T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

# $2 \times 2$ TÜRÜNDEN MATRİSLERİN KAREKÖKÜNÜN HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

İmren AKGÜL (ŞIK)

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2020

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

# $2 \times 2$ TÜRÜNDEN MATRİSLERİN KAREKÖKÜNÜN HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

İmren AKGÜL (ŞIK)

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2020

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# $2 \times 2$ TÜRÜNDEN MATRİSLERİN KAREKÖKÜNÜN HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

İmren AKGÜL (ŞIK)

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 25/02/2020 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç.Dr. Hakan ŞİMŞEK

# ÖZET

## $2 \times 2$ TÜRÜNDEN MATRİSLERİN KAREKÖKÜNÜN HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

**İmren AKGÜL (ŞIK)**

**Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof.Dr. Mustafa ÖZDEMİR**

**Şubat 2020, 59 sayfa**

Matrisler, afin dönüşümlerle birlikte, bilgisayar ve mühendislik teknolojisinde önemli olarak kullanılır. Özellikle, 2x2 matrisler düzlemsel hareketlerin incelenmesi açısından önemlidir. Matrislerin ve özellikle 2x2 matrislerin köklerinin bulunması da lineer cebirin önemli problemlerinden biridir. Literatürde 2x2 türünden matrislerin kareköklerinin bulunması genel olarak Schur teoremi, Cayley Hamilton teoremi ve Newton teoremine dayanan yöntemlerdir. Bunun yanında dizisel yineleme bağıntıları yardımıyla da bulunabilmektedir. Bu çalışmada, öncelikle, literatürde bulunan yöntemlerin bazıları verilecek ve kullanışlı olup olmadıkları incelenecektir. Bunun yanında, kompleks sayılar, dual sayılar ve hiperbolik sayılar yardımıyla da bazı özel matrislerin köklerin bulunabileceği gösterilecektir. Son olarak hibrit sayılar yardımıyla bir matrisin köklerinin nasıl bulunacağı detaylı incelenecektir. Özellikle, hiperbolik hibrit sayıların idempotent tabanı yardımıyla bir matrisin karekökünün nasıl bulunacağı literatürde bulunmayan bir yöntemdir. Bu yöntem bu tez çalışmasında verilmeye çalışılacaktır.


**ANAHTAR KELİMELER:** Hibrit Sayılar, Schur Yöntemi, Matrisin Kökleri, De Moivre Formülü, Cayley Hamilton Teoremi

**JÜRİ:** Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Prof.Dr. Mustafa ALKAN
Doç.Dr. Hakan ŞİMŞEK

## ABSTRACT

**SOME CALCULATION METHODS OF SQUARE ROOT OF A 2×2 MATRİX**

**İmren AKGÜL (ŞIK)**

**MSc Thesis in MATHEMATICS**

**Superviser : Prof.Dr. Mustafa ÖZDEMİR**

**February 2020, 59 pages**

Matrices have started to be used in computer and engineering technology to a great extent with affine transformations. In particular, 2x2 matrices are important for the study of planar motions. Finding the roots of matrices and especially 2x2 matrices is one of the major problems of linear algebra with geometry. In the literature, the square roots of 2x2 matrices are generally based on Schur's theorem, Cayley Hamilton's theorem and Newton's theorem. It can also be found with the help of sequence recurrence relations. In this study, first of all, some of the methods found in the literature will be given and their usefulness will be examined. In addition, it will be shown that the roots of some special matrices can be found with the help of complex numbers, dual numbers and hyperbolic numbers. Finally, how to find the roots of a matrix with the help of hybrid numbers will be examined in detail. In particular, how to find the square root of a matrix with the help of the idempotent base of hyperbolic hybrid numbers is a method not found in the literature. This method will be given in this thesis.

**KEYWORDS :** Hibrit Sayılar, Schur Yöntemi, Matrisin Kökleri,
De Moivre Formülü, Cayley Hamilton Teoremi

**COMMUTEE :** Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Prof.Dr. Mustafa ALKAN
Assoc.Prof.Dr. Hakan ŞİMŞEK

## ÖNSÖZ

Bu tezde, $2 \times 2$ türünden matrislerin karekökleri ile ilgili temel çalışmalar derlenerek verilmiştir, bazı özel matrislerin köklerinin de kompleks sayılar, dual sayılar ve hiperbolik sayılar yardımıyla da bulunabileceği gösterilmiştir. Ayrıca, henüz literatürde yeni çalışılmaya başlanan hibrit sayılar yardımıyla bir matrisin köklerinin nasıl bulunacağı detaylı incelenmiştir.

Tez konumun belirlenmesinde ve hazırlanmasında, her türlü yardım ve fedakarlığı esirgemeyen, bilgisi, tecrübesi ve destekleri ile çalışmalarımda bana yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR' e en içten duygularla teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışmamı, süreç boyunca beni cesaretlendiren, manevi desteklerini esirgemeyen anneme ve eşime ithaf ederim.

# İÇİNDEKİLER

## AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum "$2\times 2$ türünden bir matrisin karekökünü hesaplama yöntemleri" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

25/02/2020

İmren AKGÜL (ŞIK)

# SİMGELER

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{N}$ | : Pozitif tam sayılar kümesi |
| $\mathbb{Q}$ | : Rasyonel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{P}$ | : Hiperbolik (Perpleks) sayılar kümesi |
| $i$ | : Kompleks birim |
| $\varepsilon$ | : Dual birim |
| $h$ | : Hiperbolik birim |
| $\mathbb{C}$ | : Kompleks sayılar kümesi |
| $\mathbb{K}$ | : Hibrit sayılar kümesi |
| arg**Z** | : **Z** hibrit sayısının argümenti |
| arg$A$ | : $A$ matrisinin argümenti |
| iz$A$ | : $A$ matrisinin izi |
| $\det A$ | : $A$ matrisinin determinantı |
| $\epsilon(A)$ | : $A$ matrisinin izinin işareti |
| $\triangle_A$ | : $A$ matrisinin karakteristik polinomunun diskriminantı |
| $\Vert.\Vert$ | : Bir vektörün uzunluğu (normu) |
| $\langle , \rangle$ | : İç çarpım |
| $\langle , \rangle_L$ | : Lorentziyen iç çarpım |
| $\langle , \rangle_{\mathbb{C}}$ | : Kompleks iç çarpım |
| $\langle , \rangle_{\mathbb{P}}$ | : Hiperbolik iç çarpım |
| $\mathbf{u}^*$ | : $\mathbf{u}$ vektörünün eşlenik transpozu |
| $\triangle(\mathbf{Z})$ | : $\triangle(\mathbf{Z}) = \triangle(a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}) = -(b-c)^2 + c^2 + d^2$ |
| $C(\mathbf{Z})$ | : $C(\mathbf{Z}) = \triangle(a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}) = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2$ |
| $\mathbb{R}_{n\times n}$ | : $n \times n$ boyutlu reel matrislerin kümesi |

# 1. GİRİŞ

*Bu bölümde, bir matrisin karekökünün bulunması ile ilgili literatürde yapılan çalışmalar ve kullanılan yöntemler, tarihsel sürece uygun olarak sırasıyla verilecek, bu yöntemlerden kısaca bahsedilecektir. Bu tez üç bölümden oluşmuştur. İlk bölümde, kaynak taraması yapılarak, bir matrisin karekökünün hesaplama yöntemleri kısaca verilmiştir. İkinci bölümde ise, hibrit sayılar yardımıyla tanımlanan bir matrisin kutupsal gösterimi kullanılarak,* $2 \times 2$ *türünden bir matrisin kökleri, matrisin türü ve karakterine göre formülize edilmiştir. Son bölümde, elde edilen sonuçlar kısaca özetlenmiştir.*

Eğer $B^2 = A$ ise, $B$ matrisine $A$ matrisinin kareköküdür denir. Bir A matrisinin karekökü bulunmayabilir, bu durumda $A$ kökü olmayan matris olarak adlandırılır. Eğer bir $A$ matrisi tersinir ve köşegenleştirilebilir ise, mutlaka karekökü vardır. Bir matris, köşegenleştirilemese bile bir kökü olabilir. Literatürde bir matrisin kare köklerini bulmada farklı yöntemler veren birçok çalışma vardır. Bu yöntemler temel olarak Shur Teoremi, Cayley Hamilton Teoremi veya Newton Yöntemi'ne bağlıdır.

Bu yöntemlerden bazıları aşağıdaki gibidir.

1. Temel cebirsel yöntem
2. Köşegenleştirme
3. Cayley-Hamilton Yöntemi,
4. Schur ayrıştırma yöntemi,
5. Abel-Möbius Yöntemi
6. Newton Yaklaşım Yöntemi
7. Dizisel Yineleme Bağıntıları Kullanılarak
8. Hibrit Sayılar Yardımıyla.

$2 \times 2$ lik bir matrisin köklerini bulmak için kullanılan temel yöntemlerden bazıları Nortshield'in makalesinde özetlenmiştir. Dahası $2 \times 2$ matrisin köklerinin bulunmasıyla ilgili yakın tarihli çalışmalardan bazıları şunlardır : (Andrescu, 2014); (Choudry, 2004); (Jadhav, 2017); **(**Mackinnon 1989**)**; **(**Northshiel, 2010**)**, **(**Sadeghi, 2011**)**, **(**Sambasiva, 2013**)**, **(**Scott, 1990**)**, (Sullivan, 1993), (Tamimi, 2011).

Sullivan, (Sullivan, 1993) Cayley Hamilton teoremini kullanarak $2 \times 2$ matrisin tüm kareköklerini hesaplamak için, kullanışlı bir yöntem tanımladı.

Sullivan bu yöntemi, üç ana duruma göre vermiştir. Bunlar :

i) $(\text{iz}A)^2 \neq 4\det A$,

ii) $(\text{iz}A)^2 = 4\det A \neq 0$

iii) $(\text{iz}A)^2 = 4\det A$=0.

2004 yılında, Choudhry, $2 \times 2$ matrislerin köklerini veren bir cebirsel formülün belirlenmesiyle ilgili bir makale yayımlamıştır. Buna göre, eğer, $A$ matrisi $2 \times 2$ tipinde skaler bir matris ise, $B^n = A$ denkleminin sonsuz sayıda çözümü vardır, eğer $A$ skaler olmayan $2 \times 2$ tipinde matris ise, $B^n = A$ denkleminin sonlu sayıda çözümü vardır ve bu çözümler Choudhry'nin makalesinde incelenmiştir (Choudry, 2004).

$2 \times 2$ türünden reel matrislerin karekökleri dizilerin lineer yineleme bağıntılarıyla da elde edilebilmektedir. Bu yöntem (Andrescu, 2014) bulunabilir. Bunun yanında, Lucas ve Fibonacci dizilerinin yineleme bağıntıları yardımıyla da, bir matrisin köklerinin bulunması (Bicknel, 1965), (Arslan, 2016), (Arslan, 2017) ve (Köken, 2019) çalışmalarında bulunabilir. Bu tezde, dizisel yineleme bağıntılarıyla yapılan bu yöntem üzerinde durulmayacaktır.

Bu tezin ikinci bölümünde, bir matrisin kareköklerini bulmak için yukarıda verilen yöntemler özetlenmiştir. Yedi temel yöntem kısaca verilmiştir. Üçüncü bölümde, **(**Özdemir, 2018**)**'de verilen hibrit sayılar için bazı tanımlar ve teoremler verilecektir. Ayrıca, $2 \times 2$ matrislerin sınıflandırmasını kullanarak $2 \times 2$ matrisin kareköklerini bulmak için yeni bir yöntem daha incelenecektir. Daha sonra, hibrit sayıların bazı özellikleri kullanılarak iki farklı yöntemle matrislerin köklerinin elde edilebileceği gösterilecektir. Bu yöntemlerin bir kısmı **(**Özdemir, 2018**)** ve **(**Özdemir, 2019**)** makalelerinde bulunabilir. Hibrit sayıların yardımıyla, herhangi bir gerçek matrisin kutupsal bir formu tanımlanıp, De Moivre formülü verilerek, $2 \times 2$ bir matrisin kökü elde edilebilir. Tez, 3 aşamada verilmiştir. İlk bölümde, matrislerin karekökü ile ilgili literatürde yer alan yöntemler verilerek, derlenmiştir. İkinci bölümde, hibrit sayıların tanımını ve bazı önemli teoremleri verilmiş, hibrit sayılar kullanılarak $2 \times 2$ matrisler sınıflandırılmış ve bu matrisler yardımıyla köklerin bulunması ele alınmıştır. De Moivre formülü, $2 \times 2$ matrisler için ayrıntılı olarak verilmiştir. Hibrit sayılar hakkında ayrıntılı bilgi için **(**Özdemir, 2018**)** çalışmasında bulunabilir. Son bölümde elde edilen sonuçlar kısaca özetlenmiştir.

# 2. KAYNAK TARAMASI

**Tanım 2.1.** *$A$ ve $B$ aynı türden iki kare matris olsun. Eğer,*

$$B^2 = A$$

*ise, $B$ matrisine $A$ matrisinin karekökküdür denir.*

Bu bölümde, literatürde bulunan :

1. Temel cebirsel yöntem
2. Köşegenleştirme
3. Cayley-Hamilton Yöntemi,
4. Schur ayrıştırma yöntemi,
5. Abel-Möbius Yöntemi
6. Newton Yaklaşım Yöntemi

sırasıyla verilecektir.

## 2.1. Temel Cebirsel Yöntem

Bu yöntem, dört doğrusal olmayan denklem sisteminin çözümüne dayanır. Bu yöntemde, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin karekökü

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

kabul edilir. Bu durumda, $B^2 = A$ eşitliğinden,

$$\begin{cases} x^2 + yz = a \\ ty + xy = b \\ tz + xz = c \\ t^2 + yz = d \end{cases}$$

lineer olmayan denklem sistemi elde edilir. Ancak bu denklemi çözmek her zaman kolay değildir

**Örnek 2.2.** $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ *matrisinin karekökü,*

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

*denilirse,* $B^2 = A$ *eşitliğinden,*

$$\begin{cases} x^2 + yz = 7 \\ ty + xy = 6 \\ tz + xz = 4 \\ t^2 + yz = 7 \end{cases}$$

*denklem sistemi elde edilir ki, buradan,* $B$ *matrisi,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6}/2 \\ \sqrt{6}/3 & \sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{6} & -\sqrt{6}/2 \\ -\sqrt{6}/3 & -\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

*olur.* $A$ *matrisinin 4 tane reel girdili kökü vardır. Matrislerin türüne göre, bu köklerin sayısı, 0, 1, 2, 4 veya sonsuz çoklukla olur.*

Ayrıca, üst üçgensel matrisler için aşağıdaki teorem verilebilir. Görüldüğü gibi, üst üçgensel matrisler için, karekök hesaplama oldukça kolaydır ve net olarak formülüze edilmiştir. Bu teoremler, Schur teoremi gibi, üçgenleştirmeye bağlı yöntemlerde kullanılacaktır.

**Teorem 2.3.** *Herhangi bir* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ *matrisi için,* $\epsilon = \pm 1$ *olmak üzere,* $A$ *üçgensel matrisinin karekökü*

$$\sqrt{A} = \pm \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \dfrac{b}{\sqrt{a} + \epsilon\sqrt{d}} \\ 0 & \epsilon\sqrt{d} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

*ile belirlidir ve* $A$ *matrisinin 4 tane reel veya kompleks girdili kökü vardır.*

**Sonuç 2.4.** ***i.*** *Eğer* $b = 0$ *ve* $a \neq d$ *ise,*

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{a} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{d} \end{bmatrix}$$

*ile belirlidir ve $A$ matrisinin 4 tane reel veya kompleks girdili kökü vardır.*

***ii.*** *Eğer $a = d \neq 0$ ise,*

$$\sqrt{A} = \pm \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \dfrac{b}{2\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{a} \end{bmatrix}$$

*ile belirlidir ve $A$ matrisinin 2 tane reel veya kompleks girdili kökü vardır*

**Örnek 2.5.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ *matrisinin karekökü, $a \neq d$ olduğundan,*

$$\sqrt{A} = \pm \begin{bmatrix} \sqrt{4} & \dfrac{6}{\sqrt{4} \pm \sqrt{9}} \\ 0 & \pm\sqrt{9} \end{bmatrix}$$

*formülünden,*

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 6/5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & -6/5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

*elde edilir.*

### 2.2. Köşegenleştirme

$2 \times 2$ türünden $A$ matrisinin kareköklerini bulmak için, en iyi bilinen prosedür $A$ matrisini köşegenleştirmektir. Bu bölümde, köşegenleştirilebilir bir matrisin karekökleri ele alınacaktır. Bir kare matris, bir köşegen matrise benziyorsa köşegenleştirilebilir olarak adlandırılır. Reel bir matrisin köşegenleştirilmesi için, $P^{-1}AP = D$ biçiminde köşegen bir $P$ matrisi bulunması gerekir. $D$ özdeğerlerle, $P$ ise bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin sütun olarak yazılmasıyla oluşturulan matris olmak üzere $P^{-1}AP = D$ eşitliği sağlanır. Eğer $2 \times 2$ türünden bir $A$ matrisi tam olarak 2 ayrı özdeğere sahipse, $A$ köşegenleştirilebilirdir. $2 \times 2$ türünden bir $A$ matrisinin köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter koşul $A$ matrisinin lineer bağımsız 2 özvektörünün olmasıdır. Yani, eğer bir matrisin 2 farklı özdeğeri olmasa bile, 2 lineer bağımsız özvektörü olabilir ve yine köşegenleştirilebilir olabilir.

