T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

PARÇALANIŞ FONKSİYONUNU İÇEREN BAZI KONGRÜANSLAR

Mehmet CİCİMEN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2021

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

PARÇALANIŞ FONKSİYONUNU İÇEREN BAZI KONGRÜANSLAR

Mehmet CİCİMEN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2021

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARÇALANIŞ FONKSİYONUNU İÇEREN BAZI KONGRÜANSLAR

Mehmet CİCİMEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 14/01/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet CENKCİ (Danışman)

Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

PARÇALANIŞ FONKSİYONUNU İÇEREN BAZI KONGRÜANSLAR

Mehmet CİCİMEN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

Ocak 2021, 104 sayfa

Bu çalışmada, parçalanış fonksiyonu ve Ramanujan τ-fonksiyonu için Ramanujan tarafından verilen klasik kongrüansların kanıtları ifade edilmiştir. Söz konusu kanıtlarda, q-serileri teorisi ve Ramanujan genel teta fonksiyonunun temel kavramları kullanılmıştır. Ayrıca, parçalanış fonksiyonunun bir genellemesi ile sağladığı kongrüanslar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Parçalanış fonksiyonu, Ramanujan τ-fonksiyonu, q-serileri, Ramanujan genel teta fonksiyonu.

JÜRİ: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

SOME CONGRUENCES INVOLVING THE PARTITION FUNCTION

Mehmet CİCİMEN

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

January 2021, 104 pages

In this work, some classical congruences for the partition function and Ramanujan's τ-function are proved by utilizing basic results from q-theory and Ramanujan's general theta function. Moreover, a generalization of the partition function, related congruences are presented.

KEYWORDS: The partition function, Ramanujan's τ-function, q-series, Ramanujan's general theta function.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Assoc. Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ
Assoc. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taraması, Materyal ve Metot ve Bulgular olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır. Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taraması bölümünde q-çarpım, parçalanış fonksiyonu ve Ramanujan τ-fonksiyonu tanımları verilmiştir. Materyal ve Metot bölümünde q-serileri ve teta fonksiyonları teorilerinde temel sonuçlar olan q-binom teoremi, Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği, Euler Beşgen Sayı Teoremi, Jacobi Özdeşliği, Ramanujan ${}_1\psi_1$ Toplam Formülü ve Beşli Çarpım Özdeşliği ifade edilerek kanıtlanmıştır. Bulgular bölümünde ise Ramanujan tarafından verilen parçalanış fonksiyonu ve Ramanujan τ-fonksiyonu için bazı klasik kongrüanslar ifade edilerek kanıtlanmıştır. Ayrıca, parçalanış fonksiyonunun bir genellemesi için kongrüanslar ve özel durumlar ifade edilmiştir.

Bir derleme olan bu çalışmada ifade edilen sonuçların çeşitli kanıtları literatürde mevcuttur. Bu kanıtların verildiği bazı çalışmalar Kaynakça bölümünde listelenmiştir. Bu çalışmada, söz konusu kanıtların bazıları detaylı olarak incelenmiştir.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Prof. Dr. Mehmet CENKCİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Parçalanış Fonksiyonunu İçeren Bazı Kongrüanslar" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

14/01/2021

Mehmet CİCİMEN

SİMGELER

Simgeler:

$(a;q)_n$, $(a;q)_\infty$	: q-çarpım
$p(n)$	: Parçalanış fonksiyonu
$\tau(n)$	: Ramanujan τ-fonksiyonu
$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$	: q-binom katsayısı
$f(a,b)$	: Ramanujan genel teta fonksiyonu
$p_r(n)$	: Parçalanış fonksiyonunun bir genellemesi
$\sigma(n)$	: n tam sayısının pozitif bölenlerinin toplamı
$\left(\frac{a}{p}\right)$	: Legendre sembolü

1. GİRİŞ

n bir pozitif tam sayı olsun. n sayısının pozitif tam sayılarının toplamı şeklinde yazılabilme sayısı $p(n)$ ile gösterilsin (bu yazılışta sıra önemlidir, toplananların farklı sıralanışı, farklı bir parçalanış olarak kabul edilmez). $p(n)$ aritmetik fonksiyonuna parçalanış fonksiyonu denir. Örneğin,

$$
\begin{aligned}
&p(1) = 1, \quad (1) \\
&p(2) = 2, \quad (2, 1+1) \\
&p(3) = 3, \quad (3, 2+1, 1+1+1) \\
&p(4) = 5, \quad (4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1) \\
&p(5) = 7, \quad (5, 4+1, 3+2, 2+2+1, 3+1+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1) \\
&p(6) = 11, \quad \begin{pmatrix} 6, 5+1, 4+2, 3+3, \\ 3+2+1, 2+2+2, 4+1+1, \\ 2+2+1+1, 3+1+1+1, \\ 2+1+1+1+1, \\ 1+1+1+1+1+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ve $p(200) = 3972999029388$ şeklindedir. $p(n)$ fonksiyonunun üreteç fonksiyonu Euler (Euler 1748) tarafından

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^k)\cdots}$$

olarak verilmiştir. Bu eşitliğe Euler bağıntısı denir.

Parçalanış fonksiyonu üzerine yapılan çalışmalarda q-serileri sıkça kullanılan bir analitik araçtır. Kabaca bir q-serisi, $(a;q)_n$ ile gösterilen q-çarpımların bir serisidir. $n \geq 1$ bir tam sayı ve a ile q karmaşık sayılar olmak üzere $(a;q)_n$ q-çarpım

$$(a)_n = (a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - aq^k\right) = (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\cdots\left(1-aq^{n-1}\right)$$

olarak tanımlanır. a sayısına parametre ve q değişkenine taban denir. $(a)_0 = (a;q)_0 = 1$ olarak kabul edilir (boş çarpım). Ayrıca, $|q| < 1$ olmak üzere

$$(a)_\infty = (a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - aq^k\right) = (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\cdots$$

olarak tanımlanır.

q-serileri konusunun en önemli teoremlerinden biri q-binom teoremidir. $|q| < 1$ ve $|z| < 1$ için q-binom teoremi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(q)_n} z^n = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}$$

şeklinde ifade edilir (Cauchy 1893). Özel olarak, $|q| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q)_n} = \frac{1}{(z)_\infty}, \quad |z| < 1$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} (-z)^n}{(q)_n} = (z)_\infty, \quad |z| < \infty$$

olur (Euler 1748).

q-serilerinde toplamda yer alan parametreler genellikle limit durumunda 0 veya ∞ olarak alınır ve sonuçta toplam $(a; q)_n$ çarpımlarını içermeyebilir. Örneğin, q-binom teoreminde $a = 0$ alınırsa yukarıdaki ilk eşitlik ve $a \to \infty$ limit durumunda ikinci eşitlik elde edilir. Bu tür bir durumda geriye kalan ifade çoğu zaman bir teta fonksiyonudur. Ramanujan genel teta fonksiyonu $f(a, b)$ ile gösterilir ve

$$f(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad |ab| < 1$$

olarak tanımlanır (Berndt 1991).

Teta fonksiyonları teorisinde önemli olan bazı özdeşlikler Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği, Euler Beşgen Sayı Teoremi, Jacobi Özdeşliği ve Beşli Çarpım Özdeşliğidir. Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği, $z \neq 0$ ve $|q| < 1$ için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \left(-zq; q^2\right)_\infty \left(-\frac{q}{z}; q^2\right)_\infty \left(q^2; q^2\right)_\infty$$

şeklinde ifade edilebilir (Jacobi 1829). Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinin $f(a, b)$ teta fonksiyonu cinsinden gösterimi

$$f(a, b) = (-a; ab)_\infty (-b; ab)_\infty (ab; ab)_\infty$$

şeklindedir. Euler Beşgen Sayı Teoremi, $|q| < 1$ için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}} = (q; q)_\infty$$

şeklinde ifade edilebilir (Euler 1748). Jacobi Özdeşliği,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,q^{\frac{n(n+1)}{2}}=(q;q)_\infty^3\,,\quad |q|<1,$$

şeklindedir (Jacobi 1829). Beşli Çarpım Özdeşliği ise

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{3n^2+n}\left(z^{3n}q^{-3n}-z^{-3n-1}q^{3n+1}\right)$$
$$=\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(qz;q^2\right)_\infty\left(\frac{q}{z};q^2\right)_\infty\left(z^2;q^4\right)_\infty\left(\frac{q^4}{z^2};q^4\right)_\infty$$

olarak ifade edilebilir (Watson 1929).

1919 yılında Ramanujan (Ramanujan 1919), $p\,(n)$ parçalanış fonksiyonunun

$$p\,(5n+4)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,5)$$
$$p\,(7n+5)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,7)$$
$$p\,(11n+6)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,11)$$

kongrüanslarını sağladığını ifade etmiştir. 1920 yılında (Ramanujan 1920) teta fonksiyonları teorisi, özel olarak Euler Beşgen Sayı Teoremi ve Jacobi Özdeşliğini kullanarak, ilk iki kongrüansın kanıtlarını vermiş ve üçüncü kongrüans için bir kanıt bulduğunu belirtmiş, ancak kanıtın detaylarını vermemiştir. 1969 yılında Winquist (Winquist 1969), ilk iki kongrüansın kanıtlarında Euler Beşgen Sayı Teoreminin oynadığı rolü oynayan bir bağıntı kanıtlayarak son kongrüansın kanıtını vermiştir.

1920 yılında yaptığı çalışmasında Ramanujan ayrıca, 1916 yılında yaptığı bir çalışmasında tanımladığı $\tau\,(n)$ aritmetik fonksiyon için kongrüansları ifade etmiştir. $n\geq 1$ tam sayısı için Ramanujan τ-fonksiyonu olarak adlandırılan $\tau\,(n)$ aritmetik fonksiyon

$$q\,(q;q)_\infty^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau\,(n)\,q^n,\quad |q|<1,$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. İlk bir kaç $\tau\,(n)$ değeri

$$\tau\,(1)=1,\quad \tau\,(2)=-24,\quad \tau\,(3)=252,\quad \tau\,(4)=-1472,\quad \tau\,(5)=4830,$$
$$\tau\,(6)=-6048,\quad \tau\,(7)=-16744,\quad \tau\,(8)=84480,$$
$$\tau\,(9)=-113643,\quad \tau\,(10)=-115920,$$

ve $\tau(15) = 1217160$ şeklindedir. Değerlerinden de görüleceği gibi $|\tau(n)|$ değerleri çok hızlı büyümektedir. Her $n < 0$ tam sayısı için $\tau(n) \neq 0$ ifadesi bir açık problemdir. Tanımı doğal görünmemesine rağmen $\tau(n)$ fonksiyonu parçalanış fonksiyonu teorisi ve modüler formlar teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Ramanujan, $\tau(n)$ fonksiyonu için aşağıdaki kongrüansları elde etmiştir (Ramanujan 1916 ve 1919):

- $n \geq 1$ tam sayısı için
$$\tau(n) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{2}, & n = (2m+1)^2 \text{ ise,} \\ 0 \pmod{2}, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$
Bu kongrüans, $\tau(n)$ fonksiyonunun çok seyrek olarak tek tam sayı değerleri aldığını ifade eder.

- $n \geq 0$ tam sayısı için
$$\tau(7n), \tau(7n+3), \tau(7n+5), \tau(7n+6) \equiv 0 \pmod{7}$$
olur.

- $0 \leq r < 23$ özelliğinde olan r tam sayısı modülo 23 bir kuadratik kalan ise
$$\tau(23n - r) \equiv 0 \pmod{23}$$
olur.

- $n \geq 0$ tam sayısı için
$$\tau(5n) \equiv 0 \pmod{5}$$
olur.

Parçalanış fonksiyonu ile Ramanujan τ-fonksiyonu arasında doğal bir ilişki vardır. r bir tam sayı olmak üzere
$$(q;q)_\infty^r = \sum_{n=0}^{\infty} p_r(n) q^n$$
olsun. $p_{-1}(n) = p(n)$ ve $\tau(n) = p_{24}(n-1)$ olur. 1963 yılında Gandhi (Gandhi 1963), $p_r(n)$ fonksiyonu için bazı temel kongrüanslar elde etmiştir. $\tau(n)$ için yukarıda verilen kongrüanslar, $p_r(n)$ için elde edilen kongrüansların özel durumları olarak ortaya çıkmaktadır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. q-Çarpım

Tanım 2.1. *(q -çarpım) $n \geq 1$ tam sayısı için*

$$(a)_n = (a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - aq^k\right) = (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\cdots\left(1-aq^{n-1}\right)$$

olarak tanımlanan çarpıma q-çarpım denir. a sayısına parametre ve q değişkenine taban denir.

$$(a)_0 = (a;q)_0 = 1$$

olarak kabul edilir (boş çarpım). $|q| < 1$ için

$$(a)_\infty = (a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - aq^k\right) = (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\cdots$$

olarak tanımlanır.

$(a;q)_n$ q-çarpımı, artan faktöriyelin q-benzeridir. Gerçekten, $a > 0$ için

$$\lim_{q\to 1} \frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n}$$

limiti L'Hospital kuralı ile

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to 1} \frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n} &= \lim_{q\to 1} \frac{(1-q^a)\left(1-q^{a+1}\right)\left(1-q^{a+2}\right)\cdots\left(1-q^{a+n-1}\right)}{(1-q)^n} \\
&= \lim_{q\to 1} \frac{1-q^a}{1-q} \lim_{q\to 1} \frac{1-q^{a+1}}{1-q} \cdots \lim_{q\to 1} \frac{1-q^{a+n-1}}{1-q} \\
&= a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Tanım 2.2. *(q-binom katsayısı) n ile m tam sayıları için q-binom katsayısı $\left[{n \atop m}\right]$ ile gösterilir ve*

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{(q)_n}{(q)_m (q)_{n-m}}, & 0 \leq m \leq n \text{ ise;} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.3. *q-binom katsayısı aşağıdaki özellikleri sağlar.*

(1) $\lim\limits_{q\to 1} \left[{n \atop m}\right] = \binom{n}{m}$ *olur.*

(2) $\left[{n \atop m}\right] = \left[{n \atop n-m}\right]$ *olur.*

(3) $\left[{n \atop m}\right] = \left[{n-1 \atop m-1}\right] + q^m \left[{n-1 \atop m}\right] = \left[{n \atop m}\right] = \left[{n-1 \atop m}\right] + q^{n-m} \left[{n-1 \atop m-1}\right]$ *olur (q-Pascal formülü).*

Kanıt

(1) Tanım ve L'hospital kuralı gereği

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} &= \lim_{q\to 1}\frac{(q)_n}{(q)_m\,(q)_{n-m}} \\
&= \lim_{q\to 1}\frac{(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^m)\,(1-q^{m+1})\,(1-q^{m+2})\cdots(1-q^n)}{(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^m)\,(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^{n-m})} \\
&= \lim_{q\to 1}\frac{1-q^{m+1}}{1-q}\lim_{q\to 1}\frac{1-q^{m+2}}{1-q^2}\cdots\lim_{q\to 1}\frac{1-q^n}{1-q^{n-m}} \\
&= (m+1)\,\frac{m+2}{2}\frac{m+3}{3}\cdots\frac{n}{n-m} \\
&= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{m}
\end{aligned}$$

bulunur.

(2) Tanımdan aşikar olarak elde edilir.

(3) Tanım gereği

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} &+ q^m\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} = \frac{(q)_{n-1}}{(q)_{m-1}\,(q)_{n-m}} + q^m\frac{(q)_{n-1}}{(q)_m\,(q)_{n-m-1}} \\
&= \frac{(q)_{n-1}}{(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^{m-1})\,(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^{n-m})} \\
&\quad + \frac{q^m\,(q)_{n-1}}{(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^m)\,(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^{n-m-1})} \\
&= \frac{(1-q^m)\,(q)_{n-1} + q^m\,(1-q^{n-m})\,(q)_{n-1}}{(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^m)\,(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^{n-m})} \\
&= \frac{(q)_{n-1}\,(1-q^m+q^m-q^n)}{(q)_m\,(q)_{n-m}} = \frac{(q)_n}{(q)_m\,(q)_{n-m}} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur. İkinci eşitlik de benzer şekilde kanıtlanır. □

2.2. Parçalanış Fonksiyonu

Tanım 2.4. *(Parçalanış fonksiyonu) n bir pozitif tam sayı olsun. n sayısının pozitif tam sayılarının toplamı şeklinde yazılabilme sayısı $p(n)$ ile gösterilsin. $p(n)$ aritmetik fonksiyonuna parçalanış fonksiyonu denir.*

n sayısının parçalanışında, toplananların farklı sırada olması farklı bir parçalanış olarak kabul edilmez. Örneğin,

$$p(1) = 1,\ (1)$$

$$\begin{aligned}
p(2) &= 2, \ (2, 1+1) \\
p(3) &= 3, \ (3, 2+1, 1+1+1) \\
p(4) &= 5, \ (4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1) \\
p(5) &= 7, \ (5, 4+1, 3+2, 2+2+1, 3+1+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1) \\
p(6) &= 11, \ \left(\begin{array}{l} 6, 5+1, 4+2, 3+3, \\ 3+2+1, 2+2+2, 4+1+1, \\ 2+2+1+1, 3+1+1+1, \\ 2+1+1+1+1, \\ 1+1+1+1+1+1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

ve $p(200) = 3972999029388$ şeklindedir. $p(0) = 1$ kabul edilir. Buna sıfırın boş parçalanışı denir.

$p(n)$ fonksiyonunun üreteç fonksiyonu Euler tarafından

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^k)\cdots}$$

olarak verilmiştir. Bu eşitliğe Euler Bağıntısı denir.

Euler Bağıntısının ilk kanıtı için (Andrews ve Eriksson 2004) $\frac{1}{(q;q)_\infty}$ çarpımındaki her bir çarpan bir geometrik seri olarak açılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(q;q)_\infty} &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} \\
&= \left(1+q+q^2+\cdots\right)\left(1+q^2+q^4+\cdots\right)\left(1+q^3+q^6+\cdots\right)\cdots
\end{aligned}$$

elde edilir. Sağ taraftaki seriler birer polinom olarak düşünülüp çarpılır ve q teriminin aynı olan kuvvetlerinin katsayıları toplanırsa

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n$$

şeklinde bir kuvvet serisi elde edilir. $a(n) = p(n)$ olduğu gösterilecektir.

$(1+q+q^2+\cdots)$ serisinden q^{n_1} terimi, $(1+q^2+q^4+\cdots)$ serisinden q^{2n_2} terimi, $(1+q^3+q^6+\cdots)$ serisinden q^{3n_3} terimi ve genel olarak $(1+q^m+q^{2m}+\cdots)$ serisinden q^{mn_m} terimi alınsın. Bu terimlerin çarpımı

$$q^{n_1} q^{2n_2} q^{3n_3} \cdots q^{mn_m} = q^{n_1+2n_2+3n_3+\cdots+mn_m}$$

şeklindedir.

$$n = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + mn_m$$

yazılırsa

$$n = \left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n_1\text{-tane}}\right) + \left(\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n_2\text{-tane}}\right) + \cdots + \left(\underbrace{m+m+\cdots+m}_{n_m\text{-tane}}\right)$$

olduğundan q^n teriminin katsayısı olan $a(n)$, n sayısının pozitif tam sayılarının bir toplamı, yani bir parçalanışıdır. Dolayısıyla, $a(n) = p(n)$ elde edilir.

Euler Bağıntısının ikinci kanıtı için (Apostol 1976) $m \geq 1$ tam sayı ve $0 \leq q < 1$ olmak üzere

$$F_m(q) = \frac{1}{(q;q)_m} = \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{1-q^n} \quad \text{ve} \quad F(q) = \frac{1}{(q;q)_\infty} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} = \lim_{m\to\infty} F_m(q)$$

fonksiyonları tanımlansın. $0 \leq q < 1$ için $F(q)$ fonksiyonunu tanımlayan çarpım mutlak yakınsaktır. Çünkü, bu fonksiyonun çarpmaya göre tersi olan $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ çarpımı, $\sum q^n$ toplamı mutlak yakınsak olduğundan mutlak yakınsaktır. Ayrıca, sabitlenmiş her $0 \leq q < 1$ için

$$F_{m+1}(q) = \frac{1}{1-q^{m+1}} F_m(q) \geq F_m(q)$$

olduğundan $\{F_m(q)\}$ dizisi artandır. Dolayısıyla, her sabitlenmiş $0 \leq q < 1$ ve her m tam sayısı için $F_m(q) \leq F(q)$ olur. İlk kanıttan da görülebileceği gibi $F_m(q)$, sonlu sayıda mutlak yakınsak olan serilerin çarpımı olduğundan

$$F_m(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_m(n)\, q^n$$

şeklinde bir mutlak yakınsak seri olarak yazılabilir. Burada $p_m(n)$ katsayısı,

$$n = n_1 + 2n_2 + \cdots + mn_m$$

denkleminin çözümlerinin sayısıdır. Diğer bir ifade ile $p_m(n)$ katsayısı, n sayısının m taneden fazla sayı içermeyen parçalardan oluşan parçalanış sayısıdır. n sayısının herhangi bir parçalanışı n tane sayıdan fazla sayı içeremeyeceğinden $m \geq n$ için $p_m(n) = p(n)$ olur. O halde, $m \geq n$ olduğunda eşitlik olmak üzere $p_m(n) \leq p(n)$ olur. Diğer bir ifade ile

$$\lim_{m\to\infty} p_m(n) = p(n)$$

elde edilir. Şimdi, $F_m(q)$ serisi

$$F_m(q) = \sum_{n=0}^{m} p_m(n) q^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} p_m(n) q^n = \sum_{n=0}^{m} p(n) q^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} p_m(n) q^n$$

olarak iki parçaya ayrılsın. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{m} p(n) q^n \leq F_m(q) \leq F(q)$$

olduğundan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p(n) q^n$ serisi yakınsaktır. Ayrıca, $p_m(n) \leq p(n)$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n) q^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n \leq F(q)$$

olur. Dolayısıyla, sabitlenmiş her q için $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_m(n) q^n$ serisi m değişkenine göre mutlak yakınsaktır. Bu yüzden,

$$F(q) = \lim_{m\to\infty} F_m(q) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_m(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} p_m(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n$$

elde edilir. Bu ise $0 \leq q < 1$ için Euler Bağıntısıdır. Analitik devam ile bu sonuç $|q| < 1$ yuvarına genişletilebilir.

Örnek 2.5. *Her biri* 7 *sayısından küçük olan bir çift pozitif tam sayı ile bir tek pozitif tam sayının toplamından oluşan tüm parçalanışlar ele alınsın. Bu parçalanışlar*

$$\begin{array}{ccccc} 2+1 & 2+3 & 2+5 & 4+5 & 6+5 \\ & 4+1 & 4+3 & 6+3 & \\ & & 6+1 & & \end{array}$$

olmak üzere dokuz tanedir ve

$$\begin{aligned} &\left(q^2+q^4+q^6\right)\left(q^1+q^3+q^5\right) \\ &\qquad = q^{2+1}+q^{2+3}+q^{2+5}+q^{4+1}+q^{4+3}+q^{4+5}+q^{6+1}+q^{6+3}+q^{6+5} \\ &\qquad = q^3+2q^5+3q^7+2q^9+q^{11} \end{aligned}$$

polinom çarpımındaki katsayılar ile belirlenir. q^3 *teriminin katsayısı olan* 1, 3 *sayısının bu özellikte olan bir parçalanışının* $(2+1)$*;* q^5 *teriminin katsayısı olan* 2, 5 *sayısının bu özellikte olan iki parçalanışının* $(2+3$ *ve* $4+1)$*;* q^7 *teriminin katsayısı olan* 3, 7 *sayısının* *bu özellikte olan üç parçalanışının* $(2+5,\ 4+3$ *ve* $6+1)$*;* q^9 *teriminin katsayısı olan* 2*,* 9 *sayısının bu özellikte olan iki parçalanışının* $(4+5$ *ve* $6+3)$ *ve* q^{11} *teriminin katsayısı olan* 1*,* 11 *sayısının bu özellikte olan bir parçalanışının* $(6+5)$ *olduğunu ifade eder.*

Örnek 2.6. $S=\{1,2,3\}$ *kümesinin farklı elemanları ile elde edilen tüm parçalanışlar ele alınsın. Bu parçalanışlar,*

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 3+1 & 3+2 & 3+2+1 \\ & & 2+1 & & & \end{array}$$

olmak üzere yedi tanedir ve

$$(1+q)\left(1+q^2\right)\left(1+q^3\right)=1+q+q^2+2q^3+q^4+q^5+q^6$$

çarpımında katsayılar olarak belirlenir.

Genel olarak, n *sayısının* $S=\{n_1,n_2,\ldots,n_r\}$ *kümesinin farklı elemanları ile elde edilen parçalanışlarının sayısı* $p_{F,S}(n)$ *ise*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{F,S}(n)\,q^n=\prod_{k=1}^{r}\left(1+q^{n_k}\right)=\prod_{n\in S}\left(1+q^n\right)$$

olur.

Daha genel olarak, bir pozitif n *tam sayısının farklı tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı* $p_F(n)$ *ise*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_F(n)\,q^n=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+q^k\right)=(-q;q)_\infty=(1+q)\left(1+q^2\right)\left(1+q^3\right)\cdots$$

olur.

Teorem 2.7. *(Euler Parçalanış Özdeşliği) Bir pozitif* n *tam sayısının farklı tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı, tek tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısına eşittir (Euler 1748).*

Kanıt (Andrews ve Eriksson 2004) n sayısının farklı tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $p_F(n)$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_F(n)\,q^n=(-q;q)_\infty=(1+q)\left(1+q^2\right)\left(1+q^3\right)\cdots$$

olur. n sayısının tek tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $p_T(n)$ ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_T(n)\, q^n = \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ tek}}}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots} = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_F(n)\, q^n &= (-q;q)_\infty = (1+q)\left(1+q^2\right)\left(1+q^3\right)\cdots \\
&= \frac{1-q^2}{1-q}\frac{1-q^4}{1-q^2}\frac{1-q^6}{1-q^3}\frac{1-q^8}{1-q^4}\frac{1-q^{10}}{1-q^5}\cdots \\
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q)_\infty} = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots} \\
&= \frac{1}{(q;q^2)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} p_T(n)\, q^n
\end{aligned}$$

bulunur. q^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

Kanıttan da görülebileceği gibi Euler Parçalanış Özdeşliği

$$(-q;q)_\infty = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}$$

olarak ifade edilebilir.

Euler Parçalanış Özdeşliğinin kanıtında kullanılan temel çarpma işlemleri, benzer sonuçların elde edilmesinde kullanılabilir.

