T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞMİŞ FLETT POTANSİYELLERİ ÜZERİNE

Uğur ÜLKÜ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞMİŞ FLETT POTANSİYELLERİ ÜZERİNE

Uğur ÜLKÜ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2022
ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ FLETT POTANSİYELLERİ ÜZERİNE

Uğur ÜLKÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 01/07/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN (Danışman)

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

GENELLEŞMİŞ FLETT POTANSİYELLERİ ÜZERİNE

Uğur ÜLKÜ

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN

Temmuz 2022; 36 sayfa

Bu tez çalışmasında ilk olarak, genelleşmiş Poisson yarıgrubunun doğurduğu genelleşmiş Flett potansiyelleri tanımlanarak, bu potansiyellerin ağırlıklı Lp uzaylarındaki önemli özellikleri incelenmiştir. Daha sonra da bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı yeni bir "kesikli hipersingüler integraller ailesi" tanımlanarak bu integral ailesi vasıtasıyla genelleşmiş Flett potansiyelleri için bir ters bulma formülü elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Genelleşmiş Flett potansiyelleri, genelleşmiş Poisson yarıgrubu, Fourier-Bessel dönüşümü, kesikli hipersingüler integraller.

JÜRİ: Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN
Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

ON GENERALIZED FLETT POTENTIALS

Uğur ÜLKÜ

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sinem SEZER EVCAN
July 2022; 36 pages

In this thesis, firstly, the generalized Flett potentials generated by the generalized Poisson semigroup are defined and the important properties of these potentials in the weighted Lp spaces are examined.Then, a new “truncated hypersingular integrals family” is defined depending on an $\varepsilon > 0$ parameter, and an inversion formula for the generalized Flett potentials is obtained by means of this truncated hypersingular integrals family.

KEYWORDS: Generalized Flett potentials, generalized Poisson semigroup, Fourier-Bessel transform, truncated hypersingular integrals.

COMMITTEE: Assoc.Prof.Dr. Sinem SEZER EVCAN
Assoc.Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Assoc.Prof.Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Potansiyel tipli integral operatörler harmonik analizin en önemli teknik araçlarından birisidir. Bazı uygun diferansiyel operatörlerin "negatif kesirsel" kuvvetleri olarak yorumlanan potansiyel tipli integral operatörler genel olarak önemli fonksiyonel uzayların incelenmesinde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde, çeşitli integral dönüşümlerin terslerinin bulunmasında ve harmonik analizin daha başka alanlarında kullanılmaktadır. Harmonik analizin en önemli potansiyelleri sayılan Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleri ve onların genelleşmiş versiyonlarının, çeşitli yarıgruplar (Poisson, Gauss-Weierstrass ve Meta-harmonik) vasıtasıyla elde edilen temsilleri vardır. Bu tez çalışmasının esas amacı, Fourier-Bessel dönüşümü vasıtasıyla tanımlanan genelleşmiş Flett potansiyellerinin önemli özelliklerini incelemek ve bu potansiyellerin terslerini veren formülleri araştırmaktır.

Fourier dönüşümü dilinde tanımlanan potansiyeller, klasik potansiyeller olarak bilinen Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleridir. Benzer olarak, Fourier-Bessel dönüşümü terimlerinde tanımlanan potansiyeller de genelleşmiş potansiyeller (genelleşmiş Riesz, genelleşmiş Bessel ve genelleşmiş Flett) olarak adlandırılırlar. Bu tez çalışmasında genelleşmiş Poisson yarıgrubunun doğurduğu genelleşmiş Flett potansiyelleri ele alınarak, bu potansiyellerin ağırlıklı Lp uzaylarındaki önemli özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Daha sonra da bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı yeni bir "kesikli integraller ailesi" tanımlanmış ve bu integral ailesi vasıtasıyla genelleşmiş Flett potansiyelleri için bir ters bulma formülü elde edilmiştir.

Bu tez çalışması süresince bilgisini ve zamanını paylaşan, desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Genelleşmiş Flett potansiyelleri Üzerine" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