**Teorem 2.6.** $A$, $2 \times 2$ *türünden bir matris olsun.* $A$ *matrisinin karakteristik denkleminin diskriminantı* $\triangle_A = (\mathrm{iz}A)^2 - 4\det A$ *olmak üzere,*

$$P = \begin{bmatrix} a-d-\sqrt{\triangle_A} & a-d+\sqrt{\triangle_A} \\ 2c & 2c \end{bmatrix}$$

*ve*

$$D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{iz}A-\sqrt{\triangle_A} & 0 \\ 0 & \mathrm{iz}A+\sqrt{\triangle_A} \end{bmatrix}$$

*için,*

$$P^{-1}AP = D$$

*yazılabilir. Bu durumda,*

$$\left(\pm PD^{1/2}P^{-1}\right)^2 = \left(\pm PD^{1/2}P^{-1}\right)\left(\pm PD^{1/2}P^{-1}\right) = PDP^{-1} = A.$$

*olacağından,*

$$\pm PD^{1/2}P^{-1}$$

*matrisi*, $A$ *matrisinin karekökü olur.*

Bu yöntemde, özdeğerler karmaşık olsa bile, $A$ gerçek kareköklere sahip olabilir. Bu yöntemde de, karmaşık özdeğer ve özvektörlerle uzun ve sıkıcı işlemlerle uğraşılmaktadır.

**Örnek 2.7.**

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

*matrisi göz önüne alınırsa, bu matrisin özdeğer ve özvektörlerinin*

$$\left\{ \begin{bmatrix} i\sqrt{2}-1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \quad \leftrightarrow \quad 2i\sqrt{2}-1$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} -i\sqrt{2}-1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \quad \leftrightarrow \quad -2i\sqrt{2}-1,$$

*olduğu kolayca bulunabilir. Buna göre,*

$$P = \begin{bmatrix} i\sqrt{2}-1 & -i\sqrt{2}-1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \textit{ve} \quad D = \begin{bmatrix} 2i\sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & -2i\sqrt{2}-1 \end{bmatrix}$$

*olur. Böylece, $A$ matrisinin, karekökü*

$$\pm P D^{1/2} P^{-1}$$

*eşitliğinden,*

$$\frac{\pm 1}{6\sqrt{2}i} \begin{bmatrix} i\sqrt{2}-1 & -i\sqrt{2}-1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2i\sqrt{2}-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-2i\sqrt{2}-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & i\sqrt{2}+1 \\ -3 & i\sqrt{2}-1 \end{bmatrix}$$

*bulunur ki, bu çarpımın sonucu,*

$$\pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

*matrisidir.*

### 2.3. Cayley-Hamilton Yöntemi

Cayley-Hamilton teoremi matris teorisinde kullanılan oldukça önemli bir teoremdir. Cayley - Hamilton teoremi, değişmeli bir halka üzerindeki her kare matrisin kendi karakteristik denklemini sağladığını gösterir. Bu bölümde, Cayley-Hamilton teoreminin $2 \times 2$ matrislerin tüm kareköklerinin açık formüllerini belirlemek için nasıl kullanılabileceği gösterilecektir (Sullivan, 1993). $2 \times 2$'lik bir matris için Cayley-Hamilton Teoremi

$$A^2 - (\mathrm{iz}A)\,A + (\det A)\,I = 0$$

olarak belirtilebilir. Aşağıdaki formül bir matrisin kareköklerini bulmak için en kullanışlı yöntemlerden biridir.

**Teorem 2.8.** *(Sullivan, 1993) $A$, $2 \times 2$ türünden reel bir matris olsun.* $(\mathrm{iz}A)^2 \neq 4\det A$ *ise,* $\epsilon = \pm 1$ *olmak üzere*

$$\sqrt{A} = \pm\frac{A + \varepsilon\,(\det A)^{1/2}\,I}{\sqrt{\mathrm{iz}A + \varepsilon 2\sqrt{\det A}}} \tag{2.2}$$

*eşitliğiyle belirlidir.*

**İspat** Cayley-Hamilton teoremi, $\sqrt{A}$ matrisinin, kendi karakteristik denklemi sağladığını ifade eder. Buna göre,

$$\lambda^2 - (\mathrm{iz}\sqrt{A})\lambda + \det\sqrt{A} = 0$$

eşitliğinden

$$A = (\mathrm{iz}\sqrt{A})\sqrt{A} - \det\sqrt{A}I \tag{2.3}$$

olur. $B^2 = A$ olmak üzere, $(\det B)^2 = \det B^2 = \det A \geq 0$, olduğundan

$$\det B = \pm\sqrt{\det A}$$

olacaktır ve

$$\det\sqrt{A} = \pm\sqrt{\det A}$$

eşitliği vardır. (2.3) formülünde, $\mathrm{iz}\sqrt{A}$ bulunmalıdır.

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left((\mathrm{iz}\sqrt{A})\sqrt{A} - (\det\sqrt{A})I\right)^2 \\
&= (\mathrm{iz}\sqrt{A})^2 A + (\det A)\,I - 2(\det\sqrt{A})(\mathrm{iz}\sqrt{A})\sqrt{A} \\
&= (\mathrm{iz}\sqrt{A})^2 A + (\det A)\,I - 2(\det\sqrt{A})\left(A + \det\sqrt{A}\right) \\
&= \left((\mathrm{iz}\sqrt{A})^2 - 2(\det\sqrt{A})\right)A - (\det A)\,I
\end{aligned} \tag{2.4}$$

yazılabilir. Öte yandan, $A$ matrisi için Cayley-Hamilton teoreminden,

$$A^2 - (\text{iz}A)\,A + (\det A)\,I = 0 \tag{2.5}$$

olduğu da göz önüne alınırsa, (2.4) ve (2.5) eşitliklerinden

$$\text{iz}\sqrt{A} = \pm\sqrt{\text{iz}A \pm 2\sqrt{\det A}}$$

denklemi elde edilir. Böylece, $\text{iz}\sqrt{A}$, $\text{iz}A$ ve $\det A$ cinsinden bulunmuş olur. $\text{iz}\sqrt{A}$ değerinin bir reel sayı olması için gerek ve yeter koşul $\text{iz}A > \pm 2\sqrt{\det A}$ olmasıdır. Sonuç olarak, ( 2.3) eşitliğinden, $\text{iz}A > \pm 2\sqrt{\det A}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere,

$$\sqrt{A} = \pm\frac{A + \varepsilon\,(\det A)^{1/2}\,I}{\sqrt{\text{iz}A + \varepsilon 2\sqrt{\det A}}}$$

elde edilir. $\square$

**Örnek 2.9.** $A = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ *matrisinin karekökleri, yukarıdaki formülle hesaplanabilir. Teoreme göre,* $\text{iz}A = -4$, $\det A = 16$ *ve* $(\text{iz}A)^2 \neq 4\det A$, *olduğundan (2.2) formülü kullanılabilir. Buradan,*

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \pm\frac{A+4I}{\sqrt{-4+2\cdot 4}} = \pm\frac{1}{2}\,(A+4I) \\ &= \frac{\pm 1}{2}\left(\begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \pm\begin{bmatrix} 1/2 & 13/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*olacaktır.*

Bu teoremin sonucu aşağıdaki gibi verilebilir.

**Sonuç 2.10.** $A$, $2\times 2$ *türünden bir reel matris olsun.*

*i. Eğer* $\det A < 0$ *ise*, $A$ *matrisinin reel kökü yoktur.*

*ii. Eğer* $\det A = 0$ *ise*, $\sqrt{A} = \pm\dfrac{A}{\sqrt{\text{iz}A}}$ *ile belirlidir*. $\text{iz}A > 0$ *olması durumunda*, $A$ *matrisinin iki reel karekökü vardır*.

*iii. Eğer* $\text{iz}A > 2\sqrt{\det A}$ *ise*, $A$ *matrisi dört reel kareköke sahiptir.*

*iv. Eğer* $\text{iz}A = \det A = 0$ *ise,* $\text{iz}\sqrt{A} = 0$ *ve* $\det\sqrt{A} = 0$ *olur. Bu,* $\sqrt{A}$ *matrisinin*

$$\begin{bmatrix} x & y \\ \dfrac{-x^2}{y} & -x \end{bmatrix}, \; x, y \in \mathbb{R}$$

*formunda olduğu anlamına gelir ve* $A = 0$ *olur*. *Yani, sıfır matrisin sonsuz çoklukta karekökü vardır. Ayrıca sıfır olmayan bir matrisin* $\text{iz}A = \det A = 0$ *olması durumunda kökleri yoktur*.

*Skaler olmayan bir* $A$ *matrisinin karekökünün olması için gerek ve yeter koşul* $\text{iz}A$ *ve* $\det A$ *sayılarından en az birinin sıfırdan farklı olmasıdır.*

*v. Eğer* $\text{iz}A = 2\sqrt{\det A} \neq 0$ *ise*, *3.4 eşitliği kullanılarak,*

$$\sqrt{A} = \pm\frac{2A + (\text{iz}A)\,I}{2\sqrt{2\text{iz}A}} \tag{2.6}$$

*bulunur. Buna göre,* $A$ *matrisinin karekökünün olması için gerek ve yeter koşul* $\text{iz}A > 0$ *olmasıdır.*

**Örnek 2.11.** *Bu sonuca göre,*

*i.* $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin,* $\det A < 0$ *olduğundan, reel karekökü yoktur*.

*ii.* $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *matrisinin, karekökü* $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *olur.*

*iii.* $C = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ *matrisinin, karekökleri* $\pm\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *ve* $\pm\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *olur.*

*iv* $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ $\det D = \text{iz}D = 0$ *olduğundan reel karekökü yoktur.*

*v.* $\text{iz}E = 10, \det E = 25$ *ve* $(\text{iz}E)^2 = 4\det E = 0$ *olduğundan* $E = \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ *matrisinin karekökleri*

$$\sqrt{E} = \pm\frac{2A + 10I}{2\sqrt{20}} = \frac{\pm\sqrt{5}}{10}\begin{bmatrix} 16 & -12 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

*olur.*

### 2.4. Schur Ayrıştırma Yöntemi

Üçgen bir matrise benzer bir matrise, üçgenleştirilebilir matris denilir. Schur yöntemi de, köşegenleştirme yöntemine benzer bir yöntemdir. Her $2 \times 2$ türünden reel veya karmaşık bir matris köşegen bir matrise benzemeyebilir. Fakat, her $A$ matrisi bir üst üçgensel matrise benzer.

**Tanım 2.12.** *Bir $U$ matrisi için, $U^*$ ile $U$ matrisinin eşlenik transpozesi gösterilmek üzere,*

$$U^* = U^{-1}$$

*ise, $U$ matrisine **uniter matris** denir.*

Schur Teoremi, eğer $A$ bir kare matris ise, $A$ matrisi, köşegenlerdeki elemanları $A$ matrisinin özdeğerleri olan bir üst üçgensel matrise uniter benzer olduğunu ifade eder (Zhang, 2010). Başka bir ifadeyle, üniter bir $U$ matrisi ve üst üçgensel bir $T$ matrisi için,

$$T = U^* AU \text{ veya } (A = UTU^*)$$

eşitliği sağlanır. Schur ayrışımı, tek türlü değildir. Bununla birlikte, $A$ matrisi $T$ matrisine benzer olduğundan, $A$ matrisinin özdeğerleri her zaman $T$ matrisinin köşegeninde yer alırlar. Teorem reel girdili bir $A$ matrisi için bile, $U$ ve $T$ matrislerinin reel matrisler olacağını garanti etmez. $A$ matrisinin reel özdeğerleri olan bir kare gerçek matris olması durumunda, $A = QTQ^{-1}$ eşitliği sağlanacak şekilde, ortogonal bir $Q$ matrisi ve üst üçgensel bir $T$ matrisi vardır. Yani, reel özdeğerlere sahip her $A$ matrisi için, ortogonal bir $Q$ matrisi vardır ve

$$Q^{-1}AQ$$

matrisi, bir üst üçgensel matristir. Yani, $(Q^{-1}AQ)_{21} = 0$ olur.

**Teorem 2.13.** *$A$, $2 \times 2$ türünden bir matris olsun. $T$ bir üst üçgensel matris ve $U$ bir uniter matris olmak üzere, $U^*AU = T$ ise*

$$\pm UT^{1/2}U^{-1}$$

*matrisi, $A$ matrisinin kareköküdür.*

**İspat** $U$ uniter matris olduğundan, $U^* = U^{-1}$ vardır. Bu nedenle,

$$\left(\pm UT^{1/2}U^*\right)^2 = UT^{1/2}\left(U^{-1}U\right)T^{1/2}U^* = UTU^* = A.$$

yazılabilir. Bu, $\pm UT^{1/2}U^*$ matrisinin, $A$ matrisinin karekökü olduğu anlamına gelir. □

Ayrıca,

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

dönme matrisi kullanılarak $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi üçgenleştirilebilir.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & . \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

eşitliğine göre,

$$c\cos^2\theta - (a-d)\cos\theta\sin\theta - b\sin^2\theta = 0$$

elde edilir. $\sin\theta \neq 0$ kabul edilirse, $\cot\theta = x$ olmak üzere,

$$cx^2 - (a-d)\,x - b = 0 \tag{2.7}$$

bulunur. Bu denklemin çözümünden, $\theta$ ve dolayısıyla da, $Q$ ve $T$ matrisleri bulunur.

**Örnek 2.14.** $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{bmatrix}$ *matrisinin karekökleri Schur yöntemiyle aşağıdaki gibi bulunur. (2.7) eşitliğine göre,*

$$\begin{aligned} 9x^2 - (7-22)\,x - 6 &= 0, \\ 3\,(x+2)\,(3x-1) &= 0. \end{aligned}$$

*denklemi vardır ve buradan* $x = -2$ *veya* $x = 1/3$ *bulunur. Bu iki, değer için incelenmelidir.*

*i.* $x = -2$ *ise,* $\cot\theta = -2$, $\cos\theta = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$ *ve* $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *olacağından,*

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

*ve*

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}.$$

*bulunur. O halde,* $A$ *matrisinin karekökleri*

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \pm Q T^{1/2} Q^{-1} \\ &= \frac{\pm 1}{5}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}^{1/2}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*olur. (2.1) eşitliği göz önüne alınırsa, sırasıyla* $\epsilon = -1$ *ve* $\epsilon = 1$ *için,*

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}^{1/2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

*bulunur. Böylece,*

$$\sqrt{A} = \pm\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ veya } \frac{\pm 1}{7}\begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 9 & 32 \end{bmatrix}.$$

*elde edilir. Benzer şekilde,* $x = 1/3$ *için de aynı sonuçlar bulunabilir.*

### 2.5. Abel-Mobius Yöntemi

**Tanım 2.15.** $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *ve* $ad - bc \neq 0$ *olmak üzere,*

$$\varphi_A(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

*biçiminde tanımlanan dönüşüme Möbiüs dönüşümü denir. Bu dönüşüme, kesirli dönüşüm de denilmektedir*

Bu dönüşümlerin geometride geniş kullanım alanı bulunmaktadır (Olsen, 2010), (Kisil, 2012). Her $2 \times 2$ tipinde tersinir bir

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

kompleks matrisi, $\varphi_A$ Möbius dönüşümüyle ilişkilendirilebilir. Ayrıca, $A$ ve $B$ tersinir matrisleri için

$$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$$

eşitliği vardır. $2 \times 2$ bir reel matrisin kareköklerinin Abel-Mobius metodu kullanarak bulunma yöntemi Northshield'in makalesinde bulunabilir (Northshield, 2010). (2.7) denklemine göre,

$$cx^2 - (a-d)x - b = 0$$

eşitliği

$$\frac{ax+b}{cx+d} = x$$

biçiminde yazılabilir. Buradan, $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} ax + b = \lambda x \\ cx + d = \lambda \end{cases}$$

lineer denklem sistemi veya eşdeğer olarak

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

matris eşitliği elde edilir. Bu, $\lambda$ reel sayısının özdeğer ve $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörünün, $A$ matrisinin öz vektörü olduğu anlamına gelir.