Örnek 2.8. *n pozitif tam sayısının 12 modülünde 2, 5 veya 11 sayılarına kongrüent olan pozitif tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $A(n)$ ve n sayısının 6 modülünde 2, 4 veya 5 sayılarına kongrüent olan farklı tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $B(n)$ olsun. Bu durumda, $A(n) = B(n)$ olur. Gerçekten, tanım gereği,*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B(n)\, q^n &= \left(-q^2;q^6\right)_\infty \left(-q^4;q^6\right)_\infty \left(-q^5;q^6\right)_\infty \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1+q^{2+6k}\right)\left(1+q^{4+6k}\right)\left(1+q^{5+6k}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1-q^{4+12k}}{1-q^{2+6k}}\frac{1-q^{8+12k}}{1-q^{4+6k}}\frac{1-q^{10+12k}}{1-q^{5+6k}} \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1-q^{4+12k}\right)\left(1-q^{8+12k}\right)\left(1-q^{10+12k}\right)
\end{aligned}$$

$$\times \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2+6k}\right)\left(1-q^{4+6k}\right)\left(1-q^{5+6k}\right)}$$

elde edilir. İkinci çarpımda $k = 2m, 2m+1$ *yazılırsa*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B(n) q^n &= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1-q^{4+12k}\right)\left(1-q^{8+12k}\right)\left(1-q^{10+12k}\right) \\
&\quad \times \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2+12m}\right)\left(1-q^{4+12m}\right)\left(1-q^{5+12m}\right)} \\
&\quad \times \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{8+12m}\right)\left(1-q^{10+12m}\right)\left(1-q^{11+12m}\right)} \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1-q^{4+12k}\right)}{\left(1-q^{2+12k}\right)\left(1-q^{4+12k}\right)} \\
&\quad \times \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1-q^{8+12k}\right)}{\left(1-q^{5+12k}\right)\left(1-q^{8+12k}\right)} \\
&\quad \times \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1-q^{10+12k}\right)}{\left(1-q^{10+12k}\right)\left(1-q^{11+12k}\right)} \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2+12k}\right)\left(1-q^{5+12k}\right)\left(1-q^{11+12k}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) q^n
\end{aligned}$$

bulunur. q^n *terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen elde edilir.*

Örnek 2.9. $S = \{1, 2\}$ *kümesindeki elemanların en fazla üç defa göründüğü parçalardan oluşan tüm parçalanışlar ele alınsın. Bu parçalanışlar,*

$(n=1)$	$(n=2)$	$(n=3)$	$(n=4)$
1	2	$2+1$	$2+2$
	$1+1$	$1+1+1$	$2+1+1$

$(n=5)$	$(n=6)$	$(n=7)$
$2+2+1$	$2+2+2$	$2+2+2+1$
$2+1+1+1$	$2+2+1+1$	$2+2+1+1+1$

$(n=8)$	$(n=9)$
$2+2+2+1+1$	$2+2+2+1+1+1$

olarak listelenebilir. Parçalanışların sayısı

$$\begin{aligned}&\left(1+q+q^2+q^3\right)\left(1+q^2+q^4+q^6\right)\\&\qquad=\left(1+q^1+q^{1+1}+q^{1+1+1}\right)\left(1+q^2+q^{2+2}+q^{2+2+2}\right)\\&\qquad=1+q+2q^2+2q^3+2q^4+2q^5+2q^6+2q^7+q^8+q^9\end{aligned}$$

polinomlar çarpımındaki katsayılar ile belirlenir.

Genel olarak, $S=\{n_1,n_2,\ldots,n_r\}$ kümesindeki elemanların en fazla d defa göründüğü parçalardan oluşan parçalanışlarının sayısı $A(n)$ ise

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}A(n)\,q^n &= \prod_{k=1}^{r}\left(1+q^{n_k}+q^{n_k+n_k}+\cdots+q^{\overbrace{n_k+\cdots+n_k}^{d\text{-tane}}}\right)\\&=\prod_{k=1}^{r}\left(1+q^{n_k}+q^{2n_k}+\cdots+q^{dn_k}\right)\\&=\prod_{k=1}^{r}\frac{1-q^{(d+1)n_k}}{1-q^{n_k}}=\prod_{n\in S}\frac{1-q^{(d+1)n}}{1-q^n}\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.10. *n pozitif tam sayısının 3 sayısı ile bölünmeyen tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $A(n)$ olsun. n sayısının en fazla iki defa tekrar eden tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $B(n)$ olsun. Bu durumda, $A(n)=B(n)$ olur. Gerçekten, $A(n)$ ile $B(n)$ fonksiyonlarının tanımı gereği*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}A(n)\,q^n &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^7)(1-q^8)\cdots}\\&=\frac{(q^3;q^3)_\infty}{(q;q)_\infty}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^{3k}}{1-q^k}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{2}q^{kj}\right)\\&=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+q^k+q^{2k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}B(n)\,q^n\end{aligned}$$

elde edilir.

Son örnek şu şekilde genişletilebilir (Berndt 2006): $k\geq 2$ bir tam sayı olsun. Pozitif n tam sayısının k sayısı ile bölünmeyen tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı, n sayısının en fazla $k-1$ defa tekrar eden tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısına eşittir.

Son örnekteki düşünce ile kanıtlanabilen bu sonuçta $k = 3$ alınırsa son örnek, $k = 2$ alınırsa Euler Parçalanış Özdeşliği elde edilir.

Örnek 2.11. *n pozitif tam sayısının her biri tam olarak 2, 3 veya 5 defa görünen tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $A(n)$ ve n sayısının 12 modülünde $\mp 2, \mp 3$ veya 6 sayılarına kongrüent olan tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $B(n)$ olsun. Bu durumda, $A(n) = B(n)$ olur. Gerçekten, $A(n)$ fonksiyonunun tanımı gereği*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} A(n) q^n &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+q^{2k}+q^{3k}+q^{5k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+q^{2k}\right)\left(1+q^{3k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+q^{2k}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+q^{3k}\right) = \left(-q^2;q^2\right)_\infty \left(-q^3;q^3\right)_\infty\end{aligned}$$

elde edilir. Euler Parçalanış Özdeşliği gereği $(-q;q)_\infty = \dfrac{1}{(q;q^2)_\infty}$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(n) q^n = \left(-q^2;q^2\right)_\infty \left(-q^3;q^3\right)_\infty = \frac{1}{(q^2;q^4)_\infty} \frac{1}{(q^3;q^6)_\infty}$$

bulunur.

$$\frac{1}{(q^2;q^4)_\infty} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2+4k}}$$

olduğundan $k = 3m, 3m+1, 3m+2$ için

$$\frac{1}{(q^2;q^4)_\infty} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2+12m}\right)\left(1-q^{6+12m}\right)\left(1-q^{10+12m}\right)}$$

ve

$$\frac{1}{(q^3;q^6)_\infty} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^{3+6k}}$$

olduğundan $k = 2m, 2m+1$ için

$$\frac{1}{(q^3;q^6)_\infty} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{3+12m}\right)\left(1-q^{9+12m}\right)}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} A(n) q^n &= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{2+12m}\right)\left(1-q^{6+12m}\right)\left(1-q^{10+12m}\right)} \\ &\quad \times \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-q^{3+12m}\right)\left(1-q^{9+12m}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B(n) q^n\end{aligned}$$

bulunur. q^n terimlerinin katsayılarının karşılaştırılması istenilen sonucu verir.

2.3. Ramanujan τ-Fonksiyonu

Tanım 2.12. *(Ramanujan τ-fonksiyonu) $n \geq 1$ için $\tau(n)$ katsayıları*

$$q\,(q;q)_\infty^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, q^n, \quad |q| < 1$$

olarak tanımlansın. $\tau(n)$ katsayılarına Ramanujan τ-fonksiyonu denir (Ramanujan 1916).

$\tau(n)$ fonksiyonunun ilk bir kaç değeri

$$\begin{array}{ll} \tau(1) = 1, & \tau(6) = -6048, \\ \tau(2) = -24, & \tau(7) = -16744, \\ \tau(3) = 252, & \tau(8) = 84480, \\ \tau(4) = -1472, & \tau(9) = -113643, \\ \tau(5) = 4830, & \tau(10) = -115920. \end{array}$$

şeklindedir. Tablodan da gözlemlenebileceği gibi $|\tau(n)|$ değerleri çok hızlı büyümektedir. Her $n > 0$ için $\tau(n) \neq 0$ ifadesi bir açık problemdir. Tanımı doğal görünmemesine rağmen $\tau(n)$ fonksiyonu sayılar teorisindeki en önemli aritmetik fonksiyonlardan biridir ve bir çok konuda, örneğin modüler formlar teorisinde ortaya çıkmaktadır.

2.4. Kareler ve Üçgen Sayılar Toplamları

Tanım 2.13. *(Kareler toplamı) n ile k pozitif tam sayılar olmak üzere $r_k(n)$ ile n sayısının k tane tam sayının karelerinin toplamı olarak yazılabilme sayısı gösterilir. Farklı sıra ve işaretli olan yazılışlar farklı sayılır ve $r_k(0) = 1$ kabul edilir.*

Örneğin,

$$2 = 1^2 + 1^2 = (-1)^2 + 1^2 = 1^2 + (-1)^2 = (-1)^2 + (-1)^2$$

olduğundan $r_2(2) = 4$ ve

$$9 = 3^2 + 0^2 = 0^2 + 3^2 = (-3)^2 + 0^2 = 0^2 + (-3)^2$$

olduğundan $r_2(9) = 4$ olur. 7 sayısı iki karenin toplamı olarak yazılamadığından $r_2(7) = 0$ olur.

Genel olarak,

$$\begin{aligned} r_2(p) &= 0, \quad p \text{ asal}, p = 4k+3, \\ r_2(p) &\neq 0, \quad p \text{ asal}, p = 4k+1, \\ r_4(n) &\neq 0, \quad \text{Lagrange Dört Kare Teoremi} \end{aligned}$$

yazılabilir.

Tanım 2.14. *(Üçgen sayılar toplamı) $n \geq 0$ tam sayısı için*

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

sayısına bir üçgen sayı denir. n ile k pozitif tam sayılar olmak üzere $t_k(n)$ ile n sayısının k tane üçgen sayının toplamı olarak yazılabilme sayısı gösterilir. Farklı sırada olan yazılışlar farklı sayılır ve $t_k(0) = 1$ kabul edilir.

İlk bir kaç üçgen sayı

$$0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$7 = 1 + 6 = 6 + 1 \Rightarrow t_2(7) = 2$$

ve

$$16 = 1 + 15 = 15 + 1 = 6 + 10 = 10 + 6 \Rightarrow t_2(16) = 4$$

olur.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, q-serileri ve teta fonksiyonları tanıtılarak sağladığı özellikler ile temel teoremler ifade edilecektir.

3.1. q-Serileri ve Teta Fonksiyonları

Genel olarak bir q-serisi, $(a;q)_n$ q-çarpımlarının toplamıdır. $(a;q)_n$ çarpımlarını içermeyen fakat q-serileri ile doğrudan bağlantılı olan toplamlar teta fonksiyonlarıdır.

Tanım 3.1. *(Ramanujan genel teta fonksiyonu) Ramanujan tarafından tanımlanmış olan genel teta fonksiyonu, $f(a,b)$ ile gösterilir ve*

$$f(a,b)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad |ab|<1$$

olarak tanımlanır (Berndt 1991).

$f(a,b)$ fonksiyonunun, Ramanujan'ın kullandığı gösterimler ile üç özel durumu

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= f(q,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \\
\psi(q) &= f\left(q,q^3\right)=\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}, \\
f(-q) &= f\left(-q,-q^2\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Sağ taraftaki seri ifadelerini elde etmek zor değildir. Gerçekten,

$$\varphi(q)=f(q,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2+n+n^2-n}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2},$$

$$\begin{aligned}
\psi(q) &= f\left(q,q^3\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{3n(n-1)}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{4n^2-2n}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{-2n(-2n-1)}{2}}+1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}}+1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{2n(2n+1)}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{2n(2n+1)}{2}} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ tek}}}^{\infty} q^{\frac{k(k+1)}{2}}+\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ çift}}}^{\infty} q^{\frac{k(k+1)}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k+1)}{2}}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(-q) &= f\left(-q,-q^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{n(n-1)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n^2} q^{\frac{n^2+n+2n^2-2n}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\varphi(q)$, $\psi(q)$ ve $f(-q)$ teta fonksiyonları, kareler, üçgen sayılar ve beşgen sayılar toplamları problemleri ile ilgilidir. Gerçekten, örneğin,

$$\varphi^2(q) = \sum_{n_1=0}^{\infty} q^{n_1^2} \sum_{n_2=0}^{\infty} q^{n_2^2} = \sum_{n_1,n_2} q^{n_1^2+n_2^2}$$

olduğundan sol tarafın bir seri açılımdaki q^n terimi ile sağ taraftaki $q^{n_1^2+n_2^2}$ teriminin karşılaştırılması, $n = n_1^2+n_2^2$ olmak üzere q^n teriminin katsayısının iki kare toplamı şeklinde yazılabilme sayısı olduğunu ifade eder. Genel olarak,

$$\varphi^k(q) = \sum_{n=0}^{\infty} r_k(n)\, q^n,$$

n sayısının k tane karenin toplamı şeklinde yazılabilme sayısının üreteç fonksiyonudur. Benzer şekilde,

$$\psi^k(q) = \sum_{n=0}^{\infty} t_k(n)\, q^n,$$

n sayısının k tane üçgen sayının toplamı şeklinde yazılabilme sayısının üreteç fonksiyonudur. Diğer taraftan, $f(-q)$ fonksiyonunun seri ifadesindeki

$$\frac{n(3n-1)}{2}$$

kuvveti, $n \geq 0$ tam sayısı için bir beşgen sayı olarak adlandırılır. İlk birkaç beşgen sayı

$$0, 1, 5, 12, 22, 40, 51, 70, 92, \ldots$$

olarak listelenebilir. $n \geq 0$ tam sayısı için

$$\frac{n(3n \mp 1)}{2}$$

sayılarına genelleştirilmiş beşgen sayılar denir.

Önteorem 3.2. *$f\left(a,b\right)$ genel teta fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.*

(1) $f\left(a,b\right)=f\left(b,a\right)$ olur.

(2) $f\left(1,a\right)=2f\left(a,a^{3}\right)$ olur.

(3) $f\left(-1,a\right)=0$ olur.

(4) Herhangi bir n tam sayısı için $f\left(a,b\right)=a^{\frac{n(n+1)}{2}}b^{\frac{n(n-1)}{2}}f\left(a\left(ab\right)^{n},b\left(ab\right)^{-n}\right)$ olur.

Kanıt

(1) $f\left(a,b\right)$ fonksiyonunun tanımında n yerine $-n$ yazılırsa

$$\begin{aligned} f\left(a,b\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}b^{\frac{n(n-1)}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{-n(-n+1)}{2}}b^{\frac{-n(-n-1)}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}}b^{\frac{n(n+1)}{2}}=f\left(b,a\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2) $f\left(a,b\right)$ fonksiyonunun tanımında a yerine 1 ve b yerine a yazılırsa

$$\begin{aligned} f\left(1,a\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{\frac{n(n-1)}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}}=2+\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}+\sum_{n=2}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= 2+\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}=2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) \\ &= 2\left(1+\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ çift}}}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}+\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ tek}}}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) \\ &= 2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{2n(2n+1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(2n-1)2n}{2}}\right) \\ &= 2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n^{2}-n+3n^{2}+3n}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n^{2}+n+3n^{2}-3n}{2}}\right) \\ &= 2\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(a^{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(a^{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right) \\ &= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(a^{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}=2f\left(a,a^{3}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

(3) $f(a,b)$ fonksiyonunun tanımında a yerine -1 ve b yerine a yazılırsa

$$\begin{aligned}
f(-1,a) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^{\frac{n(n-1)}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{\frac{n(n+1)}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= 1 - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^{\frac{n(n-1)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} a^{\frac{n(n+1)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \left((-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \left((-1)^{\frac{n^2+3n+2}{2}} + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \left((-1)^{\frac{n^2-n}{2}+\frac{4n+2}{2}} + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \left((-1)^{2n+1} + 1 \right) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4) $f(a,b)$ fonksiyonunun

$$f(a,b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{\frac{k(k+1)}{2}} b^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

tanımında k yerine $k+n$ yazılırsa

$$f(a,b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{\frac{(k+n)(k+n+1)}{2}} b^{\frac{(k+n)(k+n-1)}{2}}$$

elde edilir. a parametresinin kuvveti olan

$$\frac{(k+n)(k+n+1)}{2}$$

ele alınsın.

$$\frac{(k+n)(k+n+1)}{2} = \frac{k(k+n) + n(k+n) + (k+n)}{2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k^2+kn+kn+n^2+k+n+nk^2-nk^2}{2} \\
&= \frac{n^2+n+nk^2+nk+k^2+k-nk^2+nk}{2} \\
&= \frac{n(n+1)+(n+1)(k^2+k)-n(k^2-k)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\frac{k(k+1)}{2}-n\frac{k(k-1)}{2}
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer şekilde, b parametresinin kuvveti olan

$$\frac{(k+n)(k+n-1)}{2}$$

ele alınırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{(k+n)(k+n-1)}{2} &= \frac{k(k+n)+n(k+n)-(k+n)}{2} \\
&= \frac{k^2+kn+kn+n^2-k-n+nk^2-nk^2}{2} \\
&= \frac{n^2-n+nk^2+nk+k^2-k-nk^2+nk}{2} \\
&= \frac{n^2-n+n(k^2+k)+(1-n)(k^2-k)}{2} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}+(1-n)\frac{k(k-1)}{2}+n\frac{k(k+1)}{2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
f(a,b) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{\frac{(k+n)(k+n+1)}{2}} b^{\frac{(k+n)(k+n-1)}{2}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} a^{(n+1)\frac{k(k+1)}{2}} a^{-n\frac{k(k-1)}{2}} b^{n\frac{k(k+1)}{2}} b^{(1-n)\frac{k(k-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{\frac{k(k+1)}{2}} a^{n\frac{k(k+1)}{2}} b^{n\frac{k(k+1)}{2}} b^{\frac{k(k-1)}{2}} a^{-n\frac{k(k-1)}{2}} b^{-n\frac{k(k-1)}{2}} \\
&= a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(a(ab)^n\right)^{\frac{k(k+1)}{2}} \left(b(ab)^{-n}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} \\
&= a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} f\left(a(ab)^n, b(ab)^{-n}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. □

3.2. q-Binom Teoremi

q-serileri için en temel sonuçlardan birisi q-binom teoremidir.

Teorem 3.3. *(q-binom teoremi) $|q| < 1$ ve $|z| < 1$ için*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(q)_n} z^n = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}$$

olur (Cauchy 1893).

Kanıt (Andrews 1976) Sağ taraftaki çarpım $|z| < 1$ bölgesinin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak olduğundan $|z| < 1$ bölgesinde bir analitik fonksiyon temsil eder. Bu yüzden,

$$F(z) = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad |z| < 1$$

yazılabilir. Bu tanım gereği $F(0) = 1$ olur.

$$\begin{aligned} F(qz) &= \frac{(azq)_\infty}{(zq)_\infty} = \frac{(1-azq)(1-azq^2)(1-azq^3)\cdots}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)\cdots} \\ &= \frac{(1-az)(1-azq)(1-azq^2)(1-azq^3)\cdots}{(1-z)(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)\cdots} \frac{1-z}{1-az} \\ &= \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty} \frac{1-z}{1-az} = F(z) \frac{1-z}{1-az} \end{aligned}$$

olduğundan

$$(1-z) F(z) = (1-az) F(qz)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} &(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = (1-az) \sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n z^n \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a A_n q^n z^{n+1} \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a A_{n-1} q^{n-1} z^n \end{aligned}$$

bulunur. $n \geq 1$ için z^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$A_n - A_{n-1} = A_n q^n - a A_{n-1} q^{n-1}$$

veya denk olarak

$$A_n = \frac{1-aq^{n-1}}{1-q^n} A_{n-1}, \quad n \geqslant 1$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1-a}{1-q}A_0 \\ A_2 &= \tfrac{1-aq}{1-q^2}A_1 \\ A_3 &= \tfrac{1-aq^2}{1-q^3}A_2 \qquad \Rightarrow A_n = \frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}A_0 \\ &\vdots \\ A_n &= \tfrac{1-aq^{n-1}}{1-q^n}A_{n-1} \end{aligned}$$

ve $F(0)=1$ için $A_0=1$ olduğundan

$$A_n = \frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \frac{(a)_n}{(q)_n}$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar. □

Teorem 3.3'ün q-binom teoremi olarak adlandırılmasının nedeni $q\to 1$ limit durumunda analizden bilinen binom teoreminin elde edilmesidir. a bir pozitif tam sayı olmak üzere Teorem 3.3'de a yerine q^a yazılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 1}\frac{(q^a)_n}{(q)_n} &= \lim_{q\to 1}\frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})\cdots(1-q^{a+n-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} \\ &= \lim_{q\to 1}\frac{-aq^{a-1}}{-1}\lim_{q\to 1}\frac{-(a+1)q^a}{-2q}\cdots\lim_{q\to 1}\frac{-(a+n-1)q^{a+n-2}}{-nq^{n-1}} \\ &= \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 1}\frac{(zq^a)_\infty}{(z)_\infty} &= \lim_{q\to 1}\frac{(1-zq^a)(1-zq^{a+1})(1-zq^{a+2})\cdots}{(1-z)(1-zq)\cdots(1-zq^{a-1})(1-zq^a)(1-zq^{a+1})\cdots} \\ &= \lim_{q\to 1}\frac{1}{(1-z)(1-zq)\cdots(1-zq^{a-1})} = \frac{1}{(1-z)^a} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^a)_n}{(q)_n}z^n = \frac{(zq^a)_\infty}{(z)_\infty}$$

eşitliğinde formal olarak $q\to 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!}z^n = \frac{1}{(1-z)^a}$$

elde edilir. Son eşitlik analizden bilinen genelleştirilmiş binom teoremidir.

Sonuç 3.4. *(Euler 1748)* $|q| < 1$ *için*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q)_n} = \frac{1}{(z)_\infty}, \quad |z| < 1$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} (-z)^n}{(q)_n} = (z)_\infty, \quad |z| < \infty$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt İlk eşitlik q-binom teoreminde $a = 0$ alınarak elde edilir. İkinci ifade için q-binom teoreminde z yerine $\frac{z}{a}$ yazılsın. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(q)_n} \frac{z^n}{a^n} = \frac{(z)_\infty}{\left(\frac{z}{a}\right)_\infty}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{(a)_n}{a^n} &= \frac{1}{a^n} (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right) \cdots \left(1-aq^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{a^n} a^n \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{a} - q\right)\left(\frac{1}{a} - q^2\right) \cdots \left(\frac{1}{a} - q^{n-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{a} - q\right)\left(\frac{1}{a} - q^2\right) \cdots \left(\frac{1}{a} - q^{n-1}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{(z)_\infty}{\left(\frac{z}{a}\right)_\infty} = \frac{(1-z)(1-zq)\left(1-zq^2\right)\cdots}{\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(1-\frac{z}{a}q\right)\left(1-\frac{z}{a}q^2\right)\cdots}$$

olduğundan $a \to \infty$ için

$$\frac{(a)_n}{a^n} \to (-1)(-q)\left(-q^2\right)\cdots\left(-q^{n-1}\right) = (-1)^n q^{1+2+\cdots+(n-1)} = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

ve

$$\frac{(z)_\infty}{\left(\frac{z}{a}\right)_\infty} \to (z)_\infty$$

bulunur. □

Sonuç 3.4'ün kanıtında

$$\lim_{a\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(q)_n} \frac{z^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{a\to\infty} \frac{(a)_n}{(q)_n} \frac{z^n}{a^n}$$

işlemi yapılmış, ancak bu işlemin mümkün olup olmadığı incelenmemiştir. q-serileri teorisinde toplam sembolü altında limit almanın her zaman mümkün olduğu varsayılır. Burada, bu işlemin doğru olduğu gösterilecektir.

$|q| \le M < 1$ olan bir M sayısı seçilsin ve $\varepsilon > 0$ sayısı, $0 < 2\varepsilon < 1 - M$ olacak şekilde verilsin. $\left|\frac{1}{a}\right| \le \varepsilon$ olmak üzere N_0 sayısı

$$\left|\frac{1}{a}\right| + M^k \ge 2\varepsilon, \quad 0 \le k < N_0 \quad \text{ve} \quad \left|\frac{1}{a}\right| + M^{N_0} < 2\varepsilon$$

özelliğinde olan tek türlü belirli pozitif tam sayı olsun. Bu durumda, $\left|\frac{1}{a}\right| \le \varepsilon$ ve $n \ge N_0$ için

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(a)_n}{(q)_n}\frac{z^n}{a^n}\right| &= \left|\frac{\frac{1}{a^n}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - aq^k\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - q^{k+1}\right)}\right| = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1}{a} - q^k\right|}{\prod_{k=0}^{n-1}\left|1 - q^{k+1}\right|} \\
&\le \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\left|\frac{1}{a}\right| + M^k\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}|1 - M|} \le \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\left|\frac{1}{a}\right| + M^k\right)}{(1 - M)^n} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{N_0-1}\left(\left|\frac{1}{a}\right| + M^k\right)\prod_{k=N_0}^{n-1}\left(\left|\frac{1}{a}\right| + M^k\right)}{(1 - M)^n} \\
&\le \frac{\prod_{k=0}^{N_0-1}(1 + \varepsilon)\prod_{k=N_0}^{n-1}2\varepsilon}{(1 - M)^n} = \frac{(1 + \varepsilon)^{N_0}(2\varepsilon)^{n-N_0}}{(1 - M)^n} \\
&= \left(\frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon}\right)^{N_0}\left(\frac{2\varepsilon}{1 - M}\right)^n
\end{aligned}$$

elde edilir. $2\varepsilon < 1 - M$ olduğundan

$$\sum_{n=N_0}^{\infty}\left(\frac{2\varepsilon}{1 - M}\right)^n < \infty$$

olur. Dolayısıyla, Weierstrass M-testi gereği

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(q)_n}\frac{z^n}{a^n}$$

serisi $\left|\frac{1}{a}\right| \leqslant \varepsilon$ için düzgün yakınsaktır. Bu yüzden, toplam sembolü altında $a \to \infty$ limiti alınabilir.

3.3. Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği

Binom teoreminin q-benzeri, q-serileri teorisinde en temel sonuçlardan biridir. Aşağıdaki teorem ile verilen Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği, teta fonksiyonları teorisinde önemli ve kullanışlı sonuçtur.

Teorem 3.5. *(Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği) $z \neq 0$ ve $|q| < 1$ için*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \left(-zq;q^2\right)_\infty \left(-\frac{q}{z};q^2\right)_\infty \left(q^2;q^2\right)_\infty$$

olur (Jacobi 1829).

Kanıt (Andrews 1965) Sonuç 3.4 ile verilen

$$(z)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} (-z)^n}{(q)_n}$$

eşitliğinde q yerine q^2 ve z yerine $-zq$ yazılırsa

$$\left(-zq;q^2\right)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)} z^n q^n}{(q^2;q^2)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} &= \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})} \\
&= \frac{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\cdots} \\
&= \frac{(q^{2n+2};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\left(-zq;q^2\right)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n} = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{n^2} \left(q^{2n+2};q^2\right)_\infty$$

bulunur. $n < 0$ için $(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})(1-q^{2n+6})\cdots$ çarpımı sıfır olacağından $n < 0$ için $\left(q^{2n+2};q^2\right)_\infty = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$\left(-zq;q^2\right)_\infty = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{n^2} \left(q^{2n+2};q^2\right)_\infty = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} \left(q^{2n+2};q^2\right)_\infty$$

elde edilir.