01/07/2022

Uğur ÜLKÜ

1. GİRİŞ

Potansiyel tipli integral operatörler harmonik analizin en önemli teknik araçlarından birisidir. Bazı uygun diferansiyel operatörlerin "negatif kesirsel" kuvvetleri olarak yorumlanan potansiyel tipli integral operatörler genel olarak önemli fonksiyonel uzayların incelenmesinde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde, çeşitli integral dönüşümlerin terslerinin bulunmasında ve harmonik analizin daha başka alanlarında kullanılmaktadır. Harmonik analizin en önemli potansiyelleri sayılan Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleri ve onların genelleşmiş versiyonlarının, çeşitli yarıgruplar (Poisson, Gauss-Weierstrass ve Meta-Harmonik) vasıtasıyla elde edilen temsilleri vardır. Fourier dönüşümü dilinde, Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleri sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$F\left(I^{\alpha}f\right)(x) = |x|^{-\alpha} F(f(x)),\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0<\alpha<n,$$

$$F\left(J^{\alpha}f\right)(x) = \left(1+|x|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} F(f(x)),\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0<\alpha<\infty,$$

$$F\left(T^{\alpha}f\right)(x) = (1+|x|)^{-\alpha} F(f(x)),\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0<\alpha<\infty.$$

Flett potansiyeli, $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ Laplace operatörü ve I birim operatör olmak üzere $I + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ operatörünün negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanır. Benzer olarak Riesz ve Bessel potansiyelleri de sırasıyla $(-\Delta)$ ve $(I-\Delta)$ operatörlerinin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanırlar. Klasik potansiyeller olarak bilinen bu potansiyellerin ve çeşitli versiyonlarının terslerini ifade eden formüllerinin bulunması ve bir α parametresi sıfıra yaklaşırken yaklaşım özelliklerinin incelenmesi üzerine yapılmış birçok akademik çalışmalar mevcuttur. Aliev vd (2006), Gadjiev vd (2007), Kurokawa (1981), Sezer (2009), Uyhan, Bayrakci vd (2006) bu konuda yapılmış önemli çalışmalar arasında yer alırlar. Bu tez çalışmasında da genelleşmiş Poisson yarıgrubunun doğurduğu genelleşmiş Flett potansiyelleri tanımlanarak, bu potansiyellerin ağırlıklı Lp uzaylarındaki önemli özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Daha sonra da bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı yeni bir "kesikli integraller ailesi" tanımlanmış ve bu integral ailesi vasıtasıyla genelleşmiş Flett potansiyellerinin tersi belirlenmiştir.

Genelleşmiş Flett potansiyelleri için ters bulma formülü ile ilgili olan bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır:

Tezin ilk kısmında kaynak taraması yapılarak, tez boyunca kullanılacak önemli kavramlar tanıtılmış ve bu kavramlarla ilgili önemli özelliklerin yer aldığı teoremlerin bazıları ispatlarıyla birlikte ifade edilmiştir. İkinci kısımda Flett potansiyelleri, genelleşmiş Flett potansiyelleri ile ilgili teorem ve önteoremlere yer verilmiştir. Genelleşmiş Poisson yarıgrubunun doğurduğu bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı kesikli hipersingüler integraller ailesi tanıtılmıştır. Tezin üçüncü kısmında genelleşmiş flett potansiyellerinin tersini bulma formülünü ifade eden esas teoremi ispatlamak için ön hazırlık olarak bazı önemli önteoremler ispatları ile verilerek esas teoremin ispatı yapılmıştır. Tezin dördüncü kısmı olan sonuç bölümünde ise üçüncü kısımda elde edilen sonuçların harmonik analizdeki yeri ve önemi tartışılmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu kısımda tez boyunca kullanılan bazı temel kavramlar, tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

$\mathbb{R}^n, n$ boyutlu Öklid uzayı olup

$$\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n), \forall i = 1, 2, ..., n \text{ için } x_i \in \mathbb{R}\}$$

ile tanımlanmaktadır. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki norm $|x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ eşitliği ile verilir. $L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \text{ , } \mathbb{R}^n\text{de ölçülebilir ve } \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty \right\} \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$ dir. $p = \infty$ durumunda ise L_∞ uzayı

$$L_\infty \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f, \ \mathbb{R}^n\text{'de ölçülebilir ve } \|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) < \infty \right\}$$

eşitliği ile tanımlanır. $C(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ de sürekli ve sınırlı olan fonksiyonlar uzayı temsil edilir. $C(\mathbb{R}^n)$ de norm $f \in C(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$ eşitliği ile tanımlanır. $C^\infty \equiv C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ile de $\mathbb{R}^n$'de her mertebeden kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı gösterilir.

$\mathbb{R}^n_+ = \{x : x \in \mathbb{R}^n \text{ ve } x_n > 0\}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n_+$ 'da ölçülebilir fonksiyonların ağırlıklı Lebesgue uzayı $0 < \nu < \infty$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_+) = \left\{ f : \|f\|_{p,\nu} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p \, x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır. $p = \infty$ halinde ise $L_{\infty,\nu} = L_{\infty,\nu}(\mathbb{R}^n_+)$ ile $\mathbb{R}^n_+$de sürekli ve

$$\lim_{|x| \to 0} f(x) = 0$$

koşulunu sağlayan $f(x)$ fonksiyonları uzayı düşünülür ve $\|f\|_{\infty,\nu} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} |f(x)|$ olarak alınır.