**Teorem 2.16.** *(Nortshield, 2010)*$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *bir reel matris ve* $R(x) = cx^2 + (d-a)x - b$ *polinom olsun. Eğer* $\varphi_A(x)$, $A$ *matrisiyle ilişkili Möbiüs dönüşümü ise*

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{R(x)}$$

*fonksiyonu,* $m \in \mathbb{R}$ *için*

$$F(\varphi_A(x)) = F(x) + m.$$

*Abel fonksiyonel denklemini sağlar. Bu durumda,*

$$m = \frac{\ln k}{\lambda_2 - \lambda_1} \text{ ve } k = \left| -\frac{2b + a\lambda_1 - d\lambda_2}{2b + a\lambda_2 - d\lambda_1} \right|$$

*olmak üzere,*

$$\varphi_{A^n}(x) = F^{-1}(F(x) + nm)$$

*eşitliği vardır. Ayrıca* $\sqrt{A}$, *bir* $\lambda$ *reel sayısı için*

$$\pm\lambda\left(F^{-1}\left(F(x) + \frac{m}{2}\right)\right)$$

*olur.*

**İspat** $\lambda_1$ ve $\lambda_2$, $R(x) = cx^2 + (d-a)x - b$ polinomunun kökleri olsun. Eğer

$$P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

seçilirse,

$$D = P^{-1}AP$$

bir köşegen matris olur. Böylece,

$$k = -\frac{2b + a\lambda_1 - d\lambda_2}{2b + a\lambda_2 - d\lambda_1} \in \mathbb{R}.$$

olmak üzere,

$$\varphi_P = \frac{\lambda_1 x + 1}{\lambda_2 x + 1},\ \varphi_{P^{-1}} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{x - \lambda_2}{x - \lambda_1}\right) \quad \text{ve} \quad \varphi_D(x) = kx$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \varphi_{P^{-1}}\varphi_A\varphi_P(x) = \varphi_D(x) \quad &\Rightarrow \quad \varphi_{P^{-1}}(\varphi_A(x)) = \varphi_D(\varphi_{P^{-1}}(x)) \\ &\Rightarrow \quad \varphi_{P^{-1}}(\varphi_A(x)) = k\varphi_{P^{-1}}(x)\,. \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{R(x)} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left| \frac{x - \lambda_2}{x - \lambda_1} \right|.$$

fonksiyonu tanımlansın.

$$\ln \varphi_{P^{-1}}(x) = \ln \left( \frac{x - \lambda_2}{x - \lambda_1} \right) + \ln \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

olduğu da göz önüne alınırsa,

$$F(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \ln \varphi_{P^{-1}}(x) - \ln(\lambda_2 - \lambda_1) \right)$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} F(\varphi_A(x)) &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \ln \varphi_{P^{-1}}(\varphi_A(x)) - \ln(\lambda_2 - \lambda_1) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \ln k\varphi_{P^{-1}}(x) - \ln(\lambda_2 - \lambda_1) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \ln \varphi_{P^{-1}}(x) - \ln(\lambda_2 - \lambda_1) + \right) \\ &= F(x) + \frac{\ln k}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &= F(x) + m \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$ kullanılarak,

$$F(\varphi_{A^2}(x)) = m + F(\varphi_A(x)) = 2m + F(x).$$

elde edilir. Böylece $m = \dfrac{\ln k}{\lambda_2 - \lambda_1}$ olmak üzere, tümevarımla

$$\varphi_{A^n}(x) = F^{-1}(F(x) + nm)$$

bulunur. □

$2 \times 2$ matrisin kareköklerini Abel-Mobius Teoremi ile bulmak kullanışlı bir yöntem değildir. Logaritmik ve ters trigonometrik fonksiyonlar kullanıldığından dolayı bazı uğraştırıcı ve zor problemlerle karşılaşılabilir. Bu yöntem reel $R(x)$ kökleri için kullanılsa da, yine de karmaşık kökler için de uygulanabilir.

**Örnek 2.17.** $A = \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ *matrisinin karekökleri Abel yöntemiyle aşağıdaki gibi bulunur.*

$$R(x) = cx^2 - (a - d)x - b = x^2 - 4x + 3$$

*ve*

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 3} = \ln \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}.$$

*olduğundan,*

$$F\left(\frac{11x-3}{x+7}\right) = F(x) + \ln \frac{2}{\sqrt{5}}$$

*elde edilir. Yani,* $m = \ln \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ *olur. Diğer yandan*

$$F^{-1}(X) = \frac{e^{2x} - 3}{e^{2x} - 1}.$$

*ve*

$$\begin{aligned} \varphi_{A^n}(x) &= F^{-1}(F(x) + mn) \\ &= F^{-1}\left(\ln \sqrt{\frac{x-3}{x-1}} + \ln \frac{2^n}{5^{n/2}}\right) \\ &= F^{-1}\left(\ln \frac{2^n \sqrt{x-3}}{5^{n/2}\sqrt{x-1}}\right) \\ &= \frac{x(4^n - 3 \cdot 5^n) + (3 \cdot 5^n - 3 \cdot 4^n)}{x(4^n - 5^n) + (5^n - 3 \cdot 4^n)}. \end{aligned}$$

*bulunur. Böylece,* $n = 1/2$ *için,* $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *olur. Böylece* $A$ *matrisinin karekökü*

$$\sqrt{A} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 2 - 3\sqrt{5} & 3\sqrt{5} - 6 \\ 2 - \sqrt{5} & \sqrt{5} - 6 \end{bmatrix}$$

*elde edilir.*

### 2.6. Newton Yaklaşım Yöntemi

Bir $A$ matrisinin karekökünü hesaplamak için kullanılan, literatürdeki bir başka yöntem de, Newton'un yöntemini $f(X) = X^2 - A = 0$ ikinci dereceden matris denklemine uygulamaktır. Newton'un matris karekökü yöntemi, Higham'ın makalesinde bulunabilir (Higham, 1987). Newton'un yöntemi aşağıdaki gibidir. $f(x)$ fonksiyonu $x_0$ başlangıç değerine sahip bir fonksiyon olsun. Önce,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

dizisi tanımlanır. Bu dizi $f(x)$ köküne yakınsayan bir dizidir. $f(X) = X^2 - A = 0$ matris denklemine göre,

$$X_{n+1} = X_n - \left(X_n^2 - A\right)(2X_n)^{-1} \Rightarrow X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + AX_n^{-1}\right).$$

olur. Böylece, aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

**Teorem 2.18.** *(Higham, 1987)$A$ ve $X_0$ çarpımları değişmeli matrisler olmak üzere,*

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + AX_n^{-1}\right)$$

*yinelemeli bağıntısı verilsin. Bu durumda, $X_n$ matrisi, $X_0$ başlangıç değerinin $X_0 > 0$ veya $X_0 < 0$ olmasına göre, sırasıyla $\sqrt{A}$ veya $-\sqrt{A}$ matrislerine yakınsar.*

**Örnek 2.19.** $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ *matrisinin karekökleri Newton yöntemiyle aşağıdaki gibi bulunur. Başlangıç matrisi, $A$ ve $X_0$ değişmeli olacak şekilde $X_0 = I$ alınabilir. Buradan, $X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + AX_n^{-1}\right)$ eşitliği kullanılarak*,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \frac{1}{244}\begin{bmatrix} 452 & -325 \\ 325 & 777 \end{bmatrix}, \\ X_3 &= \begin{bmatrix} 1.9827 & -1.0092 \\ 1.0092 & 2.9919 \end{bmatrix} \quad X_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*bulunur. Eğer, başlangıç matrisi $X_0 = -I$, alınsaydı $X_4 = -\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ elde edilirdi.*

## 2.7. Dual, Hiperbolik ve Kompleks Sayılarla Kök Bulma

Karmaşık, dual ve hiperbolik sayıların matris gösterimleri aritmetik işlemler için kullanışlıdır. Bazı problemlerde, bu sayılar yardımıyla yapılan farklı bakış açıları, problemi kolaylaştırabilir. Bu üç sayı kümesinin matris gösterimleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{i}} &= \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}; \\ M_{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \left\{ \begin{bmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}; \\ M_{\mathbf{h}} &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Bu kümelerde, $M_{\mathbf{i}}$ bir cisim, fakat $M_{\varepsilon}$ ve $M_{\mathbf{h}}$ kümeleri ise halkadır. Eğer,

$$\varphi_1(z) = \varphi_1\left(\rho e^{i\theta}\right) = \begin{bmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix},$$

ile, bir

$$\varphi_1 : \mathbb{C} \to M_{\mathbf{i}}$$

dönüşümü tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} \varphi_1(z+w) &= \varphi_1(z) + \varphi_1(w), \\ \varphi_1(z \cdot w) &= \varphi_1(z) \cdot \varphi_1(w). \end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Yani, $\varphi_1$ bir cisim izomorfizmidir ve $M_{\mathbf{i}}$ ile $\mathbb{C}$ izomorfik cisimlerdir. Yani, her $z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$ karmaşık sayısı, $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ ve $\theta = \arctan\dfrac{b}{a}$ olmak üzere,

$$z = a + \mathbf{i}b \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

matrisine karşılık gelir. Ayrıca, her birim karmaşık sayı da, Öklid düzlemindeki bir dönme matrisine karşılık gelir. Benzer şekilde,

$$\varphi_2 : \mathbb{C} \to M_{\varepsilon} \text{ ve } \varphi_3 : \mathbb{C} \to M_{\mathbf{h}}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(z) &= \varphi_2\left(\rho e^{\varepsilon\theta}\right) = \rho\begin{bmatrix}\theta+1 & -\theta\\ \theta & 1-\theta\end{bmatrix},\\ \varphi_3(z) &= \varphi_3\left(\rho e^{h\theta}\right) = \rho\begin{bmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{bmatrix}\end{aligned}$$

dönüşümleri de, birer halka izomorfizmasıdır. Yani,

$$\begin{aligned}\varphi_2(z+w) &= \varphi_2(z)+\varphi_2(w) \text{ ve } \varphi_2(z\cdot w) = \varphi_2(z)\cdot\varphi_2(w),\\ \varphi_3(z+w) &= \varphi_3(z)+\varphi_3(w) \text{ ve } \varphi_3(z\cdot w) = \varphi_3(z)\cdot\varphi_3(w),\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle, her $z = a+\varepsilon b = \rho\,(1+\theta\varepsilon) = ae^{\varepsilon\theta}$ dual sayısı, $\rho = |a|$ ve $\theta = \dfrac{b}{|a|}$ olmak üzere,

$$z = a+\varepsilon b \leftrightarrow \begin{bmatrix}a+b & -b\\ b & a-b\end{bmatrix} = \rho\begin{bmatrix}\theta+1 & -\theta\\ \theta & 1-\theta\end{bmatrix}$$

matrisiyle temsil edilebilir . Her birim dual sayı da Galilean düzlemindeki dönme matrisine karşılık gelir (Rooney, 1978), (Harkin, 2004).

Son olarak, $z = a+\mathbf{h}b = k\rho\,(\cosh\theta+\mathbf{h}\sinh\theta) = k\rho e^{\mathbf{h}\theta}$ bir hiperbolik sayısı da,

$$k\in\{1,-1,\mathbf{h},-\mathbf{h}\}\,,\qquad \rho=\sqrt{a^2-b^2}\qquad \text{ve}\qquad \theta=\ln\frac{|a+b|}{\sqrt{|a^2-b^2|}}$$

olmak üzere,

$$z = k\,(a+\mathbf{h}b) \leftrightarrow k\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix} = k\rho\begin{bmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{bmatrix}$$

matrisiyle ifade edilebilir. Hiperbolik sayılara, literatürde double, split kompleks veya perplex gibi isimler de verilmektedir. Lorenziyen dönmeler de, hiperbolik sayılarla yorumlanabilir (Çakır, 2017), (Rooney, 1978), (Harkin, 2004), (Sobczyk, 1995).

Yukarıdaki matris gösterimleri kullanılarak, karmaşık, dual veya hiperbolik bir sayıya karşılık gelen bir $2\times 2$ matrisin kökü bulunabilir. Fakat, açıktır ki bu çok sınırlı sayıdaki matrisler için geçerli bir durumdur. Sadece, yukarıda verilen 3 matrise uygun matrisler için kök bulunabilir. Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\qquad \text{ve}\qquad C=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

matrisleri

$$
\begin{aligned}
z_A &= 3 - \mathbf{i} = \sqrt{10}\left(\cos\theta_A + \mathbf{i}\sin\theta_A\right),\ \theta_A = \arctan\frac{-1}{3} \\
z_B &= 3 + 2\varepsilon = 3\left(1 + \theta_B\varepsilon\right),\ \theta_B = \frac{2}{3}, \\
z_C &= 4 + 3\mathbf{h} = \sqrt{7}\left(\cosh\theta_C + \mathbf{h}\sinh\theta_C\right),\ \theta_C = \ln\sqrt{7}.
\end{aligned}
$$

sayılarına karşılık gelir. Bu sayıların karekökleri De Moivre formülleri yardımıyla kolayca bulunabilir (Sobczyk, 1995).

$$
\begin{aligned}
\sqrt{z_A} &= \pm 10^{1/4}\left(\cos\frac{\theta_A + 2k\pi}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\theta_A + 2k\pi}{2}\right), \\
\sqrt{z_B} &= \pm\sqrt{3}\left(1 + \frac{\theta_B}{2}\varepsilon\right) = \pm\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon\right) \\
\sqrt{z_C} &= 7^{1/4}\left(\cosh\frac{\theta_C}{2} + \mathbf{h}\sinh\frac{\theta_C}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Böylece, $A$, $B$ ve $C$ matrislerinin karekökleri

$$
\begin{aligned}
\sqrt{A} &= \pm 10^{1/4}\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta_A}{2} & -\sin\frac{\theta_A}{2} \\ \sin\frac{\theta_A}{2} & \cos\frac{\theta_A}{2} \end{bmatrix} \simeq \pm\begin{bmatrix} 1.755\,3 & 0.284\,85 \\ -0.284\,85 & 1.755\,3 \end{bmatrix}, \\
\sqrt{B} &= \pm 3^{1/2}\begin{bmatrix} 4/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}, \\
\sqrt{C} &= \pm 7^{1/4}\begin{bmatrix} \cosh\frac{\theta_A}{2} & \sinh\frac{\theta_A}{2} \\ \sinh\frac{\theta_A}{2} & \cosh\frac{\theta_A}{2} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1.822\,9 & 0.822\,88 \\ 0.822\,88 & 1.822\,9 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

olur. Görüldüğü gibi, bu yöntem sadece karmaşık, dual veya hiperbolik sayılara karşılık gelen matrislerin bazıları için kullanılabilir. Bu tezde, bu üç sayı sistemi birleştirilerek elde edilen hibrit sayılar kullanılarak, bu yöntem $2 \times 2$ matrislere genelleştirilmiştir.

# 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

## 3.1. Hibrit Sayılarla Matrisin Karekökünün Hesaplanması

Hibrit sayılar, karmaşık, hiperbolik ve dual sayıların yeni bir genellemesidir. Değişmeli olmayan bir halkadır. Bir Hibrit sayı, eliptik, hiperbolik veya parabolik olarak sınıflandırılabilir. Öte yandan, bir hibrit sayı, normuna göre timelike, spacelike ve lightlike olarak sınıflandırılır. Hibrit sayılar, melez sayılar olarak çevrilebilir. Fakat, bu tezde orjinal ve literatürdeki ismine bağlı kalınacak ve hibrit sayılar olarak kullanılacaktır.

**Tanım 3.20.** *(Özdemir, 2018) Hibrit sayılar kümesi $\mathbb{K}$ ile gösterilir ve*

$$\mathbb{K} = \left\{ a+b\mathbf{i}+c\boldsymbol{\varepsilon}+d\mathbf{h} : a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \mathbf{i}^2 = -1,\ \boldsymbol{\varepsilon}^2 = 0,\ \mathbf{h}^2 = 1,\ \mathbf{ih} = -\mathbf{hi} = \boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{i} \right\}$$

*biçiminde tanımlanır. Herhangi $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ hibrit sayısı için, $a$ değerine skaler kısım denir ve $S(\mathbf{Z})$ ile gösterilir. $b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ kısmına da, hibrit sayının vektör kısmı denilir ve $V(\mathbf{Z})$ ile gösterilir. Hibrit sayılarda çarpım işlemi aşağıdaki tablo ile belirlidir.*

| $\cdot$ | $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{\varepsilon}$ | $\boldsymbol{h}$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{i}$ | $-1$ | $\mathbf{1}-\boldsymbol{h}$ | $\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{i}$ |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | $\boldsymbol{h}+\mathbf{1}$ | $0$ | $-\boldsymbol{\varepsilon}$ |
| $\boldsymbol{h}$ | $-\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{\varepsilon}$ | $1$ |

*Hibrit sayılardaki çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir ama değişme özelliği yoktur. Herhangin bir $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ hibrit sayısının eşleniği $\overline{\mathbf{Z}}$ile gösterilir ve $\overline{\mathbf{Z}} = S(\mathbf{Z}) - V(\mathbf{Z}) = a - b\mathbf{i} - c\boldsymbol{\varepsilon} - d\mathbf{h}$ biçiminde tanımlanır.*

**Tanım 3.21.** *(Özdemir, 2018) $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ bir hibrit sayısı için,*

$$\mathcal{C}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}} = \overline{\mathbf{Z}}\mathbf{Z} = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 \tag{3.1}$$

*değerine, $\mathbf{Z}$ sayısının karakter sayısı denir ve*

$$\begin{cases} \mathbf{Z} \text{ spacelike} & \mathcal{C}(\mathbf{Z}) < 0 \text{ ise;} \\ \mathbf{Z} \text{ timelike} & \mathcal{C}(\mathbf{Z}) > 0 \text{ ise;} \\ \mathbf{Z} \text{ lightlike} & \mathcal{C}(\mathbf{Z}) = 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

*biçiminde adlandırılır. Bunlara, hibrit sayının karakteri denilir.*

**Tanım 3.22.** *(Özdemir, 2018)* $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ *bir hibrit sayısı için,*

$$\triangle(\mathbf{Z}) = -(b-c)^2 + c^2 + d^2$$

*reel sayısına,* $\mathbf{Z}$ *hibrit sayısının türlük sayısı denir ve*

$$\begin{cases} \mathbf{Z} \text{ eliptik} & \triangle(\mathbf{Z}) < 0 \text{ ise;} \\ \mathbf{Z} \text{ hiperbolik} & \triangle(\mathbf{Z}) > 0 \text{ ise;} \\ \mathbf{Z} \text{ parabolik} & \triangle(\mathbf{Z}) = 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

*biçiminde tanımlanır. Bunlara da,* $\mathbf{Z}$ *hibrit sayısının türü denilir. Ayrıca,* $\mathcal{E}_{\mathbf{Z}} = (b-c, c, d)$ *vektörüne,* $\mathbf{Z}$ *hibrit sayısının hibrit vektörü denir.*

**Tanım 3.23.** *(Özdemir, 2018)* $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ *bir hibrit sayısı için,*

$$\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{|\mathcal{C}(\mathbf{Z})|} = \sqrt{\left|a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2\right|}$$

*reel sayısına,* $\mathbf{Z}$ *hibrit sayısının normu denir. Ayrıca,*

$$\mathcal{N}(\mathbf{Z}) = \sqrt{|\triangle|} = \sqrt{\left|-(b-c)^2 + c^2 + d^2\right|}$$

*reel sayısına da,* $\mathbf{Z}$ *hibrit sayısının hibrit vektörünün normu denilir.*

**Sonuç 3.24.** *Hibrit sayılardaki norm tanımı, karmaşık, hiperbolik ve dual sayılarıdaki norm tanımıyla tamamen örtüşür. Gerçekten de,*

1. $Z$ *bir karmaşık sayı ise* $(c = d = 0)$, $\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{\left|\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}}\right|} = \sqrt{a^2 + b^2}$,
2. $Z$ *bir hiperbolik sayı* $(b = c = 0)$, $\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{\left|\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}}\right|} = \sqrt{|a^2 - d^2|}$,
3. $Z$ *bir dual sayı* $(b = d = 0)$, $\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{a^2} = |a|$.