Şimdi, Sonuç 3.4 ile verilen

$$(z)_\infty = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{r(r-1)}{2}} (-z)^r}{(q)_r}$$

eşitliğinde q yerine q^2 ve z yerine q^{2n+2} yazılırsa

$$\left(q^{2n+2};q^2\right)_\infty = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{q^{r(r-1)} (-1)^r q^{2nr+2r}}{(q^2;q^2)_r}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\left(-zq;q^2\right)_\infty &= \frac{1}{\left(q^2;q^2\right)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{q^{r(r-1)}\left(-1\right)^r q^{2nr+2r}}{\left(q^2;q^2\right)_r}\\
&= \frac{1}{\left(q^2;q^2\right)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^r q^{r^2+2nr+n^2}q^r z^n}{\left(q^2;q^2\right)_r}\\
&= \frac{1}{\left(q^2;q^2\right)_\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^r q^r z^{-r}}{\left(q^2;q^2\right)_r}\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{n+r}q^{(n+r)^2}\\
&= \frac{1}{\left(q^2;q^2\right)_\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{q}{z}\right)^r}{\left(q^2;q^2\right)_r}\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 3.4'de elde edilen

$$\frac{1}{(z)_\infty}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^r}{(q)_r}$$

ifadesinde z yerine $-\frac{q}{z}$ ve q yerine q^2 alınırsa $\left|\frac{q}{z}\right|<1$ için

$$\frac{1}{\left(-\frac{q}{z};q^2\right)_\infty}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{q}{z}\right)^r}{\left(q^2;q^2\right)_r}$$

bulunur. Dolayısıyla, $\left|\frac{q}{z}\right|<1$ için

$$\left(-zq;q^2\right)_\infty=\frac{1}{\left(q^2;q^2\right)_\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{q}{z}\right)^r}{\left(q^2;q^2\right)_r}\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2}=\frac{1}{\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(-\frac{q}{z};q^2\right)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2}$$

veya denk olarak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2}=\left(-zq;q^2\right)_\infty\left(-\frac{q}{z};q^2\right)_\infty\left(q^2;q^2\right)_\infty$$

elde edilir. Analitik devam ile bu sonuç tüm $z\neq 0$ için sağlanır. □

Sonuç 3.6. *Ramanujan teta fonksiyonu gösterimi ile Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği*

$$f\left(a,b\right)=\left(-a;ab\right)_\infty\left(-b;ab\right)_\infty\left(ab;ab\right)_\infty$$

şeklindedir.

Kanıt Ramanujan teta fonksiyonunun tanımı gereği

$$f\left(a,b\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}b^{\frac{n(n-1)}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n^2}{2}}b^{\frac{n^2}{2}}a^{\frac{n}{2}}b^{-\frac{n}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(ab)^{\frac{1}{2}}\right]^{n^2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^n$$

olduğundan Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinde q yerine $(ab)^{\frac{1}{2}}$ ve z yerine $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(ab)^{\frac{1}{2}}\right]^{n^2} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{n} \\ &= \left(-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}(ab)^{\frac{1}{2}}; ab\right)_\infty \left(-\frac{(ab)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}; ab\right)_\infty (ab;ab)_\infty \\ &= (-a;ab)_\infty (-b;ab)_\infty (ab;ab)_\infty \end{aligned}$$

elde edilir. □

Bu sonuç kullanılarak Ramanujan tarafından tanımlanan $\varphi(q)$, $\psi(q)$ ve $f(-q)$ fonksiyonları için çarpım gösterimleri elde edilir.

Sonuç 3.7. *Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*
(1) $\varphi(q) = (-q;q^2)_\infty^2 (q^2;q^2)_\infty$.
(2) $\psi(q) = \dfrac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}$.
(3) $f(-q) = (q;q)_\infty$.

Kanıt

(1) $\varphi(q) = f(q,q)$ olduğundan Sonuç 3.6'da $a = b = q$ alınırsa

$$\varphi(q) = f(q,q) = \left(-q;q^2\right)_\infty \left(-q;q^2\right)_\infty \left(q^2;q^2\right)_\infty = \left(-q;q^2\right)_\infty^2 \left(q^2;q^2\right)_\infty$$

elde edilir.

(2) $\psi(q) = f(q,q^3)$ olduğundan Sonuç 3.6'da $a = q$, $b = q^3$ alınırsa

$$\psi(q) = f\left(q,q^3\right) = \left(-q;q^4\right)_\infty \left(-q^3;q^4\right)_\infty \left(q^4;q^4\right)_\infty$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \left(-q;q^4\right)_\infty \left(-q^3;q^4\right)_\infty &= (1+q)\left(1+q^5\right)\left(1+q^9\right)\cdots \\ &\quad \times \left(1+q^3\right)\left(1+q^7\right)\left(1+q^{11}\right)\cdots \\ &= (1+q)\left(1+q^3\right)\left(1+q^5\right)\left(1+q^7\right)\left(1+q^9\right)\left(1+q^{11}\right)\cdots \\ &= \left(-q;q^2\right)_\infty \end{aligned}$$

ve

$$\left(q^4;q^4\right)_\infty = \left(1-q^4\right)\left(1-q^8\right)\left(1-q^{12}\right)\cdots$$

$$\begin{aligned} &= \left(1-q^2\right)\left(1-q^4\right)\left(1-q^6\right)\cdots\left(1+q^2\right)\left(1+q^4\right)\left(1+q^6\right)\cdots \\ &= \left(q^2;q^2\right)_\infty\left(-q^2;q^2\right)_\infty \end{aligned}$$

olduğundan

$$\psi(q)=\left(-q;q^2\right)_\infty\left(-q^2;q^2\right)_\infty\left(q^2;q^2\right)_\infty$$

bulunur. Şimdi,

$$\begin{aligned} \left(-q;q^2\right)_\infty\left(-q^2;q^2\right)_\infty &= (1+q)\left(1+q^3\right)\left(1+q^5\right)\cdots\left(1+q^2\right)\left(1+q^4\right)\left(1+q^6\right)\cdots \\ &= (-q;q)_\infty \end{aligned}$$

ve Euler Parçalanış Özdeşliği gereği $(-q;q)_\infty=\frac{1}{(q;q^2)_\infty}$ olduğundan

$$\psi(q)=\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}$$

elde edilir.

(3) $f(-q)=f(-q,-q^2)$ olduğundan Sonuç 3.6'da $a=-q$, $b=-q^2$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(-q) &= \left(q;q^3\right)_\infty\left(q^2;q^3\right)_\infty\left(q^3;q^3\right)_\infty \\ &= (1-q)\left(1-q^4\right)\left(1-q^7\right)\cdots\left(1-q^2\right)\left(1-q^5\right)\left(1-q^8\right)\cdots \\ &\quad\times\left(1-q^3\right)\left(1-q^6\right)\left(1-q^9\right)\cdots \\ &= (q;q)_\infty \end{aligned}$$

elde edilir. □

Ramanujan, $\varphi(q)$, $\psi(q)$ ve $f(-q)$ fonksiyonlarından farklı olarak

$$\chi(q)=\left(-q;q^2\right)_\infty$$

fonksiyonunu da tanımlamıştır. $\chi(q)$ fonksiyonu bir teta fonksiyonu olmamasına rağmen teta fonksiyonları ile yakından ilişkilidir.

Teorem 3.8. *Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

(1) $\dfrac{f(q)}{f(-q)}=\dfrac{\psi(q)}{\psi(-q)}=\dfrac{\chi(q)}{\chi(-q)}=\sqrt{\dfrac{\varphi(q)}{\varphi(-q)}}.$

(2) $\chi(q)=\dfrac{f(q)}{f(-q^2)}=\dfrac{\varphi(q)}{f(q)}=\dfrac{f(-q^2)}{\psi(-q)}.$

(3) $\varphi^2(-q^2)=\varphi(q)\varphi(-q).$

(4) $\chi(q)\chi(-q)=\chi(-q^2).$

(5) $f^3(-q^2)=\varphi^2(-q^2)\psi(q^2)=\varphi(-q)\psi^2(q).$

Kanıt Teoremin kanıtında Sonuç 3.7 ile verilen

$$\varphi(q) = \left(-q;q^2\right)_\infty^2 \left(q^2;q^2\right)_\infty, \quad \psi(q) = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}, \quad f(-q) = (q;q)_\infty$$

bağıntıları kullanılacaktır.

(1) Tanımlardan

$$\begin{aligned}\frac{f(q)}{f(-q)} &= \frac{(-q;-q)_\infty}{(q;q)_\infty} = \frac{(1-(-q))\left(1-(-q)^2\right)\left(1-(-q)^3\right)\left(1-(-q)^4\right)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots} \\ &= \frac{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots} = \frac{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots} \\ &= \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty} = \frac{\chi(q)}{\chi(-q)},\end{aligned}$$

$$\frac{f(q)}{f(-q)} = \frac{\chi(q)}{\chi(-q)} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty} = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}\frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}\frac{1}{\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(-q;q^2)_\infty}} = \frac{\psi(q)}{\psi(-q)}$$

ve

$$\left(\frac{f(q)}{f(-q)}\right)^2 = \left(\frac{\chi(q)}{\chi(-q)}\right)^2 = \frac{(-q;q^2)_\infty^2}{(q;q^2)_\infty^2} = \frac{(-q;q^2)_\infty^2(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty^2(q^2;q^2)_\infty} = \frac{\varphi(q)}{\varphi(-q)}$$

elde edilir.

(2) Tanımlardan,

$$\begin{aligned}\frac{f(q)}{f(-q^2)} &= \frac{(-q;-q)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} = \frac{(1-(-q))\left(1-(-q)^2\right)\left(1-(-q)^3\right)\left(1-(-q)^4\right)\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\cdots} \\ &= \frac{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\cdots} \\ &= (1+q)\left(1+q^3\right)\left(1+q^5\right)\cdots = \left(-q;q^2\right)_\infty = \chi(q),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(q)}{f(q)} &= \frac{(-q;q^2)_\infty^2(q^2;q^2)_\infty}{(-q;-q)_\infty} \\ &= \frac{(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\cdots(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)\cdots} \\ &= (1+q)\left(1+q^3\right)\left(1+q^5\right)\cdots = \left(-q;q^2\right)_\infty = \chi(q),\end{aligned}$$

ve

$$\frac{f(-q^2)}{\psi(-q)} = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(-q;q^2)_\infty}} = \left(-q;q^2\right)_\infty = \chi(q)$$

elde edilir.

(3) Tanımdan,

$$\begin{aligned}
\varphi^2\left(-q^2\right) &= \left(q^2;q^4\right)_\infty^4\left(q^4;q^4\right)_\infty^2=\left(q^2;q^4\right)_\infty^4\left(1-q^4\right)^2\left(1-q^8\right)^2\left(1-q^{12}\right)^2\cdots\\
&= \left(q^2;q^4\right)_\infty^4\left(1-q^2\right)^2\left(1-q^4\right)^2\left(1-q^6\right)^2\cdots\\
&\quad\times\left(1+q^2\right)^2\left(1+q^4\right)^2\left(1+q^6\right)^2\cdots\\
&= \left(q^2;q^4\right)_\infty^4\left(q^2;q^2\right)_\infty^2\left(-q^2;q^2\right)_\infty^2\\
&= \left(q^2;q^4\right)_\infty^4\frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty^2}{\left(q^2;q^4\right)_\infty^2}=\left(q^2;q^4\right)_\infty^2\left(q^2;q^2\right)_\infty^2\\
&= \left(q^2;q^2\right)_\infty^2\left(1-q^2\right)^2\left(1-q^6\right)^2\left(1-q^{10}\right)^2\cdots\\
&= \left(q^2;q^2\right)_\infty(1-q)^2\left(1-q^3\right)^2\left(1-q^5\right)^2\cdots\\
&\quad\times\left(q^2;q^2\right)_\infty(1+q)^2\left(1+q^3\right)^2\left(1+q^5\right)^2\cdots\\
&= \left(q;q^2\right)_\infty^2\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(-q;q^2\right)_\infty^2\left(q^2;q^2\right)_\infty=\varphi(-q)\,\varphi(q)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4) Tanımdan,

$$\begin{aligned}
\chi\left(-q^2\right) &= \left(q^2;q^4\right)_\infty=\left(1-q^2\right)\left(1-q^6\right)\left(1-q^{10}\right)\cdots\\
&= (1-q)\left(1-q^3\right)\left(1-q^5\right)\cdots(1+q)\left(1+q^3\right)\left(1+q^5\right)\cdots\\
&= \left(q;q^2\right)_\infty\left(-q;q^2\right)_\infty=\chi(q)\,\chi(-q)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(5) Tanımlardan,

$$\begin{aligned}
f^3\left(-q^2\right) &= \left(q^2;q^2\right)_\infty^3=\left(1-q^2\right)^3\left(1-q^4\right)^3\left(1-q^6\right)^3\cdots\\
&= \frac{\left(1-q^2\right)^4\left(1-q^6\right)^4\cdots\left(1-q^4\right)^2\left(1-q^8\right)^2\cdots\left(1-q^4\right)\left(1-q^8\right)\cdots}{\left(1-q^2\right)\left(1-q^6\right)\cdots}\\
&= \left(q^2;q^4\right)_\infty^4\left(q^4;q^4\right)_\infty^2\frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty}{\left(q^2;q^4\right)_\infty}=\varphi^2\left(-q^2\right)\psi\left(q^2\right)
\end{aligned}$$

ve

$$f^3\left(-q^2\right)=\left(q^2;q^2\right)_\infty^3=\left(q;q^2\right)_\infty^2\left(q^2;q^2\right)_\infty\frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty^2}{\left(q;q^2\right)_\infty^2}=\varphi(-q)\,\psi^2(q)$$

elde edilir. □

3.4. Euler Beşgen Sayı Teoremi

Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinin diğer bir sonucu da

$$f(-q) = f\left(-q, -q^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

ile $f(-q) = (q;q)_\infty$ ifadelerinin birleştirilmesi ile elde edilen Euler Beşgen Sayı Teoremidir.

Teorem 3.9. *(Euler Beşgen Sayı Teoremi) $|q| < 1$ için*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}} = (q;q)_\infty$$

eşitliği geçerlidir (Euler 1748).

Euler Beşgen Sayı Teoremi kullanılarak $p(n)$ parçalanış fonksiyonu için bir indirgeme bağıntısı elde edilebilir.

Sonuç 3.10. *k bir tam sayı olmak üzere $w_k = \frac{k(3k-1)}{2}$ ise*

$$p(n) = \sum_{w_k=1}^{n} (-1)^{k+1} p(n - w_k)$$

eşitliği geçerlidir (Berndt 2006).

Kanıt $p(n)$ için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(m) q^m = \frac{1}{(q;q)_\infty}$$

olduğundan Euler Beşgen Sayı Teoremi gereği

$$\begin{aligned} 1 &= (q;q)_\infty \sum_{m=0}^{\infty} p(m) q^m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} p(m) q^m \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^k p(m) q^{m+\frac{k(3k-1)}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. $m + \frac{k(3k-1)}{2} = n$ olsun. Bu durumda, $0 \leq m \leq n$ olur ve

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=\frac{k(3k-1)}{2}}^{\infty} (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) q^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{\frac{k(3k-1)}{2}=0 \\ -\infty<k<\infty}}^{n} (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) q^n$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafında $n \geq 1$ için q^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{w_k=0}^{n} (-1)^k p(n-w_k) = p(n) + \sum_{w_k=1}^{n} (-1)^k p(n-w_k) \\ \Rightarrow \quad p(n) &= -\sum_{w_k=1}^{n} (-1)^k p(n-w_k) = \sum_{w_k=1}^{n} (-1)^{k+1} p(n-w_k) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 3.11. *$p(0) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$ ve $p(6) = 11$ eşitlikleri ile $p(8)$, $p(9)$, $p(10)$, $p(11)$ ve $p(12)$ değerleri hesaplanacaktır.*

$m < 0$ için $p(m) = 0$ kabulü ile

$$\begin{aligned} k &= 1 \Rightarrow w_k = 1, \quad k = -1 \Rightarrow w_k = 2, \\ k &= 2 \Rightarrow w_k = 5, \quad k = -2 \Rightarrow w_k = 7, \\ k &= 3 \Rightarrow w_k = 12, \quad k = -3 \Rightarrow w_k = 15, \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} p(7) &= \sum_{w_k=1}^{7} (-1)^{k+1} p(7-w_k) \\ &= p(7-w_1) + p(7-w_{-1}) - p(7-w_2) - p(7-w_{-2}) \\ &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) = 11 + 7 - 2 - 1 = 15 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} p(8) &= p(7) + p(6) - p(3) - p(1) = 15 + 11 - 3 - 1 = 22, \\ p(9) &= p(8) + p(7) - p(4) - p(2) = 22 + 15 - 5 - 2 = 30, \\ p(10) &= p(9) + p(8) - p(5) - p(3) = 30 + 22 - 7 - 3 = 42, \\ p(11) &= p(10) + p(9) - p(6) - p(4) = 42 + 30 - 11 - 5 = 56, \\ p(12) &= p(11) + p(10) - p(7) - p(5) + p(0) = 56 + 42 - 15 - 7 + 1 = 77 \end{aligned}$$

elde edilir.

$p(n)$ parçalanış fonksiyonu için Euler tarafından verilen farklı bir indirgeme bağıntısı da vardır.

Teorem 3.12. $n \geq 1$ *tam sayısı için*

$$np(n) = \sum_{k=0}^{n-1} p(k)\,\sigma(n-k)$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\sigma(m)$, m tam sayısının pozitif bölenlerinin toplamıdır (Euler 1748).

Kanıt (Berndt 2006) Euler Özdeşliği olan

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\,q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots}$$

eşitliğinin her iki tarafının logaritması alındıktan sonra q değişkenine göre türev alınırsa

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} np(n)\,q^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\,q^n} = \frac{1}{1-q} + \frac{2q}{1-q^2} + \frac{3q^2}{1-q^3} + \frac{4q^3}{1-q^4} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{m-1}}{1-q^m}$$

veya denk olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} np(n)\,q^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\,q^n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{m-1}}{1-q^m}\right)$$

elde edilir. Sol taraf

$$\sum_{n=0}^{\infty} np(n)\,q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} np(n)\,q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,p(n+1)\,q^n$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{m-1}}{1-q^m} &= \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} \sum_{r=0}^{\infty} q^{rm} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} \sum_{r=1}^{\infty} q^{(r-1)m} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} mq^{rm-1}\end{aligned}$$

elde edilir. $n = rm$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} mq^{rm-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(m=)\frac{n}{r}=1}^{\infty} \frac{n}{r} q^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n} dq^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)\,q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n+1)\,q^n\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,p\,(n+1)\,q^{n} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}p\,(n)\,q^{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sigma\,(n+1)\,q^{n}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p\,(k)\,\sigma\,(n+1-k)\right)q^{n}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte q^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$(n+1)\,p\,(n+1)=\sum_{k=0}^{n}p\,(k)\,\sigma\,(n+1-k)$$

veya denk olarak $n>1$ için

$$np\,(n)=\sum_{k=0}^{n-1}p\,(k)\,\sigma\,(n-k)$$

elde edilir. □

Euler Beşgen Sayı Teoreminin aşağıdaki sonuç ile verilen bir kombinatorik yorumu vardır.

Sonuç 3.13. *(Euler Beşgen Sayı Teoreminin kombinatorik yorumu) n sayısının çift sayıda farklı pozitif tam sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $F_{Ç}(n)$ ve tek sayıda farklı pozitif sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $F_T(n)$ ise*

$$F_{Ç}(n)-F_T(n)=\begin{cases}(-1)^k, & n=\frac{k(3k\mp1)}{2}\ \textit{ise,}\\ 0, & \textit{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

olur.

Kanıt (Berndt 2006) $(q;q)_\infty=(1-q)\left(1-q^2\right)\left(1-q^3\right)\cdots$ çarpımındaki terimler çarpıldığında q kuvvetlerinin işareti, çift sayıda terim çarpıldığında pozitif ve tek sayıda terim çarpıldığında negatif olur. Dolayısıyla, bir n tam sayısının çift sayıda farklı sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $+$ ve tek sayıda farklı sayılardan oluşan parçalanışlarının sayısı $-$ ile ağırlıklıdır. Euler Beşgen Sayı Teoremi gereği

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\{F_{Ç}(n)-F_T(n)\}\,q^n=(q;q)_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,q^{\frac{n(3n-1)}{2}}=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,q^{\frac{n(3n\mp1)}{2}}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında q^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen bulunur. □

Örnek 3.14. $5 = \frac{2(3 \cdot 2 - 1)}{2}$, *yani* $k = 2$ *olduğundan* $F_{Ç}(5) - F_T(5) = 1$ *olur. Gerçekten,* 5 *sayısının farklı tam sayılardan oluşan parçalanışları* $5,\ 4+1,\ 3+2$ *şeklindedir ve* $F_{Ç}(5) = 2$ *(*$4{+}1$ *ile* $3{+}2$*),* $F_T(5) = 1$ *(*5*) olur. Diğer taraftan,* 6 *sayısı bir genelleştirilmiş beşgen sayı olmadığından* $F_{Ç}(6) - F_T(6) = 0$ *olur. Gerçekten,* 6 *sayısının farklı tam sayılardan oluşan parçalanışları* $6,\ 5+1,\ 4+2,\ 3+2+1$ *şeklindedir ve* $F_{Ç}(6) = 2$ *(*$5+1$ *ile* $4+2$*),* $F_T(6) = 2$ *(*6 *ile* $3+2+1$*) olur.*

3.5. Jacobi Özdeşliği

Şimdi, temel bir sonuç olan Jacobi Özdeşliği verilecektir.

Teorem 3.15. *(Jacobi Özdeşliği)* $|q| < 1$ *için*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)\, q^{\frac{n(n+1)}{2}} = (q;q)_\infty^3$$

eşitliği geçerlidir (Jacobi 1829).

Kanıt (Berndt 2006) Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği olan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \left(-zq;q^2\right)_\infty \left(-\frac{q}{z};q^2\right)_\infty \left(q^2;q^2\right)_\infty$$

eşitliğinde z yerine $z^2 q$ yazılırsa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{2n} q^{n^2+n} = \left(-z^2q^2;q^2\right)_\infty \left(-\frac{1}{z^2};q^2\right)_\infty \left(q^2;q^2\right)_\infty$$

elde edilir.

$$\left(-\frac{1}{z^2};q^2\right)_\infty = \left(1+\frac{1}{z^2}\right)\left(1+\frac{q^2}{z^2}\right)\left(1+\frac{q^4}{z^2}\right)\cdots = \left(1+\frac{1}{z^2}\right)\left(-\frac{q^2}{z^2};q^2\right)_\infty$$

olduğundan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{2n} q^{n^2+n} = \frac{z^2+1}{z^2}\left(-z^2q^2;q^2\right)_\infty \left(-\frac{q^2}{z^2};q^2\right)_\infty \left(q^2;q^2\right)_\infty$$

veya denk olarak

$$\frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} z^{2n+1} q^{n^2+n}}{z+\frac{1}{z}} = \left(-z^2q^2;q^2\right)_\infty \left(-\frac{q^2}{z^2};q^2\right)_\infty \left(q^2;q^2\right)_\infty$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n} &= \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n q^{n^2+n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2-n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} q^{(n+1)^2-(n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n}\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n}=0\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} z^{2n+1}q^{n^2+n}}{z+\frac{1}{z}}=\frac{\mathrm{i}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n}}{\mathrm{i}-\mathrm{i}}$$

limiti $\frac{0}{0}$ belirsizliğine sahiptir. Dolayısıyla,

$$\lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} z^{2n+1}q^{n^2+n}}{z+\frac{1}{z}}=\lim_{z\to \mathrm{i}}\left(-z^2q^2;q^2\right)_\infty\left(-\frac{q^2}{z^2};q^2\right)_\infty\left(q^2;q^2\right)_\infty$$

limiti L'Hospital kuralı uygulandığında

$$\lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(2n+1)\,z^{2n}q^{n^2+n}}{1-\frac{1}{z^2}}=\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(q^2;q^2\right)_\infty=\left(q^2;q^2\right)_\infty^3$$

veya denk olarak

$$\left(q^2;q^2\right)_\infty^3=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,q^{n^2+n}$$

haline gelir.

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,q^{n^2+n} &= \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(2n+1)\,q^{n^2+n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,q^{n^2+n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-2n+1)\,q^{n^2-n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,q^{n^2+n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(-2(n+1)+1)\,q^{(n+1)^2-(n+1)}\\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,q^{n^2+n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(-2n-1)\,q^{n^2+n}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{n^2+n} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{n^2+n}
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\left(q^2;q^2\right)_\infty^3=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{n^2+n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{n^2+n}$$

bulunur. q^2 yerine q yazılırsa istenilen elde edilir. □

3.6. Ramanujan Toplam Formülü

q-serileri teorisinde geniş bir kullanım alanına sahip olan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(q)_n}z^n=\frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}$$

q-binom teoreminin iki yönlü toplama sahip olan benzeri Ramanujan ${}_1\psi_1$ Toplam Formülüdür. Bu bölümde iki kanıtı ele alınacak olan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n=\frac{(az)_\infty\left(\frac{q}{az}\right)_\infty(q)_\infty\left(\frac{b}{a}\right)_\infty}{(z)_\infty\left(\frac{b}{az}\right)_\infty(b)_\infty\left(\frac{q}{a}\right)_\infty}$$

Ramanujan ${}_1\psi_1$ Toplam Formülünde sol tarafta yer alan seri, payında ve paydasında tam olarak bir tane q-çarpımı içerir. ${}_1\psi_1$ gösteriminin solundaki 1 sayısı payda bir tane q-çarpımı ve sağındaki 1 sayısı paydada bir tane q-çarpımı olduğunu ifade eder.

Ramanujan ${}_1\psi_1$ Toplam Formülünün kanıtından önce $(a;q)_n$ çarpımı, tüm n tam sayılarına genişletilecektir.

$$
\begin{aligned}
(a;q)_n &= (1-a)(1-aq)\left(1-aq^2\right)\cdots\left(1-aq^{n-2}\right)\left(1-aq^{n-1}\right) \\
&= \left(1-aq^{n-1}\right)(a;q)^{n-1}
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$(a;q)_{n-1}=\frac{(a;q)_n}{1-aq^{n-1}}$$

yazılabilir. Buradan,

$$n = 0\Rightarrow(a;q)_{-1}=\frac{(a;q)_0}{1-aq^{-1}}=\frac{1}{1-\frac{a}{q}},$$

$$\begin{aligned}
n &= -1 \Rightarrow (a;q)_{-2} = \frac{(a;q)_{-1}}{1-aq^{-2}} = \frac{1}{\left(1-\frac{a}{q}\right)\left(1-\frac{a}{q^2}\right)}, \\
n &= -2 \Rightarrow (a;q)_{-3} = \frac{(a;q)_{-2}}{1-aq^{-3}} = \frac{1}{\left(1-\frac{a}{q}\right)\left(1-\frac{a}{q^2}\right)\left(1-\frac{a}{q^3}\right)}, \\
& \vdots
\end{aligned}$$

ve genel olarak

$$(a;q)_{-n} = \frac{1}{\left(1-\frac{a}{q}\right)\left(1-\frac{a}{q^2}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{q^n}\right)}$$

elde edilir. Diğer bir ifade ile

$$\begin{aligned}
(a;q)_{-n} &= \frac{1}{\left(1-\frac{a}{q}\right)\left(1-\frac{a}{q^2}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{q^n}\right)} \\
&= \frac{1}{(1-aq^{-n})(1-aq^{-n+1})\cdots(1-aq^{-2})(1-aq^{-1})} \\
&= \frac{(1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots}{(1-aq^{-n})\cdots(1-aq^{-2})(1-aq^{-1})(1-a)(1-aq)\cdots} \\
&= \frac{(a;q)_\infty}{\left(\frac{a}{q^n};q\right)_\infty}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, herhangi bir n tam sayısı için

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$$

elde edilir.

Teorem 3.16. *(Ramanujan ${}_1\psi_1$ Toplam Formülü)* $\left|\frac{b}{a}\right| < |z| < 1$ *ve* $|q| < 1$ *için*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n = \frac{(az)_\infty \left(\frac{q}{az}\right)_\infty (q)_\infty \left(\frac{b}{a}\right)_\infty}{(z)_\infty \left(\frac{b}{az}\right)_\infty (b)_\infty \left(\frac{q}{a}\right)_\infty}$$

eşitliği geçerlidir (Adiga, Berndt, Bhargava, Watson 1985).