$S \equiv S(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilen Schwartz test fonksiyonları uzayı

$$S = \left\{ f : f \in C^\infty \text{ ve } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+ \text{ için } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x) \right| < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... \, x_n^{\alpha_n}$ ve $\frac{\partial^{\beta}}{\partial x^{\beta}} f(x) = \frac{\partial^{\beta_1 + ... + \beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} ... \partial x_n^{\beta_n}} f(x_1, .., x_n)$ dir. Örneğin; $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $e^{-|x|^2} = e^{-(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)} \in S(\mathbb{R}^n)$ ve $P(x)$ herhangi n değişkenli polinom ve $k \geq 2$ çift tamsayı olmak üzere $f(x) = P(x) e^{-|x|^k} \in S$ dir.

$$S^+ \equiv S\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \{ f \in S\left(\mathbb{R}^n\right) : f \text{ , } x_n \text{ değişkenine göre çift fonksiyon} \}$$

ile tanımlanan S^+ uzayının $L_{p,\nu}$ uzayında yoğun olduğu bilinmektedir. S^+ uzayının $L_{p,\nu}$ uzayında yoğunlu şu prosedürle gösterebilir: $f \in L_{p,\nu}$ olsun. Bu durumda, f tüm $L_{p,\nu}$ ye $d\mu\left(x\right) = \left|x_n\right|^{2\nu} dx$ alınarak çift devam ettirilebilir. Yeni fonksiyon $\tilde{f}$ olsun. Böylece S uzayı $L_{p,\nu}$' de yoğun olduğundan, $\tilde{f}$ 'ya S 'nin (aslında S^+'nın) elemanları ile yaklaşılabilir. Dolayısıyla da, f 'e S^+ uzayının elemanları ile yaklaşılabilir.

Teorem 2.1. *(Hölder Eşitsizliği; (Sadosky 1979 s.13 , Rubin 1996 s.1))* (X, M, μ) *σ-sonlu ölçüm uzayı ve* $\|f\|_{p,\mu} = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$ *olsun. Bu durumda,* $f \in L_{p,\mu}$, $g \in L_{q,\mu}$, $1 \leq p \leq \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int_X |f(x) g(x)| \, d\mu(x) \leq \|f\|_{p,\mu} \|g\|_{q,\mu} \, . \tag{2.2}$$

Özel halde; $d\mu(x) = dx$*;* $f \in L_p$, $g \in L_q$, $1 \leq p \leq \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *için*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) g(x)| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği ve benzer olarak; $d\mu(x) = x_n^{2\nu} dx$*,* $f \in L_{p,\nu}$ *ve* $g \in L_{q,\nu}$ *için de*

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x) g(x)| \, x_n^{2\nu} dx \leq \|f\|_{p,\nu} \|g\|_{q,\nu}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.2. *(İntegraller için Minskowski Eşitsizliği (Sadosky 1979 , Folland 1984))*

(X, M, μ) *ve* (Y, N, γ) *σ-sonlu ölçüm uzayları ve* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu da* $\mu \times \gamma$*-ölçülebilir olsun. Eğer hemen hemen her* y *için* $f\left(\cdot, y\right) \in L_p\left(X, M, \mu\right)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ *ve* $\int_Y \|f\left(\cdot, y\right)\|_{p,\mu} \, d\gamma\left(y\right) < \infty$ *ise* $\int_Y \|f\left(x, y\right)\|_{p,\mu} \, d\gamma\left(y\right)$ *integrali de hemen hemen her* x *için sonludur ve*

$$\left\| \int_Y f\left(x, y\right) d\gamma\left(y\right) \right\|_{p,\mu} \leq \int_Y \|f\left(\cdot, y\right)\|_{p,\mu} \, d\gamma\left(y\right) \tag{2.3}$$

eşitliği sağlanır. Özel halde $d\gamma(y) = y_n^{2\nu}dy$*,* $d\mu(x) = x_n^{2\nu}dx$ *ve* $f(x,y)$*,* $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}$ *'de ölçülebilir bir foksiyon ise*

