapmaya devam etmektedir. Bunlardan bazıları Gadjiev ve Aliev (1988, 1994), Aliev ve Bayrakci (1998, 2002), Guliev (1998), Guliev ve Hasanov (2006), Levitan (1951) Kipriyanov (1967), Klyuchantsev (1970), Lofstrom ve Peetre (1969), Lyakhov (1983), Muckenhoupt ve Wheeden (1974), Stempak (1985), Trimeche (1997), vb.

Tanım 3.20. $\mathbb{R}^n_+$ *da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların ağırlıklı Lebesque uzayı* $L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_+),\ 1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_{L_{p,\nu}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x_n^{2\nu} dx \right)^{1/p}$$

normu ile tanımlanmaktadır.

$L_{p,\nu}$ uzayının normlu uzay olduğu açıktır. $p = \infty$ için $L_{\infty,\nu}$ uzayını ise L_∞ ile göstereceğiz ve $\|f\|_{L_\infty} = ess \sup |f(x)|,\ x \in \mathbb{R}^n_+$ dir.

Bundan başka $\mathbb{R}^n_+$ uzayında $x_n^{2\nu} dx$ ölçümüne göre local integrallenebilen fonksiyonlar uzayını da $L_{1,\nu}^{loc} \equiv L_{1,\nu}^{loc}(\mathbb{R}^n_+)$ ile göstereceğiz.

Genelleşmiş kayma operatörü için

$$\|T^y f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

eşitsizliğini görmek zor değildir ve bu eşitsizlik, Genelleşmiş kayma operatörünün L_∞ uzayında sınırlı olduğunu verir. Ayrıca $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|T^y f(x)| &= \left| \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{2\nu-1}\theta d\theta \right| \\
&\leq \left(\frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi \left| f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right|^p \sin^{2\nu-1}\theta d\theta \right)^{1/p} \times \\
&\times \left(\frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi 1^q \sin^{2\nu-1}\theta d\theta \right)^{1/q} \\
&= (T^y(|f(x)|^p)^{1/p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
||T^y f||_{L_{p,\nu}}^p &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |T^y f(x)|^p x_n^{2\nu} dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y(|f(x)|^p) x_n^{2\nu} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(t)|^p (T^s 1) x_n^{2\nu} dx = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(t)|^p x_n^{2\nu} dx \\
&= ||f||_{L_{p,\nu}}^p
\end{aligned}$$

şeklinde Genelleşmiş kayma operatörünün $L_{p,\nu}$ uzayındaki sınırlığı bulunur.

Tanım 3.21. *Genelleşmiş kayma operatörünün doğurduğu Hardy-Littlewood maksimal fonksiyon, kısaca B −maksimal fonksiyon*

$$M_B f(x) = \sup_{r>o} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y |f(x)| y_n^{2\nu} dy, \;\; x \in \mathbb{R}_+^n$$

ile tanımlanır. $M_B : f \to M_B f$ operatörüne de B-maksimal operatör denir.

M_B B-maksimal operatörü için $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$||M_B f||_{L_{p,\nu}} \leq c_1 \, ||f||_{L_{p,\nu}}$$

ve $p = 1$ için

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n \ : \ |M_B f(x)| > \lambda\right\}\right|_\nu \leq c_2 \, \frac{||f||_{L_{1,\nu}}}{\lambda}, \qquad (\forall \lambda > 0)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerden de anlaşılacağı üzere, klasik Fourier harmonik analizinde olduğu gibi, B-maksimal operatörü de $1 < p < \infty$ için güçlü (p,p) tipli ve $p = 1$ için zayıf $(1,1)$ tipli operatördür (Guliyev 1998).

Tanım 3.22. *Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen yani genelleşmiş kayma operatörünün doğurduğu $B - BMO$ uzayı ise $BMO_B = BMO_B(\mathbb{R}_+^n)$ ile gösterilir ve*

$$\|f\|_{BMO_B} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^n, \ r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} |T^y f(x) - f_{B(0,r)}(x)| \, y_n^{2\nu} dy$$

normu ile tanımlanır. Burada $f_{B(0,r)}(x) = \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y f(x) y_n^{2\nu} dy$ *dir.*

Guliyev (1998) tarafından tanımlanan $B - BMO$ uzayının normlu uzay olduğu kolayca görülebilir. Klasik BMO uzaylarındaki gibi $B - BMO$ uzayı da L_∞ uzayını kapsamaktadır ve L_∞ uzayından daha iyi özelliklere sahiptir. Örneğin, L_∞ uzayına etki göstermeyen bir çok operatör $B - BMO$ uzayına etki gösterir.