Kanıt

1. Yol (Adiga, Berndt, Bhargava, Watson 1985) $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = \frac{(az)_\infty \left(\frac{q}{az}\right)_\infty}{(z)_\infty \left(\frac{b}{az}\right)_\infty}$$

olarak tanımlansın. $\left|\frac{b}{a}\right| < |z| < 1$ halka bölgede $f(z)$ analitik olduğundan bu halka bölgede

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

şeklinde bir Laurent açılımına sahiptir.

$$
\begin{aligned}
f(qz) &= \frac{(azq)_\infty \left(\frac{1}{az}\right)_\infty}{(zq)_\infty \left(\frac{b}{azq}\right)_\infty} \\
&= \frac{(1-azq)(1-azq^2)(1-azq^3)\cdots\left(1-\frac{1}{az}\right)\left(1-\frac{q}{az}\right)\left(1-\frac{q^2}{az}\right)\cdots}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)\cdots\left(1-\frac{b}{azq}\right)\left(1-\frac{b}{az}\right)\left(1-\frac{bq}{az}\right)\cdots} \\
&= \frac{(az)_\infty \left(\frac{q}{az}\right)_\infty (1-z)\left(1-\frac{1}{az}\right)}{(z)_\infty \left(\frac{b}{az}\right)_\infty (1-az)\left(1-\frac{b}{azq}\right)} \\
&= \frac{(az)_\infty \left(\frac{q}{az}\right)_\infty}{(z)_\infty \left(\frac{b}{az}\right)_\infty} \frac{(1-z)(az-1)azq}{az(1-az)(azq-b)} = \frac{q(1-z)}{b-azq} f(z)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$(b-azq) f(qz) = q(1-z) f(z)$$

elde edilir. $f(qz)$ fonksiyonunun Laurent açılımı $\left|\frac{b}{aq}\right| < |z| < \frac{1}{|q|}$ halka bölgede geçerli olduğundan $f(z)$ ile $f(qz)$ fonksiyonlarının Laurent açılımları karşılık gelen halka bölgelerin kesişiminde, yani $\left|\frac{b}{aq}\right| < |z| < 1$ bölgesinde geçerlidir. Dolayısıyla, $|q| > \left|\frac{b}{a}\right|$ varsayılacaktır. Bu varsayım analitik devam ile kaldırılabilir. O halde, $\left|\frac{b}{aq}\right| < |z| < 1$ için

$$
\begin{aligned}
&(b-azq) f(qz) = q(1-z) f(z) \\
&\quad\Rightarrow (b-azq) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n q^n z^n = q(1-z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \\
&\quad\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} bq^{n-1} c_n z^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} aq^n c_n z^{n+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1} \\
&\quad\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(bq^{n-1} c_n - aq^{n-1} c_{n-1}\right) z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n - c_{n-1}) z^n \\
&\quad\Rightarrow bq^{n-1} c_n - aq^{n-1} c_{n-1} = c_n - c_{n-1} \\
&\quad\Rightarrow c_n = \frac{1-aq^{n-1}}{1-bq^{n-1}} c_{n-1}
\end{aligned}
$$

bulunur. $n > 0$ ise

$$
\left.
\begin{aligned}
c_1 &= \tfrac{1-a}{1-b} c_0 \\
c_2 &= \tfrac{1-aq}{1-bq} c_1 \\
c_3 &= \tfrac{1-aq^2}{1-bq^2} c_2 \\
&\vdots \\
c_n &= \tfrac{1-aq^{n-1}}{1-bq^{n-1}} c_{n-1}
\end{aligned}
\right.
\quad \Rightarrow c_n = \frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})}{(1-b)(1-bq)\cdots(1-bq^{n-1})} c_0
$$

olduğundan

$$c_n = \frac{(a)_n}{(b)_n} c_0$$

elde edilir. $n \leq 0$ ise

$$c_n = \frac{1 - aq^{n-1}}{1 - bq^{n-1}} c_{n-1} \Rightarrow c_{n-1} = \frac{1 - bq^{n-1}}{1 - aq^{n-1}} c_n$$

$$\left.\begin{array}{r} c_{-1} = \frac{1-bq^{-1}}{1-aq^{-1}} c_0 \\ c_{-2} = \frac{1-bq^{-2}}{1-aq^{-2}} c_{-1} \\ c_{-3} = \frac{1-bq^{-3}}{1-aq^{-3}} c_{-2} \\ \vdots \\ c_{-n} = \frac{1-bq^{-n}}{1-aq^{-n}} c_{-n+1} \end{array}\right. \Rightarrow c_{-n} = \frac{(1-bq^{-1})(1-bq^{-2})\cdots(1-bq^{-n})}{(1-aq^{-1})(1-aq^{-2})\cdots(1-aq^{-n})} c_0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{(1-bq^{-n})(1-bq^{-n+1})\cdots(1-bq^{-1})}{(1-aq^{-n})(1-aq^{-n+1})\cdots(1-aq^{-1})} c_0 \\ &= \frac{(1-bq^{-n})(1-bq^{-n+1})\cdots(1-bq^{-1})(1-b)(1-bq)\cdots}{(1-aq^{-n})(1-aq^{-n})\cdots(1-aq^{-1})(1-a)\,1-aq\cdots} c_0 \\ &= \frac{(bq^{-n})_\infty (a)_\infty}{(aq^{-n})_\infty (b)_\infty} = \frac{(a)_{-n}}{(b)_{-n}} c_0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, $n > 0$ ve $n \leq 0$ için

$$c_n = \frac{(a)_n}{(b)_n} c_0$$

elde edilir. Buradan,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = c_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n$$

bulunur. c_0 değeri hesaplanırsa teoremin kanıtı tamamlanır.

$$f(z) = c_0 \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n + c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n = c_0 \left[g(z) + h(z)\right]$$

olsun.

$$f(z) = \frac{(az)_\infty \left(\frac{q}{az}\right)_\infty}{(z)_\infty \left(\frac{b}{az}\right)_\infty}$$

eşitliğinden

$$\lim_{z \to 1} (1-z) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{(1-z)(1-az)(1-azq)\cdots\left(1-\frac{q}{az}\right)\left(1-\frac{q^2}{az}\right)\cdots}{(1-z)(1-zq)\cdots\left(1-\frac{b}{az}\right)\left(1-\frac{bq}{az}\right)\cdots}$$

$$= \quad \frac{(1-a)(1-aq)\cdots\left(1-\frac{q}{a}\right)\left(1-\frac{q^2}{a}\right)\cdots}{(1-q)(1-q^2)\cdots\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{bq}{a}\right)\cdots} = \frac{(a)_\infty\left(\frac{q}{a}\right)_\infty}{(q)_\infty\left(\frac{b}{a}\right)_\infty} \neq 0$$

olduğundan $z = 1$ noktası $f(z)$ fonksiyonunun bir basit kutbudur.

$$g(z) = c_0 \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n$$

fonksiyonu $z = \infty$ komşuluğunda $|z| > \left|\frac{b}{a}\right|$ için yakınsak olan bir kuvvet serisi olduğundan $z = 1$ noktasında $g(z)$ fonksiyonu analitiktir. Bu yüzden, $G(z) = c_0(1-z)h(z)$ yazılırsa

$$\lim_{z\to 1}(1-z)f(z) = c_0 \lim_{z\to 1}(1-z)h(z) = \lim_{z\to 1} G(z)$$

elde edilir. $G(z)$ fonksiyonu $z = 0$ noktasının bir komşuluğunda yakınsak, $z = 1$ noktasındaki basit kutbu kaldırılabilir bir fonksiyon ve $f(z)$ ile $h(z)$ fonksiyonlarının $z = 1$ noktasından sonra gelen en büyük kutbu $\frac{1}{q}$ olduğundan (gerçekten

$$f(z) = \frac{(az)_\infty\left(\frac{q}{az}\right)_\infty}{(z)_\infty\left(\frac{b}{az}\right)_\infty} \Rightarrow f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\left(\frac{a}{q}\right)_\infty\left(\frac{q^2}{a}\right)_\infty}{\left(\frac{1}{q}\right)_\infty\left(\frac{bq}{a}\right)_\infty} = \frac{\left(\frac{a}{q}\right)_\infty\left(\frac{q^2}{a}\right)_\infty}{\left(\frac{bq}{a}\right)_\infty\left(1-\frac{1}{q}\right)(1-1)\cdots} = \infty$$

olur) $G(z)$ fonksiyonu $0 \leq |z| < \frac{1}{|q|}$ bölgesinde analitiktir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} G(z) &= c_0(1-z)h(z) = G(z) = c_0(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n \\ &= \lim_{N\to\infty} c_0(1-z)\sum_{n=0}^{N}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n = \lim_{N\to\infty} c_0 \sum_{n=0}^{N}\left\{\frac{(a)_n}{(b)_n} - \frac{(a)_{n-1}}{(b)_{n-1}}\right\}z^n \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\dfrac{(a)_{-1}}{(b)_{-1}} = 0$ kabulü ile

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 1} G(z) &= G(1) = \lim_{N\to\infty} c_0 \sum_{n=0}^{N}\left\{\frac{(a)_n}{(b)_n} - \frac{(a)_{n-1}}{(b)_{n-1}}\right\} \\ &= \lim_{N\to\infty} c_0 \left\{\frac{(a)_0}{(b)_0} - \frac{(a)_{-1}}{(b)_{-1}} + \frac{(a)_1}{(b)_1} - \frac{(a)_0}{(b)_0} + \cdots + \frac{(a)_N}{(b)_N} - \frac{(a)_{N-1}}{(b)_{N-1}}\right\} \\ &= \lim_{N\to\infty} c_0 \frac{(a)_N}{(b)_N} = c_0 \frac{(a)_\infty}{(b)_\infty} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\lim_{z\to 1}(1-z)f(z) = \lim_{z\to 1} G(z) = G(1) \Rightarrow \frac{(a)_\infty\left(\frac{q}{a}\right)_\infty}{(q)_\infty\left(\frac{b}{a}\right)_\infty} = c_0 \frac{(a)_\infty}{(b)_\infty} \Rightarrow c_0 = \frac{(b)_\infty\left(\frac{q}{a}\right)_\infty}{(q)_\infty\left(\frac{b}{a}\right)_\infty}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{(az)_\infty \left(\frac{q}{az}\right)_\infty}{(z)_\infty \left(\frac{b}{az}\right)_\infty} = f(z) = c_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n = \frac{(b)_\infty \left(\frac{q}{a}\right)_\infty}{(q)_\infty \left(\frac{b}{a}\right)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n$$

olduğundan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n = \frac{(az)_\infty \left(\frac{q}{az}\right)_\infty (q)_\infty \left(\frac{b}{a}\right)_\infty}{(z)_\infty \left(\frac{b}{az}\right)_\infty (b)_\infty \left(\frac{q}{a}\right)_\infty}$$

elde edilir.

2. Yol (Andrews ve Askey 1978) $F(b) = {}_1\psi_1(a, b; z, q)$ olsun.

$$\begin{aligned} F(b) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_{-n}}{(b)_{-n}} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\left(1-\frac{a}{q}\right)\left(1-\frac{a}{q^2}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{q^n}\right)}}{\frac{1}{\left(1-\frac{b}{q}\right)\left(1-\frac{b}{q^2}\right)\cdots\left(1-\frac{b}{q^n}\right)}} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{b}{q}\right)\left(1-\frac{b}{q^2}\right)\cdots\left(1-\frac{b}{q^n}\right)}{\left(1-\frac{a}{q}\right)\left(1-\frac{a}{q^2}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{q^n}\right)} z^{-n} \end{aligned}$$

olduğundan $F(b)$ fonksiyonu b değişkeninin $|b| < \min\{1, |az|\}$ için bir analitik fonksiyonudur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} {}_1\psi_1(a, b; z, q) - a\,{}_1\psi_1(a, b; qz, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n - a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} q^n z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n (1 - aq^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_{n+1}}{(b)_n} z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_{n+1} \left(1-\frac{b}{q}\right) z^{-1}}{(1-b)(1-bq)\cdots(1-bq^{n-1})\left(1-\frac{b}{q}\right)} z^{n+1} \\ &= z^{-1}\left(1-\frac{b}{q}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_{n+1}}{\left(\frac{b}{q}\right)_{n+1}} z^{n+1} \\ &= z^{-1}\left(1-\frac{b}{q}\right) {}_1\psi_1\left(a, \frac{b}{q}; z, q\right) \end{aligned}$$

eşitliğinde b yerine bq yazılırsa

$${}_1\psi_1(a, bq; z, q) - a\,{}_1\psi_1(a, bq; qz, q) = z^{-1}(1-b)\ {}_1\psi_1(a, b; z, q)$$

veya denk olarak

$$\begin{aligned}
F(bq) - z^{-1}(1-b)F(b) &= a_1\psi_1(a, bq; qz, q) = a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(bq)_n}q^n z^n \\
&= \frac{a}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n bq^n}{(bq)_n}z^n \\
&= -\frac{a}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n(1-bq^n-1)}{(bq)_n}z^n \\
&= -\frac{a}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n(1-bq^n)}{(bq)_n}z^n + \frac{a}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(bq)_n}z^n \\
&= \frac{a}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(bq)_n}z^n \\
&\quad -\frac{a}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n(1-b)}{(1-b)(1-bq)\cdots(1-bq^{n-1})}z^n \\
&= \frac{a}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(bq)_n}z^n - \frac{a}{b}(1-b)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n \\
&= \frac{a}{b}F(bq) - \frac{a}{b}(1-b)F(b)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\left(1-\frac{a}{b}\right)F(bq) = (1-b)\left(\frac{1}{z}-\frac{a}{b}\right)F(b)$$

veya denk olarak

$$F(b) = \frac{1-\frac{a}{b}}{(1-b)\frac{a}{b}\left(\frac{b}{az}-1\right)}F(bq) = \frac{1-\frac{b}{a}}{(1-b)\left(1-\frac{b}{az}\right)}F(bq)$$

elde edilir. Bu eşitlikten elde edilen

$$\begin{aligned}
F(b) &= \frac{1-\frac{b}{a}}{(1-b)\left(1-\frac{b}{az}\right)}F(bq) \\
F(bq) &= \frac{1-\frac{bq}{a}}{(1-bq)\left(1-\frac{bq}{az}\right)}F\left(bq^2\right) \\
F\left(bq^2\right) &= \frac{1-\frac{bq^2}{a}}{(1-bq^2)\left(1-\frac{bq^2}{az}\right)}F\left(bq^3\right) \\
&\vdots \\
F\left(bq^{n-1}\right) &= \frac{1-\frac{bq^{n-1}}{a}}{(1-bq^{n-1})\left(1-\frac{bq^{n-1}}{az}\right)}F(bq^n)
\end{aligned}$$

bağıntıları taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned} F(b) &= \frac{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{bq}{a}\right)\cdots\left(1-\frac{bq^{n-1}}{a}\right)}{(1-b)(1-bq)\cdots(1-bq^{n-1})\left(1-\frac{b}{az}\right)\left(1-\frac{bq}{az}\right)\cdots\left(1-\frac{bq^{n-1}}{az}\right)}F(bq^n) \\ &= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)_n}{(b)_n\left(\frac{b}{az}\right)_n}F(bq^n) \end{aligned}$$

bulunur. $F(b)$ fonksiyonu, 0 noktasının $|b| < |az|$ ile verilen komşuluğunda analitik olduğundan bu eşitlikte $n \to \infty$ limitine geçilirse

$$F(b) = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)_\infty}{(b)_\infty\left(\frac{b}{az}\right)_\infty}F(0)$$

elde edilir. Şimdi,

$$F(b) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{b}{q}\right)\left(1-\frac{b}{q^2}\right)\cdots\left(1-\frac{b}{q^n}\right)}{\left(1-\frac{a}{q}\right)\left(1-\frac{a}{q^2}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{q^n}\right)}z^{-n}$$

eşitliğinde $b = q$ yazılırsa ikinci seri sıfır olacağından q-binom teoremi gereği

$$F(b) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}$$

bulunur. O halde,

$$F(b) = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)_\infty}{(b)_\infty\left(\frac{b}{az}\right)_\infty}F(0)$$

ifadesinde $b = q$ alınırsa

$$\frac{(az)_\infty}{(z)_\infty} = F(q) = \frac{\left(\frac{q}{a}\right)_\infty}{(q)_\infty\left(\frac{q}{az}\right)_\infty}F(0)$$

veya denk olarak

$$F(0) = \frac{(q)_\infty\left(\frac{q}{az}\right)_\infty(az)_\infty}{\left(\frac{q}{a}\right)_\infty(z)_\infty}$$

elde edilir. $F(0)$ için bulunan bu değer

$$F(b) = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)_\infty}{(b)_\infty\left(\frac{b}{az}\right)_\infty}F(0)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{(q)_\infty\left(\frac{q}{az}\right)_\infty(az)_\infty\left(\frac{b}{a}\right)_\infty}{\left(\frac{q}{a}\right)_\infty(z)_\infty(b)_\infty\left(\frac{b}{az}\right)_\infty} = F(b) = {}_1\psi_1(a,b;z,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}z^n$$

Ramanujan ${}_1\psi_1$ Toplama Formülü elde edilir. $\square$

Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği, Ramanujan ${}_1\psi_1$ Toplama Formülünün bir özel halidir. Gerçekten, Teorem 3.16'da a yerine $\frac{1}{\alpha}$ ve z yerine $z\alpha$ yazılırsa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)_n}{(b)_n}\alpha^n z^n=\frac{(z)_\infty\left(\frac{q}{z}\right)_\infty(q)_\infty(b\alpha)_\infty}{(z\alpha)_\infty\left(\frac{b}{z}\right)_\infty(b)_\infty(q\alpha)_\infty}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\alpha}\right)_n\alpha^n &= \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{q}{\alpha}\right)\left(1-\frac{q^2}{\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{q^{n-1}}{\alpha}\right)\\ &= (\alpha-1)(\alpha-q)\left(\alpha-q^2\right)\cdots\left(\alpha-q^{n-1}\right)\end{aligned}$$

ve $(0)_n=(0)_\infty=1$ olduğundan $\alpha=b=0$ için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}z^n=(z)_\infty\left(\frac{q}{z}\right)_\infty(q)_\infty$$

elde edilir. q yerine q^2 yazılırsa

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(n-1)}z^n=\left(z;q^2\right)_\infty\left(\frac{q^2}{z};q^2\right)_\infty\left(q^2;q^2\right)_\infty\\ \Rightarrow\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}\left(-\frac{z}{q}\right)^n=\left(z;q^2\right)_\infty\left(\frac{q^2}{z};q^2\right)_\infty\left(q^2;q^2\right)_\infty\\ \Rightarrow\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}z^n=\left(-qz;q^2\right)_\infty\left(-\frac{q}{z};q^2\right)_\infty\left(q^2;q^2\right)_\infty\end{aligned}$$

Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği bulunur.

3.7. Beşli Çarpım Özdeşliği

Bu bölümde, diğer bir temel bağıntı olan Beşli Çarpım Özdeşliği ifade edilecektir.

Teorem 3.17. *(Beşli Çarpım Özdeşliği) $t\neq 0$ ve $|q|<1$ için*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{\frac{3n^2+n}{2}}\left(t^{3n}-t^{-3n-1}\right)=(q;q)_\infty(qt;q)_\infty\left(\frac{1}{t};q\right)_\infty\left(t^2q;q^2\right)_\infty\left(\frac{q}{t^2};q^2\right)_\infty$$

eşitliği geçerlidir (Watson 1929).

Kanıt (Carlitz ve Subbarao 1972) $t\neq 0$ için

$$A(q,t)=\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(q^2t;q^2\right)_\infty\left(\frac{1}{t};q^2\right)_\infty\left(q^4;q^4\right)_\infty\left(t^2q^2;q^4\right)_\infty\left(\frac{q^2}{t^2};q^4\right)_\infty$$

çarpımı ele alınsın.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n z^n q^{n^2}=\left(qz;q^2\right)_\infty\left(\frac{q}{z};q^2\right)_\infty\left(q^2;q^2\right)_\infty$$

Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği gereği

$$\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(q^2t;q^2\right)_\infty\left(\frac{1}{t};q^2\right)_\infty=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m (qt)^m q^{m^2}$$

ve

$$\left(q^4;q^4\right)_\infty\left(t^2q^2;q^4\right)_\infty\left(\frac{q^2}{t^2};q^4\right)_\infty=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k t^{2k}q^{2k^2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}A(q,t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m (qt)^m q^{m^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k t^{2k}q^{2k^2}\\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+k} q^{m^2+m+2k^2}t^{m+2k}\end{aligned}$$

bulunur. $m+2k=n$ yazılırsa $m+k=n-k$ ve

$$\begin{aligned}m^2+m+2k^2 &= m^2+4km+4k^2-4km-8k^2+4k^2+2k^2+m+2k-2k\\ &= (m+2k)^2-4k(m+2k)+4k^2+2k^2+m+2k-2k\\ &= n^2-4kn+4k^2+2k^2+n-2k\\ &= (n-2k)^2+2k^2+n-2k\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}A(q,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-k} q^{(n-2k)^2+2k^2+n-2k}t^n\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n t^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{(n-2k)^2+2k^2+n-2k}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n t^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{n^2+6k^2-4kn+n-2k}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n}t^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{6k^2-4kn-2k}\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, a bir tam sayı olmak üzere

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{6k^2+6k(2a+1)}$$

toplamı ele alınsın. k yerine $-k-2a-1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{6k^2+6k(2a+1)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+2a+1} q^{6(-k-2a-1)^2+6(-k-2a-1)(2a+1)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} q^{6\left(k^2+2k(2a+1)+(2a+1)^2\right)-6k(2a+1)-6(2a+1)^2} \\ &= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{6k^2+6k(2a+1)},\end{aligned}$$

yani

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{6k^2+6k(2a+1)} = 0$$

elde edilir.

Dolayısıyla,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{6k^2-4kn-2k}$$

toplamı, $-4n-2 \equiv 0 \pmod 6$, yani $2n+1 \equiv 0 \pmod 3$ ise sıfır olur. Buradan,

$$A(q,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} t^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{6k^2-4kn-2k}$$

ifadesinde $n \equiv 0 \pmod 3$ veya $n \equiv -1 \pmod 3$ olmalıdır.

$n \equiv 0 \pmod 3$ ise

$$A(q,t) = A_1(q,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{3n} q^{9n^2+3n} t^{3n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{6k^2-12kn-2k}$$

olur.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{6k^2-12kn-2k}$$

toplamında $m = k-n$ yazılırsa $k = m+n$ ve

$$\begin{aligned}6k^2-12kn-2k &= 6k^2-12kn+6n^2-6n^2-2k-2n+2n \\ &= 6(k-n)^2-2(k-n)-6n^2-2n \\ &= 6m^2-2m-6n^2-2n\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A_1(q,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{3n} q^{9n^2+3n} t^{3n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{6m^2-2m-6n^2-2n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n} t^{3n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{6m^2-2m} \end{aligned}$$

elde edilir.

$n \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ ise

$$A(q,t) = A_2(q,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{3n-1} q^{9n^2-3n} t^{3n-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{6k^2-12kn+2k}$$

olur.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{6k^2-12kn+2k}$$

toplamında $m = k - n$ yazılırsa $k = m + n$ ve

$$\begin{aligned} 6k^2 - 12kn + 2k &= 6k^2 - 12kn + 6n^2 - 6n^2 + 2k - 2n + 2n \\ &= 6(n-k)^2 - 2(n-k) - 6n^2 + 2n \\ &= 6m^2 - 2m - 6n^2 + 2n \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A_2(q,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{3n-1} q^{9n^2-3n} t^{3n-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-m} q^{6m^2-2m-6n^2+2n} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2-n} t^{3n-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{6m^2-2m} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n} t^{-3n-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{6m^2-2m} \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} A(q,t) &= A_1(q,t) + A_2(q,t) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{6m^2-2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n} \left(t^{3n} - t^{-3n-1}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Euler Beşgen Sayı Teoremi olan

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} = (q;q)_\infty$$

eşitliğinde q yerine q^4 yazılırsa

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{6m^2-2m} = \left(q^4; q^4\right)_\infty$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned}&\left(q^2;q^2\right)_\infty \left(q^2t;q^2\right)_\infty \left(\frac{1}{t};q^2\right)_\infty \left(q^4;q^4\right)_\infty \left(t^2q^2;q^4\right)_\infty \left(\frac{q^2}{t^2};q^4\right)_\infty \\ &\quad = A\left(q,t\right) = \left(q^4;q^4\right)_\infty \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(t^{3n}-t^{-3n-1}\right)\end{aligned}$$

veya her iki taraftan $\left(q^4;q^4\right)_\infty$ sadeleştirilirse

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(t^{3n}-t^{-3n-1}\right) = \left(q^2;q^2\right)_\infty \left(q^2t;q^2\right)_\infty \left(\frac{1}{t};q^2\right)_\infty \left(t^2q^2;q^4\right)_\infty \left(\frac{q^2}{t^2};q^4\right)_\infty$$

bulunur. Son eşitlikte q^2 yerine q yazılırsa Beşli Çarpım Özdeşliği kanıtlanmış olur. □

Beşli Çarpım Özdeşliği farklı şekillerde ifade edilebilir.

Teorem 3.18. *(Beşli Çarpım Özdeşliğinin denk ifadeleri) Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(1) $z \neq 0$ için

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(z^{3n}t^{3n}-z^{-3n-1}t^{-3n-1}\right) \\ &\quad = \left(q^2;q^2\right)_\infty \left(qz;q^2\right)_\infty \left(\frac{q}{z};q^2\right)_\infty \left(z^2;q^4\right)_\infty \left(\frac{q^4}{z^2};q^4\right)_\infty\end{aligned}$$

olur.

(2) $a \neq 0$ için

$$\begin{aligned}&(-aq;q)_\infty \left(-\frac{1}{a};q\right)_\infty (q;q)_\infty \left(a^2q;q^2\right)_\infty \left(\frac{a}{q^2};q^2\right)_\infty \\ &\quad = \frac{1}{a}\left(a^3q;q^3\right)_\infty \left(\frac{q^2}{a^3};q^3\right)_\infty \left(q^3;q^3\right)_\infty + \left(a^3q^2;q^3\right)_\infty \left(\frac{q}{a^3};q^3\right)_\infty \left(q^3;q^3\right)_\infty\end{aligned}$$

olur.

(3) $\frac{f\left(-x^2,-\lambda x\right)f\left(-\lambda x^3\right)}{f\left(-x,-\lambda x^2\right)} = f\left(-\lambda^2x^3,-\lambda x^6\right) + xf\left(-\lambda,-\lambda^2x^9\right)$ *olur.*

Kanıt

(1) Beşli Çarpım Özdeşliğinde q yerine q^2 ve t yerine $\frac{z}{q}$ yazılırsa istenilen elde edilir.

(2) Beşli Çarpım Özdeşliğinde t yerine $-a$ yazılırsa sağ taraf

$$(-aq;q)_\infty\left(-\frac{1}{a};q\right)_\infty(q;q)_\infty\left(a^2q;q^2\right)_\infty\left(\frac{a}{q^2};q^2\right)_\infty$$

haline gelir. Sol taraf ise

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} & q^{\frac{3n^2}{2}+\frac{n}{2}}\left((-1)^n a^{3n}-(-1)^{n+1}a^{-3n-1}\right)\\ &=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-a^3q^{\frac{1}{2}}\right)^n\left(q^{\frac{3}{2}}\right)^{n^2}+\frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-a^{-3}q^{\frac{1}{2}}\right)^n\left(q^{\frac{3}{2}}\right)^{n^2}\end{aligned}$$

olur. Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği gereği

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-a^3q^{\frac{1}{2}}\right)^n\left(q^{\frac{3}{2}}\right)^{n^2}=\left(a^3q^2;q^3\right)_\infty\left(\frac{q}{a^3};q^3\right)_\infty\left(q^3;q^3\right)_\infty$$

ve

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-a^{-3}q^{\frac{1}{2}}\right)^n\left(q^{\frac{3}{2}}\right)^{n^2}=\left(a^3q;q^3\right)_\infty\left(\frac{q^2}{a^3};q^3\right)_\infty\left(q^3;q^3\right)_\infty$$

olduğundan istenilen elde edilir.