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} f(x,y)\, y_n^{2\nu} dy \right\|_{p,\nu} \leq \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \|f(x,y)\|_{p,\nu}\, y_n^{2\nu} dy$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.3. *(Lebesque Majorant Yakınsama Teoremi (Folland 1984 s.53))* $\{f_m\}$*,* $m \in \mathbb{N}$ *Lebesque anlamında integrallenebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer hemen hemen her* x *için* $f_m(x) \to f(x)\,(m \to \infty)$ *ve her* m *için* $|f_m(x)| \leq g(x)$ *olacak biçimde negatif olmayan,* $m \in \mathbb{N}$ *den bağımsız integrallenebilir bir* g *fonksiyonu varsa bu durumda* f *fonksiyonu da Lebesque anlamında integrallenebilirdir ve*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_m(x)\, dx. \tag{2.4}$$

Teorem 2.4. *(Riesz - Thorin İnterpolasyon Teoremi (Folland 1984 s.193))*

$1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty, i = 0,1$ *ve* $T : L_{p_i} \to L_{q_i}$ *dönüşümü* (p_i, q_i) *tipli yani,*

$$\|Tf\|_{q_i} \leq M_i \|Tf\|_{p_i}, i = 0,1$$

olsun. Bu durumda, $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$ *ve* $\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$*,* $(0 < t < 1)$ *olmak üzere,* T *dönüşümü* (p_i, q_i) *tipli yani,*

$$\|Tf\|_{q_i} \leq M_i \|Tf\|_{p_i} \tag{2.5}$$

dir ve M_t *operatör normu* $M_t \leq M_0^{1-t} M_1^t$ *eşitsizliğini sağlar.*

$L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$-$\mathbb{R}^n$ deki her noktanın her δ komşuluğunda integrallenebilen fonksiyonlar uzayı ve $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$(\mathcal{M}f)(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int\limits_{|y|\leq r} |f(x-y)|\, dy \tag{2.6}$$

fonksiyonuna Hardy-Littlewood maksimal operatörü (fonksiyonu) denir. Burada Ω_n, $S = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq 1\}$ birim yuvarının Lebesque ölçümüdür. (2.6) da $x - y = z$ dönüşümü yapılırsa

$$(\mathcal{M}f)(x) = \sup_{Q_x} \frac{1}{|Q_x|} \int\limits_{Q_x} |f(z)|\, dz$$

olur. Burada, supremum x-merkezli Q_x yuvarları üzerinden alınmıştır. Ayrıca $|Q_x|$ ile x-merkezli yuvarın hacmi kastedilmiştir. Aşağıdaki teorem $\mathcal{M}f$ fonksiyonunun önemli bir özelliğini ifade eder:

Teorem 2.5. *(Hardy-Littlewood, Stein (1970)) $f \in L_p$, $(1 \leq p < \infty)$ ise öyle bir $C = C(n,p)$ sabiti vardır ki*

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq C\,\|f\|_p \tag{2.7}$$

eşitsizliği sağlanır. Daha açıkçası, $(\mathcal{M}f)$ operatörü güçlü (p,p) tipli bir operatördür. $p = 1$ durumunda ise $(\mathcal{M}f)$ operatörü zayıf $(1,1)$ tiplidir. Yani, her $\lambda > 0$ için

$$\mu\left\{x \in \mathbb{R}^n : (\mathcal{M}f)(x) > \lambda\right\} \leq \frac{C\,\|f\|_1}{\lambda}$$

sağlanır.

Burada, μ , $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bir ölçülebilir alt küme olmak üzere, A kümesinin Lebesgue ölçümünü göstermektedir. Ayrıca, her $\lambda > 0$ ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\mu\left\{x \in \mathbb{R}^n : (\mathcal{M}f)(x) > \lambda\right\} \leq \left(\frac{A\,\|f\|_p}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.8}$$

eşitsizliği de sağlanır. Yani; $(\mathcal{M}f)$ operatörü her $p \in [1,\infty)$ için zayıf (p,p) tiplidir.

2.1. Klasik Öklid Kayma Operatörü ve Ã–zellikleri

Tek değişkenli bir f fonksiyonu için

$$\tau^y f(x) = f(x+y) \tag{2.9}$$

eşitliği ile tanımlanan τ^y operatörüne klasik Öklid kayma operatörü denir. Aslında, klasik kaymayı doğuran operatör $\frac{d}{dt}$ türev operatörüdür. f türevlenen bir fonksiyon ise $\varphi = \varphi(x,y)$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi = \frac{\partial}{\partial y}\varphi \tag{2.10}$$

$$\varphi|_{x=0} = f(y)$$

sınır-değer probleminin çözümü $\varphi = f(x+y)$ yani, $\tau^y f(x)$ Öklid kaymasıdır ve $\tau^y f(x)$, türev ile sıkı ilişkilidir:

$$f^{'}(x) = \lim_{y\to 0}\frac{\tau^y f(x) - f(x)}{y}. \tag{2.11}$$

Klasik kaymanın türev operatörü ile ilişkilendirilmesi, x'in bir komşuluğunda analitik olan f fonksiyonunun

$$\tau^y f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k \tag{2.12}$$

Taylor formülünde ortaya çıkar. Klasik kaymanın bilinen diğer önemli özellikleri aşağıdaki gibidir, (Kipriyanov 1997 ; Levitan1951):