Tanım 3.23. $1 \leq p < \infty$ *ve* $0 \leq \lambda \leq n + 2\nu$ *olmak üzere* $\mathbb{R}_+^n$ *uzayının local integrallenebilen fonksiyonlarının $B-$Morrey uzayı* $L_{p,\lambda,\nu} = L_{p,\lambda,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$

$$\|f\|_{L_{p,\lambda,\nu}} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^n, \ r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{B(0,r)} T^y |f(x)|^p y_n^{2\nu} dy \right)^{1/p}$$

ile tanımlanır.

Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu $B-$Morrey uzayı, Guliyev (1998) tarafından tanımlanmıştır ve normlu uzay olduğu açıktır. Ayrıca, $\lambda = 0$ için $L_{p,0,\nu} = L_{p,\nu}$ eşitliğinden ağırlıklı Lebesque uzayı $L_{p,\nu}$'nun bir genelleşmesi olarak bilinir. $B-$Morrey uzayı birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.

İlerde bizim için gerekli olacak Muckenhoupt sınıfını tanımlayıp, ilgili teoremi verelim.

Tanım 3.24. $1 < p < \infty$ *için* $A_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *Muckenhoupt sınıfi olmak üzere*

$$w \in A_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right) \Longleftrightarrow [w]_{A_{p,\nu}} < \infty,$$

$$[w]_{A_{p,\nu}} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n, r>0} \left(\frac{1}{|B(x,r)|_\nu} \int\limits_{B(x,r)} w(y) y_n^{2\nu} dy \right) \left(\frac{1}{|B(x,r)|_\nu} \int\limits_{B(x,r)} w(y)^{-1/p-1} y_n^{2\nu} dy \right)^{p-1}.$$

w, ağırlığı $A_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ Muckenhoupt sınıfına ait olunca $B-$maksimal operatörün, $L_{p,\nu}$ ağırlıklı Lebesque uzaylarında sınırlılığını veren aşağıdaki teorem, Guliyev (2006) tarafından kanıtlanmıştır.

Teorem 3.25. *Eğer* $f \in L_{p,\nu}\left(w, \mathbb{R}_+^n\right)$, $w \in A_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $1 < p < \infty$, *ise*

$$\|M_B f\|_{L_{p,\nu}\left(w,\mathbb{R}_+^n\right)} \leq c_1 \|f\|_{L_{p,\nu}\left(w,\mathbb{R}_+^n\right)}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada c_1 *sabiti* p, w, ν, n *'ye bağlıdır.*

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında Laplace-Bessel diferansiyel operatörüne karşılık gelen $B-$maksimal komütatör operatörünün ve bunun yanında $B-$maksimal operatörünün doğurduğu komütatör operatörünün $L_{p,\nu}$ Lebesque uzayında ve $L_{p,\lambda,\nu}$ $B-$Morrey uzayında sınırlılığını inceleyeceğiz.

Öncelikle, klasik komütatör operatörünü, klasik halde Hardy-Littlewood maksimal operatörünün doğurduğu komütatörü ve klasik maksimal komütatörü tanımlayıp, ilgili bazı çalışmalardan bahsedelim.

4.1. Klasik Komütatör Operatörü

T lineer operatör ve b herhangi bir fonksiyon olmak üzere komütatör operatör $[T, b]$ formal olarak,

$$[T, b]f = T(bf) - bT(f)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Komütatör operatörler teorisinde ilk sonuçlar Coifman, Rochberg ve Weiss (1976) tarafından elde edilmiştir. Onlar T klasik Calderon-Zygmund singüler integral operatörü ve $b \in BMO$ olduğu zaman $[T, b]$ komütatör operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n),\ 1 < p < \infty.$ uzayında sınırlı olduğunu kanıtlamışlardır.

Daha sonra benzer bir sonuç, singüler integral operatörü yerine kesirsel integral operatörü alarak Chanillo (1982) tarafından ispatlanmıştır. İlerleyen zaman ile komütatör operatörler birçok matematikçinin örneğin, Alphonse (2000), Alvarez, Bagby, Kurtz ve Perez (1993), Coifman ve Meyer (1978), Guliyev ve Hasanov (2018), Hu, Lin ve Yang (2008), Janson (1978), Perez (1995) ve diğerlerinin araştırma alanı olmuştur.