(3) (2) ifadesinde $a=\frac{1}{x}$ ve $a^3=\frac{\lambda}{q}$ yazılırsa sağ taraf

$$\begin{aligned}x&\left(\lambda;\lambda^3x^9\right)_\infty\left(\lambda^2x^9;\lambda^3x^9\right)_\infty\left(\lambda^3x^9;\lambda^3x^9\right)_\infty\\ &+\left(\lambda^2x^3;\lambda^3x^9\right)_\infty\left(\lambda x^6;\lambda^3x^9\right)_\infty\left(\lambda^3x^9;\lambda^3x^9\right)_\infty\end{aligned}$$

olur. $f(a,b)=(-a;ab)_\infty(-b;ab)_\infty(ab;ab)_\infty$ Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinde ilk olarak $a=-\lambda$, $b=-\lambda^2x^9$ ve sonra $a=-\lambda^2x^3$, $b=-\lambda x^6$ yazılırsa yukarıdaki ifade

$$xf\left(-\lambda,-\lambda^2x^9\right)+f\left(-\lambda^2x^3,-\lambda x^6\right)$$

haline gelir.

Diğer taraftan, $a=\frac{1}{x}$ ve $a^3=\frac{\lambda}{q}$ için (2) ifadesinin sol tarafı

$$\left(-\lambda x^2;\lambda x^3\right)_\infty\left(-x;\lambda x^3\right)_\infty\left(\lambda x;\lambda^2x^6\right)_\infty\left(\lambda x^5;\lambda^2x^6\right)_\infty\left(\lambda x^3;\lambda x^3\right)_\infty$$

olur. $f(-q)=(q;q)_\infty$ eşitliğinde q yerine λx^3 yazılırsa $(\lambda x^3;\lambda x^3)_\infty=f(-\lambda x^3)$ elde edilir.

$$\begin{aligned}&\left(-\lambda x^2;\lambda x^3\right)_\infty\left(-x;\lambda x^3\right)_\infty\\ &\quad=\left(1+\lambda x^2\right)\left(1+\lambda^2x^5\right)\left(1+\lambda^3x^8\right)\cdots(1+x)\left(1+\lambda x^4\right)\left(1+\lambda x^7\right)\cdots\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(1-\lambda^2x^4\right)\left(1-\lambda^4x^{10}\right)\left(1-\lambda^6x^{16}\right)\cdots}{\left(1-\lambda x^2\right)\left(1-\lambda^2x^5\right)\left(1-\lambda^3x^8\right)\cdots} \times \frac{\left(1-x^2\right)\left(1-\lambda^2x^8\right)\left(1-\lambda^2x^{14}\right)\cdots}{\left(1-x\right)\left(1-\lambda x^4\right)\left(1-\lambda x^7\right)\cdots}$$

ve

$$\left(\lambda x;\lambda^2x^6\right)_\infty\left(\lambda x^5;\lambda^2x^6\right)_\infty = \left(1-\lambda x\right)\left(1-\lambda^3x^7\right)\left(1-\lambda^5x^{11}\right)\cdots\left(1-\lambda x^5\right)\left(1-\lambda^3x^{11}\right)\left(1-\lambda^7x^{17}\right)\cdots$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left(-\lambda x^2;\lambda x^3\right)_\infty\left(-x;\lambda x^3\right)_\infty\left(\lambda x;\lambda^2x^6\right)_\infty\left(\lambda x^5;\lambda^2x^6\right)_\infty &= \frac{\left(1-x^2\right)\left(1-\lambda x^5\right)\left(1-\lambda^2x^8\right)\left(1-\lambda^3x^{11}\right)\cdots}{\left(1-x\right)\left(1-\lambda x^4\right)\left(1-\lambda^2x^7\right)\left(1-\lambda^3x^{10}\right)\cdots} \\ &\quad\times \frac{\left(1-\lambda x\right)\left(1-\lambda^2x^4\right)\left(1-\lambda^3x^7\right)\left(1-\lambda^4x^{10}\right)\cdots}{\left(1-\lambda x^2\right)\left(1-\lambda^2x^5\right)\left(1-\lambda^3x^8\right)\left(1-\lambda^4x^{11}\right)\cdots} \\ &= \frac{\left(x^2;\lambda x^3\right)_\infty\left(\lambda x;\lambda x^3\right)_\infty}{\left(x;\lambda x^3\right)_\infty\left(\lambda x^2;\lambda x^3\right)_\infty}\end{aligned}$$

bulunur. $f(a,b) = (-a;ab)_\infty(-b;ab)_\infty(ab;ab)_\infty$ Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinden

$$\begin{aligned}\left(-\lambda x^2;\lambda x^3\right)_\infty\left(-x;\lambda x^3\right)_\infty\left(\lambda x;\lambda^2x^6\right)_\infty\left(\lambda x^5;\lambda^2x^6\right)_\infty\left(\lambda x^3;\lambda x^3\right)_\infty &= \frac{\left(x^2;\lambda x^3\right)_\infty\left(\lambda x;\lambda x^3\right)_\infty\left(\lambda x^3;\lambda x^3\right)_\infty}{\left(x;\lambda x^3\right)_\infty\left(\lambda x^2;\lambda x^3\right)_\infty\left(\lambda x^3;\lambda x^3\right)_\infty}f\left(-\lambda x^3\right) \\ &= \frac{f\left(-x^2,-\lambda x\right)f\left(-\lambda x^3\right)}{f\left(-x,-\lambda x^2\right)}\end{aligned}$$

elde edilir. □

Beşli Çarpım Özdeşliğinin iki sonucu aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

Sonuç 3.19. $|q| < 1$ *için*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(6n+1)\,q^{3n^2+n} = \varphi^2\left(-q^2\right)f\left(-q^2\right)$$

eşitliği geçerlidir (Berndt 2006).

Kanıt Beşli Çarpım Özdeşliğinde q yerine q^2 yazılırsa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{3n^2+n}\left(t^{3n}-t^{-3n-1}\right) = \left(q^2;q^2\right)_\infty\left(q^2t;q^2\right)_\infty\left(\frac{1}{t};q^2\right)_\infty\left(t^2q^2;q^4\right)_\infty\left(\frac{q^2}{t^2};q^4\right)_\infty$$

elde edilir. $t = 1$ için sol taraf sıfır ve sağ taraf $\left(\frac{1}{t}; q^2\right)_\infty$ çarpanı nedeniyle sıfır olacağından

$$\frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(t^{3n} - t^{-3n-1}\right)}{1-\frac{1}{t}} = \left(q^2;q^2\right)_\infty \left(q^2t;q^2\right)_\infty \left(\frac{q^2}{t};q^2\right)_\infty \left(t^2q^2;q^4\right)_\infty \left(\frac{q^2}{t^2};q^4\right)_\infty$$

eşitliğinde $t \to 1$ limitine geçilirse, sol taraf

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1} \frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(t^{3n} - t^{-3n-1}\right)}{1-\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{z\to q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(3nt^{3n-1} + (3n+1)\,t^{-3n-2}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (6n+1)\,q^{3n^2+n}\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1} \left(q^2;q^2\right)_\infty \left(q^2t;q^2\right)_\infty \left(\frac{q^2}{t};q^2\right)_\infty \left(t^2q^2;q^4\right)_\infty \left(\frac{q^2}{t^2};q^4\right)_\infty \\ &= \left(q^2;q^2\right)_\infty^3 \left(q^2;q^4\right)_\infty^2\end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(q) = \left(-q;q^2\right)_\infty^2 \left(q^2;q^2\right)_\infty$, $f(-q) = (q;q)_\infty$ ve $\varphi^2\left(-q^2\right) = \varphi(-q)\,\varphi(q)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left(q^2;q^2\right)_\infty^3 \left(q^2;q^4\right)_\infty^2 &= \left(q^2;q^2\right)_\infty^3 \left(1-q^2\right)^2 \left(1-q^6\right)^2 \left(1-q^{10}\right)^2 \cdots \\ &= \left(q^2;q^2\right)_\infty^3 (1-q)^2 \left(1-q^3\right)^2 \left(1-q^5\right)^2 \cdots \\ &\quad \times (1+q)^2 \left(1+q^3\right)^2 \left(1+q^5\right)^2 \cdots \\ &= \left(q^2;q^2\right)_\infty^3 \left(-q;q^2\right)_\infty^2 \left(q;q^2\right)_\infty^2 \\ &= \left(-q;q^2\right)_\infty^2 \left(q^2;q^2\right)_\infty \left(q;q^2\right)_\infty^2 \left(q^2;q^2\right)_\infty \left(q^2;q^2\right)_\infty \\ &= \varphi(-q)\,\varphi(q)\,f\left(-q^2\right) = \varphi^2\left(-q^2\right) f\left(-q^2\right)\end{aligned}$$

bulunur. □

Sonuç 3.20. $|q| < 1$ *için*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (3n+1)\,q^{3n^2+2n} = \psi\left(q^2\right) f^2(-q)$$

eşitliği geçerlidir (Berndt 2006).

Kanıt Beşli Çarpım Özdeşliğinde q yerine q^2 yazılırsa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(t^{3n}-t^{-3n-1}\right)=\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(q^2t;q^2\right)_\infty\left(\frac{1}{t};q^2\right)_\infty\left(t^2q^2;q^4\right)_\infty\left(\frac{q^2}{t^2};q^4\right)_\infty$$

elde edilir. $t=\frac{1}{q}$ için $\left(t^2q^2;q^4\right)_\infty=\left(1;q^4\right)_\infty=0$ olacağından sağ taraf sıfır olur. Sol taraf ise

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(q^{-3n}-q^{3n+1}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2-2n}-\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+4n+1}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3(n+1)^2-2(n+1)}-\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+4n+1}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+4n+1}-\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+4n+1}=0\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(t^{-3n}-t^{-3n-1}\right)}{1-t^2q^2}=\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(q^2t;q^2\right)_\infty\left(\frac{1}{t};q^2\right)_\infty\left(t^2q^6;q^4\right)_\infty\left(\frac{q^2}{t^2};q^4\right)_\infty$$

eşitliğinde $t\to\frac{1}{q}$ limitine geçilirse sol taraf

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\frac{1}{q}}\frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(t^{3n}-t^{-3n-1}\right)}{1-t^2q^2}\\ &=\lim_{t\to\frac{1}{q}}\frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(3nt^{3n-1}+(3n+1)\,t^{-3n-2}\right)}{-2tq^2}\\ &=-\frac{1}{2q}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}\left(3nq^{-3n+1}+(3n+1)\,q^{3n+2}\right)\\ &=-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3nq^{3n^2-2n}-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(3n+1)\,q^{3n^2+4n+1}\\ &=-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3\,(n+1)\,q^{3(n+1)^2-2(n+1)}-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(3n+1)\,q^{3n^2+4n+1}\\ &=-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(3n+3+3n+1)\,q^{3n^2+4n+1}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}(3n+2)\,q^{3n^2+4n+1}\\ &=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(3\,(-n-1)+2\right)q^{3(-n-1)^2+4(-n-1)+1}\\ &=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-3n-1)\,q^{3n^2+2n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(3n+1)\,q^{3n^2+2n}\end{aligned}$$

haline gelir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\frac{1}{q}}\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(q^2t;q^2\right)_\infty\left(\frac{1}{t};q^2\right)_\infty\left(t^2q^6;q^4\right)_\infty\left(\frac{q^2}{t^2};q^4\right)_\infty\\&=\left(q;q^2\right)_\infty^2\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(q^4;q^4\right)_\infty^2\end{aligned}$$

olur.

$$\psi\left(q\right)=\frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty}{\left(q;q^2\right)_\infty}\quad\text{ve}\quad f\left(-q\right)=\left(q;q\right)_\infty$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left(q;q^2\right)_\infty^2\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(q^4;q^4\right)_\infty^2&=\left(q;q^2\right)_\infty\left(q^2;q^2\right)_\infty\left(q;q^2\right)_\infty\left(q^4;q^4\right)_\infty^2\\&=\left(q^4;q^4\right)_\infty^2\left(q;q\right)_\infty\left(q;q^4\right)_\infty\left(q^3;q^4\right)_\infty\\&=\left(q^4;q^4\right)_\infty^2\left(q;q^4\right)_\infty^2\left(q^2;q^4\right)_\infty\left(q^3;q^4\right)_\infty^2\left(q^4;q^4\right)_\infty\\&=\frac{\left(q^4;q^4\right)_\infty}{\left(q^2;q^4\right)_\infty}\left(q;q^4\right)_\infty^2\left(q^2;q^4\right)_\infty^2\left(q^3;q^4\right)_\infty^2\left(q^4;q^4\right)_\infty\\&=\psi\left(q^2\right)\left(q;q\right)_\infty^2=\psi\left(q^2\right)f^2\left(-q\right)\end{aligned}$$

elde edilir. □

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Ramanujan τ-fonksiyonu ve parçalanış fonksiyonu için bazı kongrüanslar ifade edilecektir. Bölüm boyunca kullanılacak olan

$$A(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \quad \text{ve} \quad B(q) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$$

tam sayı katsayılı Maclaurin serileri için

$$A(q) \equiv B(q) \pmod{m}$$

kongrüansı, her n için $a_n \equiv b_n \pmod{m}$ anlamındadır.

4.1. Ramanujan τ-Fonksiyonu İçin Kongrüanslar

$\tau(n)$ fonksiyonu, 1916 yılında Ramanujan tarafından

$$q(q;q)_{\infty}^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n, \quad |q| < 1$$

seri açılımındaki tam sayı olan katsayılar olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmasında Ramanujan, $\tau(n)$ fonksiyonun bazı özelliklerini kanıtlayarak çeşitli savlar öne sürmüştür. 1920 yılında $\tau(n)$ için 5, 7 ve 23 modülünde kongrüansları kanıtsız olarak ifade etmiş, bu kongrüansların kanıtlarını ve $\tau(n)$ için diğer özellikleri, $\tau(n)$ ve $p(n)$ hakkında olan basılmamış çalışmasında vermiştir (Ramanujan 1988).

Teorem 4.1. *Her $n \geq 0$ tam sayısı için*

$$\tau(n) = \begin{cases} 1 \pmod{2}, & n = (2m+1)^2 \ \textit{ise,} \\ 0 \pmod{2}, & \textit{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

kongrüansları geçerlidir. Diğer bir ifade ile Ramanujan τ-fonksiyonu sadece tek kare tam sayı değerlerde bir tek tam sayıdır (Ramanujan 1916).

Kanıt (Berndt 2006) Binom teoremi gereği, herhangi bir pozitif k tam sayısı için

$$\left(1-q^k\right)^8 = 1 - 8q^k + 28q^{2k} - 56q^{3k} + \cdots + q^{8k} \equiv 1 + q^{8k} \equiv 1 - q^{8k} \pmod{2}$$

olduğundan

$$(q;q)_{\infty}^8 \equiv \left(q^8;q^8\right)_{\infty} \pmod{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, q^n = q\,(q;q)_\infty^{24} = q\left[(q;q)_\infty^{8}\right]^3 \equiv q\left(q^8;q^8\right)_\infty^3 \pmod{2}$$

bulunur. Jacobi Özdeşliği olan

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)\, q^{\frac{n(n+1)}{2}} = (q;q)_\infty^3$$

eşitliği gereği

$$q\left(q^8;q^8\right)_\infty^3 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, q^{4m^2+4m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, q^{(2m+1)^2}$$

sonucuna varılır. $1 \equiv -1 \pmod{2}$ ve $2m+1 \equiv 1 \pmod{2}$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, q^n \equiv \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, q^{(2m+1)^2} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} q^{(2m+1)^2} \pmod{2}$$

bulunur. q terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$\tau(n) = \begin{cases} 1 \pmod{2}, & n = (2m+1)^2 \text{ ise,} \\ 0 \pmod{2}, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

elde edilir. □

Teorem 4.2. *Her $n \geq 0$ tam sayısı için*

$$\tau(7n), \tau(7n+3), \tau(7n+5), \tau(7n+6) \equiv 0 \pmod{7}$$

olur (Ramanujan 1920).

Kanıt (Berndt 2006) $\tau(0) = 0$ varsayımı ile

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau(n)\, q^n = q\,(q;q)_\infty^{24} = q\,(q;q)_\infty^{21}\,(q;q)_\infty^{3}$$

yazılabilir. Her p asal sayısı için $1 \leq k \leq p-1$ olmak üzere

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$$

olduğundan a ve b tam sayıları için

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$(q;q)_\infty^{21} = \left[(q;q)_\infty^7\right]^3 \equiv \left(q^7;q^7\right)_\infty^3 \pmod 7$$

bulunur. Jacobi Özdeşliği gereği

$$\left(q^7;q^7\right)_\infty^3 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)\, q^{\frac{7n(n+1)}{2}}$$

olduğundan $\left(q^7;q^7\right)_\infty^3$ çarpımında q teriminin kuvvetleri 7 sayısının katlarıdır. Diğer taraftan,

$$q\,(q;q)_\infty^3 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1)\, q^{\frac{m(m+1)}{2}+1}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned}\frac{m(m+1)}{2}+1 &= \frac{m^2+m+2}{2} = \frac{8m^2+8m+2-7m^2-7m}{2} \\ &= 4m^2+4m+1-\frac{7m(m+1)}{2} \\ &\equiv 4m^2+4m+1 = (2m+1)^2 \pmod 7\end{aligned}$$

olduğundan $(2m+1)^2 \equiv 0 \pmod 7$ veya denk olarak $2m+1 \equiv 0 \pmod 7$ için $q\,(q;q)_\infty^{24}$ çarpımının seri açılımındaki q teriminin kuvvetleri modülo 7 sıfır olur. Dolayısıyla, $n \equiv 0 \pmod 7$ ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau(n)\, q^n \equiv 0 \pmod 7$$

veya denk olarak $\tau(7n) \equiv 0 \pmod 7$ elde edilir. Ayrıca, $n \pmod 7$ sayısı için n^2 sayısı, $0, 1, 2, 4 \pmod 7$ değerleri aldığından $q\,(q;q)_\infty^{24}$ çarpımının seri açılımında q teriminin kuvvetleri $3, 5$ veya $6 \pmod 7$ olamaz. Buradan, $\tau(7n+3), \tau(7n+5), \tau(7n+6) \equiv 0 \pmod 7$ elde edilir. □

Teorem 4.3. $0 \le r < 23$ *tam sayısı modülo* 23 *bir kuadratik kalan ise her* $n \ge 0$ *tam sayısı için*

$$\tau(23n-r) \equiv 0 \pmod{23}$$

kongrüansı sağlanır (Ramanujan 1920).

Kanıt (Berndt 2006) $\tau(0) = 0$ varsayımı ile

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau(n)\, q^n = q\,(q;q)_\infty^{24} = q\,(q;q)_\infty^{23} (q;q)_\infty \equiv q\left(q^{23};q^{23}\right)_\infty (q;q)_\infty \pmod{23}$$

yazılabilir. Euler Beşgen Sayı Teoremi olan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}} = (q;q)_\infty$$

eşitliği gereği

$$\left(q^{23};q^{23}\right)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{23n(3n+1)}{2}}$$

olduğundan $(q^{23};q^{23})_\infty$ çarpımında q teriminin kuvvetleri 23 sayısının katlarıdır. Diğer taraftan,

$$q\,(q;q)_\infty = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m+1)}{2}+1}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned}
\frac{m\,(3m+1)}{2}+1 &= \frac{3m^2+m+2}{2} = \frac{72m^2+24m+2-69m^2-23m}{2} \\
&= 36m^2+12m+1-\frac{23m\,(3m+1)}{2} \\
&\equiv 36m^2+12m+1 \pmod{23} = (6m+1)^2 \pmod{23}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{m\,(3m+1)}{2}+1 = 23k+(6m+1)^2\,, \quad k\in\mathbb{Z}$$

ile

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau(n)\,q^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{23k+(6m+1)^2} \pmod{23}$$

veya denk olarak

$$\tau(n) = \begin{cases} \pm 1 \pmod{23}\,, & n\equiv a^2 \pmod{23} \text{ ise,} \\ 0 \pmod{23}\,, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

elde edilir. r sayısı modülo 23 bir kuadratik kalan olduğundan $\tau(23n-r)\equiv 0 \pmod{23}$ olması için -1 sayısının modülo 23 bir kuadratik kalan olmaması gerekir. Legendre sembolü gösterimi ile

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{-1}{23}\right) = (-1)^{\frac{23-1}{2}} = -1$$

olduğundan -1 sayısı modülo 23 bir kuadratik kalan değildir. Bu ise kanıtı tamamlar. □

Örneğin,

$$\left(\frac{3}{23}\right)\left(\frac{23}{3}\right) = (-1)^{\frac{23-1}{2}\frac{3-1}{2}} = -1 \Rightarrow \left(\frac{3}{23}\right)\left(\frac{21+2}{3}\right) = \left(\frac{3}{23}\right)\left(\frac{2}{23}\right) = -1$$

ve

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right) = (-1)^{\frac{3^2-1}{8}} = -1$$

olduğundan 3 sayısı modülo 23 bir kuadratik kalandır ve

$$\tau\,(23-3) = \tau\,(20) = -7109760 = 23 \cdot (-309120) \equiv 0 \pmod{23}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\left(\frac{6}{23}\right) = \left(\frac{2}{23}\right)\left(\frac{3}{23}\right) = (-1)^{\frac{23^2-1}{8}} \cdot 1 = (-1)^{66} = 1$$

olduğundan 6 sayısı modülo 23 bir kuadratik kalandır ve

$$\tau\,(23-6) = \tau\,(17) = -6905934 = 23 \cdot (-300258) \equiv 0 \pmod{23}$$

olur.

4.2. Parçalanış Fonksiyonu İçin Kongrüanslar

1919 yılında Ramanujan, $p\,(n)$ parçalanış fonksiyonu için

$$\begin{aligned} p\,(5n+4) &\equiv 0 \pmod 5 \\ p\,(7n+5) &\equiv 0 \pmod 7 \\ p\,(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11} \end{aligned}$$

kongrüanslarının geçerli olduğunu ifade ederek ilk iki kongrüansın kanıtı vermiştir. 1920 yılında tek sayfalık bir not ile $p\,(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$ kongrüansının kanıtını bulduğunu ifade etmiştir. Bu bölümde, söz konusu kongrüansların kanıtları ifade edilecektir.

Teorem 4.4. *Her $n \geq 0$ tam sayısı için*

$$p\,(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$$

olur (Ramanujan 1919).

Kanıt (Berndt 2006) Euler Bağıntısı olan

$$\sum_{n=0}^{\infty} p\,(n)\, q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty}$$

eşitliğinden

$$q\,(q;q)_\infty^4\,\frac{(q^5;q^5)_\infty}{(q;q)_\infty^5} = q\frac{(q^5;q^5)_\infty}{(q;q)_\infty} = \left(q^5;q^5\right)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} p\,(n)\,q^{n+1}$$

yazılabilir. Euler Beşgen Sayı Teoremi gereği

$$\left(q^5;q^5\right)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\,q^{\frac{5n(3n+1)}{2}}$$

olduğundan $(q^5;q^5)_\infty$ çarpımında q teriminin kuvvetleri 5 sayısının katıdır. Ayrıca,

$$(q;q)_\infty^5 \equiv \left(q^5;q^5\right)_\infty (\operatorname{mod} 5) \Rightarrow \frac{(q^5;q^5)_\infty}{(q;q)_\infty^5} \equiv 1\,(\operatorname{mod} 5)$$

olduğundan kanıtı tamamlamak için $q\,(q;q)_\infty^4$ çarpımını incelemek yeterlidir.

Jacobi Özdeşliği ve Euler Beşgen Sayı Teoremi gereği

$$\begin{aligned}
q\,(q;q)_\infty^4 &= q\,(q;q)_\infty^3\,(q;q)_\infty \\
&= q\left(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\,(2m+1)\,q^{\frac{m(m+1)}{2}}\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j\,q^{\frac{j(3j+1)}{2}}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+j}\,(2m+1)\,q^{\frac{m(m+1)}{2}+\frac{j(3j+1)}{2}+1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{m\,(m+1)}{2}+\frac{j\,(3j+1)}{2}+1 &= \frac{m^2+m+3j^2+j+2}{2} \\
&= \frac{6m^2+6m+18j^2+6j+2}{2} \\
&\quad -\frac{5m+15j^2+5j}{2} \\
&= 3m^2+3m+9j^2+3j+1 \\
&\quad -\frac{5m\,(m+1)}{2}-\frac{5j\,(3j+1)}{2} \\
&\equiv 3m^2+3m+9j^2+3j+1 \\
&\equiv 3m^2+3m-j^2-2j+1\,(\operatorname{mod} 5)
\end{aligned}$$

ve modülo 5

m	m^2	$3m^2$	$3m$	$3m^2+3m$
0	0	0	0	0
1	1	3	3	1
2	-1	2	1	3
3	-1	2	-1	1
4	1	3	2	0

j	j^2	$2j$	j^2+2j	$-j^2-2j+1$
0	0	0	0	1
1	1	2	3	3
2	-1	-1	3	3
3	-1	1	0	1
4	1	3	-1	2

olduğundan

$$3m^2+3m-j^2-2j+1 \equiv 0 \pmod 5$$

olması için

$$\begin{aligned} 3m^2+3m &\equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow m \equiv 2 \pmod 5 \\ -j^2-2j+1 &\equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow j \equiv 4 \pmod 5 \end{aligned}$$

olmalıdır. Dolayısıyla, $m \equiv 2 \pmod 5$ ve $j \equiv 4 \pmod 5$ için

$$\frac{m(m+1)}{2} + \frac{j(3j+1)}{2} + 1 = 5k+5, \quad k \in \mathbb{Z}$$

olduğundan $q(q;q)_\infty^{24}$ çarpımında q^{5n+5} teriminin katsayısı modülo 5 sıfır olur. O halde, $n+1=5k+5$, yani $n=5k+4$ için $p(n) \equiv 0 \pmod 5$, diğer bir ifade ile $p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$ elde edilir. □

$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$ kongrüansının farklı bir kanıtı için ilk olarak aşağıdaki sonuç kanıtlanacaktır.

Önteorem 4.5. *$n \geq 0$ tam sayısı için $\{a_n\}$ dizisi, tam sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda,*

$$L(q) = \frac{1}{(q;q)_\infty^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{n^2}$$

serisinde $n \geq 0$ için q^{5n+3} teriminin katsayısı,5 ile bölünür (Andrews ve Roy, 1997).