Hibrit sayıların hibrityen çarpımını kullanarak, $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2) = \mathcal{C}(\mathbf{Z}_1)\,\mathcal{C}(\mathbf{Z}_2)$ eşitliğini gösterebiliriz. Böylece, timelike hibrit sayılar çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$, $\|\mathbf{Z}\| \neq 0$ hibrit sayısının tersi

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{Z}}}{\mathcal{C}(\mathbf{Z})}.$$

olarak tanımlanabilir. Buna göre, lightlike hibrit sayıların tersi yoktur.

### 3.2. Hibrit Sayıları Kullanarak 2×2 Matrislerin Sınıflandırılması

Hibrit sayıların sınıflandırıldığı biçimde, 2×2 matrisler sınıflandırılabilir. Herhangi bir 2×2 matris, hibrit sayılar ile 2×2 matrisler arasındaki izomorfizma göz önünde bulundurularak spacelike, timelike ya da lightlike olarak karakterize edilip ve hiperbolik, eliptik, ya da parabolik olarak sınıflandırılabilir.

**Teorem 3.25.** *(Özdemir 2018)* $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h} \in \mathbb{K}$ *olmak üzere,* $\mathbb{K}$ *hibrit sayılar halkasıyla,* $\mathbb{M}_{2\times 2}$ *ile gösterilen* $2 \times 2$ *reel matris halkası arasında tanımlanan,*

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{K} \to \mathbb{M}_{2\times 2} \\ \varphi\left(a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}\right) &= \begin{bmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.2}$$

*dönüşümü bir halka izomorfizmidir.*

Matris $\varphi(\mathbf{Z}) \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ $\mathbf{Z}$ hibritine karşılık gelen hibrit matris olarak adlandırılır. $2 \times 2$ matrisler ve hibrit sayılar arasındaki bu izomorfizm tanımlanarak, hibrit sayılar kolayca çarpılabilir ve hibrit sayıların birçok özelliği daha kolay bir şekilde ispatlanabilir. Ayrıca

$$\varphi^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \left(\frac{a+d}{2}\right) + \left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{a-d}{2}\right)\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{b+c}{2}\right)\mathbf{h}. \tag{3.3}$$

ile, bir matrise karşılık gelen hibrit sayı kolayca bulunabilir.

**Teorem 3.26.** *(Özdemir 2018)* $A$ *matrisi,* $Z$ *hibrit sayısına karşılık gelen* $2 \times 2$ *türünden reel girdili matris olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

*i.* $\rho = \|\mathbf{Z}\| = \sqrt{|\det A|}$,

*ii.* $\triangle(\mathbf{Z}) = \left(\frac{\mathrm{iz}A}{2}\right)^2 - \det A$,

*iii.* $P(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{iz}A)\lambda + \det A$, $\triangle_A = (\mathrm{iz}A)^2 - 4\det A = 4\triangle(\mathbf{Z})$ *değeri,* $A$ *matrisinin karakteristik polinomudur.*

*iv.* $\mathbf{Z}^{-1}$ *sayısının tanımlı olması için gerek ve yeter koşul* $\det(A) \neq 0$ *olmasıdır.*

Bu Teorem'in bir sonucu olarak, hibrit sayıların sınıflandırılmasının tamamen, bu hibrit sayıya karşılık gelen 2×2 matrisin determinant ve izine bağlı olduğu görülür. Yani, bir $\mathbf{Z}$ hibrit sayısını, bu sayıya karşılık gelen $\varphi(\mathbf{Z}) = A$ matrisinin türüne göre sınıflandırmak mümkündür. Ayrıca, tersine 2×2 matrisleri de, hibrit sayılara benzer şekilde sınıflandırılabilir. Yani, $2 \times 2$ gerçek matrisler için aşağıdaki sınıflandırmalar verilebilir.

**Tanım 3.27.** *$A$ matrisi, $2 \times 2$ türünden bir reel matris olsun, bu durumda, $A$ matrisi, determinantın işaretine göre aşağıdaki gibi adlandırılır :*

$$\begin{cases} A \text{ spacelike} & \det A < 0; \\ A \text{ timelike} & \det A > 0; \\ A \text{ lightlike} & \det A = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

**Tanım 3.28.** *$A$, $2 \times 2$ türünden bir matris ve $\lambda_1$ ile $\lambda_2$, $A$ matrisinin özdeğerleri olsunlar. Bu durumda, özdeğerlerin türüne göre $A$ matrisi aşağıdaki gibi adlandırılır.*

$$\begin{cases} A \text{ eliptik} & \lambda_1, \lambda_2 \text{ karmaşık sayı ise,} \\ A \text{ hiperbolik} & \lambda_1, \lambda_2 \text{ reel sayı ise,} \\ A \text{ parabolik} & \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases}$$

*Bunun yanında, bu sınıflandırma $\triangle_A = (\mathrm{iz}A)^2 - 4\det A$ olmak üzere, aşağıdakine denktir.*

$$\begin{cases} A \text{ eliptik} & \triangle_A < 0; \\ A \text{ hiperbolik} & \triangle_A > 0; \\ A \text{ parabolik} & \triangle_A = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

**Sonuç 3.29.** *$2 \times 2$ türünden bir reel girdili matrisin normu, $A$ spacelike veya timelike matris ise, aşağıdaki gibi tanımlanır. $A$ spacelike matris ise,*

$$\rho = \|A\| = \sqrt{|\det A|}$$

*biçiminde, $A$ lightlike matris ise,*

$$\rho = \|A\| = \mathrm{iz}A$$

*biçiminde tanımlanır.*

Böylece, 2× 2 sınıflandırma aşağıdaki tabloda verilebilir.

| $A$ | $\det A > 0$ | $\det A = 0$ | $\det A < 0$ |
|---|---|---|---|
| $(iz\mathrm{A})^2 < 4\det\mathrm{A}$ | Timelike Eliptik | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $(iz\mathrm{A})^2 = 4\det\mathrm{A}$ | Timelike Parabolik | Null Parabolik | $\emptyset$ |
| $(iz\mathrm{A})^2 > 4\det\mathrm{A}$ | Timelike Hiperbolik | Null Hiperbolik | Spacelike Hiperbolik |

### 3.3. Tip ve Karakterine Göre 2×2 Bir Matrisin Karekökü

Bu bölümde, 3.33 teoremi ve $2 \times 2$ matrislerin sınıflandırılması dikkate alınarak $2 \times 2$ matrisin kareköklerini bulmak için yeni bir yöntem verilecektir. Bu metodu vermeden önce 2×2 matrisin argümenti tanımlanacaktır. Bir matrisin argümenti özellikle kutupsal formunu tanımlamak için önemlidir ve matrisin argümenti matrisin türüne göre değişecektir. Matrisin argümenti tanımı, hibrit sayılardaki argüment tanımına bağlı olarak tanımlanacaktır. Hibrit sayılardaki argüment tanımı aşağıdaki gibidir.

**Tanım 3.30.** *(Özdemir 2018)* $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\varepsilon + d\mathbf{h}$ *bir hibrit sayı olsun.* $\mathbf{Z}$ *sayısının argümenti, türüne ve karakerine göre aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$\arg \mathbf{Z} = \theta = \begin{cases} \pi - \arctan \dfrac{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}{a} & \mathbf{Z} \textit{ eliptik ve } a < 0 \textit{ ise,} \\ \arctan \dfrac{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}{a} & \mathbf{Z} \textit{ eliptik ve } a > 0 \textit{ ise,} \\ \ln \left| \dfrac{a + \mathcal{N}(\mathbf{Z})}{\rho} \right| & \mathbf{Z} \textit{ nonlightlike hiperbolik ise;} \\ \dfrac{c}{\|\mathbf{Z}\|} & \mathbf{Z} \textit{ parabolik ise.} \end{cases}.$$

Diğer yandan, $2 \times 2$ matrisler ve hibrit sayılar arasındaki izomorfizm kullanılarak, $2 \times 2$ matrisin argümenti aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

**Tanım 3.31.** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *reel sayı girdili bir matris olsun.* $A$ *matrisinin argümenti* $\rho_A = \sqrt{|\det A|}$, $\Delta_A = (\mathrm{iz}A)^2 - 4 \det A$ *olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanır.*

*i.* $A$ *eliptik ve* $\mathrm{iz}A < 0$ *ise,* $\arg A = \theta = \pi - \arctan \frac{\sqrt{-\triangle_A}}{|\mathrm{iz}A|}$;

*ii.* $A$ *eliptik ve* $\mathrm{iz}A > 0$, $\arg A = \theta = \arctan \frac{\sqrt{-\triangle_A}}{|\mathrm{iz}A|}$;

*iii.* $A$ *hiperbolik ise,* $\arg A = \theta = \ln \left| \dfrac{\mathrm{iz}A + \sqrt{\triangle_A}}{2\rho_A} \right|$,

*iv.* $A$ *parabolik ise,* $\arg A = \theta = \dfrac{a - d}{|a + d|}$.

Bundan sonra, tüm tez boyunca, eliptik, hiperbolik ve parabolik matrislerin argümenti için yukarıdaki formüller kullanılacaktır.

**Örnek 3.32.** *Aşağıdaki matrislerin argümentleri incelenebilir.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

*Yukarıdaki tanımlar göz önüne alınırsa,*

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \triangle_A = -4 \\ \mathrm{iz}A = 4 \end{cases} \overset{Eliptik}{\longrightarrow} \theta = \arctan\frac{1}{2} \\
B &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \triangle_A = 0 \\ \mathrm{iz}A > 0 \end{cases} \overset{Parabolik}{\longrightarrow} \theta = \frac{a-d}{|a+d|} = \frac{1}{2}. \\
C &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \triangle_A = 9 \\ \mathrm{iz}A = 7 \end{cases} \overset{Hiperbolik}{\longrightarrow} \theta = \ln\frac{\sqrt{10}}{2}.
\end{aligned}$$

**Teorem 3.33.** *$A$, $2\times 2$ türünden reel girdili bir matris olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

*i.* $\triangle_{A^2} = (\mathrm{iz}A)^2 \triangle_A$ .

*ii.* $\mathrm{iz}A^2 = (\mathrm{iz}A)^2 - 2\det A$.

*iii.* $\rho_{A^2} = (\rho_A)^2$ .

**İspat** i. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ bir reel matris olsun. $\triangle_A$=$(\mathrm{iz}A)^2 - 4\det A$, kullanarak .

$$\begin{aligned}
\triangle_{A^2} &= \left(a^2+2bc+d^2\right)^2 - 4\left(a^2d^2-2abcd+b^2c^2\right) \\
&= (a+d)^2\left(a^2-2ad+d^2+4bc\right) \\
&= (\mathrm{iz}A)^2 \triangle_A .
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\mathrm{iz}A^2 &= \left(a^2+2ad+d^2+2bc-2ad\right) \\
&= (a+d)^2 - 2(\det A) \\
&= (\mathrm{iz}A)^2 - 2\det A.
\end{aligned}$$

iii. $\rho_{A^2} = \sqrt{\det A^2} = \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det A}^2 = (\rho_A)^2$elde edilir . □

**Teorem 3.34.** *$A$ ve $B$ iki farklı $2\times 2$ türünden reel matrisler olsun. $B^2 = A$ ise, $B$ matrisinin timelike veya spacelike olmasına göre, sırasıyla*

$$izB = \sqrt{\mathrm{iz}A + 2\sqrt{\det A}} \text{ veya } izB = \sqrt{\mathrm{iz}A - 2\sqrt{\det A}}$$

*ile belirlidir. Eğer, $B$ lightlike ise, bu durumda $izB = \sqrt{\mathrm{iz}A}$ olacaktır.*

**İspat** $B$ timelike ise , $\det B > 0$ olur. O zaman, $B^2 = A$ eşitliğine göre, $\det B = \sqrt{\det A}$ olur. Teorem 3.33-ii, kullanılarak

$$izB = \sqrt{\mathrm{iz}A + 2\sqrt{\det A}}.$$

elde edilir. Eğer $B$ spacelike ise, $\det B < 0$ ve $\det B = -\sqrt{\det A}$ olur. Böylece, eğer $B$ lightlike ise, $\det B = 0$ ve $izB = \sqrt{\mathrm{iz}A}$ olur. □

**Teorem 3.35.** *$A$ bir $2 \times 2$ türünden reel matris olsun. Bu durumda,* $\arg A^2 = 2\arg A$ *eşitliği vardır.*

**İspat** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ bir reel matris olsun. Eğer, $A$ eliptik ise, $\mathrm{iz}A < 0$ veya $\mathrm{iz}A > 0$ olmasına bağlı olarak, sırasıyla

$$\arg A = \pi - \arctan \tfrac{\sqrt{4\det A - (\mathrm{iz}A)^2}}{|\mathrm{iz}A|} \text{ veya } \arctan \tfrac{\sqrt{4\det A - (\mathrm{iz}A)^2}}{|\mathrm{iz}A|}$$

olacaktır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \arg A^2 &= \arctan \tfrac{\sqrt{4\det A^2 - (\mathrm{iz}A^2)^2}}{|\mathrm{iz}A^2|} \\ &= \arctan \tfrac{\sqrt{4(\det A)^2 - \left((\mathrm{iz}A)^2 - 2\det A\right)^2}}{\left|(\mathrm{iz}A)^2 - 2\det A\right|} \\ &= \arctan \tfrac{|\mathrm{iz}A|\sqrt{4\det A - (\mathrm{iz}A)^2}}{\left|(\mathrm{iz}A)^2 - 2\det A\right|}. \end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$2\arctan x = \arctan \frac{2x}{1 - x^2},$$

eşitliği kullanılarak, $(\mathrm{iz}A)^2 > 2\det A$ için,

$$2\arg A = 2\arctan \tfrac{\sqrt{4\det A - (\mathrm{iz}A)^2}}{|\mathrm{iz}A|} = \arctan \frac{|\mathrm{iz}A|\sqrt{4\det A - (\mathrm{iz}A)^2}}{|\mathrm{iz}A|^2 - 2\det A} = \arg A^2$$

bulunur. Ayrıca $(\mathrm{iz}A)^2 < 2\det A$ olduğunda da,

$$\arg A^2 = \pi - \arctan \tfrac{|\mathrm{iz}A|\sqrt{4\det A - (\mathrm{iz}A)^2}}{\left|(\mathrm{iz}A)^2 - 2\det A\right|} = 2\arg A.$$

elde edilir. Eğer $A$ bir hiperbolik reel matris ise.

$$\arg A = \ln \left| \frac{\mathrm{iz}A + \sqrt{\triangle_A}}{2\rho} \right|$$

olur. Benzer şekilde Teorem (3.33) ve $\triangle_A = (\mathrm{iz}A)^2 - 4\det A$ kullanılarak

$$\begin{aligned}
\arg A^2 &= \ln\left|\frac{\mathrm{iz}A^2 + \sqrt{\triangle_{A^2}}}{2\rho_{A^2}}\right| \\
&= \ln\left|\frac{(\mathrm{iz}A)^2 - 2\det A + \sqrt{(\mathrm{iz}A)^2\triangle_A}}{2(\rho_A)^2}\right| \\
&= \ln\left|\frac{(\mathrm{iz}A)^2 + \sqrt{\triangle_A}(\mathrm{iz}A) - 2\det A}{2(\rho_A)^2}\right| \\
&= \ln\left|\frac{2(\mathrm{iz}A)^2 + 2\sqrt{\triangle_A}(\mathrm{iz}A) - (\mathrm{iz}A)^2 + \triangle_A}{(2\rho_A)^2}\right| \\
&= \ln\left(\frac{\mathrm{iz}A + \sqrt{\triangle_A}}{2\rho}\right)^2 \\
&= 2\arg A.
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak eğer $A$ parabolik bir reel matris ise,

$$\arg A = \theta = \frac{a-d}{|a+d|}.$$

olur. $A$ parabolik olduğundan, $(\mathrm{iz}A)^2 = 4\det A$ eşitliğinden

$$(a-d)^2 = -4bc.$$

olur. Böylece Teorem (3.33) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\arg A^2 &= \frac{a^2-d^2}{|a^2+2bc+d^2|} \\
&= \frac{a^2-d^2}{\left|\frac{1}{2}(a+d)^2\right|} \\
&= 2\arg A.
\end{aligned}$$

elde edilir. □

**Teorem 3.36.** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *bir reel matris olsun.*

*i. Eğer, $A$ bir eliptik matris ise, $A$ matrisinin 2 tane karekökü vardır ve*

$$\sqrt{A} = \pm\frac{1}{\sqrt{\mathrm{iz}A + 2\sqrt{\det A}}}\begin{bmatrix} a+\sqrt{\det A} & b \\ c & d+\sqrt{\det A} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