Klasik halde Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonun komütatör operatörü $[M, b]$

$$[M, b]f(x) = M(bf)(x) - b(x)Mf(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanır. Burada M Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür.

$[M, b]$ komütatör operatörünün $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ iken $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ uzayında sınırlılığı Milman ve Schonbek (1990) tarafından gösterilmiştir.

Klasik kayma operatörü ile ilişkilendirilen, $\mathbb{R}^n$ de local integrallenebilen fonksiyonların Maksimal komütatör operatörü ise

$$M_b(f)(x) = \sup_{Q:\, x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |b(x)-b(y)||f(y)|dy$$

biçimindedir. Burada supremum $\mathbb{R}^n$ 'nin x 'i içeren tüm Q küpleri üzerinden alınmaktadır.

Bu iki operatör, BMO sembollü singüler integral operatörlerin komütatörleri teorisinde önemli rol oynamaktadır. Alphonse (2000), M_b Maksimal komütatör operatörü için zayıf-tipli eşitsizlikleri göstermiştir.

Ayrıca M maksimal fonksiyonun komütatör operatörü $[M,b]$ ve M_b Maksimal komütatör operatörü için noktasal tahminler Agcayazı, Gogatishvili, Koca ve Mustafayev (2015) tarafından kanıtlanmıştır.

Bundan sonraki bölüm, tezimizin sonuçlarını içermektedir. Öncelikle $B-$ maksimal operatörün komütatörünü ve $B-$ maksimal komütatörü tanımlayacağız. Daha sonra da $L_{p,\nu}$ ağırlıklı Lebesqu uzayında ve $L_{p,\lambda,\nu}$ B-Morrey uzayında sınırlılıklarını inceleyeceğiz.

4.2. $B-$ Maksimal Operatörün Komütatörü ve $B-$ Maksimal Komütatör

Tanım 4.26. *b, $\mathbb{R}^n_+$ uzayında tanımlı ölçülebilir fonksiyon ve M_B, $B-$maksimal operatör olmak üzere $B-$maksimal operatörün komütatörü*

$$[M_B,b]f(x) = M_B(bf)(x) - b(x)M_Bf(x),\ x\in\mathbb{R}^n_+ \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.27. *$b \in L^{loc}_{1,\nu}$ olmak üzere genelleşmiş kayma operatörü ile ilişkilendirilen B-maksimal komütatör*

$$M_{B,b}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y|\left(b(x)-b(y)\right)f(x)|\, y_n^{2\nu}dy,\ x\in\mathbb{R}^n_+ \tag{4.8}$$

ile tanımlanır. Burada $B(0,r)$, orjin merkezli $r>0$ yarıçaplı yuvardır.

Klasik teoride w, A_p Muckenhoupt sınıfına ait olunca M Hardy-Littlewood maksimal operatörü, $L_p(w)$, $1<p<\infty$ uzayında sınırlıdır. Milman ve Schonbek (1990) bu fikri kullanarak, $b \in BMO$ iken $[M, b]$ Hardy-Littlewood maksimal operatörün komütatörünün $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olduğunu kanıtlamıştır. Milman ve Schonbek 'in yöntemini ve Teorem 3.25'yi kullanarak $B-$maksimal operatörün komütatörü $[M_B, b]$ operatörü için aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.28. *$f \in L_{p,\nu}$, $1 < p < \infty$ ve $b \in BMO_B$ olsun. Bu durumda B-maksimal operatörünün komütatörü $[M_B, b]$, $L_{p,\nu}$, $1 < p < \infty$ uzayında sınırlıdır. Yani,*

$$\|[M_B, b]f\|_{L_{p,\nu}} \leq \|b\|_{BMO_B} \|f\|_{L_{p,\nu}}$$

eşitsizliği sağlanır.

B-maksimal operatörünün komütatörü $[M_B, b]$ operatörü ile B-maksimal komütatör $M_{B,b}$ birbirinden farklı iki operatördür. Bununla birlikte b fonksiyonu üzerine bazı koşullar eklendiğinde $M_{B,b}$, $[M_B, b]$ operatörünü kontrol eder. Bununla ilgili teoremimizi aşağıda verelim.