Kanıt $L(q)$ fonksiyonu

$$L(q) = \frac{1}{(q;q)_\infty^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^{k^2} = (q;q)_\infty^3 \frac{1}{(q;q)_\infty^5} \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^{k^2}$$

$$\equiv \quad (q;q)_\infty^3 \frac{1}{(q^5;q^5)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^{k^2} \pmod 5$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1)\, q^{\frac{j(j+1)}{2}} = (q;q)_\infty^3$$

ile verilen Jacobi Özdeşliği gereği

$$(q;q)_\infty^3 \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^{k^2} = \sum_{k,j=0}^{\infty} a_k (-1)^j (2j+1)\, q^{\frac{j(j+1)}{2}+k^2}$$

elde edilir. q^{5n+3} teriminin katsayıları istendiğinden $n \geq 0$ için

$$\frac{j(j+1)}{2} + k^2 = 5n+3$$

özelliğini sağlayan terimler bulunmalıdır.

$$\begin{aligned}
& \frac{j(j+1)}{2} + k^2 = 5n+3 \Rightarrow \frac{j(j+1)}{2} + k^2 - 3 = 5n \\
\Rightarrow \quad & \frac{j(j+1) + 2k^2 - 6}{2} = 5n \\
\Rightarrow \quad & j^2 + j + 2k^2 - 6 \equiv 0 \pmod 5 \\
\Rightarrow \quad & -4j^2 - 4j - 3k^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5 \\
\Rightarrow \quad & 4j^2 + 4j + 1 + 3k^2 \equiv 0 \pmod 5 \\
\Rightarrow \quad & (2j+1)^2 + 3k^2 \equiv 0 \pmod 5
\end{aligned}$$

ve modülo 5

j	$2j$	$2j+1$	$(2j+1)^2$
0	0	1	1
1	2	3	-1
-1	-1	0	0
-1	1	2	-1
1	3	-1	1

k	k^2	$3k^2$
0	0	0
1	1	3
2	-1	2
3	-1	2
4	1	3

olduğundan $(2j+1)^2 \equiv 0, \pm 1 \pmod 5$ ve $3k^2 \equiv 0, 2, 3 \pmod 5$ olur. Dolayısıyla,

$$(2j+1)^2 + 3k^2 \equiv 0 \pmod 5$$

olması için $k \equiv 2j+1 \equiv 0 \pmod 5$ olmalıdır. O halde,

$$\sum_{k,j=0}^{\infty} a_k (-1)^j (2j+1)\, q^{\frac{j(j+1)}{2}+k^2}$$

serisindeki $(-1)^j (2j+1)\, a_k$ katsayısı 5 ile bölünür. □

Kanıt [Teorem 4.4'ün İkinci Kanıtı] $\varphi(q) = (-q;q^2)_\infty^2 (q^2;q^2)_\infty$ olduğundan Euler Bağıntısı gereği

$$\begin{aligned}
\varphi(-q) &= \left(q;q^2\right)_\infty^2 \left(q^2;q^2\right)_\infty \\
&= (1-q)^2 \left(1-q^3\right)^2 \left(1-q^5\right)^2 \cdots \left(1-q^2\right)\left(1-q^4\right)\left(1-q^6\right)\cdots \\
&= (1-q)\left(1-q^2\right)\left(1-q^3\right)\cdots(1-q)\left(1-q^3\right)\left(1-q^5\right)\cdots \\
&= (q;q)_\infty \left(q;q^2\right)_\infty = \frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\varphi(q) = f(q,q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi(-q) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} = \sum_{m=-\infty}^{-1} (-1)^m q^{m^2} + 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \\
&= 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} p(k)\, q^{2k} &= \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty} = \frac{1}{(q;q)_\infty (-q;q)_\infty} = \frac{1}{(q;q)_\infty^2} \frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty} \\
&= \frac{1}{(q;q)_\infty^2}\varphi(-q) = \frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Önteorem 4.5 gereği $p(k)$ katsayıları $2k \equiv 5j+3 \pmod 5$, yani $k = 5n+4$ olduğunda 5 sayısının katlarıdır. Buradan, $p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$ elde edilir. □

Teorem 4.4 kullanılarak Ramanujan τ-fonksiyonu için modülo 5 bir kongrüans elde edilir.

Sonuç 4.6. *Her $n \geq 0$ tam sayısı için*

$$\tau(5n) \equiv 0 \pmod 5$$

kongrüansı sağlanır (Ramanujan 1920).

Kanıt (Berndt 2006) $\tau(0) = 0$ varsayımı ile Euler Bağıntısı gereği

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \tau(n) q^n &= q(q;q)_\infty^{24} = q\frac{(q;q)_\infty^{25}}{(q;q)_\infty} \\ &\equiv q\frac{(q^5;q^5)_\infty^5}{(q;q)_\infty} = q\left(q^5;q^5\right)_\infty^5 \sum_{n=1}^{\infty} p(n) q^n \pmod 5\end{aligned}$$

yazılabilir. $p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$ olduğundan

$$q\left(q^5;q^5\right)_\infty^5 \sum_{m=1}^{\infty} p(5m+4) q^{5m+4} = \left(q^5;q^5\right)_\infty^5 \sum_{m=1}^{\infty} p(5m+4) q^{5m+5} \equiv 0 \pmod 5$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$q\left(q^5;q^5\right)_\infty^5 \sum_{n=1}^{\infty} p(n) q^n$$

ifadesinde q^{5n} teriminin katsayısı 5 modülünde sıfır olur. Bu ise $\tau(5n) \equiv 0 \pmod 5$ olduğunu ifade eder. □

Teorem 4.7. *Her $n \geq 0$ tam sayısı için*

$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7$$

kongrüansı geçerlidir (Ramanujan 1920).

Kanıt (Berndt 2006) Binom teoreminden

$$\begin{aligned}q^2\left(q^7;q^7\right)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n &= q^2\frac{(q^7;q^7)_\infty}{(q;q)_\infty} \\ &\equiv q^2\frac{(q;q)_\infty^7}{(q;q)_\infty} = q^2(q;q)_\infty^6 \pmod 7\end{aligned}$$

yazılabilir. Jacobi Özdeşliği olan

$$(q;q)_\infty^3 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
q^2 (q;q)_\infty^6 &= q^2 \left[(q;q)_\infty^3\right]^2 \\
&= q^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) q^{\frac{m(m+1)}{2}}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) q^{\frac{j(j+1)}{2}}\right) \\
&= \sum_{m,j=0}^{\infty} (-1)^{m+l} (2m+1)(2j+1) q^{\frac{m(m+1)}{2}+\frac{j(j+1)}{2}+2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Modülo 7

m	$m+1$	$\frac{m(m+1)}{2}$	$\frac{j(j+1)}{2}$	$\frac{m(m+1)}{2}+\frac{j(j+1)}{2}+2$
0	1	0	0	2
1	2	1	1	4
2	3	3	3	1
3	4	6	6	0
4	5	3	3	1
5	6	1	1	4
6	0	0	0	2

olduğundan

$$\frac{m(m+1)}{2}+\frac{j(j+1)}{2}+2 \equiv 0 \pmod 7$$

olması için

$$\frac{m(m+1)}{2} \equiv \frac{j(j+1)}{2} \equiv 6 \pmod 7,$$

yani $m \equiv j \equiv 3 \pmod 7$ olmalıdır. Dolayısıyla, $2m+1 \equiv 2j+1 \equiv 0 \pmod 7$ elde edilir. Bu ise $q^2 (q;q)_\infty^6$ çarpımında q^{7n} terimlerinin katsayılarının 7 sayısının katı olduğunu gösterir. O halde,

$$q^2 \left(q^7;q^7\right)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n$$

ifadesinde q^{7n} terimlerinin katsayıları 7 sayısının katı olur. Euler Beşgen Sayı Teoremi gereği

$$\begin{aligned}
&q^2 \left(q^7;q^7\right)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n \\
&= q^2 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{7j(3j-1)}{2}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n\right)
\end{aligned}$$

$$= q^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{7j(3j-1)}{2}} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{7j(3j+1)}{2}}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} q^2 \left(q^7; q^7\right)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^{n+7s+2} = \sum_{n=0}^{\infty} p(7n) q^{7n+7s+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(7n+5) q^{7n} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, $p(7n+5) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 7)$ elde edilir. □

$p(11n+6) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 11)$ kongrüansının ilk basit kanıtı 1969 yılında Winquist tarafından verilmiştir. Kanıtında Winquist, Euler Beşgen Sayı Teoremi ile Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinin $p(5n+4) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 5)$ ve $p(7n+5) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 7)$ kongrüanslarının kanıtlarında oynadıkları role benzer bir role sahip olan bir bağıntı elde etmiştir.

Teorem 4.8. *(Winquist Özdeşliği) Sıfırdan farklı a ve b karmaşık sayıları ile $|q| < 1$ olan q karmaşık sayısı için*

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}} \\ &\quad \times \left(a^{-3m} b^{-3n} - a^{-3m} b^{3n+1} - a^{-3n+1} b^{-3m+1} + a^{3n+2} b^{-3m-1}\right) \\ &\quad = (q;q)_\infty^2 (a;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty (b;q)_\infty \left(\frac{q}{b};q\right)_\infty \\ &\quad \times (ab;q)_\infty \left(\frac{q}{ab};q\right)_\infty \left(\frac{a}{b};q\right)_\infty \left(\frac{bq}{a};q\right)_\infty \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Winquist 1969).

Kanıt (Cao 2011) İfadenin kanıtında $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ olmak üzere herhangi bir a karmaşık sayısı için

$$(1-a)(1-aw)\left(1-aw^2\right) = 1-a^3$$

eşitliği,

$$(q;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n(n-1)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n(n+1)}{2}}$$

ile verilen Euler Beşgen Sayı Teoremini ve

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n = \left(q^2;q^2\right)_\infty \left(-qz;q^2\right)_\infty \left(\frac{q^2}{z^2};q^2\right)_\infty$$

Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği kullanılacaktır.

Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinde q yerine $q^{\frac{1}{2}}$ ve z yerine $-zq^{-\frac{1}{2}}$ yazılırsa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n^2-n}{2}} z^n = (q;q)_\infty (z;q)_\infty \left(\frac{q}{z};q\right)_\infty$$

elde edilir.

$$h(z) = (z;q)_\infty \left(\frac{q}{z};q\right)_\infty$$

olarak tanımlanan $h(z)$ fonksiyonu, $0 < |z| < \infty$ bölgesinde analitik olduğundan

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde bir Laurent açılımına sahiptir. Şimdi,

$$\begin{aligned} F(a,b,q) &= (q;q)_\infty^2 (a;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty (b;q)_\infty \left(\frac{a}{b};q\right)_\infty \\ &\times (ab,q)_\infty \left(\frac{q}{ab},q\right)_\infty \left(\frac{a}{b},q\right)_\infty \left(\frac{bq}{a};q\right)_\infty \end{aligned}$$

tanımlansın.

$$F(a,b,q) = (q;q)_\infty^2 h(a) h(b) h(ab) h\left(\frac{a}{b}\right)$$

olduğundan F fonksiyonu,

$$c_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} b^n$$

olmak üzere

$$F(a,b,q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} a^m b^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m a^m$$

çifte Laurent serisi şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} (a;q)_\infty &= (1-a)(aq;q)_\infty, & \left(\tfrac{q}{a};q\right)_\infty &= \tfrac{1}{1-\frac{1}{a}}\left(\tfrac{1}{a};q\right)_\infty, \\ (ab;q)_\infty &= (1-ab)(abq;q)_\infty, & \left(\tfrac{q}{ab};q\right)_\infty &= \tfrac{1}{1-ab}\left(\tfrac{1}{ab};q\right)_\infty, \\ \left(\tfrac{a}{b};q\right)_\infty &= \left(1-\tfrac{a}{b}\right)\left(\tfrac{qa}{b};q\right)_\infty, & \left(\tfrac{bq}{a};q\right)_\infty &= \tfrac{1}{1-\frac{b}{a}}\left(\tfrac{b}{a};q\right)_\infty, \end{aligned}$$

olduğundan $F(a,b,q)$ fonksiyonunun tanımından

$$F(a,b,q) = -a^3 F(aq,b,q)$$

ve

$$F(a,b,q) = -a^3 F\left(\frac{1}{a},b,q\right)$$

fonksiyonel eşitlikleri elde edilir. İlk fonksiyonel eşitlikten

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m a^m = -a^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m q^m a^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(-c_m q^m\right) a^{m+3} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(-c_{m-3} q^{m-3}\right) a^m,$$

yani,

$$c_m = -q^{m-3} c_{m-3}$$

bulunur. İkinci fonksiyonel eşitlik ise

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m a^m &= -a^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m a^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(-c_m\right) a^{-m+3} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(-c_{-m}\right) a^{m+3} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(-c_{-m+3}\right) a^m,\end{aligned}$$

yani

$$c_m = -c_{-m+3}$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla, her m için

$$c_m = -q^{m-3} c_{m-3} \Rightarrow \begin{array}{l} c_{3m} = (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} c_0 \\ c_{3m+1} = (-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}} c_1 \\ c_{3m+2} = (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}} c_2 \end{array}$$

ve

$$c_m = -c_{-m+3} \Rightarrow c_1 = -c_2$$

elde edilir. $c_m = -q^{m-3} c_{m-3}$ eşitliğinin $c_{3m} = (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} c_0$ göstermek için $c_m = -q^{m-3} c_{m-3}$ eşitliğinde $m > 0$ ise

$$\begin{aligned} c_{3m} &= -q^{3m-3} c_{3m-3} = -q^{3m-3} c_{3(m-1)} \\ c_{3(m-1)} &= -q^{3(m-1)-3} c_{3(m-1)-3} = -q^{3m-6} c_{3(m-2)} \\ c_{3(m-2)} &= -q^{3(m-2)-3} c_{3(m-2)-3} = -q^{3m-9} c_{3(m-3)} \\ &\vdots \\ c_{3\cdot 2} &= c_{3(m-(m-2))} = -q^{3(m-(m-2))-3} c_{3(m-(m-2))-3} = -q^{3m-3(m-1)} c_{3\cdot 1} \\ c_{3\cdot 1} &= c_{3(m-(m-1))} = -q^{3(m-(m-1))-3} c_{3(m-(m-1))-3} = -q^{3m-3m} c_{3\cdot 0} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$c_{3m} = (-1)^m q^{3m^2-3(1+2+\cdots+m)} c_0$$

$$= \quad (-1)^m q^{3m^2-\frac{3m(m+1)}{2}} c_0 = (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} c_0$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$c_m = -q^{m-3} c_{m-3} \Rightarrow c_{m+3} = -q^m c_m \Rightarrow c_m = -q^{-m} c_{m+3}$$

eşitliğinde $m < 0$ ise $m = -k$ yazılarak

$$\begin{aligned}
c_{-3k} &= -q^{-3k} c_{-3k+3} = -q^{-3k} c_{-3(k-1)} \\
c_{-3(k-1)} &= -q^{-3(k-1)} c_{-3(k-1)+3} = -q^{-3k-3} c_{-3(k-2)} \\
c_{-3(k-2)} &= -q^{-3(k-2)} c_{-3(k-2)+3} = -q^{-3k-6} c_{-3(k-3)} \\
&\vdots \\
c_{-3.1} &= c_{-3(k-(k-1))} = -q^{-3(k-(k-1))} c_{-3(k-k-1)+3} = -q^{-3k-3(k-1)} c_0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$c_{-3k} = (-1)^k q^{3k^2-3(1+2+3+\cdots+(k-1))} c_0 = (-1)^k q^{3k^2-\frac{3k(k-1)}{2}} c_0 = (-1)^k q^{\frac{3k^2+3k}{2}} c_0$$

veya denk olarak negatif m değerleri için

$$c_{3m} = (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} c_0$$

bulunur. c_{3m+1} ve c_{3m+2} için karşılık gelen değerler benzer şekilde hesaplanabilir.

Tüm elde edilenler bir araya toplanırsa

$$\begin{aligned}
F(a,b,q) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m a^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{3m} a^{3m} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{3m+1} a^{3m+1} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{3m+2} a^{3m+2} \\
&= c_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} a^{3m} + c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}} a^{3m+1} \\
&\quad -c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}} a^{3m+2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi c_0 ve c_1 katsayıları hesaplanacaktır. $a = w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
F(w,b,q) &= c_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} + c_1 w \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}} \\
&\quad -c_1 w^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \quad c_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} + c_1 \left(w - w^2\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}}$$

elde edilir. Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinde q ve z yerine q^3 yazılırsa

$$\left(q^3; q^3\right) \left(q^3; q^3\right)_\infty \left(1; q^3\right)_\infty = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} q^{3m}$$

bulunur. $(1; q^3)_\infty = 0$ olduğundan

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2+3m}{2}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} = 0$$

olur. Dolayısıyla,

$$F(w, b, q) = c_1 \left(w - w^2\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}}$$

elde edilir. $\frac{1}{w} = w^2$ olduğundan $F(a, b, q)$ fonksiyonunun tanımı,

$$\begin{aligned} F(w, b, q) &= (q; q)_\infty^2 (w; q)_\infty \left(\frac{q}{w}; q\right)_\infty (b; q)_\infty \left(\frac{q}{b}; q\right)_\infty (wb; q)_\infty \\ &\quad \times \left(\frac{q}{wb}; q\right)_\infty \left(\frac{w}{b}; q\right)_\infty \left(\frac{bq}{w}; q\right)_\infty \\ &= (q; q)_\infty (q; q)_\infty (w; q)_\infty \left(w^2 q; q\right)_\infty (b; q)_\infty (wb; q)_\infty \left(w^2 bq; q\right)_\infty \\ &\quad \times \left(\frac{q}{b}; q\right)_\infty \left(\frac{w}{b}; q\right)_\infty \left(\frac{w^2 q}{b}; q\right)_\infty \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Buradan,

$$\begin{aligned} F(w, b, q) &= (q; q)_\infty (1 - q) \left(1 - q^2\right) \left(1 - q^3\right) \ldots \\ &\quad \times (1 - w) (1 - wq) \left(1 - wq^2\right) ... \\ &\quad \times \left(1 - w^2 q\right) \left(1 - w^2 q^2\right) \left(1 - w^2 q^3\right) ... \\ &\quad \times (1 - b) (1 - bq) \left(1 - bq^2\right) ... \\ &\quad \times (1 - wb) (1 - wbq) \left(1 - wbq^2\right) ... \\ &\quad \times \left(1 - w^2 bq\right) \left(1 - w^2 bq^2\right) \left(1 - w^2 bq^3\right) ... \\ &\quad \times \left(1 - \frac{q}{b}\right) \left(1 - \frac{q^2}{b}\right) \left(1 - \frac{q^3}{b}\right) ... \\ &\quad \times \left(1 - \frac{w}{b}\right) \left(1 - \frac{wq}{b}\right) \left(1 - \frac{wq^2}{b}\right) ... \\ &\quad \times \left(1 - \frac{w^2 q}{b}\right) \left(1 - \frac{w^2 q^2}{b}\right) \left(1 - \frac{w^2 q^3}{b}\right) ... \end{aligned}$$

elde edilir. $(1-a)(1-aw)(1-aw^2)=1-a^3$ eşitliği kullanılarak bu ifade

$$\begin{aligned}F(w,b,q) &= (q;q)_\infty\left(q^3;q^3\right)_\infty\left(b^3q^3;q^3\right)_\infty\left(\frac{q^3}{b^3},q^3\right)_\infty\\ &\quad\times(1-w)(1-b)(1-wb)\left(1-\frac{w}{b}\right)\\ &= \frac{(1-w)(1-b)(1-wb)\left(1-\frac{w}{b}\right)}{1-b^3}\\ &\quad\times(q;q)_\infty\left(q^3;q^3\right)_\infty\left(b^3q^3;q^3\right)_\infty\left(\frac{q^3}{b^3},q^3\right)_\infty\end{aligned}$$

olarak yazılır.

$$\begin{aligned}\frac{(1-w)(1-b)(1-wb)\left(1-\frac{w}{b}\right)}{1-b^3} &= \frac{(1-w)(1-b)(1-wb)\left(1-\frac{w}{b}\right)}{(1-b)(1-wb)(1-w^2b)}\\ &= \frac{(1-w)\left(1-\frac{w}{b}\right)}{1-\frac{b}{w}}=\frac{\frac{(1-w)(b-w)}{b}}{\frac{w-b}{b}}\\ &= -\frac{1}{b}w(1-w)=-\frac{1}{b}\left(w-w^2\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$F(w,b,q)=-\frac{1}{b}\left(w-w^2\right)(q;q)_\infty\left(q^3;q^3\right)_\infty\left(b^3;q^3\right)_\infty\left(\frac{q^3}{b^3},q^3\right)_\infty$$

olur.

$$F(w,b,q)=c_1\left(w-w^2\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}}$$

eşitliğinden

$$-\frac{1}{b}(q;q)_\infty\left(q^3;q^3\right)_\infty\left(b^3;q^3\right)_\infty\left(\frac{q^3}{b^3},q^3\right)_\infty=c_1\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}}$$

sonucu elde edilir. Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinde q yerine q^3 ve z yerine b^3 yazılırsa

$$\left(q^3;q^3\right)_\infty\left(b^3;q^3\right)_\infty\left(\frac{q^3}{b^3},q^3\right)_\infty=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}}b^{3m}$$

bulunur.

$$(q;q)_\infty=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}}$$

ile verilen Euler Beşgen Sayı Teoremi gereği

$$c_1=-\frac{1}{b}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}}b^{3m}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $(1;q)_\infty = \left(\frac{b}{b};q\right)_\infty = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= F(b,b,q) \\ &= c_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} b^{3m} + c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}} b^{3m+1} \\ &- c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}} b^{3m+2}, \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} & c_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} b^{3m} \\ &= c_1 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}} b^{3m+2} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}} b^{3m+1} \right) \end{aligned}$$

bulunur. c_1 için yukarıda elde edilen değer kullanılırsa

$$c_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} b^{3m} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}} b^{3m+1}$$

elde edilir.

Şimdi, c_0 ve c_1 için elde edilen değerler

$$\begin{aligned} F(a,b,q) &= c_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} a^{3m} + c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}} a^{3m} \\ & -c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}} a^{3m+2} \end{aligned}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F(a,b,q) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} b^{3n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}} b^{3n+1} \right) \\ & \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} a^{3m} \\ & -\frac{1}{b} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} b^{3m} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} a^{3n+1} \right) \\ & +\frac{1}{b} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-3m}{2}} b^{3m} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}} a^{3n+2} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3n^2-n+3m^2-3m}{2}} a^{3m} b^{3n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3n^2+n+3m^2-3m}{2}} a^{3m} b^{3n+1} \\
&- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3n^2-n+3m^2-3m}{2}} a^{3n+1} b^{3m-1} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3n^2+n+3m^2-3m}{2}} a^{3n+2} b^{3m-1}
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu ise

$$
\begin{aligned}
F(a,b,q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3n^2+n+3m^2+3m}{2}} a^{-3m} b^{-3n} \\
&\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3n^2+n+3m^2+3m}{2}} a^{-3m} b^{-3n+1} \\
&\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3n^2+n+3m^2+3m}{2}} a^{-3n+1m} b^{-3m-1} \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3n^2+n+3m^2+3m}{2}} a^{3n+2} b^{-3m-1} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3n^2+n+3m^2+3m}{2}} \\
&\quad \times \left(a^{-3m} b^{-3n} - a^{-3m} b^{3n+1} - a^{3n+1} b^{-3m-1} + a^{3n+2} b^{-3m-1}\right)
\end{aligned}
$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla, Winquist Özdeşliğinin kanıtı tamamlanmış olur. □

Teorem 4.9. $n \geq 0$ *tam sayısı için*

$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$$

kongrüansı geçerlidir (Ramanujan 1919).

Kanıt (Winquist 1969) İlk olarak Winquist Özdeşliği,

$$
\begin{aligned}
&\left(q^2;q^2\right)_\infty^2 (a;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty (b;q)_\infty \left(\frac{q}{b};q\right)_\infty (ab;q)_\infty \left(\frac{q}{ab};q\right)_\infty \left(\frac{a}{b};q\right)_\infty \left(\frac{bq}{a};q\right)_\infty \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}} \\
&\quad \times \sum_{m=-\infty}^{-1} (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}} \left(a^{-3m} b^{-3n} - a^{-3m} b^{3n+1} - a^{-3n+1} b^{-3m-1} + a^{3n+2} b^{-3m-1}\right) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}
\end{aligned}
$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{-1} (-1)^m q^{\frac{3m^2+3m}{2}} \left(a^{-3m}b^{-3n} - a^{-3m}b^{3n+1} - a^{-3n+1}b^{-3m-1} + a^{3n+1}b^{-3m-1}\right)$$

şeklinde yazılsın.