*ile belirlidir.*

*ii. Eğer $A$ bir hiperbolik matris ise, $A$ matrisinin karekökünün olması için gerek ve yeter koşul $A$ matrisinin timelike veya lightlike olması ve* $\mathrm{iz}A > 0$ *olması gerekir.* $\mathrm{iz}A > 0$ *olması durumunda, $A$ matrisinin 2 tanesi spacelike, 2 tanesi timelike olmak üzere 4 reel kökü vardır ve bunlar*

$$\sqrt{A} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathrm{iz}A \pm 2\sqrt{\det A}}} \begin{bmatrix} a \pm \sqrt{\det A} & b \\ c & d \pm \sqrt{\det A} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

*ile belirlidir. $A$ matrisinin lightlike olması durumunda ise, $2$ farklı reel kök vardır ve bunlar*

$$\sqrt{A} = \pm \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{\mathrm{iz}A}} & \frac{b}{\sqrt{\mathrm{iz}A}} \\ \frac{c}{\sqrt{\mathrm{iz}A}} & \frac{d}{\sqrt{\mathrm{iz}A}} \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

*ile bulunur.*

*iii. $A$ bir timelike parabolik matris olsun, $a \neq d$ ise, $A$ matrisinin reel karekökünün olması için gerek ve yeter koşul* $\mathrm{iz}A > 0$ *olmasıdır. Bu durumda, $A$ matrisinin karekökü* $\theta = \frac{a-d}{|a+d|}$ *ve* $\epsilon =$*sign*$(\det A)$ *olmak üzere*

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{\mathrm{iz}A}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\epsilon\theta}{2} + 1 & \frac{\epsilon b\theta}{a-d} \\ \frac{\epsilon c\theta}{a-d} & 1 - \frac{\epsilon\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

*ile belirlidir.*

*iv. $A$ bir timelike parabolik matris olsun, $a = d$ ve* $\mathrm{iz}A \neq 0$ *ise, $A$ matrisinin kökleri $b$ ve $c$ değerlerinin sıfır olmasına göre*

$$\sqrt{A} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pm 2\sqrt{a}} \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ c & 2a \end{bmatrix} & b = 0 \text{ } \textit{ise}, \\ \dfrac{1}{\pm 2\sqrt{a}} \begin{bmatrix} 2a & b \\ 0 & 2a \end{bmatrix} & c = 0 \text{ } \textit{ise}, \\ \dfrac{1}{\pm \sqrt{a}} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} & b = c = 0 \text{ } \textit{ise}, \end{cases} \tag{3.10}$$

*ile belirlidir.*

*v. Sıfır matrisi ve skaler matrislerin sonsuz çoklukta karekökü vardır.*

**İspat** $X^2 = A$ eşitliğinde,

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

olsun. Yani, $X$ matrisi $A$'nın karekökü olsun. Bu durumda

$$X^2 = \begin{bmatrix} x^2 + yz & ty + xy \\ tz + xz & t^2 + yz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

olduğundan

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{\mathrm{iz}X}, \\ z &= \frac{c}{\mathrm{iz}X}, \\ x^2 &= \frac{\pm 1}{|\mathrm{iz}X|^2}\left(a\left(\mathrm{iz}X\right)^2 - bc\right), \\ t^2 &= \frac{\pm 1}{|\mathrm{iz}X|^2}\left(d\left(\mathrm{iz}X\right)^2 - bc\right). \end{aligned}$$

elde edilir.

i. $A$ matrisinin eliptik bir matris olması durumunda , $(\mathrm{iz}A)^2 < 4\det A$ olduğundan, $\mathrm{iz}A - 2\sqrt{\det A}$ olamaz. O halde, $\mathrm{iz}X = \pm\sqrt{\mathrm{iz}A + 2\sqrt{\det A}}$olacaktır. Bu nedenle $\mathrm{iz}X = \pm\sqrt{a + d + 2\sqrt{\det A}}$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{|\mathrm{iz}X|^2}\left(a\left(a + d + 2\sqrt{\det A}\right) - bc\right) \\ &= \frac{1}{|\mathrm{iz}X|^2}\left(a^2 + 2a\sqrt{\det A} + ad - bc\right) \\ &= \frac{1}{|\mathrm{iz}X|^2}\left(a + \sqrt{\det A}\right)^2. \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$x = \frac{\pm\left(a + \sqrt{\det A}\right)}{\mathrm{iz}X}.$$

olur. Benzer şekilde

$$t = \frac{\pm\left(d + \sqrt{\det A}\right)}{\mathrm{iz}X}.$$

olacaktır. Böylece (3.6) eşitliği elde edilir.

ii. $A$ matrisinin hiperbolik bir matris olması durumunda, $(\mathrm{iz}A)^2 > 4\det A$ olacaktır. O halde,

$$\mathrm{iz}X = \pm\sqrt{a + d \pm 2\sqrt{\det A}}$$

olur. $\mathrm{iz}X \in \mathbb{R}$ olması için gerek ve yeter koşul $\det A > 0$ olmasıdır. Yani, $A$ matrisinin timelike olması gerekir. $A$ timelike matris olsun. Buradan,

$$x^2 = \frac{1}{|\mathrm{iz}X|^2}\left(a \pm \sqrt{\det A}\right)^2$$

olur ve

$$x = \frac{\pm\left(a \pm \sqrt{\det A}\right)}{\mathrm{iz}X} \text{ ve } t = \frac{\pm\left(d \pm \sqrt{\det A}\right)}{\mathrm{iz}X}.$$

bulunur. Böylece (3.7) eşitliği elde edilir.

Diğer yandan, $A$ bir lightlike hiperbolik matris ise, $\det A = 0$ ve $(\mathrm{iz}A)^2 > 4\det A = 0$ olur. Böylece $X^2 = A$ eşitliğinden, $\det X = 0$ ve $\mathrm{iz}X = \pm\sqrt{\mathrm{iz}A}$ olduğu kullanılırsa,

$$tx = yz \quad \text{ve} \quad x + t = \pm\sqrt{a+d}$$

olur. Buradan,

$$X^2 = (x+t)\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

ve dolayısıyla (3.8) eşitliği elde edilir..

iii. $A$ bir parabolik matris ise, $(\mathrm{iz}A)^2 = 4\det A$ ya da eşdeğer olarak $(a-d)^2 = -4bc$ olacaktır. Eğer $A$ timelike ise, $\det A > 0$ olur. Böylece, $\mathrm{iz}X = \pm\sqrt{\mathrm{iz}A \pm 2\sqrt{\det A}}$eşitliği kullanılır. Buna göre, $a = d$ veya $a \neq d$ durumları incelenebilir.

Eğer $a \neq d$ ve $\mathrm{iz}A > 0$ ise,

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{\pm\sqrt{\mathrm{iz}A + 2\sqrt{\det A}}}, \\ z &= \frac{c}{\pm\sqrt{\mathrm{iz}A + 2\sqrt{\det A}}}, \\ x &= \pm 1\frac{1}{|\mathrm{iz}X|}\left(a + \sqrt{\det A}\right), \\ t &= \pm 1\frac{1}{|\mathrm{iz}X|}\left(d + \sqrt{\det A}\right). \end{aligned}$$

olacaktır. Böylece, (3.9) eşitliği bulunur. $a \neq d$ ve $\mathrm{iz}A < 0$, iken $A$ matrisinin kökü yoktur.

iv. Son olarak, $a = d$ olması durumunda, $b$ ve $c$ sıfıra eşittir. Buradan, $\mathrm{iz}X$ değeri, ya $0$ ya da $\pm 2\sqrt{a}$ olacaktır. $\mathrm{iz}X = x + t = \pm 2\sqrt{a}$, $bc = 0$, olduğundan, $\sqrt{A}$ matrisi (3.10) olarak bulunur.

v. $\text{iz}X = 0$,olduğunda $X^2$, $X^2 = (x^2 + yz)\, I$ formunda olacaktır. Böylece, $a = d = x^2 + yz$, $b = c = 0$ ve $\det A = a^2$ olur. Yani, $x = m$ ve $y = n$, $z = \dfrac{\sqrt{\det A} - m^2}{n}$ yazılabilir. O halde, herhangi $A = aI$, $a \in \mathbb{R}^+$ formundaki bir skaler matrisin

$$\begin{bmatrix} m & n \\ \dfrac{\sqrt{\det A} - m^2}{n} & -m \end{bmatrix},\ m, n \in \mathbb{R}.$$

biçiminde sonsuz sayıda karekökü vardır.

Diğer yandan, eğer $A$ bir lightlike matris ise, $\det A = \text{iz}A = 0$ olur. $X^2 = A$ eşitliğine göre, $\det X = 0$ ve $\text{iz}X = 0$, veya eşdeğer olarak $tx = yz$ ve $x + t = 0$ olur. Bu, her bir lightlike parabolik matrisin, sıfır matrisin bir kökü olduğu anlamına gelir. Yani, sıfır matrisinin sonsuz çoklukta karekök matrisi vardır. □

**Sonuç 3.37.** *$A$ parabolik matrisi*

$$A = \det \begin{bmatrix} a + \lambda & -a^2/b \\ b & \lambda - a \end{bmatrix}$$

*formunda bir matris olsun, öyle ki $\lambda$ ile $A$ matrisinin bir tek özdeğeri ve $\mathbf{u} = (a, b)$ ise bu özdeğere karşılık gelen bir tek özvektörü olsun. $A$ matisinin karekökünün olması için gerek ve yeter koşul $\text{iz}A = 2\lambda > 0$ değerinin pozitif olmasıdır. Bu durumda, $A$ matrisinin karekökleri*

$$\sqrt{A} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{\lambda}} \begin{bmatrix} 2\lambda + a & -a^2/b \\ b & 2\lambda - a \end{bmatrix}.$$

*formundadır.*

**Örnek 3.38.** $A = \begin{bmatrix} -31 & -48 \\ 24 & 17 \end{bmatrix}$ *ile verilen eliptik matrisi için, (3.6) eşitliği kullanılarak*

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \pm \frac{1}{\sqrt{-14 + 2\sqrt{625}}} \begin{bmatrix} -31 + \sqrt{625} & -48 \\ 24 & 17 + \sqrt{625} \end{bmatrix} \\ &= \pm \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*bulunur.*

**Örnek 3.39.** *Aşağıdaki matrislerin karekökleri yukarıdaki teorem yardımıyla kolayca bulunabilir.*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

*$B$ matrisi spacelike bir matristir ve $izB < 0$ olduğunun karekökü yoktur.*

*$A$ bir timelike hiperbolik matris ise $4$ farklı reel kök vardır ve bunlar*

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \pm\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{4}}} \begin{bmatrix} -5+\sqrt{4} & -9 \\ 6 & 10+\sqrt{4} \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \\ \sqrt{A} &= \pm\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{4}}} \begin{bmatrix} -5-\sqrt{4} & -9 \\ 6 & 10-\sqrt{4} \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -7 & -9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*şeklindedir.*

*$C$ matrisi bir lightlike hiperbolik matristir ve $2$ reel kök vardır. Bunlar :*

$$\sqrt{A} = \pm \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

**Örnek 3.40.** $A = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *parabolik matrisinin karekökü*

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{4+2\sqrt{4}}} \begin{bmatrix} 5+\sqrt{4} & -9 \\ 1 & -1+\sqrt{4} \end{bmatrix}.$$

*ile belirlidir.* $\mathrm{iz}B < 0$ *olduğundan,*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

*parabolik matrisinin karekökü yoktur.*

### 3.4. Idempotent Taban Kullanarak Hiperbolik Matrisin Kareköklerini Bulma

Idempotent taban, hiperbolik sayılarda birçok işlemi kolaylaştıran bir tabandır. Bu taban,

$$\left\{\mathbf{e}_1 = \frac{1-\mathbf{h}}{2}, \mathbf{e}_2 = \frac{1+\mathbf{h}}{2}\right\}$$

biçiminde elde edilir ve $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0$, $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2$ eşitlikleri sağlanır (Sobczyk, 1995). Hiperbolik tabanın idempotent tabanına benzer şekilde, hiperbolik hibrit sayılar için de, idempotent taban tanımlanabilir.

**Tanım 3.41.** $\mathbb{K}_h(\mathbf{V}) = \{\mathbf{Z} = x + \mathbf{V}y : x, y \in \mathbb{R},\ \mathbf{V}^2 = 1,\ \mathbf{Z} \in \mathbb{K}\}$ $\mathbf{V}$ *ile ilişkilendirilmiş hiperbolik hibrit sayılar kümesi gösterilsin. Bu küme, hibrit sayılar kümesinin bir alt halkasıdır. Bu kümede,*

$$\left\{\mathbf{e}_1 = \frac{1-\mathbf{V}}{2}, \mathbf{e}_2 = \frac{1+\mathbf{V}}{2}\right\} \tag{3.11}$$

*biçiminde tanımlanan kümeye,* $\mathbb{K}_h(\mathbf{V})$ *kümesinin idempotent tabanı denilir. Bu iki eleman,*

$$\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1 \quad \textit{ve} \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2$$

*koşullarını sağlar.*

**Önerme 3.42.** *Her* $\mathbf{Z} = x + \mathbf{V}y$ *formundaki hiperbolik hibrit sayı,* $\mathbf{e}_1$ *ve* $\mathbf{e}_2$ *idempotent elemanlarının lineer kombinasyonu olarak*

$$\mathbf{Z} = (x-y)\,\mathbf{e}_1 + (x+y)\,\mathbf{e}_2$$

*biçiminde yazılabilir.*

**İspat** $\mathbf{Z} = (x-y)\,\mathbf{e}_1 + (x+y)\,\mathbf{e}_2$ eşitliğinde, (3.11) eşitlikleri yazılırsa,

$$\mathbf{Z} = (x-y)\,\frac{1-\mathbf{V}}{2} + (x+y)\,\frac{1+\mathbf{V}}{2} = x + \mathbf{V}y$$

elde edilir. □

**Sonuç 3.43.** *Her* $\mathbf{Z} = x + \mathbf{V}y$ *hiperbolik hibrit sayısı* $z_- = x - y$, $z_+ = x + y$ *olmak üzere.*

$$\mathbf{Z} = z_-\mathbf{e}_1 + z_+\mathbf{e}_2$$

*biçiminde gösterilebilir. Bu formdaki her bir hibrit sayıda* $\mathbf{V}=\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1$ *olmak üzere,*

$$\mathbf{Z}=\left(\frac{z_{+}+z_{-}}{2},\frac{z_{+}-z_{-}}{2}\right)=\frac{z_{+}+z_{-}}{2}+\frac{z_{+}-z_{-}}{2}\mathbf{V}$$

*ile belirlidir.* $(z_{-},z_{+})$ *ikilisine,* $\mathbf{Z}$ *hiperbolik hibrit sayısının idempotent koordinatları denilir.*

**Örnek 3.44.** *Örneğin,*

$$\mathbf{Z}=13-8\mathbf{i}-12\boldsymbol{\varepsilon}-4\mathbf{h}$$

*hibrit sayısı,*

$$\triangle(Z)=-(-8+12)^2+(-12)^2+(-4)^2=144>0$$

*olduğundan hiperboliktir.*

$$\mathbf{V}=\frac{2\mathbf{i}+3\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{h}}{3}$$

*olmak üzere,*

$$\mathbf{Z}=13-12\mathbf{V}$$

*biçiminde yazılabilir.* $\mathbf{V}^2=1$ *olduğu kolayca görülebilir. Buna göre,* $\mathbf{Z}$ *hiperbolik hibrit sayısının idempotent koordinatları*

$$\mathbf{Z}_{id}=(25,1)$$

*olarak bulunur.*

Bir hiperbolik hibrit sayının köklerini idempotent tabanı kullanarak bulmak çok daha kolaydır.

**Teorem 3.45.** *(Özdemir 2018)* $\mathbf{Z}=x+\mathbf{h}y$, *idempotent koordinatları* $\mathbf{Z}_n=(z_{-},z_{+})$ *olan bir hiperbolik hibrit sayı olsun. Bu durumda,* $m\in\mathbb{Z}$ *ve* $k\in\{1,-1,\mathbf{V},-\mathbf{V}\}$ *olmak üzere,*

$$\mathbf{Z}_{id}^{m}=\begin{cases}\left(z_{+}^{m},z_{-}^{m}\right) & m \text{ tek sayı}\\ k\left(z_{+}^{m},z_{-}^{m}\right) & m \text{ çift sayı}\end{cases}$$

*ile belirlidir.*

**Sonuç 3.46.** *$\mathbf{Z} = x + y\mathbf{V}$ idempotent koordinatları $\mathbf{Z}_{id} = (z_-, z_+)$ olan bir hiperbolik hibrit sayı olsun. Bu durumda, $\mathbf{Z}$ sayısının karekökü, $k \in \{1, -1, \mathbf{V}, -\mathbf{V}\}$ olmak üzere,*

$$\sqrt{\mathbf{Z}_{id}} = k\left(\frac{z_+^{1/2} + z_-^{1/2}}{2} + \frac{z_+^{1/2} - z_-^{1/2}}{2}\mathbf{V}\right)$$

*ile belirlidir.*

**Sonuç 3.47.** *$\mathbf{Z} = x + y\mathbf{V}$ formundaki bir hiperbolik hibrit sayının reel karekökünün olması için gerek ve yeter koşul $x - y > 0$ ve $x > 0$ olmasıdır. Yani, $\mathbf{Z}$ bir timelike hiperbolik sayı ise karekökü yoktur.*

Bir $2 \times 2$ matrisin köklerini, bu matrisin karşılık geldiği hibrit sayının köklerini bularak elde etmek mümkündür. Hibrit sayılar ve 2x2 matrisler arasındaki izomorfizma yardımıyla, 2x2 hiperbolik matrisler için de bir idempotent tabandan söz edilebilir.