Teorem 4.29. *$b \in L_{1,\nu}^{loc}$ ve $b \geq 0$ olsun. Bu durumda her $f \in L_{1,\nu}^{loc}$ için*

$$|[M_B, b]f(x)| \leq M_{B,b}f(x)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $b \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& T^y |b(x)f(x)| - b(x)T^y |f(x)| = \\
= \; & c_\nu \int_0^\pi \left|(bf)\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \sin^{2\nu-1}\alpha \, d\alpha \\
- \; & b(x)c_\nu \int_0^\pi \left|f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \sin^{2\nu-1}\alpha \, d\alpha \\
= \; & c_\nu \int_0^\pi \left|(bf)\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \\
- \; & |b(x)| \left|f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \sin^{2\nu-1}\alpha \, d\alpha
\end{aligned}$$

ve

$$|T^y |b(x)f(x)| - b(x)T^y |f(x)|| \leq T^y |((b(.) - b(x)) f)(.)|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca

$$\left|\sup_{r>0} u(r) - \sup_{r>0} v(r)\right| \leq \sup_{r>0} |u(r) - v(r)|, \quad u(r), v(r) > 0$$

bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}
[M_B, b]f(x) &= M_B(bf)(x) - b(x)M_B f(x) \\
&= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y|b(x)f(x)|y^{2\nu}dy \\
&- b(x) \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y|f(x)|y^{2\nu}dy
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
|[M_B, b]f(x)| &\leq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} |T^y|b(x)f(x)| - b(x)T^y|f(x)||\, y^{2\nu}dy \\
&= M_B\left((b(.) - b(x))f(.)\right)(x) \\
&= M_{B,b}f(x).
\end{aligned}$$

istenilen eşitsizliği elde ederiz. □

$B-$maksimal operatörün komütatörü $[M_B, b]$ ile ilgili zayıf tipli eşitsizliği ispatlamadan önce aşağıdaki teoreme ihtiyacımız vardır.

Teorem 4.30. *$b \in L_{1,\nu}^{loc}$ olsun. Bu takdirde her $f \in L_{1,\nu}^{loc}$ için*

$$|[M_B, b]f(x)| \leq M_{B,b}f(x) + 2b^-(x)M_B f(x)$$

dir. Burada $b^-(x) = \max\{-b(x), 0\}$ dir.

İspat

$$\begin{aligned}
&|[M_B, b]f(x) - [M_B, |b|]f(x)| = \\
&= |M_B(bf)(x) - b(x)M_B f(x) - M_B(|b|f)(x) + |b(x)|M_B f(x)| \\
&= |(|b(x)| - b(x))M_B f(x)| \\
&\leq 2b^-(x)M_B f(x)
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$|[M_B, b]f(x)| \leq |[M_B, |b|]f(x)| + 2b^-(x)M_B f(x)$$

ve Teorem 4.29'den

$$|[M_B, b]f(x)| \leq M_{B,b}f(x) + 2b^-(x)M_Bf(x)$$

eşitsizliğini elde ederiz. □

Teorem 4.31. *$b \in L_\infty$ olsun. Buradan öyle $c_1 > 0$ ve $c_2 > 0$ sabitleri vardır ki her $f \in L_{1,\nu} \cap L_{q,\nu}, 1 < q < \infty$ ve her $\lambda > 0$ için*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \ |[M_B, b]\, f(x)| > \lambda\right\}\right|_\nu \leq c_1 \|b\|_{L_\infty} \|f\|_{L_{1,\nu}} + \left(\frac{c_2||b||_{L_\infty}}{\lambda}\right)^q ||f||_{L_{q,\nu}}^q$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Herhangi $\lambda > 0$ için Teorem 4.30'e göre

$$\begin{aligned} &\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \ |[M_B, b]\, f(x)| > \lambda\right\}\right|_\nu \leq \\ \leq\ & \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \ M_{B,|b|}f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|_\nu + \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \ 2b^-(x)M_Bf(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|_\nu \\ \leq\ & \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \ M_{B,|b|}f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|_\nu + \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \ 2\|b\|_{L_\infty} M_Bf(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|_\nu \\ =\ & I_1 + I_2. \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi I_1 ve I_2 tahminlerini hesaplayalım. B-maximal operator M_B, zayıf $(1,1)$ tipli olduğundan I_2 tahmini için