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=-\infty}^{-1} (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}} \left(a^{-3m}b^{-3n} - a^{-3m}b^{3n+1} - a^{-3n+1}b^{-3m-1} + a^{3n+2}b^{-3m-1}\right)\\
&\quad = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2-m}{2}}\\
&\qquad \times \left(a^{3m}b^{-3n} - a^{3m}b^{3n+1} - a^{-3n+1}b^{3m-1} + a^{3n+2}b^{3m-1}\right)\\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}}\\
&\qquad \times \left(a^{3m+3}b^{-3n} - a^{3m+3}b^{3n+1} - a^{-3n+1}b^{3m+2} + a^{3n+2}b^{3m+2}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\left(q^2;q^2\right)_\infty^2 (a;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty (b;q)_\infty \left(\frac{q}{b};q\right)_\infty (ab;q)_\infty \left(\frac{q}{ab};q\right)_\infty \left(\frac{a}{b};q\right)_\infty \left(\frac{bq}{a};q\right)_\infty\\
&\quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}}\\
&\qquad \times \left[\left(a^{-3m} - a^{3m+3}\right) b^{-3n} + \left(a^{3m+3} - a^{-3m}\right) b^{3n+1}\right]\\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}}\\
&\qquad \times \left[\left(b^{3m+2} - b^{-3m-1}\right) a^{-3n+1} + \left(b^{-3m-1} - b^{3m+2}\right) a^{3n+2}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $b=1$ ise bu eşitliğin her iki tarafı da sıfır olur. Bu yüzden, her iki taraf $1-b$ sayısına bölünürse $b=1$ olduğunda sol taraf sıfırdan farklı olur ve

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to 1} \frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty^2 (a;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty (b;q)_\infty \left(\frac{q}{b};q\right)_\infty (ab;q)_\infty \left(\frac{q}{ab};q\right)_\infty \left(\frac{a}{b};q\right)_\infty \left(\frac{bq}{a};q\right)_\infty}{1-b}\\
&\quad = \left(q^2;q^2\right)_\infty^2 (a;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)\\
&\qquad \times \lim_{b\to 1} \frac{(b;q)_\infty \left(\frac{q}{b};q\right)_\infty (ab;q)_\infty \left(\frac{q}{ab};q\right)_\infty \left(\frac{a}{b};q\right)_\infty \left(\frac{bq}{a};q\right)_\infty}{1-b}\\
&\quad = \left(q^2;q^2\right)_\infty^2 (a;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right) (q;q)_\infty (q;q)_\infty (a;q)_\infty (a;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty\\
&\quad = (q;q)_\infty^4 (a;q)_\infty^3 \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty^3
\end{aligned}$$

elde edilir. Sağ taraf ise L'Hospital kuralından

$$\lim_{b\to 1}\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(a^{-3m}-a^{3m+3}\right)b^{-3n}+\left(a^{3m+3}-a^{-3m}\right)b^{3n+1}\\+\left(b^{3m+2}-b^{-3m-1}\right)a^{-3n+1}+\left(b^{-3m-1}-b^{3m+2}\right)a^{3n+2}\end{array}\right\}}{1-b}$$

$$=\lim_{b\to 1}\frac{\left\{\begin{array}{l}(-3n)\left(a^{-3m}-a^{3m+3}\right)b^{-3n-1}+(3n+1)\left(a^{3m+3}-a^{-3m}\right)b^{3n}\\+\left[(3m+2)\,b^{3m+1}-(-3m-1)\,b^{-3m-2}\right]a^{-3n+1}\\+\left[(-3m-1)\,b^{-3m-2}-(3m+2)\,b^{3m+1}\right]a^{3n+2}\end{array}\right\}}{-1}$$

$$=3na^{-3m}-3na^{3m+3}-(3n+1)\,a^{3m+3}+(3n+1)\,a^{-3m}-(3m+2)\,a^{-3n+1}$$
$$-(3m+1)\,a^{-3n+1}+(3m+1)\,a^{3n+2}+(3m+2)\,a^{3n+2}$$

bulunur. Buradan sağ taraf,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+n}\,q^{\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}}$$
$$\times\left((6n+1)\,a^{-3m}-3\,(2m+1)\,a^{-3n+1}+3\,(2m+1)\,a^{3n+2}-(6n+1)\,a^{3n+3}\right)$$

olur. Dolayısıyla,

$$(q;q)_\infty^4\,(a;q)_\infty^3\left(\frac{q}{a};q\right)_\infty^3$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+n}\,q^{\frac{3m^2+3n^2+m+n}{2}}$$
$$\times\left[(6n+1)\,a^{-3m}-3\,(2m+1)\,a^{-3n+1}+3\,(2m+1)\,a^{3n+2}-(6n+1)\,a^{3m+3}\right]$$

elde edilir. Bu eşitlikte $a=1$ alınırsa her iki taraf sıfır olur. Her iki taraf $(1-a)^3$ sayısına bölünürse sol taraf

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 1}\frac{(q;q)_\infty^4\,(a;q)_\infty^3\left(\frac{q}{a};q\right)_\infty^3}{(1-a)^3} &= \lim_{a\to 1}(q;q)_\infty^4\,(aq;q)_\infty^3\left(\frac{q}{a};q\right)_\infty^3\\ &= (q;q)_\infty^4\,(q;q)_\infty^3\,(q;q)_\infty^3=(q;q)_\infty^{10}\end{aligned}$$

ve sağ taraf

$$\lim_{a\to 1}\frac{\left\{\begin{array}{l}(6n+1)\,a^{-3m}-3\,(2m+1)\,a^{-3n+1}\\+3\,(2m+1)\,a^{3n+2}-(6n+1)\,a^{3m+3}\end{array}\right\}}{(1-a)^3}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{a\to 1} \frac{\left\{\begin{array}{l} -3m\left(6n+1\right)a^{-3m-1} - 3\left(-3n+1\right)\left(2m+1\right)a^{-3n} \\ +3\left(2m+1\right)\left(3n+2\right)a^{3n+1} - \left(6n+1\right)\left(3m+3\right)a^{3m+2} \end{array}\right\}}{-3\left(1-a\right)^2} \\
&= \lim_{a\to 1} \frac{\left\{\begin{array}{l} -3m\left(-3m-1\right)\left(6n+1\right)a^{-3m-2} \\ -3\left(-3n+1\right)\left(-3n\right)\left(2m+1\right)a^{-3n-1} \\ +3\left(2m+1\right)\left(3n+2\right)\left(3n+1\right)a^{3n} \\ -\left(6n+1\right)\left(3m+3\right)\left(3m+2\right)a^{3m+1} \end{array}\right\}}{6\left(1-a\right)} \\
&= \lim_{a\to 1} \frac{\left\{\begin{array}{l} -3m\left(-3m-1\right)\left(-3m-2\right)\left(6n+1\right)a^{-3m-3} \\ -3\left(-3n+1\right)\left(-3n\right)\left(-3n-1\right)\left(2m+1\right)a^{-3n-2} \\ +3\left(2m+1\right)\left(3n+2\right)\left(3n+1\right)\left(3n\right)a^{3n-1} \\ -\left(6n+1\right)\left(3m+3\right)\left(3m+2\right)\left(3m+1\right)a^{3m} \end{array}\right\}}{-6} \\
&= \frac{1}{6}\left\{\begin{array}{l} -3m\left(-3m-1\right)\left(-3m-2\right)\left(6n+1\right) \\ -3\left(-3n+1\right)\left(-3n\right)\left(-3n-1\right)\left(2m+1\right) \\ +3\left(2m+1\right)\left(3n+2\right)\left(3n+1\right)\left(3n\right) \\ -\left(6n+1\right)\left(3m+3\right)\left(3m+2\right)\left(3m+1\right) \end{array}\right\} \\
&= \frac{1}{6}\left(3m+1\right)\left(3m+2\right)\left(6n+1\right)\left(3m+3m+3\right) \\
&\quad - \frac{1}{6}3\left(2m+1\right)3n\left(3n+1\right)\left(3n+2+3n-1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(6n+1\right)\left(2m+1\right)\left(3m+1\right)\left(3m+2\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(6n+1\right)\left(2m+1\right)3n\left(3n+1\right) \\
&= \left(6n+1\right)\left(2m+1\right)\left(\frac{\left(3m+1\right)\left(3m+2\right)}{2} - \frac{3n\left(3n+1\right)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
\left(q;q\right)_\infty^{10} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}&\left(-1\right)^{m+n}\left(6n+1\right)\left(2m+1\right) \\
&\times\left(\frac{\left(3m+1\right)\left(3m+2\right)}{2} - \frac{3n\left(3n+1\right)}{2}\right)q^{\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Şimdi,

$$q^5 (q;q)_\infty^{10} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} (6n+1)(2m+1) \times \left(\frac{(3m+1)(3m+2)}{2} - \frac{3n(3n+1)}{2} \right) q^{\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}+5}$$

yazılsın.

$$\begin{aligned}
\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}+5 &= \frac{3m^2+3n^2+3m+n+10}{2} \\
&= \frac{36m^2+36n^2+36m+12n+10}{2} \\
&\quad -\frac{33m^2+33n^2+33m+11n}{2} \\
&= 18m^2+18n^2+18m+6n+5 \\
&\quad -11\frac{3m(m+1)}{2} - 11\frac{n(3n+1)}{2} \\
&\equiv 7m^2+7n^2+7m+6n+5 \\
&\equiv 7m^2+7n^2+7m+6n+5 \\
&\quad +33m^2+209n^2+33m+66n+11 \\
&= 40m^2+40m+10+216n^2+72n+16 \\
&= 2\left(20m^2+20m+5+108n^2+36n+3\right) \\
&= 2\left[5\left(4m^2+4m+1\right)+3\left(36n^2+12n+1\right)\right] \\
&= 2\left[5(2m+1)^2+3(6n+1)^2\right] \pmod{11}
\end{aligned}$$

ve modülo 11

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2m+1$	1	3	5	7	9	0	2	4	6	8	10
$5(2m+1)^2$	5	1	4	3	9	0	9	3	4	1	5

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$6n+1$	1	7	2	8	3	9	4	10	5	0	6
$3(6n+1)^2$	3	4	1	5	5	1	4	3	9	0	9

olduğundan

$$\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}+5 \equiv 0 \pmod{11} \iff 2m+1 \equiv 6n+1 \equiv \pmod{11}$$

bulunur. Bu ise $q^5\,(q;q)_\infty^{10}$ çarpımının bir seri açılımında q^{11n+11} teriminin katsayısının 11 ile bölünebildiğini ifade eder.

$$\begin{aligned} q^5\,(q;q)_\infty^{10} &= q^5\frac{(q;q)_\infty^{11}}{(q;q)_\infty} \equiv q^5\frac{(q^{11};q^{11})_\infty}{(q;q)_\infty} \\ &\equiv \frac{q^5}{(q;q)_\infty} = q^5\sum_{k=0}^{\infty} p\,(k)\,q^k = \sum_{k=0}^{\infty} p\,(k)\,q^{k+5} \\ &\equiv \sum_{k=-6}^{\infty} p\,(k+6)\,q^{k+11}\,(\mathrm{mod}\,11) \end{aligned}$$

olduğundan

$$p\,(11n+6) \equiv 0\,\mathrm{mod}\,(11)$$

elde edilir. □

4.3. Parçalanış Fonksiyonunun Bir Genellemesi

r bir tam sayı ve n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere $p_r\,(n)$ fonksiyonu

$$(q;q)_\infty^r = \sum_{n=0}^{\infty} p_r\,(n)\,q^n$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlansın (Gandhi 1963 ve Berndt, Gugg ve Kim 2011). $p_{-1}\,(n) = p\,(n)$ olduğundan $p_r\,(n)$ fonksiyonu, parçalanış fonksiyonunun bir genellemesidir. Bu bölümde, $p_r\,(n)$ fonksiyonunun sağladığı bazı özellikler kullanılarak parçalanış fonksiyonu ve özel olarak Ramanujan τ-fonksiyonu için bazı kongrüanslar elde edilecektir.

Önteorem 4.10. $p_r\,(n)$ *fonksiyonu*

$$p_r\,(n) = \frac{r}{n}\sum_{k=1}^{n} p_r\,(n-k)\,\sigma\,(k)$$

bağıntısını sağlar (Gandhi 1963).

Kanıt $p_r\,(n)$ fonksiyonu için üreteç fonksiyonu olan

$$p_r\,(n) = \frac{r}{n}\sum_{k=1}^{n} p_r\,(n-k)\,\sigma\,(k)$$

eşitliğinin her iki tarafından q değişkenine göre logaritmik türev alınırsa

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} np_r\,(n)\,q^{n-1}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_r\,(n)\,q^n} = r\left(\frac{1}{1-q} + \frac{2q}{1-q^2} + \cdots\right) = r\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mq^{m-1}}{1-q^m}$$

veya denk olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} np_r(n)\,q^{n-1} = r\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_r(n)\,q^n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{m-1}}{1-q^m}\right)$$

elde edilir. İlk olarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} np_r(n)\,q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} np_r(n)\,q^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,p_r(n+1)\,q^n$$

yazılabilir. Şimdi,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{m-1}}{1-q^m} &= \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}\sum_{r=0}^{\infty} q^{rm} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}\sum_{r=1}^{\infty} q^{(r-1)m} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} mq^{rm-1}\end{aligned}$$

toplamında $rm = n$ alınırsa yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} mq^{rm-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=\frac{n}{r}=1}^{\infty} \frac{n}{r}q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\frac{d}{n}}^{\infty} dq^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)\,q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n+1)\,q^n\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,p_r(n+1)\,q^n &= r\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_r(n)\,q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n+1)\,q^n\right) \\ &= r\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_r(k)\,\sigma(n+1-k)\right)q^n\end{aligned}$$

bulunur. q^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$(n+1)\,p_r(n+1) = r\sum_{k=0}^{n} p_r(k)\,\sigma(n+1-k)$$

veya denk olarak

$$np_r(n) = r\sum_{k=0}^{n-1} p_r(k)\,\sigma(n-k)$$

elde edilir. $\sigma(0) = 0$ kabulü ile

$$np_r(n) = r\sum_{k=0}^{n} p_r(k)\,\sigma(n-k) = r\sum_{k=0}^{n} p_r(n-k)\,\sigma(k) = r\sum_{k=1}^{n} p_r(n-k)\,\sigma(k)\,,$$

yani

$$p_r(n) = \sum_{k=1}^{n} p_r(n-k)\,\sigma(k)$$

bulunur. □

Önteorem 4.10 yardımı ile aşağıdaki kongrüans bağıntısı elde edilir.

Teorem 4.11. *m ile t aralarında asal olan doğal sayılar olmak üzere $\frac{R}{n} = \frac{m}{t}$ ise*

$$p_R(n) \equiv p_{-R}(n) \equiv 0 \pmod{m}$$

kongrüansları sağlanır (Gandhi 1963).

Kanıt Önteorem 4.10 gereği

$$p_{\alpha R}(n) = \frac{\alpha R}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{\alpha R}(n-k)\,\sigma(k) = \frac{\alpha m}{t} \sum_{k=1}^{n} p_{\alpha R}(n-k)\,\sigma(k)$$

bulunur. $p_r(n)$ ve $\sigma(n)$ tam sayı değerli fonksiyonlar olduğundan

$$p_{\alpha R}(n) \equiv 0 \pmod{m}$$

elde edilir. $\alpha = 1$ ve $\alpha = -1$ seçilirse teoremin kanıtı tamamlanır. □

Teorem 4.11'in kanıtından da görülebileceği gibi teoremin varsayımı altında

$$\sum_{k=1}^{n} p_{\alpha R}(n-k)\,\sigma(k) \equiv 0 \pmod{t}$$

elde edilir.

Aşağıdaki kongrüansların kanıtları basit yöntemler ile elde edilebilir.

Teorem 4.12. *R bir asal sayı olsun. $m \geq 0$ tam sayısı ve $\alpha = \pm 1$ için*

$$p_{\alpha kR}(mR) \equiv p_{\alpha k}(m) \pmod{R}$$

kongrüansları sağlanır (Gandhi 1963).

Kanıt Binom teoremi gereği

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{kR}(m)\,q^m = (q;q)_\infty^{kR} = (1-q)^{kR}\left(1-q^2\right)^{kR}\left(1-q^3\right)^{kR}\cdots$$

$$\begin{aligned} &\equiv \left(1-q^{R}\right)^{k}\left(1-q^{2R}\right)^{k}\left(1-q^{3R}\right)^{k}\cdots \\ &\equiv \left(q^{R};q^{R}\right)_{\infty}^{k}=\sum_{m=0}^{\infty}p_{k}\left(m\right)q^{Rm}\left(\operatorname{mod}R\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. q^{Rm} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$p_{kR}\left(mR\right)\equiv p_{k}\left(m\right)\left(\operatorname{mod}R\right)$$

bulunur. $p_{-kR}\left(mR\right)\equiv p_{-k}\left(m\right)\left(\operatorname{mod}R\right)$ kongrüansı da benzer şekilde kanıtlanır. □

Şimdi, Teorem 4.11 ve Teorem 4.12'nin bazı uygulamaları ele alınacaktır.

Teorem 4.13. *R bir asal sayı olsun. Bu durumda, $\alpha=\pm1$ ve k tam sayısı için $t=\frac{2n-k(3k-1)}{2R}$ olmak üzere*

$$p_{\alpha R+1}\left(n\right)\equiv\sum_{k}\left(-1\right)^{k}p_{\alpha}\left(t\right)\left(\operatorname{mod}R\right)$$

kongrüansları sağlanır (Gandhi 1963).

Kanıt Euler Beşgen Sayı Teoremi olan

$$\left(q;q\right)_{\infty}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(-1\right)^{k}q^{\frac{k(3k-1)}{2}}$$

eşitliği gereği

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}p_{R+1}\left(n\right)q^{n} &= \left(q;q\right)_{\infty}^{R+1}=\left(q;q\right)_{\infty}^{R}\left(q;q\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_{R}\left(n\right)q^{n+\frac{k(3k-1)}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k}\left(-1\right)^{k}p_{R}\left(n-\frac{k\left(3k-1\right)}{2}\right)\right)q^{n} \end{aligned}$$

elde edilir. q^{n} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$p_{R+1}\left(n\right)=\sum_{k}\left(-1\right)^{k}p_{R}\left(n-\frac{k\left(3k-1\right)}{2}\right)$$

bulunur. Şimdi, Teorem 4.11 gereği R ile $n-\frac{k(3k-1)}{2}$ aralarında asal ise

$$p_{R}\left(n-\frac{k\left(3k-1\right)}{2}\right)\equiv0\left(\operatorname{mod}R\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan, $n-\frac{k(3k-1)}{2}$ sayısı R ile bölünebilirse, örneğin, $n-\frac{k(3k-1)}{2}=Rt$, $t\in\mathbb{Z}$ ise Teorem 4.12 gereği $t=\frac{2n-k(3k-1)}{2}$ olmak üzere

$$p_R\left(n-\frac{k(3k-1)}{2}\right)=p_R(tR)\equiv p_1(t)\,(\mathrm{mod}\,R)$$

bulunur. Dolayısıyla, teorem $\alpha=1$ için kanıtlanmış olur. $\alpha=-1$ olduğunda teorem ifadesi benzer şekilde kanıtlanabilir. □

Teorem 4.14. *R bir asal sayı olsun. Bu durumda, $\alpha=\pm1$ ve $k\geq 0$ tam sayısı için $t=\frac{2n-k(k+1)}{2R}$ olmak üzere*

$$p_{\alpha R+3}(n)\equiv\sum_k(-1)^k(2k+1)\,p_\alpha(t)\,(\mathrm{mod}\,R)$$

kongrüansları sağlanır (Gandhi 1963).

Kanıt Jacobi Özdeşliği olan

$$(q;q)_\infty^3=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\,q^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

eşitliği gereği

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}p_{R+3}(n)\,q^n &= (q;q)_\infty^{R+3}=(q;q)_\infty^{R}(q;q)_\infty^{3}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}p_R(n)\,q^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\,q^{\frac{k(k+1)}{2}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\,p_R\left(n-\frac{k(k+1)}{2}\right)\right)q^n\end{aligned}$$

elde edilir. q^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$p_{R+3}(n)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\,p_R\left(n-\frac{k(k+1)}{2}\right)$$

bulunur. Teorem 4.11 gereği R ile $n-\frac{k(k+1)}{2}$ sayıları aralarında asal ise

$$p_R\left(n-\frac{j(j+1)}{2}\right)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,R)$$

elde edilir. Diğer taraftan, bir t tam sayısı için $n-\frac{k(k+1)}{2}=Rt$ ise Teorem 4.12 gereği, $t=\frac{2n-k(k+1)}{2R}$ olmak üzere

$$p_R\left(n-\frac{k(k+1)}{2}\right)=p_R(tR)\equiv p_1(t)\ (\mathrm{mod}\ R)$$

bulunur. Dolayısıyla, teorem $\alpha=1$ için kanıtlanmış olur. $\alpha=-1$ olduğunda teorem ifadesi benzer şekilde kanıtlanabilir. □

4.3.1. Modülo 2 Kongrüanslar

Teorem 4.15. *Aşağıdaki kongrüanslar sağlanır (Gandhi 1963):*

(1) $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $m=\frac{2n-k(3k-1)}{4}$ ise $p(n)\equiv\sum_m p(m)\ (\mathrm{mod}\ 2)$.

(2) $j\geq 0$ tam sayısı için $s=\frac{2n-j(j+1)}{8}$ ise $p(n)\equiv\sum_s p(m)\ (\mathrm{mod}\ 2)$.

(3) $\sum_r p(n-r(3r-1))\equiv\begin{cases}1\ (\mathrm{mod}\ 2), & n=\frac{k(3k-1)}{2}\ \textit{ise,}\\ 0\ (\mathrm{mod}\ 2), & \textit{diğer durumlarda.}\end{cases}$

Kanıt

(1) Teorem 4.13'de $R=2$ ve $\alpha=-1$ seçilirse istenilen elde edilir.

(2) Teorem 4.14'de $R=-4$ ve $\alpha=1$ seçilirse

$$p(n)\equiv\sum_j p_{-4}\left(n-\frac{j(j+1)}{2}\right)(\mathrm{mod}\ 2)$$

elde edilir. Teorem 4.11 ve Teorem 4.12 gereği

$$\begin{aligned}p_{-4}(2n+1)&\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\ p_{-4}(2(2n+1))&\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\ p_{-4}(4n)&\equiv p_{-2}(2n)\equiv p(n)\ (\mathrm{mod}\ 2)\end{aligned}$$

ve $n-\frac{j(j+1)}{2}=4\left(\frac{2n-j(j+1)}{8}\right)$ olduğundan $s=\frac{2n-j(j+1)}{8}$ olmak üzere

$$p(n)\equiv\sum_s p(s)\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

elde edilir.

(3) $(q;q)_\infty=\frac{(q;q)_\infty^2}{(q;q)_\infty}$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_1(n)\,q^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_2(n)\,q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}p(n)\,q^n\right)$$

yazılabilir. Teorem 4.12 gereği $p_2(2m) \equiv p_1(m) \pmod 2$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_1(n)\, q^n \equiv \left(\sum_{m=0}^{\infty} p_1(m)\, q^{2m}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n\right) \pmod 2$$

elde edilir. Beşgen Sayı Teoremi gereği

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_1(n)\, q^n = (q;q)_\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k\, q^{\frac{k(3k-1)}{2}}$$

olduğundan

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k\, q^{\frac{k(3k-1)}{2}} \equiv \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^r \left(q^2\right)^{\frac{r(3r-1)}{2}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n\right) \pmod 2$$

veya denk olarak

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{\frac{k(3k-1)}{2}} &\equiv \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r} p(n)\, q^{n+r(3r-1)} \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r} p(n-r(3r-1))\, q^n \pmod 2\end{aligned}$$

bulunur. q teriminin kuvvetleri karşılaştırılırsa

$$\sum_{r} p(n-r(3r-1)) \equiv \begin{cases} 1 \pmod 2, & n = \frac{k(3k-1)}{2} \text{ ise,} \\ 0 \pmod 2, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

elde edilir. □

Teorem 4.11 ve Teorem 4.12 kullanılarak, n bir tek sayının karesi olduğunda $\tau(n)$ değerinin tek olduğunu ifade eden Teorem 4.1'in kanıtı verilebilir. Gerçekten,

$$(q;q)_\infty^r = \sum_{n=0}^{\infty} p_r(n)\, q^n$$

olduğundan $\tau(n) = p_{24}(n-1)$ olur. Teorem 4.12 gereği

$$p_{24}(8m) \equiv p_{12}(4m) \equiv p_6(2m) \equiv p_3(m) \pmod 2$$

ve $n \neq 8m$ ise $p_{24}(n) \equiv 0 \pmod 2$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\tau(8m+1) \equiv p_3(m) \pmod 2$$

ve $n \neq 8m+1$ ise $\tau(n) \equiv 0 \pmod{2}$ bulunur. Şimdi, $p_3(n)$ fonksiyonunun tanımı ve Jacobi Özdeşliği gereği

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) q^{\frac{k(k+1)}{2}} = (q;q)_\infty^2 = \sum_{n=0}^{\infty} p_3(n) q$$

yazılabilir. Buradan,

$$p_3\left(\frac{k(k+1)}{2}\right) \equiv 1 \pmod{2}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} 1 &\equiv p_3\left(\frac{k(k+1)}{2}\right) \equiv \tau\left(\frac{8k(k+1)}{2}+1\right) = \tau(4k(k+1)+1) \\ &= \tau\left((2k+1)^2\right) \pmod{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Teorem 4.1 ifadesidir.

4.3.2. Modülo 3 Kongrüanslar

Teorem 4.16. *k ile r tam sayılar olmak üzere $t = \frac{2n-k(3k-1)-r(3r-1)}{6}$ ise*

$$p(n) \equiv \sum_k \sum_r (-1)^{k+r} p(t) \pmod{3}$$

olur (Gandhi 1963).

Kanıt Teorem 4.13'de $\alpha = -1$ ve $R = 3$ alınırsa, $t = \frac{2n-r(3r-1)}{6}$, $r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$p_{-2}(n) \equiv \sum_r (-1)^r p(t) \pmod{3}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n &= \frac{1}{(q;q)_\infty} = (q;q)_\infty (q;q)_\infty^{-2} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} p_{-2}(n) q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k p_{-2}(n) q^{n+\frac{k(3k-1)}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k (-1)^k p_{-2}\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) q^n \end{aligned}$$

olduğundan

$$p(n) = \sum_k (-1)^k p_{-2}\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right)$$

bulunur. Dolayısıyla, $t = \frac{2n-k(3k-1)-r(3r-1)}{6}$, $k, r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$p(n) = \sum_k \sum_r (-1)^{k+r} p(t) \pmod 3$$

elde edilir. □

Sonuç 4.17. *$n \geq 0$ tam sayısı için*

$$\tau(3n+2) \equiv 0 \pmod 3 \quad \textit{ve} \quad \tau(3n+3) \equiv 0 \pmod 3$$

kongrüansları geçerlidir (Gandhi 1963).

Kanıt Teorem 4.11 gereği

$$p_{24}(3n+1) \equiv p_{24}(3n+2) \equiv 0 \pmod 3$$

ve $\tau(n) = p_{24}(n-1)$ olduğundan istenilen kongrüanslar elde edilir. □

4.3.3. Modülo 5, 7, 11 ve 23 Kongrüanslar

Teorem 4.18. *R bir asal sayı, m bir tam sayı ve k tam sayısı için t sayısı, $t \not\equiv \frac{k(3k-1)}{2} \pmod R$ özelliğinde olan bir tam sayı ise*

$$p_{\pm R+1}(mR+t) \equiv 0 \pmod R$$

olur (Gandhi 1963).

Kanıt R bir asal sayı olsun. $p_r(n)$ fonksiyonunun tanımı gereği

$$(q;q)_\infty^R (q;q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} p_{R+1}(n) q^n$$

olduğundan Euler Beşgen Sayı Teoreminden

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_{R+1}(n) q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} p_R(n) q^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k (-1)^k p_R(n) q^{n+\frac{k(3k-1)}{2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k (-1)^k p_R\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) q^n
\end{aligned}$$

elde edilir. q^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$p_{R+1}(n) = \sum_k (-1)^k p_R\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right)$$

bulunur. m ile t sayıları herhangi tam sayılar olmak üzere

$$p_{R+1}(mR+t) = \sum_k (-1)^k p_R\left(mR+t - \frac{k(3k-1)}{2}\right)$$

ifadesi ele alınsın. R ile $mR+t-\frac{k(3k-1)}{2}$ sayıları aralarında asal ise Teorem 4.11 gereği

$$p_R\left(mR+t-\frac{k(3k-1)}{2}\right) \equiv 0 \pmod{R}$$

olur. Dolayısıyla, $t \not\equiv \frac{k(3k-1)}{2} \pmod{R}$ ise $p_{R+1}(mR+t) \equiv 0 \pmod{R}$ elde edilir.

$p_{-R+1}(mR+t) \equiv 0 \pmod{R}$ kongrüansı da benzer şekilde kanıtlanır. $\square$

Örneğin, herhangi k tam sayısı için 3 ve 4 sayıları $\frac{k(3k-1)}{2}$ şeklinde yazılamadığından Teorem 4.18 gereği $t = 3$ ve $t = 4$ için $p_6(5m+t) \equiv 0 \pmod{5}$ ile $p_{-4}(5m+t) \equiv 0 \pmod{5}$ kongrüansları elde edilir.

Teorem 4.19. *R bir asal sayı, m bir tam sayı ve k tam sayısı için t sayısı, $t = \frac{R^2-1}{8}$ veya $t \not\equiv \frac{k(k+1)}{2} \pmod{R}$ özelliğinde olan bir tam sayı ise*

$$p_{\pm R+3}(mR+t) \equiv 0 \pmod{R}$$

olur (Gandhi 1963).

Kanıt R bir asal sayı olsun. $p_r(n)$ fonksiyonunun tanımı gereği

$$(q;q)_\infty^R (q;q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} p_{R+1}(n) q^n$$

olduğundan Jacobi Özdeşliğinden

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_{R+3}(n) q^n &= \sum_{n=0}^{\infty} p_R(n) q^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) q^{\frac{k(k+1)}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k \left(-1^k\right)(2k+1) p_R(n) q^{n+\frac{k(k+1)}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k (-1)^k (2k+1) p_R\left(n - \frac{k(k+1)}{2}\right) q^n\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, m ile t sayıları herhangi tam sayılar olmak üzere

$$p_{R+3}\left(mR+t\right)=\sum_{k}\left(-1\right)^{k}\left(2k+1\right)p_{R}\left(mR+t-\frac{k\left(k+1\right)}{2}\right)$$

bulunur. O halde,

$$p_{R}\left(mR+t-\frac{k\left(k+1\right)}{2}\right)\equiv 0\,(\operatorname{mod}R)\quad\text{veya}\quad 2k+1\equiv 0\,(\operatorname{mod}R)$$

olduğunda $p_{R+3}\left(mR+t\right)\equiv 0\,(\operatorname{mod}R)$ elde edilir. İlk kongrüans, $t\not\equiv\frac{k(k+1)}{2}\,(\operatorname{mod}R)$ olduğunda meydana gelir. Diğer bir ifade ile $t\equiv\frac{k(k+1)}{2}\,(\operatorname{mod}R)$ ise

$$p_{R}\left(mR+t-\frac{k\left(k+1\right)}{2}\right)\not\equiv 0\,(\operatorname{mod}R)$$

olur. Dolayısıyla, $2k+1\equiv 0\,(\operatorname{mod}R)$ ise $k=\frac{R-1}{2}$ olur. Bu ise $t=\frac{k(k+1)}{2}=\frac{R^2-1}{8}$ olmasını gerektirir.