**Örnek 3.48.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 25 \end{bmatrix}$ *matrisi bir hiperbolik matristir. Bu matrise karşılık gelen hibrit sayı*

$$\mathbf{Z} = 13 - 8\mathbf{i} - 12\boldsymbol{\varepsilon} - 4\mathbf{h}$$

*ile belirlidir. Bu sayı da,* $\mathbf{V} = \dfrac{2\mathbf{i} + 3\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{h}}{3}$ *olmak üzere,*

$$\mathbf{Z} = 13 - 12\mathbf{V}$$

*biçiminde yazılabilir ve idempotent taban $\mathbf{Z} = (25, 1)$ olur. Dolayısıyla, (3.46) kullanılarak, $k \in \{1, -1, \mathbf{V}, -\mathbf{V}\}$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{Z}} &= \sqrt{13 - 12\mathbf{V}} \\ &= \left(25^{1/2}, 1^{1/2}\right) \\ &= k\left(\frac{1+5}{2} + \frac{1-5}{2}\mathbf{V}\right) \\ &= k\,(3 - 2\mathbf{V}) \end{aligned}$$

*elde edilir. Yani, $\sqrt{\mathbf{Z}}$ hibrit sayısı*

$$\pm(3 - 2\mathbf{V}) \quad ve \quad \pm(-2 + 3\mathbf{V})$$

*olur.( 3.2) izomorfizmi yardımıyla, bu hibrit sayılara karşılık gelen $2 \times 2$ matrisler,*

$$\pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 5 \end{bmatrix} \quad ve \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

*biçiminde bulunur. Bu dört matris, $A$ matrisinin kareköküdür. Bu kolayca kontrol edilebilir.*

Yukarıdaki tanım ve sonuçlar göz önüne alınarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

**Teorem 3.49.** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *bir hiperbolik matris olsun.* $A$ *matrisinin karekökü,*

$$x = \sqrt{\frac{\text{iz}A + \sqrt{\triangle_A}}{2}} \quad \textit{ve} \quad y = \sqrt{\frac{\text{iz}A - \sqrt{\triangle_A}}{2}}$$

*olmak üzere,*

$$\frac{\pm 1}{2} \begin{bmatrix} (x+y) + \frac{a-d}{\sqrt{\triangle_A}}(x-y) & \frac{2b}{\sqrt{\triangle_A}}(x-y) \\ \frac{2c}{\sqrt{\triangle_A}}(x-y) & (x+y) - \frac{a-d}{\sqrt{\triangle_A}}(x-y) \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$\frac{\pm 1}{2} \begin{bmatrix} (x-y) + \frac{a-d}{\sqrt{\triangle_A}}(x+y) & \frac{2b}{\sqrt{\triangle_A}}(x+y) \\ \frac{2c}{\sqrt{\triangle_A}}(x+y) & (x-y) - \frac{a-d}{\sqrt{\triangle_A}}(x+y) \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

*eşitlikleriyle belirlidir.*

**İspat** $A$ matrisine karşılık gelen $\mathbf{Z}$ hibrit sayısının idempotent koordinatları :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \left(\frac{a+d}{2}\right) + \left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{a-d}{2}\right)\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{b+c}{2}\right)\mathbf{h} \\ &= \frac{1}{2}\left(\text{iz}A + \sqrt{\triangle_A}\mathbf{V}\right). \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada,

$$\mathbf{V} = \frac{a+b-c-d}{\sqrt{\triangle_A}}\mathbf{i} + \frac{a-d}{\sqrt{\triangle_A}}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{b+c}{\sqrt{\triangle_A}}\mathbf{h}.$$

ile belirlidir. Eğer $\mathbf{Z} = x + \mathbf{V}y$, $\mathbf{V}^2 = 1$, ise, $x = \frac{\text{iz}A}{2}$, $y = \frac{\sqrt{\triangle_A}}{2}$ olur. Bu nedenle, $\mathbf{Z}$ hibrit sayısının idempotent koordinatları

$$\mathbf{Z}_{id} = (z_-, z_+) = \left(\frac{\text{iz}A - \sqrt{\triangle_A}}{2}, \frac{\text{iz}A + \sqrt{\triangle_A}}{2}\right).$$

olur. Sonuç 3.46, kullanılarak, $k \in \{1, -1, \mathbf{V}, -\mathbf{V}\}$ olmak üzere, $\mathbf{Z}$ sayısının karekökleri

$$\sqrt{\mathbf{Z}_{id}} = \frac{k}{2}\left(z_+^{1/2} + z_-^{1/2} + \left(z_+^{1/2} - z_-^{1/2}\right)\mathbf{V}\right)$$

elde edilir. Buradan, $k = \pm 1$ ve $k = \pm \mathbf{V}$ olmasına göre, $\varphi$ izomorfizmi de kullanılarak, sırasıyla (3.12) ve (3.13) matrisleri bulunur. □

**Tanım 3.50.** *$A$, $2 \times 2$ türünden bir reel girdili hiperbolik matris olsun. Bu durumda,*

$$V = \frac{1}{\sqrt{\triangle_A}} \begin{bmatrix} a-d & 2b \\ 2c & d-a \end{bmatrix}$$

*olmak üzere,*

$$\left\{ \mathbf{e}_1 = \frac{\mathrm{I} - V}{2}, \mathbf{e}_2 = \frac{\mathrm{I} + V}{2} \right\}$$

*ikilisine, $A$ matrisinin idempotent tabanı ve*

$$A_{id} = \left( \frac{\mathrm{iz}A - \sqrt{\triangle_A}}{2}, \frac{\mathrm{iz}A + \sqrt{\triangle_A}}{2} \right)$$

*koordinatlarına da, $A$ matrisinin idempotent koordinatları denilir.*

**Örnek 3.51.** *Reel girdili $2 \times 2$ türünden bir $A$ matrisi*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 22 \end{bmatrix}$$

*olarak verilsin.*

$$(\mathrm{iz}A)^2 - 4 \det A = (7+22)^2 - 4 \cdot 100 = 441 > 0$$

*olduğundan, $A$ bir hiperbolik matristir. Bu matrisin, idempotent koordinatları da,*

$$x_A = \sqrt{\frac{29 + \sqrt{441}}{2}} = 5 \quad \textit{ve} \quad y_A = \sqrt{\frac{29 - \sqrt{441}}{2}} = 2$$

*ile belirlidir. Böylece, (3.12) ve (3.13) eşitliklerinden, $\sqrt{A}$ matrisi*

$$\frac{\pm 1}{2\sqrt{441}} \begin{bmatrix} \sqrt{441}\,(7) + (7-22)\,(3) & 2 \cdot 9 \cdot 3 \\ 2 \cdot 6 \cdot (3) & \sqrt{441}7 - (7-22)\,3 \end{bmatrix} = \frac{\pm 1}{7} \begin{bmatrix} 17 & 9 \\ 6 & 32 \end{bmatrix}$$

*veya*

$$\frac{\pm 1}{2\sqrt{441}} \begin{bmatrix} \sqrt{441}\,(3) + (7-22)\,(7) & 2 \cdot 9 \cdot 7 \\ 2 \cdot 6 \cdot (7) & \sqrt{441}3 - (7-22)\,7 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

*elde edilir. Böylece, $A$ matrisinin $4$ reel karekökü olduğu görülür.*

**Sonuç 3.52.** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *bir lightlike hiperbolik matris olsun. Bu durumda, $A$ matrisinin kareköku*

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{\mathrm{iz}A}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

*ile belirlidir.*

**İspat** $A$ matrisi lightlike ise, $\det A = 0$ olacaktır. Bu durumda,

$$\sqrt{\triangle_A} = \mathrm{iz}A$$

elde edilir. $A$ matrisine karşılık gelen $\mathbf{Z}$ lightlike hiperbolik hibrit sayısı

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathrm{iz}A}{2}\left(1 + \left(\frac{a+b-c-d}{\mathrm{iz}A}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{a-d}{\mathrm{iz}A}\right)\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{b+c}{\mathrm{iz}A}\right)\mathbf{h}\right)$$

ile belirlidir ve $\mathbf{Z} = x + y\mathbf{V}$, $\mathbf{V}^2 = 1$, için

$$x = y = \frac{\mathrm{iz}A}{2} \text{ ve } \mathbf{V} = \left(\frac{a+b-c-d}{\mathrm{iz}A}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{a-d}{\mathrm{iz}A}\right)\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{b+c}{\mathrm{iz}A}\right)\mathbf{h}.$$

olur. Buradan, $\mathbf{Z}$ hibrit sayısının idempotent koordinatları

$$\mathbf{Z}_{id} = (z_-, z_+) = (0, \mathrm{iz}A)\,.$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{Z}_{id}} &= \frac{k}{2}\left(z_+^{1/2} + z_-^{1/2} + \left(z_+^{1/2} - z_-^{1/2}\right)\mathbf{V}\right) \\ \sqrt{\mathbf{Z}_{id}} &= \pm\frac{\sqrt{\mathrm{iz}A}}{2}\left(1 + \mathbf{V}\right). \end{aligned}$$

olacağından, $\sqrt{A}$ matrisi, $\varphi$ izomorfizmi yardımıyla,

$$\frac{\pm}{\sqrt{\mathrm{iz}A}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

bulunur.

**2. Yol.** $\sqrt{\triangle_A} = \mathrm{iz}A$ olduğu, Teorem 3.49'de kullanılırsa,

$$x = \sqrt{\mathrm{iz}A} \quad \text{ve} \quad y = 0$$

bulunur. Buradan, $\sqrt{A}$ matrisi, (3.12)'den

$$\frac{\pm 1}{2}\left[\begin{array}{cc} \sqrt{\mathrm{iz}A}+\dfrac{a-d}{\mathrm{iz}A}\sqrt{\mathrm{iz}A} & \dfrac{2b}{\mathrm{iz}A}\sqrt{\mathrm{iz}A} \\ \dfrac{2c}{\mathrm{iz}A}\sqrt{\mathrm{iz}A} & \sqrt{\mathrm{iz}A}-\dfrac{a-d}{\mathrm{iz}A}\sqrt{\mathrm{iz}A} \end{array}\right]=\frac{\pm 1}{\sqrt{\mathrm{iz}A}}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

elde edilir. □

**Örnek 3.53.** $B=\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ *bir lightlike hiperbolik matristir ve kökleri*

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{\mathrm{iz}A}}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\frac{\pm 1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

*olur.*

### 3.5. Bir Matrisin Kutupsal Formunu Kullanarak Köklerinin Hesaplanması

Bu bölümde, bir matrisin türüne ve karakterine uygun olarak kutupsal formları verilip, her bir durum için de Moivre formülleri kanıtlanarak, bu formüller yardımıyla, $2 \times 2$ matrislerin kökleri incelenecektir. Bu bölüm, (Özdemir, 2019)'un makalesine dayanmaktadır. Hibrit sayıların köklerinin bulunması ile ilgili aşağıdaki dört teorem de (Özdemir, 2018) makalesinde bulunabilir. Bunların kanıtları ayrıca verilmeyecektir.

**Teorem 3.54.** $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ *bir hibrit sayı olsun.* $\theta = \arg \mathbf{Z}$*,* $\rho = \|\mathbf{Z}\|$, $\mathbf{U} = \frac{b\mathbf{i}+c\boldsymbol{\varepsilon}+d\mathbf{h}}{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}$ *ve* $k \in \{-1, 1, \mathbf{U}, -\mathbf{U}\}$ *için,*

$$k = \begin{cases} 1 & \mathbf{Z} \text{ timelike ve } a > 0, \\ -1 & \mathbf{Z} \text{ timelike ve } a < 0, \\ \mathbf{U} & \mathbf{Z} \text{ spacelike ve } a > 0, \\ -\mathbf{U} & \mathbf{Z} \text{ spacelike ve } a < 0, \end{cases}$$

*olmak üzere,*

*i.* $\mathbf{Z}$ *eliptik ise,* $\mathbf{U}^2 = -1$ *olmak üzere* $\mathbf{Z} = \rho(\cos\theta + \mathbf{U}\sin\theta)$ *formundadır.*

*ii.* $\mathbf{Z}$ *lightlike hiperbolik ise,* $\mathbf{U}^2 = 1$ *olmak üzere,* $\mathbf{Z} = a(1 + \mathbf{U})$ *formundadır.*

*iii.* $\mathbf{Z}$ *lightlike olmayan hiperbolik ise,* $\mathbf{U}^2 = 1$ *olmak üzere,* $\mathbf{Z} = k\rho(\cosh\theta + \mathbf{U}\sinh\theta)$ *formundadır*

**Teorem 3.55.** $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ *bir hibrit sayı olsun.* $\mathbf{Z}$ *parabolik hibrit sayı ise, bu durumda* $\mathbf{U} = \frac{V(\mathbf{Z})}{\rho}$, $\mathbf{U}^2 = 0$, $\epsilon = sgn(S(\mathbf{Z}))$ *olmak üzere,*

$$\mathbf{Z} = \|\mathbf{Z}\|(\epsilon + \mathbf{U})$$

*formunda yazılır.*

**Teorem 3.56.** $\mathbf{Z} = a + \mathbf{U}b$, $\mathbf{U}^2 \in \{\pm 1, 0\}$ *bir spacelike veya timelike hibrit sayı olsun.* $\theta = \arg \mathbf{Z}$ *ve* $\rho = \|\mathbf{Z}\|$ *olmak üzere,*

*i.* $\mathbf{Z}$ *eliptik ise,* $\mathbf{Z}^2 = \rho^2(\cos 2\theta + \mathbf{U}\sin 2\theta)$, $\mathbf{U}^2 = -1$;

*ii.* $\mathbf{Z}$ *hiperbolik ise,* $\mathbf{Z}^2 = \rho^2(\cosh 2\theta + \mathbf{U}\sinh 2\theta)$, $\mathbf{U}^2 = 1$;

*iii.* $\mathbf{Z}$ *parabolik ise,* $\mathbf{Z}^2 = \rho^2(1 + 2\epsilon\mathbf{U})$, $\mathbf{U}^2 = 0$

*eşitlikleri sağlanır.*

**Teorem 3.57.** $\mathbf{Z} = a\left(1+\mathbf{U}\right)$ *bir lightlike hibrit sayı ise,* $\mathbf{U} = \frac{V(\mathbf{Z})}{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}$ *ve* $\mathbf{U}^2 = 1$ *olmak üzere,*

$$\mathbf{Z}^2 = a^2 2\left(1+\mathbf{U}\right)$$

*formundadır.*

Bu teoremler ve hibrit sayılarla $2\times 2$ matrisler arasında tanımlanan izomorfizma yardımıyla, $2\times 2$ matrislerin türüne ve karakterine göre kutupsal formları aşağıdaki gibi olacaktır.

**Teorem 3.58.** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *reel girdili bir matris olsun.* $\arg A = \theta$ *ve* $\epsilon = sign(\mathrm{iz}A)$ *olmak üzere,* $A$ *matrisinin türüne ve karakterine göre kutupsal formları aşağıdaki gibi tanımlıdır.*

*i.* $A$ *bir eliptik matris ise,*

$$A = \rho \begin{bmatrix} \cos\theta + \left(\frac{a-d}{2\sqrt{-\Delta}}\right)\sin\theta & \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\sin\theta \\ \frac{c}{\sqrt{-\Delta}}\sin\theta & \cos\theta - \left(\frac{a-d}{2\sqrt{-\Delta}}\right)\sin\theta \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

*ii.* $A$ *bir timelike hiperbolik matris ise,*

$$A = \epsilon\rho \begin{bmatrix} \cosh\theta + \frac{(a-d)}{2\sqrt{\Delta}}\sinh\theta & \frac{b}{\sqrt{\Delta}}\sinh\theta \\ \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\sinh\theta & \cosh\theta - \frac{(a-d)}{2\sqrt{\Delta}}\sinh\theta \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

*iii.* $A$ *bir spacelike hiperbolik matris ise,*

$$A = \rho \begin{bmatrix} \sinh\theta + \frac{(a-d)}{2\sqrt{\Delta}}\cosh\theta & \frac{b}{\sqrt{\Delta}}\cosh\theta \\ \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\cosh\theta & \sinh\theta - \left(\frac{a-d}{2\sqrt{\Delta}}\right)\cosh\theta \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

*iv.* $A$ *bir lightlike hiperbolik matris ise,*

$$A = \mathrm{iz}A \begin{bmatrix} \frac{a}{\mathrm{iz}A} & \frac{b}{\mathrm{iz}A} \\ \frac{c}{\mathrm{iz}A} & \frac{d}{\mathrm{iz}A} \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

*v.* $A, a \neq d$ *olmak üzere bir timelike parabolik matris ise,*

$$A = \frac{\mathrm{iz}A}{2} \begin{bmatrix} 1+\epsilon\theta & \dfrac{\epsilon 2b\theta}{a-d} \\ \dfrac{2\epsilon c\theta}{a-d} & 1-\epsilon\theta \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

*vi. $A$ bir lightlike parabolik matris ise, sırasıyla $c \neq 0$ veya $c = 0$ olmasına bağlı olarak,*

$$A = \begin{bmatrix} a & -\dfrac{a^2}{c} \\ c & -a \end{bmatrix} \text{ veya } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix},$$

*vii. $A$, $a = d$ olmak üzere bir timelike parabolik matris ise, sırasıyla $b = 0$, $c = 0$ veya $b = c = 0$ olmasına bağlı olarak*

$$A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{bmatrix},\ A = a\begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ veya } A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