$$\begin{aligned} I_2 = \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \ 2\|b\|_{L_\infty} M_Bf(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|_\nu &\leq c_1 \|b\|_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)| x_n^{2\nu} dx \\ &= c_1 \|b\|_{L_\infty} \|f\|_{L_{1,\nu}} \end{aligned}$$

eşitsizliğini buluruz. I_1 tahmini için Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned} M_{B,|b|}f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int_{B(0,r)} T^y |\left(|b(x)| - |b(y)|\right) f(x)|\, y_n^{2\nu} dy \\ &\leq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int_{B(0,r)} T^y (|b(x) - b(y)||f(x)|)\, y_n^{2\nu} dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} c_\nu \int\limits_0^\pi |b(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}) - b(y)| \\
&\times \ |f(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2})| \sin^{2\nu-1}\alpha \, d\alpha \, y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} \left(c_\nu \int\limits_0^\pi |b(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}) - b(y)|^p \sin^{2\nu-1}\alpha \, d\alpha \right)^{1/p} \\
&\times \left(c_\nu \int\limits_0^\pi |f(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2})|^q \sin^{2\nu-1}\alpha \, d\alpha \right)^{1/q} y_n^{2\nu} dy, \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
&\leq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} (T^y|b(x) - b(y)|^p)^{1/p} (T^y |f(x)|^q)^{1/q} y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \left(\sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y |b(x) - b(y)|^p y_n^{2\nu} dy \right)^{1/p} \left(\sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y |f(x)|^q y_n^{2\nu} dy \right)^{1/q} \\
&\leq c_1 ||b||_{L_\infty} (M_B|f|^q)^{1/q}(x)
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$
\begin{aligned}
I_1 = \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : \ M_{B,|b|} f(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right|_\nu \ &= \ \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : \ M_{B,b} f(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right|_\nu \\
&\leq \ \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : \ c_1 ||b||_{L_\infty} (M_B |f|^q)^{1/q}(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right|_\nu \\
&\leq \ \left(\frac{c_2 ||b||_{L_\infty}}{\lambda} \right)^q ||f||^q_{L_{q,\nu}}, \ \ 1 < q < \infty
\end{aligned}
$$

olur. Son olarak I_1 ve I_2 tahminlerinden istenilen sonuç elde edilir. □

Son olarak, B-maksimal komütatörü $M_{B,b}$ 'nin B-Morrey uzayında sınırlı olması için gerekli bir koşul veren aşağıdaki teoremimizi kanıtlayalım.

Teorem 4.32. $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < n+2\nu$, $b \in BMO_B$ *olsun. Bu durumda* B*-maksimal komütatörü* $M_{B,b}$ *'nin* $L_{p,\lambda,\nu}$ B*-Morrey uzayında sınırlıdır ve*

$$
\|M_{B,b} f\|_{L_{p,\lambda,\nu}} \leq \|b\|_{BMO_B} \|f\|_{L_{p,\lambda,\nu}}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $b \in BMO_B$ ve $1 < p < \infty$, $0 \le \lambda < n + 2\nu$, $f \in L_{p,\lambda,\nu}$ olsun. Bu durumda

$$\int\limits_{B(0,r)} T^y |M_{B,b} f|^p(x) y_n^{2\nu} dy \le \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y |M_{B,b} f|^p(x) (M_B \chi_{B(0,r)}(y))^\delta y_n^{2\nu} dy, \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

olur. Tanım 3.24 de verilen $A_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, uzayını göz önüne alarak, herhengi $0 < \delta < 1$ için $(M_B \chi_{B(0,r)})^\delta \in A_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y |M_{B,b} f|^p(x) (M_B \chi_{B(0,r)}(y))^\delta y_n^{2\nu} dy \le \\
\le\ & c_1 \ \|b\|_{BMO_B}^p \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y(|f|)^p(x) (M_B \chi_{B(0,r)}(y))^\delta y_n^{2\nu} dy \\
\le\ & c_1 \ \|b\|_{BMO_B}^p \int\limits_{B(0,r)} T^y(|f|)^p(x) y_n^{2\nu} dy \\
+\ & c_1 \ \|b\|_{BMO_B}^p \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B(0,2^{j+1}r)\setminus B(0,2^j r)} T^y(|f|)^p(x) (M_B \chi_{B(0,r)}(y))^\delta y_n^{2\nu} dy \\
\le\ & c_1 \ \|b\|_{BMO_B}^p \int\limits_{B(0,r)} T^y(|f|)^p(x) y_n^{2\nu} dy \\
+\ & c_1 \ \|b\|_{BMO_B}^p \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B(0,2^{j+1}r)\setminus B(0,2^j r)} T^y(|f|)^p(x) \frac{r^{(n+2\nu)\delta}}{(|y| + r)^{(n+2\nu)\delta}} \ y_n^{2\nu} dy \\
\le\ & c_1 \ \|b\|_{BMO_B}^p \, \|f\|_{L_{p,\lambda,\nu}}^p \left(r^\lambda + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^j + 1)^{(n+2\nu)\delta}} (2^{j+1} r)^\lambda \right) \\
\le\ & c_2 \, r^\lambda \, \|b\|_{BMO_B}^p \, \|f\|_{L_{p,\lambda,\nu}}^p .
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliği r^λ ile bölüp, her iki yandan $x \in \mathbb{R}_+^n$ ve $r > 0$ üzerinden supremum alınırsa