$p_{-R+3}\left(mR+t\right)\equiv 0\,(\operatorname{mod}R)$ kongrüansı da benzer şekilde kanıtlanır. □

Örneğin, $R=5$ ise Teorem 4.19 gereği $t=2,3,4$ için $p_{-2}\left(5m+t\right)\equiv 0\,(\operatorname{mod}5)$ elde edilir.

Teorem 4.20. *R bir asal sayı, m ile k tam sayılar ve t sayısı, $p_k\left(mR+t\right)\equiv 0\,(\operatorname{mod}R)$ kongrüansının sağlandığı bir tam sayı ise*

$$p_{\pm k\pm R}\left(mR+t\right)\equiv 0\,(\operatorname{mod}R)$$

olur (Gandhi 1963).

Kanıt Herhangi bir s tam sayısı için $(q;q)_{\infty}^{k\pm Rs}=(q;q)_{\infty}^{\pm Rs}(q;q)_{\infty}^{k}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}p_{k\pm Rs}\left(n\right)q^{n} &= \sum_{n=0}^{\infty}p_{k}\left(n\right)q^{n}\sum_{n=0}^{\infty}p_{\pm Rs}\left(n\right)q^{n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}p_{k}\left(j\right)p_{\pm Rs}\left(n-j\right)\right)q^{n}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}p_{k\pm Rs}\left(mR+t\right) &= \sum_{j=0}^{mR+t}p_{k}\left(j\right)p_{\pm}\left(mR+t-j\right)\\ &= p_{k}\left(mR+t\right)+\sum_{j=0}^{mR+t-1}p_{k}\left(j\right)p_{\pm Rs}\left(mR+t-j\right)\end{aligned}$$

bulunur. $j = 0, 1, 2, \ldots, mR+t-1$ için Rs ile $mR+t-j$ sayıları aralarında asal olduğundan $p_{\pm Rs}(mR+t-j) \equiv 0 \pmod{R}$ olur. Dolayısıyla, $p_k(mR+t) \equiv 0 \pmod{R}$ olduğunda $p_{k\pm Rs}(mR+t) \equiv 0 \pmod{R}$ elde edilir.

$p_{-k\pm Rs}(mR+t) \equiv 0 \pmod{R}$ kongrüansı da benzer şekilde kanıtlanır. □

Örneğin,

$$
\begin{aligned}
p(5m+4) &\equiv 0 \pmod{5}, \\
p(7m+5) &\equiv 0 \pmod{7}, \\
p(11m+6) &\equiv 0 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

olduğundan Teorem 4.20'de $s = 1$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
p_{-6}(5m+4) &\equiv 0 \pmod{5}, \\
p_{-8}(7m+5) &\equiv 0 \pmod{7}, \\
p_{-12}(11m+6) &\equiv 0 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
p_{4}(5m+4) &\equiv 0 \pmod{5}, \\
p_{6}(7m+5) &\equiv 0 \pmod{7}, \\
p_{10}(11m+6) &\equiv 0 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Bu bölümde elde edilen kongrüanslar kullanılarak Ramanujan τ-fonksiyonu için Bölüm 4.1'de 5, 7 ve 23 modülüne göre kanıtlanmış olan bazı sonuçlar tekrar ifade edilebilir.

Teorem 4.19'dan $t = 2, 4, 5$ ve 6 için

$$p_{10}(7m+t) \equiv 0 \pmod{7}$$

bulunur. Teorem 4.20'de $k = 10$, $s = 2$ ve $R = 7$ alınırsa $t = 2, 4, 5$ ve 6 için

$$p_{10+14}(7m+t) = p_{24}(7m+t) \equiv 0 \pmod{7}$$

elde edilir. $\tau(n) = p_{24}(n-1)$ olduğundan $t = 3, 5, 6$ ve 7 için

$$\tau(7m+t) \equiv 0 \pmod{7}$$

bulunur. Bu ise Teorem 4.2 ile verilen sonuçtur.

Diğer taraftan, Teorem 4.20'de $k = 4$, $s = 4$ ve $R = 5$ alınırsa $p_4(5m+4) \equiv 0 \pmod 5$ olduğundan

$$p_{4+20}(5m+4) = p_{24}(5m+4) \equiv 0 \pmod 5$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\tau(5m) \equiv 0 \pmod 5$$

bulunur ki bu, Sonuç 4.6 ile verilen kongrüanstır.

Son olarak, Teorem 4.18'de $R = 23$ alınırsa $t \not\equiv \frac{k(3k-1)}{2} \pmod{23}$ olmak üzere

$$p_{24}(23m+t) \equiv 0 \pmod{23}$$

bulunur. Dolayısıyla, $t - 1 \not\equiv \frac{k(3k-1)}{2} \pmod{23}$ olmak üzere

$$\tau(23m+t) \equiv 0 \pmod{23}$$

elde edilir.

4.3.4. $p_r(n)$ İçin Ramanujan Tarafından Verilen Kongrüanslar

Bu bölümde, $p_r(n)$ için Ramanujan tarafından elde edilen bazı kongrüanslar ifade edilmiştir.

Teorem 4.21. *k bir tam sayı, n negatif olmayan bir tam sayı ve $R = 6m - 1$ bir asal sayı olsun. Bu durumda,*

$$p_{-kR+4}\left(nR - \frac{R+1}{6}\right) \equiv 0 \pmod R$$

olur (Berndt, Gugg ve Kim 2011).

Kanıt $p_r(n)$ fonksiyonunun tanımı, Jacobi Özdeşliği ve Euler Beşgen Sayı Teoremi gereği

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_{-kR+4}(n)\, q^n &= (q;q)_\infty^{-kR}(q;q)_\infty^3 (q;q)_\infty \\ &\equiv \left(q^R;q^R\right)_\infty^{-k} \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} (-1)^{\alpha+\beta}(2\alpha+1)\, q^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}+\frac{\beta(3\beta+1)}{2}} \pmod R\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\frac{\alpha\,(\alpha+1)}{2}+\frac{\beta\,(3\beta+1)}{2}+\frac{R+1}{6}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,R)$$

özelliğinde olan terimler incelenecektir. Bu kongürans, 24 ile çarpılırsa

$$12\alpha\,(\alpha+1)+12\beta\,(3\beta+1)+4R+4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,R)$$

veya denk olarak

$$3\,(2\alpha+1)^2+(6\beta+1)^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,R)$$

elde edilir. Buradan,

$$(6\beta+1)^2\equiv -3\,(2\alpha+1)^2\,(\mathrm{mod}\,R)$$

olur. $R\nmid(2\alpha+1)$ ise son kongürans,

$$\left(\frac{6\beta+1}{2\alpha+1}\right)^2\equiv -3\,(\mathrm{mod}\,R)$$

şeklinde yazılır ve bu durumda -3 sayısı R sayısının bir kuadratik kalanı olur.

$$\left(-\frac{3}{R}\right)=\left(\frac{R}{3}\right)=\left(\frac{6m-1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)=(-1)^{\frac{3-1}{2}}=-1$$

olduğundan -3 sayısı, R sayısının bir kuadratik kalanı değildir. Bu çelişki,

$$3\,(2\alpha+1)^2++(6\beta+1)^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,R)$$

ise $R\mid(2\alpha+1)$ olduğunu ifade eder. Buradan, $p_{-kR+4}\left(nR-\frac{R+1}{6}\right)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,R)$ elde edilir. □

Sonuç 4.22. *Her pozitif n tam sayısı için*

$$p_{-6}\,(5n-1)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,5)\quad \textit{ve}\quad p_{-7}\,(11n-2)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,11)$$

kongrüansları geçerlidir (Berndt, Gugg ve Kim 2011).

Kanıt Teorem 4.21'de $R=5$ ve $k=2$ alınırsa ilk kongrüans, $R=11$ ve $k=1$ alınırsa ikinci kongrüans elde edilir. □

Teorem 4.23. *Herhangi bir k tam sayısı, bir pozitif n tam sayısı ve $4 \mid (R+1)$ özelliğinde olan R asal sayısı için*

$$p_{-kR+6}\left(nR - \frac{R+1}{4}\right) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, R)$$

olur (Berndt, Gugg ve Kim 2011).

Kanıt $p_r(n)$ fonksiyonunun tanımı ve Jacobi Özdeşliği gereği

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_{-kR+6}(n)\, q^n &= (q;q)_{\infty}^{-kR} (q;q)_{\infty}^{6} \\ &\equiv \left(q^R;q^R\right)^{-k} \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\alpha+\beta} \\ &\quad \times (2\alpha+1)(2\beta+1)\, q^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}+\frac{\beta(\beta+1)}{2}} \,(\mathrm{mod}\, R)\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} + \frac{\beta(\beta+1)}{2} + \frac{R+1}{4} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, R)$$

özelliğinde olan terimler incelenecektir. Bu kongrüans, 8 ile çarpılırsa

$$4\alpha(\alpha+1) + 4\beta(\beta+1) + 2R + 2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, R)$$

veya denk olarak

$$(2\alpha+1)^2 + (2\beta+1)^2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, R)$$

elde edilir. Son kongrüans, $R \nmid (2\alpha+1)$ ise

$$\left(\frac{2\alpha+1}{2\beta+1}\right)^2 \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, R)$$

veya $R \nmid (2\beta+1)$ ise

$$\left(\frac{2\beta+1}{2\alpha+1}\right)^2 \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, R)$$

şeklinde yazılır ve bu durumda -1 sayısı R sayısının bir kuadratik kalanı olur.

$$\left(-\frac{1}{R}\right) = (-1)^{\frac{4m-1-1}{2}} = (-1)^{2m-1} = -1$$

olduğundan -1 sayısı, R sayısının bir kuadratik kalanı değildir. Bu çelişki,

$$(2\alpha+1)^2 + (2\beta+1)^2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, R)$$

ise $R \mid (2\alpha+1)$ ve $R \mid (2\alpha+1)$ olduğunu ifade eder. Buradan, $p_{-kR+6}\left(nR - \frac{R+1}{4}\right) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, R)$ elde edilir. $\square$

Sonuç 4.24. *Her pozitif n tam sayısı ve herhangi k tam sayısı için*

$$p_{-3k+6}(3n-1) \equiv 0 \pmod 3$$

olur (Berndt, Gugg ve Kim 2011).

Kanıt Teorem 4.23'de $R=3$ alınırsa istenilen kongrüans elde edilir. □

Sonuç 4.25. *Bir pozitif n tam sayısı ve $4 \mid (R+1)$ özelliğinde olan R asal sayısı için*

$$p_6\left(nR - \frac{R+1}{4}\right) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} R^2\right)$$

olur (Berndt, Gugg ve Kim 2011).

Kanıt Teorem 4.23'ün kanıtında ifade edilen

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{-kR+6}(n)\, q^n \equiv \left(q^R; q^R\right)^{-k} \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\alpha+\beta}(2\alpha+1)(2\beta+1)\, q^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}+\frac{\beta(\beta+1)}{2}} \pmod R$$

kongrüansında $k=0$ yazılır ve $R^2 \mid (2\alpha+1)(2\beta+1)$ ifadesi kullanılırsa

$$p_{-kR+6}\left(nR - \frac{R+1}{4}\right) \equiv 0 \pmod R$$

kongrüansındaki R modülü, R^2modülüne genişletilebilir. □

Sonuç 4.26. *Her pozitif n tam sayısı için*

$$p_6(7n-2) \equiv 0 \pmod{49}$$

olur (Berndt, Gugg ve Kim 2011).

Kanıt Sonuç 4.25'de $R=7$ alınırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 4.27. *Herhangi bir k tam sayısı, bir pozitif n tam sayısı ve $12 \mid (R+1)$ özelliğinde olan R asal sayısı için*

$$p_{-kR+10}\left(nR - \frac{5(R+1)}{12}\right) \equiv 0 \pmod R$$

olur (Berndt, Gugg ve Kim 2011).

Kanıt Winquist Özdeşliği gereği

$$(q;q)_\infty^{10} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+n}(6n+1)(2m+1) \times\left(\frac{(3m+1)(3m+2)}{2}-\frac{3n(3n+1)}{2}\right)q^{\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{-1}(-1)^m(2m+1)\frac{(3m+1)(3m+2)}{2}q^{\frac{3m^2+3m}{2}} &= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(-2m+1)\frac{(-3m+1)(-3m+2)}{2}q^{\frac{3m^2-3m}{2}}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(2m-1)\frac{(3m-1)(3m-2)}{2}q^{\frac{3m^2-3m}{2}}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)\frac{(3m+1)(3m+2)}{2}q^{\frac{3m^2+3m}{2}}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m(2m+1)\frac{(3m+1)(3m+2)}{2}q^{\frac{3m^2+3m}{2}} &= \sum_{m=-\infty}^{-1}(-1)^m(2m+1)\frac{(3m+1)(3m+2)}{2}q^{\frac{3m^2+3m}{2}}\\ &\quad+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)\frac{(3m+1)(3m+2)}{2}q^{\frac{3m^2+3m}{2}}\\ &= 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)\frac{(3m+1)(3m+2)}{2}q^{\frac{3m^2+3m}{2}}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$2(q;q)_\infty^{10} = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+n}(6n+1)(2m+1) \times\left(\frac{(3m+1)(3m+2)}{2}-\frac{3n(3n+1)}{2}\right)q^{\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}}$$

olur.

$$\begin{aligned}24(6n+1)(2m+1)\left(\frac{(3m+1)(3m+2)}{2}-\frac{3n(3n+1)}{2}\right)\\ = 4(6n+1)(6m+3)\left(9m^2+9m+8-9n^2-3n\right)\end{aligned}$$

$$= (6n+1)(6m+3)\left[36m^2+36m+8-36n^2-12n\right]$$
$$= (6n+1)(6m+3)\left[36m^2+36m+9-\left(36n^2+12n+1\right)\right]$$
$$= (6n+1)(6m+3)\left[(6m+3)^2-(6n+1)^2\right]$$
$$= (6n+1)(6m+3)^3-(6n+1)^3(6m+3)$$

olduğundan

$$48\,(q;q)_\infty^{10} = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\left[(6n+1)(6m+3)^3-(6n+1)^3(6m+3)\right]q^{3m^2+3n^2+3m+n}$$

bulunur. Bu eşitlik ile

$$p_{-kR+10}(n)\,q^n = (q;q)_\infty^{-kR}(q;q)_\infty^{10}$$
$$\equiv \left(q^R;q^R\right)_\infty^{-k}\frac{1}{48}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+n}\left[(6n+1)(6m+3)^3-(6n+1)^3(6m+3)\right]$$
$$\times\, q^{\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}} \pmod R$$

elde edilir.

$$\frac{(3m^2+3n^2+3m+n)}{2}+\frac{5(R+1)}{12}\equiv 0 \pmod R$$

özelliğinde olan terimler incelenecektir. Bu kongrüans, 24 ile çarpılırsa

$$12\left(3m^2+3n^2+3m+n\right)+10R+10\equiv 0 \pmod R$$

veya denk olarak

$$(6m+3)^2+(6n+1)^2\equiv 0 \pmod R$$

elde edilir. Son kongrüans, $R \nmid (6m+3)$ ise

$$\left(\frac{6n+1}{6m+3}\right)^2\equiv -1 \pmod R$$

veya $R \nmid (6n+1)$ ise

$$\left(\frac{6m+3}{6n+1}\right)^2\equiv -1 \pmod R$$

şeklinde yazılır ve bu durumda -1 sayısı R sayısının bir kuadratik kalanı olur.

$$\left(-\frac{1}{R}\right)=(-1)^{\frac{R-1}{2}}=(-1)^{\frac{12m-1-1}{2}}=(-1)^{6m-1}=-1$$

olduğundan -1 sayısı, R sayısının bir kuadratik kalanı değildir. Bu çelişki,

$$(6m+3)^2 + (6n+1)^2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, R)$$

ise $R \mid (6m+3)$ ve $R \mid (6n+1)$ olduğunu ifade eder. Buradan,

$$p_{-kR+10}\left(nR - \frac{5\,(R+1)}{12}\right) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, R)$$

elde edilir. □

Sonuç 4.28. *Herhangi bir n tam sayısı ve $12 \mid (R+1)$ özelliğinde olan R asal sayısı için*

$$p_{10}\left(nR - \frac{5\,(R+1)}{12}\right) \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, R^4\right)$$

kongrüansı geçerlidir (Berndt, Gugg ve Kim 2011).

Kanıt Teorem 4.27'de $k = 0$ alınırsa istenilen elde edilir. □

5. SONUÇLAR

Bir derleme çalışması olan bu tez çalışmasında, q-serileri ve teta fonksiyonları teorilerinde bazı temel sonuçlar ifade edilmiştir. Bu sonuçlar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(q)_n} z^n = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty} \qquad (|q| < 1, |z| < 1)$$

ile verilen q-binom teoremi,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \left(-zq; q^2\right)_\infty \left(-\frac{q}{z}; q^2\right)_\infty \left(q^2; q^2\right)_\infty \qquad (z \neq 0, |q| < 1)$$

ile verilen Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}} = (q;q)_\infty \qquad (|q| < 1)$$

ile verilen Euler Beşgen Sayı Teoremi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{\frac{n(n+1)}{2}} = (q;q)_\infty^3 \qquad (|q| < 1)$$

ile verilen Jacobi Özdeşliği,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n = \frac{(az)_\infty \left(\frac{q}{az}\right)_\infty (q)_\infty \left(\frac{b}{a}\right)_\infty}{(z)_\infty \left(\frac{b}{az}\right)_\infty (b)_\infty \left(\frac{q}{a}\right)_\infty} \qquad \left(\left|\frac{b}{a}\right| < |z| < 1, |q| < 1\right)$$

ile verilen Ramanujan ${}_1\psi_1$ Toplam Formülü ve $t \neq 0, |q| < 1$ için

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{3n^2+n}{2}} \left(t^{3n} - t^{-3n-1}\right) = (q;q)_\infty (qt;q)_\infty \left(\frac{1}{t}; q\right)_\infty \left(t^2 q; q^2\right)_\infty \left(\frac{q}{t^2}; q^2\right)_\infty$$

ile verilen Beşli Çarpım Özdeşliği şeklindedir. Bu bağıntılar kullanılarak bir pozitif n tam sayısının pozitif tam sayılarının toplamı şeklinde yazılabilme sayısı olan $p(n)$ parçalanış fonksiyonu için Ramanujan tarafından verilen

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$$

$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7$$

$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$$

kongrüansları detaylı olarak kanıtlanmıştır. Özel olarak, $p\,(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$ kongrüansının kanıtı için, a ile b sıfırdan farklı karmaşık sayılar ve q, $|q| < 1$ özelliğinde olan bir karmaşık sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{\frac{3m^2+3n^2+3m+n}{2}} \\
&\qquad \times \left(a^{-3m} b^{-3n} - a^{-3m} b^{3n+1} - a^{-3n+1} b^{-3m+1} + a^{3n+2} b^{-3m-1}\right) \\
&\qquad = (q;q)_\infty^2 \, (a;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty (b;q)_\infty \left(\frac{q}{b};q\right)_\infty \\
&\qquad \times (ab;q)_\infty \left(\frac{q}{ab};q\right)_\infty \left(\frac{a}{b};q\right)_\infty \left(\frac{bq}{a};q\right)_\infty
\end{aligned}$$

ile ifade edilen Winquist Özdeşliği kanıtlanmıştır. Ayrıca, parçalanış fonksiyonu ile yakın ilişkiye sahip olan Ramanujan τ-fonksiyonu için bazı kongrüanslar verilerek kanıtlanmıştır. Tezin son kısmında, r bir tam sayı ve n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere

$$(q;q)_\infty^r = \sum_{n=0}^{\infty} p_r\,(n)\, q^n$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanan ve $p\,(n)$ parçalanış fonksiyonunun bir genellemesi olan $p_r\,(n)$ fonksiyonunun sağladığı bazı temel bağıntılar ile Ramanujan tarafından ifade edilen kongrüanslar ve bu kongrüansların sonuçları verilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Adiga, C., Berndt, B.C., Bhargava, S. and Watson, G.N. 1985. Chapter 16 of Ramanujan's Second Notebook: Theta-functions and q-series, Mem. Amer. Math. Soc., No. 315, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 85 sayfa.

Ahlgren, S. 2000. *The partition function modulo composite integers M, Math. Ann.* 318: 795-803.

Ahlgren, S. and Boylan, M. 2003. *Arithmetical properties of the partition function, Invent. Math.* 153: 487-502.

Ahlgren, S. and Ono K. 2001. *Congruence properties for the partition function, Proc. Nat. Acad. Sci.* 98: 12882-12884.

Andrews, G.E. 1965. *A simple proof of the Jacobi triple product identity, Proc. Amer. Math. Soc.* 16: 333-334.

Andrews, G.E. 1976. The Theory of Partitions, Addison-Wesley Publishing, Reading, MA, 252 sayfa.

Andrews, G.E. and Askey, R. 1978. *A simple proof of Ramanujan's ${}_1\psi_1$. Aequationes Math.,* 18: 333-337.

Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R. 1999. Special Functions, Cambridge University Press, 664 sayfa.

Andrews, G.E. and Berndt, B.C. 2005. Ramanujan's Lost Notebook, Part I, Springer-Verlag, New York, 437 sayfa.

Andrews, G.E. and Berndt, B.C. 2008. Ramanujan's Lost Notebook, Part II, Springer-Verlag, New York, 418 sayfa.

Andrews, G.E. and Berndt, B.C. 2012. Ramanujan's Lost Notebook, Part III, Springer-Verlag, New York, 436 sayfa.

Andrews, G.E. and Eriksson, K. 2004. Integer Partitions, Cambridge University Press, Cambridge, 141 sayfa.

Andrews, G.E. and Roy, R. 1997. *Ramanujan's method in q-series congruences, Elec. J. Comb.* 4: R2, 7 sayfa.

Apostol, T. M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York, 340 sayfa.

Berndt, B.C. 1985. Ramanujan's Notebooks, Part I, Springer-Verlag, New York, 357 sayfa.

Berndt, B.C. 1989. Ramanujan's Notebooks, Part II, Springer-Verlag, New York, 354 sayfa.

Berndt, B.C. 1991. Ramanujan's Notebooks, Part III, Springer-Verlag, New York, 510 sayfa.

Berndt, B.C. 1994. Ramanujan's Notebooks, Part IV, Springer-Verlag, New York, 451 sayfa.

Berndt, B.C. 1998. Ramanujan's Notebooks, Part V, Springer-Verlag, New York, 624 sayfa.

Berndt, B.C. 2006. Number Theory in the Spirit of Ramanujan, American Mathematical Society, Providence, RI, 187 sayfa.

Berndt, B.C. 2007. *Ramanujan's congruences for the partition function, modulo 5, 7, and 11, Inter. J. Number Theory* 3: 349-354.

Berndt, B.C., Chan, S.H., Liu, Z.-G. and Yeşilyurt, H. 2004. *A new identity for $(q;q)_\infty^{10}$ with an application to Ramanujan's partition congruences modulo 11, Quart. J. Math. (Oxford)* 55: 13-30.

Berndt, B.C., Gugg, C. and Kim, S. 2011. Ramanujan's elementary method in partition congruences, in Partitions, q-Series and Modular Forms, K. Alladi and F. Garvan, eds., Develop. in Math., 23, Springer-Verlag, New York, 13-22, 224 sayfa.

Bhargava, S. 1995. *A simple proof of the quintuple product identity, J. Indian Math. Soc.* 61: 226-228.

Burton, D.M. 2007. Elementary Number Theory, Sixth Edition, McGraw-Hill, New York, 434 sayfa.

Cao, Z. 2011. *A new proof of Winquist's identity, Integers* 11: #A60, sayfa 5.

Carlitz, L. and Subbarao, M.V. 1972. *A simple proof of the quintuple product identity, Proc. Amer. Math. Soc.* 32: 42-44.

Cauchy, A. 1893. Oeuvres, Ser. 1, Vol.8, Gauthier-Villars, Paris.

Chan, H.H. 1995. *New proofs of Ramanujan's partition identities for moduli 5 and 7, J. Number Theory* 53: 144-158.

Chan, S.H. 2005. *A short proof of Ramanujan's famous* ${}_1\psi_1$ *summation formula, J. Approx. Theory* 132: 149-153.

Chowla, S.D. 1934. *Congruence properties of partitions, J. London Math. Soc.* 9: 247.

Cooper, S. *The quintuple product identity, Inter. J. Number Theory* 2: 115-161.

Dobbie, J.M. 1955. *A simple proof of some partition formulae of Ramanujan, Quart. J. Math. (Oxford)* 6: 193-196.

Drost, J.L. 1997. *A shorter proof of the Ramanujan congruence modulo 5, Amer. Math. Monthly* 104: 963-964.

Euler, L. 1748. Introductio in Analysin Infinitorum, Marcum-Michaelem, Bousquet, Lausanneae.

Gandhi, J.M. 1963. *Congruences for* $p_r(n)$ *and Ramanujan's* τ *function, Amer. Math. Monthly* 70: 265-274.

Gasper, G. and Rahman, M. 2004. Basic Hypergeometric Series, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 428 sayfa.

Hirschhorn, M.D. 1987. *A generalization of Winquist's identity and a conjecture of Ramanujan, J. Indian Math. Soc.* 51: 49-55.

Hirschhorn, M.D. 1994. *Ramanujan's partition congruences, Discrete Math.* 131: 351-355.

Hirschhorn, M.D. 1999. *Another short proof of Ramanujan's mod 5 partition congruence, and more, Amer. Math. Monthly* 106: 580-583.

Jacobi, C.G.J. 1829. Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Bornträger, Regiomonti, Reprinted by Cambridge University Press, 2012.

Kang, S.-Y. 1997. *A new proof of Winquist's identity, J. Comb. Theory, Series A* 78: 313-318.

Murty, M.R. 1988. The Ramanujan τ function, in Ramanujan Revisited, G.E. Andrews, R.A. Askey, B.C. Berndt, K.G. Ramanathan, and R.A. Rankin, eds., Academic Press, San Diego, 269-288.

Nathanson, M.B. 2000. Elementary Methods in Number Theory, Springer-Verlag, New York, 514 sayfa.

Niven, I., Zuckerman, H.S. and Montgomery H.L. 1991. An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed., Wiley, New York, 544 sayfa.

Nupet, C. and Kongsiriwong S. 2010. *Two simple proofs of Winquist's identity, Elect. J. Comb.* 17: #R116, 6 sayfa.

Prodinger, H. 2000. Lecture notes on the course q-series in combinatorics and number theory, http://finanz.math.tu-graz.ac.at/ prodinger/teach.htm.

Radamacher, H. 1937. *On the partition function $p(n)$, Proc. London Math. Soc.* 43: 78-84.

Ramanujan, S. 1916. *On certain arithmetical functions, Trans. Cambridge Philos. Soc.* 22: 159-184.

Ramanujan, S. 1919. *Some properties of $p(n)$, the number of partitions of n, Proc. Cambridge Philos. Soc.* 19: 210-213.

Ramanujan, S. 1920. *Congruence properties of partitions, Proc. London Math. Soc.* 18: sayfa 19.

Ramanujan, S. 1921. *Congruence properties of partitions, Math. Z.* 9: 147-153.

Ramanujan, S. 1988. The Lost Notebook and Other Unpublished Papers, Narosa, New Delhi.

Watson, G. N. 1929. *Theorems stated by Ramanujan. VII: Theorems on continued fractions. J. London Math. Soc.*, 4: 39–48

Winquist, L. 1969. *An elementary proof of* $p\,(11m+6) \equiv 0 \pmod{11}$*, J. Comb. Theory*, 6: 56-59.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet CİCİMEN

E-mail: mehmetcicimen@akdeniz.edu.tr

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2017-devam ediyor	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2010-2015	Ege Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İzmir