*biçimlerinde yazılabilir.*

**İspat** i. $A$ eliptik matris ise, $\Delta_A < 0$ ve $\det A = ad - bc > 0$ olacaktır. $A$'ya karşılık gelen hibrit sayı

$$\mathbf{W} = \left(\frac{a+d}{2}\right) + \left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{a-d}{2}\right)\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{b+c}{2}\right)\mathbf{h}.$$

olduğundan, Teorem 3.54, göz önüne alınırsa, $\mathcal{N}(\mathbf{W}) = \sqrt{-\Delta}$ olduğundan, $\rho = \sqrt{\det A}$ ve

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2\sqrt{-\Delta}}\left((a+b-c-d)\,\mathbf{i} + (a-d)\,\boldsymbol{\varepsilon} + (b+c)\,\mathbf{h}\right).$$

olmak üzere,

$$\mathbf{W} = \rho\left(\cos\theta + \mathbf{U}\sin\theta\right)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece, (3.2) izomorfizmi yardımıyla (3.14) elde edilir.

ii. Benzer şekilde, eğer $A$ matrisi hiperbolik ise $\Delta > 0$ olacaktır ve $\det A$ değerinin işaretine göre, $A$ matrisi spacelike, timelike veya lightlike olabilir. Böylece, Teorem (3.54) göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\left((a+b-c-d)\,\mathbf{i} + (a-d)\,\boldsymbol{\varepsilon} + (b+c)\,\mathbf{h}\right).$$

olmak üzere,

$$\mathbf{W} = \begin{cases} \pm\rho\left(\cosh\theta + \mathbf{U}\sinh\theta\right), & \mathbf{W} \text{ timelike ise;} \\ \rho\left(\sinh\theta + \mathbf{U}\cosh\theta\right), & \mathbf{W} \text{ spacelike ise;} \end{cases}$$

elde edilir. Bu hibrit sayıların skaler kısmı

$$S\left(\varphi^{-1}(A)\right) = \frac{a+d}{2} = \frac{\text{iz}A}{2}$$

olur. Diğer taraftan, $\mathbf{W}$ hibrit sayısının skaler kısmı

$$S(\mathbf{W}) = \pm\rho\cosh\theta$$

ile belirlidir. Dolayısıyla, eğer iz$A > 0$ ise, yani $\epsilon =$sign(iz$A$) $= 1$ ise, skaler kısım $\rho\cosh\theta$ olmalı, diğer durumda ise $-\rho\cosh\theta$ olmalıdır. Böylece, (3.2) izomorfizmi kullanılarak, (3.15) ve (3.16) eşitlikleri elde edilir.

iv. Eğer, $A$ matrisi lightlike hiperbolik ise, $\det A = 0$ ve $(\text{iz}A)^2 > 4\det A = 0$ olacaktır. Buna göre, iz$A \neq 0$ ise, $A$ matrisine karşılık gelen $\varphi^{-1}(A)$ hibrit sayısının kutupsal formu

$$\mathbf{W} = \text{iz}A\left(\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{a+b-c-d}{2\text{iz}A}\right)\mathbf{i} + \left(\tfrac{a-d}{2\text{iz}A}\right)\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\tfrac{b+c}{2\text{iz}A}\right)\mathbf{h}\right)$$

biçimindedir. Böylece, (3.3) izomorfizmi yardımıyla, $A$ matrisinin kutupsal formu (3.17) olarak bulunur.

v. Eğer $A$ matrisi parabolik ise, $(\text{iz}A)^2 = 4\det A$ ve $\|\mathbf{W}\| = \sqrt{|\det A|} = \dfrac{\epsilon\text{iz}A}{2}$ olacaktır. Bu durumda, Teorem (3.54) göz önüne alınırsa, $\mathbf{W}$ sayısının kutupsal formu

$$\theta = \frac{(a-d)/2}{(\epsilon\text{iz}A)/2} = \frac{a-d}{\epsilon\text{iz}A}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{W} = \tfrac{\epsilon\text{iz}A}{2}\left(\epsilon + \left(1 + \tfrac{(b-c)\theta}{a-d}\right)\mathbf{i} + \theta\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\tfrac{(b+c)\theta}{a-d}\right)\mathbf{h}\right)$$

elde edilir. Böylece, (3.2) izomorfizmi ve iz$A = a + d = \frac{a-d}{\theta\epsilon}$ eşitliğinden, (3.18) matrisi bulunur.

vi. Eğer $A$ parabolik lightlike matris ise, $\det A = 0$ ve iz$A = 0$ olacaktır. Bu, $a + d = 0$ ve $ad - bc = 0$ olması demektir ki, buradan $d = -a$ ve $bc = -a^2$ elde edilir. Eğer, $c = 0$, ise $a = d = 0$ olur. $c \neq 0$ olması durumunda ise, $b = -a^2/c$ olacaktır.

vii. Son olarak, eğer $A$ matrisi parabolik ise, $(\text{iz}A)^2 = 4\det A$ olacağından, $a = d$ durumunda, $a^2 = a^2 - bc$ ve $bc = 0$ elde edilir. □

**Örnek 3.59.** *Aşağıdaki matrislerin kutupsal formları, yukarıdaki Teorem kullanılarak bulunabilir.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

*$A$ bir eliptik matristir. $\Delta_A = -2$, $\det A = 3$, $\rho_A = \sqrt{3}$ olduğundan dolayı, kutupsal formu $\theta = \arctan\sqrt{2}$ olmak üzere,*

$$A = \sqrt{3}\begin{bmatrix} \cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta & \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\sin\theta & \cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta \end{bmatrix}$$

*elde edilir. $B$ ve $C$ ise sırasıyla timelike ve spacelike hiperbolik matrislerdir. $\epsilon_B = -1$, $\epsilon_C = 1$, $\rho_B = \sqrt{5}$, $\rho_C = 1$, $\Delta_B = 4$ ve $\Delta_C = 5$ olduğundan dolayı, $\theta_B = \ln\sqrt{5}/5$ ve $\theta_C = \ln(\sqrt{5}+2)$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} B &= -\sqrt{5}\begin{bmatrix} \cosh\theta + \frac{1}{2}\sinh\theta & \frac{3}{2}\sinh\theta \\ \frac{1}{2}\sinh\theta & \cosh\theta - \frac{1}{2}\sinh\theta \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} \sinh\theta_B + \frac{\sqrt{5}}{5}\cosh\theta_B & \frac{2\sqrt{5}}{5}\cosh\theta_B \\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\cosh\theta_B & \sinh\theta_B - \frac{\sqrt{5}}{5}\cosh\theta_B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*elde edilir.*

*$D$ bir lightlike hiperbolik matristir ve kutupsal formu*

$$D = 8\begin{bmatrix} 3/4 & 3/8 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

*biçimindedir. Son olarak, $E$ bir parabolik matristir ve kutupsal formu $\theta = \dfrac{a-d}{|a+d|} = \dfrac{3}{2}$ olmak üzere,*

$$E = \frac{4}{2}\begin{bmatrix} 1+\theta & 3\theta \\ -\theta/3 & 1-\theta \end{bmatrix}$$

*biçimindedir.*

### 3.6. Hibrit Sayının Karekökü

$\mathbf{W} \in \mathbb{K}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{W}$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{Z}$ hibrit sayısına, $\mathbf{W}$ hibrit sayısının karekökü denilir. Bir hibrit sayının karekökü, hibrit sayının parabolik, eliptik ve hiperbolik olmasına göre, bunun yanında timelike, spacelike veya lightlike olmasına göre değişecektir. Bir hiperbolik sayının köklerinin bulunması, (Özdemir, 2018) makalesinde bulunabilir. Bu kısımda, hibrit sayının tür ve karakterine göre köklerinin bulunması kısaca verilecektir.

**Teorem 3.60.** *(Özdemir 2018)* $\mathbf{W}$ *bir hibrit sayı ve* $\rho = \|\mathbf{W}\|$ *olsun.* $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{W}$ *eşitliğini sağlayan* $\mathbf{Z}$ *hibrit sayısı aşağıdaki gibi bulunur.*

*i. Eğer,* $\mathbf{W} = \rho\left(\cos\theta + \mathbf{U}\sin\theta\right)$ *bir eliptik hibrit sayı ise,* $\mathbf{W}$ *hibrit sayısının karekökü* $m = 0, 1$ *olmak üzere,*

$$\mathbf{Z}_m = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2m\pi}{2} + \mathbf{U}\sin\frac{\theta + 2m\pi}{2}\right) \tag{3.20}$$

*formundadır.*

*ii. Eğer,* $\mathbf{W} = \rho k\left(\cosh\theta + \mathbf{U}\sinh\theta\right)$ *bir timelike hiperbolik hibrit sayı ise,* $\mathbf{W}$ *hibrit sayısının karekökü* $k \in \{1, -1, \mathbf{U}, -\mathbf{U}\}$ *olmak üzere,*

$$\mathbf{Z}_k = \begin{cases} k\sqrt{\rho}\left(\cosh\dfrac{\theta}{2} + \mathbf{U}\sinh\dfrac{\theta}{2}\right) & a > 0, \\ \textit{kök yok} & a < 0 \end{cases}$$

*biçimindedir.*

*iii. Eğer,* $\mathbf{W} = \rho k\left(\cosh\theta + \mathbf{U}\sinh\theta\right)$ *bir spacelike hiperbolik hibrit sayı ise,* $\mathbf{W}$ *hibrit sayısının karekökü yoktur.*

*iv. Eğer,* $\mathbf{W} = \rho\left(\epsilon + \mathbf{V}\right)$, $\epsilon = sgn\left(S\left(\mathbf{Z}\right)\right)$ *bir parabolik hibrit sayı ise,* $\mathbf{W}$ *hibrit sayısının karekökü,*

$$\mathbf{Z} = \pm\rho\left(1 + \frac{\mathbf{U}}{2}\right)$$

*ile belirlidir.*

**Teorem 3.61.** *(Özdemir 2018)Eğer,* $\mathbf{W} = a\left(1 + \mathbf{U}\right)$ *bir lightlike hibrit sayı ise,* $\mathbf{U} = \frac{V(\mathbf{Z})}{\mathcal{N}(\mathbf{Z})}$ *ve* $\mathbf{U}^2 = 1$ *olmak üzere,*

$$\mathbf{Z} = \frac{\pm\sqrt{2a}}{2}\left(1 + \mathbf{U}\right)$$

*olur.*

Bu bölümde, hibrit sayılar kullanılarak, bir $2 \times 2$ türünden matrisin reel karekökleri hesaplanacaktır.

### 3.7. 2x2 Matrislerin Karekökü

**Teorem 3.62.** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *reel matrisi verilsin.*

*i. Eğer $A$ eliptik ise, $A$ matrisinin karekökü $k = 0, 1$ olmak üzere,*

$$\pm\sqrt{\rho}\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta+2\pi k}{2}+\frac{(a-d)}{\sqrt{-\Delta_A}}\sin\frac{\theta+2\pi k}{2} & \frac{2b}{\sqrt{-\Delta_A}}\sin\frac{\theta+2\pi k}{2} \\ \frac{2c}{\sqrt{-\Delta_A}}\sin\frac{\theta+2\pi k}{2} & \cos\frac{\theta+2\pi k}{2}-\frac{(a-d)}{\sqrt{-\Delta_A}}\sin\frac{\theta+2\pi k}{2} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

*ile belirlidir.*

*ii. Eğer, $A$ bir timelike hiperbolik matris ise, $A$ matrisinin karekökünün olması için gerek ve yeter koşul* $\mathrm{iz}A > 0$ *olmasıdır.* $\mathrm{iz}A > 0$ *olması durumunda*, $A$ *matrisinin* $4$ *karekökü vardır ve bunlar*

$$\sqrt{A} = \pm\sqrt{\rho}\begin{bmatrix} \cosh\dfrac{\theta}{2}+\frac{(a-d)}{2\sqrt{\Delta}}\sinh\dfrac{\theta}{2} & \frac{b}{\sqrt{\Delta}}\sinh\dfrac{\theta}{2} \\ \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\sinh\dfrac{\theta}{2} & \cosh\dfrac{\theta}{2}-\frac{(a-d)}{2\sqrt{\Delta}}\sinh\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

*ve*

$$\sqrt{A} = \pm\sqrt{\rho}\begin{bmatrix} \sinh\dfrac{\theta}{2}+\frac{(a-d)}{2\sqrt{\Delta}}\cosh\dfrac{\theta}{2} & \frac{b}{\sqrt{\Delta}}\cosh\dfrac{\theta}{2} \\ \frac{c}{\sqrt{\Delta}}\cosh\dfrac{\theta}{2} & \sinh\dfrac{\theta}{2}-\frac{(a-d)}{2\sqrt{\Delta}}\cosh\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

*ile belirlidir.*

*iii. Eğer, $A$ bir spacelike hiperbolik matris ise, $A$ matrisinin reel karekökü yoktur.*

*iv. Eğer, $A$ bir lightlike hiperbolik matris ise, $A$ matrisinin reel karekökü*

$$\sqrt{A} = \pm\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{\mathrm{iz}A}} & \frac{b}{\sqrt{\mathrm{iz}A}} \\ \frac{c}{\sqrt{\mathrm{iz}A}} & \frac{d}{\sqrt{\mathrm{iz}A}} \end{bmatrix}$$

*ile belirlidir.*

*v. Eğer, $A$ izi pozitif olan bir timelike parabolik matris ise, $a \neq d$ olması koşuluyla, $A$ matrisinin karekökü, $\theta = \frac{a-d}{|a+d|}$ ve $\epsilon =$sign$(\mathrm{iz}A)$ olmak üzere,*

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{\mathrm{iz}A}{2}}\begin{bmatrix} \dfrac{\epsilon\theta}{2}+1 & \dfrac{\epsilon b\theta}{a-d} \\ \dfrac{\epsilon c\theta}{a-d} & 1-\dfrac{\epsilon\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

*ile belirlidir.*

*vi. Eğer, $A$ bir timelike parabolik reel matris ise, $a = d$ olması koşuluyla, $A$ matrisinin reel karekökü, sırasıyla $b = 0, c = 0$ veya $b = c = 0$ olmasına göre,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c/a2 & 1 \end{bmatrix},\ a^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & b/a2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ veya } a^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*biçimindedir. Bunun yanında,* $b = c = 0$ *ise,* $\sqrt{A}$ *matrisi,* $t, s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ *olmak üzere*

$$\begin{bmatrix} t & s \\ \frac{a-t^2}{s} & -t \end{bmatrix}$$

*olur ve sonsuz çoklukta reel karekök bulunabilir.*

**İspat** $X^2 = A$ olmak üzere,

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

olsun. $A$ matrisinin karekökü, karakter ve türüne göre incelenecektir.

**i.** Eğer, $A$ bir eliptik matris ise, $X$ matrisinin kutupsal formu, $\beta = \arg X$ olmak üzere,

$$X = \rho_X \begin{bmatrix} \cos\beta + \frac{(x-t)}{\sqrt{-\Delta_X}}\sin\beta & \frac{2y}{\sqrt{-\Delta_X}}\sin\beta \\ \frac{2z}{\sqrt{-\Delta_X}}\sin\beta & \cos\beta - \frac{(x-t)}{\sqrt{-\Delta_X}}\sin\beta \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Buradan,

$$X^2 = \rho_x^2 \begin{bmatrix} \cos 2\beta + \frac{(x-t)}{\sqrt{-\Delta_X}}\sin 2\beta & \frac{2y}{\sqrt{-\Delta_X}}\sin 2\beta \\ \frac{2z}{\sqrt{-\Delta_X}}\sin 2\beta & \cos 2\beta - \frac{(x-t)}{\sqrt{-\Delta_X}}\sin 2\beta \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buna göre, $X^2$ ve $A$ matrislerinin eşitliğinden,

$$\beta = \frac{\theta + 2k\pi}{2} \text{ ve } \rho_x = \sqrt{\rho_A}$$

elde edilir. Burada, $\mathrm{iz}A < 0$ veya $\mathrm{iz}A > 0$ olmasına göre, sırasıyla $\theta = \pi - \arctan\frac{\sqrt{-\Delta_A}}{|\mathrm{iz}A|}$ veya $\theta = \arctan\frac{\sqrt{-\Delta_A}}{|\mathrm{iz}A|}$ biçiminde tanımlıdır. $A_{12} = (X^2)_{12}$ ve $A_{21} = (X^2)_{21}$ eşitliklerinden,

$$y = \frac{\rho_A\sqrt{-\Delta_X}}{\rho_x^2\sqrt{-\Delta_A}}b = \frac{b}{|\mathrm{iz}X|} \text{ ve } z = \frac{\rho_A\sqrt{-\Delta_X}}{\rho_x^2\sqrt{-\Delta_A}}c = \frac{c}{|\mathrm{iz}X|}.$$

olur. Ayrıca,

$$A_{11} + A_{22} = \frac{a-d}{\sqrt{-\Delta_A}}\sin\theta = \left(X^2\right)_{11} + \left(X^2\right)_{22} = \frac{x-t}{\sqrt{-\Delta_X}}\sin 2\beta,$$

eşitliği kullanılarak,

$$x - t = \frac{\pm(a-d)}{|\mathrm{iz}X|}$$

bulunur. Böylece, $A$ matrisinin karekökü (3.21) biçiminde olacaktır.