$$\|M_{B,b} f\|_{L_{p,\lambda,\nu}}^p = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^n,\ r>0} \frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{B(0,r)} T^y |M_{B,b} f(x)|^p y_n^{2\nu} dy \le \|b\|_{BMO_B}^p \|f\|_{L_{p,\lambda,\nu}}^p$$

eşitsizliğini elde ederiz. □

5. SONUÇLAR

Öncelikle B-maksimal operatörünün komütatörü $[M_B, b]$ operatörünün $b \in BMO_B$ iken $L_{p,\nu},\ 1 < p < \infty$ uzayında sınırlılığını elde ettik:

$$\|[M_B, b]f\|_{L_{p,\nu}} \leq \|b\|_{BMO_B} \|f\|_{L_{p,\nu}}.$$

Daha sonra B-maksimal operatörünün komütatörü $[M_B, b]$ ile B-maksimal komütatör $M_{B,b}$ 'nin birbirinden farklı iki operatör olmasına rağmen b üzerine bazı koşullar eklendiğinde $M_{B,b}$ 'nin $[M_B, b]$ operatörünü kontrol ettiğini gördük:

$$|[M_B, b]f(x)| \leq M_{B,b}f(x), \quad b \in L_{1,\nu}^{loc},\ \ b \geq 0.$$

Son olarak, $B-$maksimal operatörün komütatörü $[M_B, b]$ için zayıf tipli eşitsizliği:

$b \in L_\infty$ olmak üzere öyle $c_1,\ c_2 > 0$ sabitleri vardır ki her $f \in L_{1,\nu} \cap L_{q,\nu}$,$1 < q < \infty$ ve her $\lambda > 0$ için

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n :\ \ |\left[M_B, b\right] f(x)| > \lambda\right\}\right|_\nu \leq c_1 \|b\|_{L_\infty} \|f\|_{L_{1,\nu}} + \left(\frac{c_2 ||b||_{L_\infty}}{\lambda}\right)^q ||f||_{L_{q,\nu}}^q$$

ve

B-maksimal komütatörü $M_{B,b}$ 'nin $L_{p,\lambda,\nu}$ B-Morrey uzayında sınırlı olması için gerekli koşul veren bağıntıyı:

$1 < p < \infty,\ 0 \leq \lambda < n + 2\nu,\ b \in BMO_B$ olmak üzere

$$\|M_{B,b}f\|_{L_{p,\lambda,\nu}} \leq \|b\|_{BMO_B} \|f\|_{L_{p,\lambda,\nu}}$$

kanıtladık.

6. KAYNAKLAR

Agcayazı, M., Gogatishvili, A., Koca, K. and Mustafayev, R. 2015. A note on maximal commutators and commutators of maximal functions, *J. Math. Soc. Japan*, 67 (2): 581-593.

Aliev, I.A. and Bayrakci, S. 1998. On inversion of B-elliptic potentials associated with the Laplace-Bessel differential operator, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, (4): 365-384.

Aliev, I.A. and Bayrakci, S. 2002. On inversion of Bessel potentials associated with the Laplace-Bessel differential operator, *Acta Math. Hungar*, 95 (1-2): 125-145.

Aliev, I.A. and Gadjiev, A.D. 1994. Weighted estimates of multidimensional singular integrals generated by the generalized shift operator, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 77 (1): 37-55.

Alphonse, A.M. 2000. An end point estimates for maximal commutators, *J. Fourier Anal. Appl.*, 6 (4): 449-456.