**ii.** Eğer, $A$ bir timelike hiperbolik matris ise, $A$ matrisinin kutupsal formu $\theta = \arg A$ olmak üzere,

$$A = \epsilon_A \rho_A \begin{bmatrix} \cosh\theta + \frac{(a-d)}{2\sqrt{\Delta_A}} \sinh\theta & \frac{2b}{\sqrt{\Delta_A}} \sinh\theta \\ \frac{2c}{\sqrt{\Delta_A}} \sinh\theta & \cosh\theta - \frac{(a-d)}{2\sqrt{\Delta_A}} \sinh\theta \end{bmatrix}$$

biçimindedir. $X$ matrisi spacelike ve timelike olabilir. $X$ bir timelike hiperbolik matris ise, $\beta = \ln\left|\frac{\mathrm{iz}A+\sqrt{\Delta_A}}{2\rho_A}\right|$ olmak üzere,

$$X = \epsilon_x \rho_x \begin{bmatrix} \cosh\beta + \frac{x-t}{\sqrt{\Delta_X}} \sinh\beta & \frac{2y}{\sqrt{\Delta_X}} \sinh\beta \\ \frac{2z}{\sqrt{\Delta_X}} \sinh\beta & \cosh\beta - \frac{x-t}{\sqrt{\Delta_X}} \sinh\beta \end{bmatrix}$$

olacaktır. Buna göre, $\triangle_X = (x+t)^2 - 4xt + 4yz$ eşitliği kullanılarak,

$$X^2 = \rho_x^2 \begin{bmatrix} \cosh(2\beta) + \frac{x-t}{\sqrt{\Delta_X}} \sinh(2\beta) & \frac{2y}{\sqrt{\Delta_X}} \sinh(2\beta) \\ \frac{2y}{\sqrt{\Delta_X}} \sinh(2\beta) & \cosh(2\beta) - \frac{x-t}{\sqrt{\Delta_X}} \sinh(2\beta) \end{bmatrix}$$

elde edilir. $X^2 = A$ eşitliğinden,

$$\beta = \frac{\theta}{2} \text{ ve } \rho_x^2 = \epsilon\rho.$$

olur. Böylece, $\sqrt{A}$ matrisinin reel olması için gerek ve yeter koşul $\epsilon = 1$ olmasıdır. Yani, $\mathrm{iz}A > 0$ olmalıdır. Üstelik, $A_{12} = (X^2)_{12}$ ve $A_{21} = (X^2)_{21}$ olduğundan,

$$y = \frac{\rho_A\sqrt{\Delta_X}}{\rho_x^2\sqrt{\Delta_A}} b = \frac{b}{|\mathrm{iz}X|} \text{ ve } z = \frac{\rho_A\sqrt{\Delta_X}}{\rho_x^2\sqrt{\Delta_A}} c = \frac{c}{|\mathrm{iz}X|}$$

bulunur. Ayrıca, $A_{11} + A_{22} = \frac{a-d}{\sqrt{-\Delta_A}} \sinh\theta = (X^2)_{11} + (X^2)_{22} = \frac{x-t}{\sqrt{-\Delta_X}} \sinh 2\beta$ eşitliğinden,

$$x - t = \frac{\pm(a-d)}{|\mathrm{iz}X|}$$

olur. Böylece, $\sqrt{A}$ matrisi 3.22 formunda elde edilir. Benzer şekilde, eğer $X$ bir spacelike hiperbolik matris ise, 3.23 elde edilir.

**iii.** ve **iv**. kolayca görülebilir.

**v.** Eğer $A$ bir timelike parabolik matris ise, $X$ matrisinin bir parabolik matris olması gerekir. O halde, $X$ matrisi $\mathrm{iz}X = x + t$, $\beta = \frac{x-t}{|x+t|}$ ve $(x-t)^2 = -4yz$ olmak üzere,

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{iz}X}{2} \begin{bmatrix} \epsilon\beta + 1 & \frac{2y\epsilon\beta}{x-t} \\ \frac{2z\epsilon\beta}{x-t} & 1 - \epsilon\beta \end{bmatrix}.$$

formunda olmalıdır. Böylece,,

$$X^2 = \left(\frac{\mathrm{iz}X}{2}\right)^2 \begin{bmatrix} \epsilon 2\beta + 1 & \frac{2y\epsilon 2\beta}{x-t} \\ \frac{2z\epsilon 2\beta}{x-t} & 1 - \epsilon 2\beta \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece, $(X^2)_{11} = A_{11}$ ve $(X^2)_{22} = A_{22}$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{iz}X}{2}\right)^2 (\epsilon 2\beta + 1) &= \frac{\mathrm{iz}A}{2}(\epsilon\theta + 1) \\ \left(\frac{\mathrm{iz}X}{2}\right)^2 (1 - \epsilon 2\beta) &= \frac{\mathrm{iz}A}{2}(1 - \epsilon\theta). \end{aligned}$$

olur. Bu iki denklemin çözümünden de, $\frac{\mathrm{iz}X}{2} = \left(\frac{\mathrm{iz}A}{2}\right)^{1/2}$ ve $\beta = \frac{\theta}{2}$ bulunur. O halde,

$$X^2 = \left(\frac{\mathrm{iz}A}{2}\right) \begin{bmatrix} \epsilon\theta + 1 & \frac{2y\epsilon\theta}{x-t} \\ \frac{2z\epsilon\theta}{x-t} & 1 - \epsilon\theta \end{bmatrix}$$

olacaktır. Ayrıca, $X^2 = A$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{y}{x-t} = \frac{b}{a-d} \text{ ve } \frac{z}{x-t} = \frac{c}{a-d} \text{ ve } \frac{x-t}{|x+t|} = \frac{a-d}{2|a+d|}$$

olmasıdır. Buradan, $k = \frac{1}{2}\left(\frac{a+d}{2}\right)^{\frac{-1}{2}}$ olmak üzere, $y = bk$, $z = ck$, $x = \left(\frac{a+d}{2}\right)^{1/2} + \left(\frac{a-d}{2}\right)k$ ve $t = \left(\frac{a+d}{2}\right)^{1/2} - \left(\frac{a-d}{2}\right)k$ elde edilir ve (3.24) eşitliği bulunur.

**vi.** Eğer $A$ bir timelike parabolik matris ise, $bc = 0$ olur. Dolayısıyla, $A$ (3.19) formlarından biri olur. Böylece, Teorem $3.58$ gözönüne alınırsa, $\sqrt{A}$ matrisi, $b = 0$, $c = 0$ veya $b = c = 0$ olmasına göre, sırasıyla

$$a^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c/a2 & 1 \end{bmatrix}, \ a^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & b/a2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ veya } a^{1/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olacaktır.

$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$ olmak üzere,$X^2 = A$ sağlanırsa,

$$X^n = (-\det X)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A,$$

eşitliğinden, $a = (-\det X)$ ve $a = x^2 + yz$ olur. O halde, $x = t$ ve $y = s$ için, $z = \dfrac{a - t^2}{s}$ olacaktır. Sonuç olarak, $s, t \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} t & s \\ \dfrac{a - t^2}{s} & -t \end{bmatrix}$$

matrisi $A$ matrisinin karekököküdür. Yani, $b = c = 0$ durumunda, $A$ matrisinin sonsuz çoklukta karekökü vardır. □

**Örnek 3.63.** $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ *matrisinin reel karekökü, Teorem (3.62) yardımıyla kolayca bulunabilir. Bu matris bir eliptik matristir ve karekökü* $\theta = \pi - \arctan 2\sqrt{2}$ *olmak üzere,*

$$A_k = \sqrt{A} = 9^{1/4} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta+2\pi k}{2} & \sqrt{2}\sin\frac{\theta+2\pi k}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta+2\pi k}{2} & \cos\frac{\theta+2\pi k}{2} \end{bmatrix},\ k = 0, 1.$$

*biçimindedir. Buna göre, $A$ matrisinin karekökü*

$$A_1 = 9^{1/4} \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi-\arctan 2\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}\sin\frac{\pi-\arctan 2\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi-\arctan 2\sqrt{2}}{2} & \cos\frac{\pi-\arctan 2\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

*ve*

$$A_2 = 9^{1/4} \begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi-\arctan 2\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}\sin\frac{3\pi-\arctan 2\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\sin\frac{3\pi-\arctan 2\sqrt{2}}{2} & \cos\frac{3\pi-\arctan 2\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*ile belirlidir.*

**Örnek 3.64.** $A = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ *matrisi verilsin.* $\Delta = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 = \frac{9}{4}$ *ve* $\det A = 4 > 0$ *olduğundan dolayı, $A$ matrisi timelike hiperbolik matristir ve argümenti*

$$\theta = \ln\left|\frac{\mathrm{iz}A + 2\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{|\det A|}}\right| = \ln\sqrt{2}$$

*biçimindedir. Buna göre, yukarıdaki teorem kullanılırsa, $A$ matrisinin karekökleri*

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \pm\sqrt{2}\begin{bmatrix} \cosh\ln\sqrt{2} - 5\sinh\ln\sqrt{2} & -6\sinh\ln\sqrt{2} \\ 4\sinh\ln\sqrt{2} & \cosh\ln\sqrt{2} + 5\sinh\ln\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \pm\begin{bmatrix} -1.0 & -3.0 \\ 2.0 & 4.0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \pm\sqrt{2}\begin{bmatrix} \sinh\ln\sqrt{2} - 5\cosh\ln\sqrt{2} & -6\cosh\ln\sqrt{2} \\ 4\cosh\ln\sqrt{2} & \sinh\ln\sqrt{2} + 5\cosh\ln\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \pm\begin{bmatrix} -7.0 & -9.0 \\ 6.0 & 8.0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*olarak bulunur. Görüldüğü gibi, $A$ matrisinin $4$ tane reel karekökü bulunmaktadır.*

**Örnek 3.65.** $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ *matrisi spacelike hiperbolik matristir ve reel karekökü yoktur.*

**Örnek 3.66.** $A = \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ *parabolik matrisinin kutupsal formu,*

$$\sqrt{A} = \pm 5 \begin{bmatrix} \frac{\epsilon\theta}{2} + 1 & -\frac{\epsilon 12\theta}{12} \\ \frac{\epsilon 3\theta}{12} & 1 - \frac{\epsilon\theta}{2} \end{bmatrix}$$

*biçimindedir.* $\epsilon =$*sign*$(izA) = 1$ *ve* $\theta = \frac{6}{5}$ *olduğundan, Buradan,*

$$\sqrt{A} = \pm\sqrt{5} \begin{bmatrix} \frac{(6/5)}{2} + 1 & -(6/5) \\ \frac{(6/5)}{4} & 1 - \frac{(6/5)}{2} \end{bmatrix} = \pm\frac{\sqrt{5}}{10} \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

*bulunur.*

**Örnek 3.67.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *matrisinin karekökü ise sonsuz çokluktadır. Teorem 3.62 göz önüne alınırsa,* $s, t \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,*

$$\begin{bmatrix} t & s \\ -\frac{1}{s}(t^2 - 2) & -t \end{bmatrix}$$

*formundaki her matris,* $A$ *matrisinin kareköküdür.*

# 4. SONUÇLAR

Bu tezde, bir matrisin karekökü, literatürde en çok kullanılan,

1. Standart cebirsel yöntem,
2. Köşegenleştirme,
3. Cayley-Hamilton Teoremi,
4. Schur Ayrıştırma
5. Abel-Möbiüs
6. Newton

yöntemleri yardımıyla hesaplanmış, bunun yanında kompleks, dual ve hiperbolik sayıların bir genelleştirilmesi olan hibrit sayılar yardımıyla da yeni bir yöntem verilmiştir. Hibrit sayılar, yardımıyla verilen yönteme göre bir matrisinin reel köklerinin sayısı matrisin türüne ve karakterine göre sınıflandırılmıştır. Buna göre, bir matrisin karekökü olmayabileceği gibi, 1, 2, 4 veya sonsuz çoklukta karekökü olabilir. Bununla ilgili olarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir. Sonuç olarak eğer, $B^2 = A$ ise, $B$ matrisine $A$ matrisinin karekökü denilir.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $A$ matrisinin reel karekök matris sayısı, $A$ matrisinin türüne ve karakterine göre aşağıdaki gibidir.

★ $A$ eliptik ise, tam iki reel karekökü vardır.

★ $A$, izi pozitif olan timelike hiperbolik matris ise, tam 4 reel kökü vardır.

★ $A$, izi negatif olan timelike hiperbolik matris ise, kök yoktur.

★ $A$, spacelike hiperbolik matris ise reel karekökü yoktur.

★ $A$, lightlike hiperbolik matris ise, iki reel karekökü vardır.

★ $A,$ timelike parabolik matris ise, $a \neq d$ ve $\mathrm{iz}A > 0$ olması durumunda sadece tek reel kökü vardır.

★ $A,$ sıfırdan farklı lightlike parabolik matris ise, reel karekökü yoktur.

★ $A,$ skaler olmayan timelike parabolik matris ise, $a = d$ olması durumunun sadece bir reel kökü vardır.

★ $A,$ bir skaler matris ise, sonsuz çoklukta reel karekökü vardır.

★ Her lightlike parabolik matris, sıfır matrisinin bir kareköküdür.

## 5. KAYNAKLAR

Andreescu, T., 2014, Essential Linear Algebra with Applications: A Problem-Solving Approach, *Springer*, New York.

Arslan, S. and Köken, F., 2017, Some identities for the Fibonacci and Lucas Sequences with Rational subscript via matrix methods, *Bulletin of Mathematics and Statitstic Research*, Vol.5. Issue.4.

Arslan, S. and Köken, F., 2016, The Pell and Pell-Lucas Numbers via Square Roots of Matrices, *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, Vol. 8, No. 3, pp. 159–166.

Bicknell, M., 1965. “Fibonacci fantasy: The square root of the Q matrix”, *Fibonacci Quarterly*, 3 (1), 67-71.

Björck A. and Hammarling, 1983, S. A Schur method for the square root of a matris, *Linear Algebra and its Applications*, 52/53:127-140.

Choudhry, A., 2004, Extraction of nth roots of 2×2 matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 387, 183–192.

Çakır, H. 2017. Hiperbolik Sayilar ve Hiperbolik Sayi Matrislerinin Cebirsel ve Geometrik Uygulamalari. Yüksek Lisans Tezi, *Akdeniz Universitesi FBE*, Antalya, 116.

Denman, E.D. 1981, Roots of real matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 36:133-139.

Harkin A. A., Harkin J. B., 2004, Geometry of generalized complex numbers, *Mathematics Magazine* 77(2):118–29.

Higham, N. J., 1987, Computing real square roots of a real matris, *Linear Algebra and its Applications*, 88/89:405–430.

Higham, N. J., 1986, Newton’s Method for the Matrix Square Root, *Mathematics of Computation*, Vol.46, No:174, Pages 537-549.

Jadhav, B.P., 2017, Methods of finding square roots of 2×2 Matrices, *Imperial Journal of Interdisciplinary Research* (IJIR), Vol-3, Issue-4.

Kisil Vladimir V., 2012, Geometry of Mobius Transformations: Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Actions of SL2(R), *Imperial College Press*, 208 pages.

Köken, F., 2019, On The Properties of The Complex Fibonacci and Lucas Numbers with Rational Subscript via Roots of the Fibonacci Matrix, Erzincan University, *Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi Journal of Science and Technology*, 12(1), 148-157.

Northshield, S., 2010, Square Roots of 2×2 Matrices, *Contemporary Mathematics.*

MacKinnon, 1989, N. Four routes to matris roots, *The Mathematical Gazette*, 73, 135-136, (1989).

Olsen, John, 2010, The Geometry of Möbius Transformations, *Lecture notes of University of Rochester*, http://www.johno.dk/mathematics/moebius.pdf

Özdemir M., 2018, Introduction to Hybrid Numbers, *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 28:11,.

Özdemir M., 2019, Finding n-th roots of a 2×2 Real Matrix using De Moivre's Formula, *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 29:2.

Rooney J., 1978, On the three types of complex number and planar transformations, *Environment and Planning B*, Volume 5, pages 89-99.

Sadeghi A., Izani A., and Ahmad A., 2011, Computing the pth Roots of a Matrix with Repeated Eigenvalues, *Applied Mathematical Sciences,* Vol. 5, no. 53, 2645 - 2661.

Sambasiva, S. Rao, et.al. 2013, On the square roots of a matris., *JGRMA*, 1(13), 30- 33.

Scott, Nigel H., 1990, On Square-Rooting Matrices, *The Mathematical Gazette*, Vol. 74, No. 468 , 111-114.

Tam Bit-Shun, Huang P.R., 2016, Nonnegative square roots of matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 498, 404–440.

Garret Eugene Sobczyk, 1995, The Hyperbolic Number Plane, *The College Mathematics Journal*, 26(4)

Sullivan D., 1993, The Square Roots of $2\times 2$ Matrices, *Mathematics, Magazine,* 66(5),314-316.

Tamimi, I.A., 2011,The Square Roots of $2\times 2$ Invertible Matrices, *International Journal of Difference Equations,* Vol. 6, No:1, pp. 61-64.

Yaglom, I.M. 1968. Complex Numbers In Geometry. *Academic Press*,

Yuttanan, B. and Nilrat, C., 2005, Roots of Matrices, *Songklanakarin J. Sci. Technol.*, 27(3) : 659-665.

Zhang, Fuzhen, 2010, Matrix Theory, Basic Results and Techniques, *Springer*.

## ÖZGEÇMİŞ

İMREN AKGÜL (ŞIK)

imrenakgul@gmail.com

### ÖĞRENİM BİLGİLERİ

| | |
|---|---|
| Yüksek Lisans | Akdeniz Üniversitesi |
| 2017-2020 | Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya |
| Lisans | Hacettepe Üniversitesi |
| 2010-2016 | Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği, Ankara |

### MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

| | |
|---|---|
| Öğretmen | Özel Doruk Koleji Anadolu Lisesi Antalya |
| 2019 - Devam Ediyor | MEB öğretmen. |