Alvarez, J., Bagby, R.J., Kurtz, D.S. and Perez, C. 1993. Weighted estimates for commutators of linear operators, *Studia Math.*, 104 (2): 195-209.

Chanillo, S.C. 1982. A note on commutators, *Indiana Univ. Math. J.*, (31): 7-16.

Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G. 1976. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Annals of Math.*, (103): 611-635.

Coifman, R.R. and Meyer, Y. 1978. Au dela des operaturs pseudo-differentiels, Asterisque 57, Societe Mathematique de France, pp.185, Paris.

Delsarte, J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor, *J. Math. Pure Appl.*, (17) : 213-231.

Folland, G.B. 1984. Real Analysis Modern Tecniquies and Their Applications. John Wiley and Sons, New York, pp. 350.

Gadjiev, A.D. and Aliev, I.A. 1988. On classes of operators of potential types, generated by a generalized shift, *Reports of enlarged Session of the Seminars of I.N.Vekua Inst. of Applied Mathematics, Tbilisi*, (3): 21-24.

Guliev, V.S. 1998. Sobolev theorems for the Riesz B- potentials, *Dokl. RAN*, 358 (4): 450-451. 1999 155–156.

Guliev, V.S. and Hasanov, J.J. 2006. Sobolev-Morrey type inequality for Riesz potentilas, associated with the Laplace-Bessel differential operator, *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 9 (1): 17-32.

Guliev, V.S. and Hasanov, J.J. 2018. Maximal and singular integral operators and their commutators on generalized weighted Morrey spaces with variable exponent, *Math. Inequal. Appl.*, 21 (1): 41-61.

Guliyev, E.V. 2006. Weighted inequality for fractional maximal functions and fractional integrals, associated with the Laplace-Bessel differential operator, *Trans. of NAS of Azerbaijan*, 26 (1): 71-80.

Grafakos, L. 2009. Modern Fourier Analysis, Second Edition, Springer, New York, pp.507.

Hu, G., Lin, H. and Yang, D. 2008. Commutators of the Hardy-Littlewood Maximal operator with BMO symbols on spaces of homogenous type, *Abstr. Appl. Anal.* Art. ID 237937.

Janson, S. 1978. Mean oscillation and commutators of singular integral operators, *Ark. Mat.*, (16): 263-270.

John, F. and Nirenberg, L. 1961. On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.*, (14): 415-426.

Levitan, B.M. 1951. Bessel function expansions in series and Fourier integrals, *Uspekhi Mat. Nauk.*, (6): 102-143 .

Kipriyanov, I.A. 1997. Singular elliptic boundary value problems, (In Russian), Nauka, Moscow.

Klyuchantsev, M.I. 1970. On singular integrals generated by the generalized shift operator, *Sibirsk. Mat. Zh.*, (11): 810-821.

Lofstrom, J. and Peetre, J. 1969. Approximation Theorems connected with generalized translation, *Math. Ann.*, (181): 255-268.

Lyakhov, L.N. 1983. On classes of spherical functions and singular psedodifferential operators, *Dokl. Akad. Nauk*, (272): 781-784.

Milman, M. and Schonbek, T. 1990. Second order estimates in ınterpolation theory and applications, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 110 (4): 961-969.

Muckenhoupt, B. and Wheeden, R. 1974. Weighted norm inequalities for fractional integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, (192): 261-274.

Perez, C. 1995. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators, *J. Func. Anal.*, (128): 163-185.

Stein E.M. 1971. Introduction to Fourier Analysis On Euclidean Spaces, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, pp. 297.

Stein E.M. 1993. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, pp. 695.

Stempak, K. 1985. The Littlewood-Paley theory for the Fourier-Bessel transform, Mathematical Institute University of Wroclaw (Poland), Preprint No. 45.

Trimeche, K. 1997. Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, (4): 97-112.

ÖZGEÇMİŞ

Veli Semih UYGUR

semihuygur@me.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2016-2019	Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya
Lisans 2009-2013	Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen 2015-devam ediyor	Manavgat Taşağıl Anadolu Lisesi, Antalya

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Bayrakci S. and Uygur V.S. (2018). Boundedness of the B-Maximal Commutators on B-Morrey Spaces, *The Mediterranean International Conference of Pure and Applied Mathematics, MICOPAM 2018, Proceedings Book*, 188-191.