1) $\tau^y \left(\tau^z f\left(x\right)\right) = \tau^{y+z} f\left(x\right)$,

2) $\tau^y \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\tau^y f(x)}$,

3) $\left(\tau^y f(x)\right)^p = \tau^y f^p\left(x\right)$,

4) $\tau^y \left(e^{i\lambda z}\right) = e^{i\lambda z} e^{i\lambda y}$,

5) $f \in L_p$ ise $\left\|\tau^y f\right\|_p = \left\|f\right\|_p$ dir. Yani; $\tau^y : L_p \to L_p$' ye sınırlı operatördür ve normu 1'e eşittir.

6) $f \in L_p$ ise

$$\lim_{|y|\to 0} \left\|\tau^y f - f\right\|_p = 0 \,. \tag{2.13}$$

2.2. Fourier Dönüşümü ve Özellikleri

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$(Ff)(x) \equiv f^{\wedge}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ix\cdot y} dy \tag{2.14}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada, $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$ olmak üzere $x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ dir. Ters Fourier dönüşümü de

$$\left(F^{-1} f\right)(x) \equiv f^{\vee}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{ix\cdot y} dy$$

eşitliği ile tanımlanır.

Fourier dönüşümünün iyi bilinen bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir (Stein ve Weiss 1971; Sadosky 1979):

a) $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $f^{\wedge}(x)$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}^n$ 'de düzgün süreklidir.

b) $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $f^{\wedge}(x)$ fonksiyonu sınırlıdır ve

$$\left\|f^{\wedge}\right\|_{\infty} \leq \left\|f\right\|_1 .$$

c) $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\lim\limits_{|x|\to\infty} f^{\wedge}(x) = 0$ 'dır.

d) $f \geq 0$ ise

$$\|f^{\wedge}\|_{\infty} = \|f\|_1 = f^{\wedge}(0)$$

eşitliği sağlanır.

e) $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ ise $f^{\wedge} \in L_2(\mathbb{R}^n)$'dir ve

$$\|f^{\wedge}\|_2 = \|f\|_2$$

eşitliği (Plancherel-Parseval eşitliği) sağlanır.

f) $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x)g(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g^{\wedge}(x)dx$$

eşitliği sağlanır.

2.3. Klasik Girişim ve Özellikleri

$f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, f ve g fonksiyonlarının girişimi (convolution)

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\tau^{-y}g(x)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \tag{2.15}$$

biçiminde tanımlanır. Burada τ^y (2.9) ile tanımlanan klasik Öklid kaymasıdır.

Klasik girişimin aşağıda verilen özellikleri iyi bilinmektedir, (Stein ve Weiss 1971; Folland 1984):

$f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

a) $f * g = g * f$ (değişme özelliği),

b) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (birleşme özelliği),

c) $\tau^{-y}(f * g) = (\tau^{-y}f) * g = f * (\tau^{-y}g)$,

d) $(f * g)^{\wedge}(x) = (f)^{\wedge}(x)(g)^{\wedge}(x)$,

e) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ için

$$\|f * g\|_r = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \right\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{2.16}$$

Young eşitsizliği sağlanır. Burada özellikle d) eşitliği, Fourier dönüşümü ile girişim arasındaki bağıntıyı veren harmonik analizin en önemli formüllerinden birisidir. Çünkü Fourier dönüşümü, zor bir işlem olan "$*$" işlemini daha basit bir işlem olan "fonksiyonların noktasal çarpımı" işlemine dönüştürmektedir. Bu eşitlik, Fourier dönüşümünün tanımı kullanılarak ve integralde değişken değiştirilerek kolayca elde edilir.

2.4. Poisson Çekirdeği, Yarıgrubu ve Özellikleri

$y \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in (0,\infty)$ olmak üzere $p(y;t)$ Poisson çekirdeği;

$$p(y;t) \equiv \left(e^{-t|\cdot|}\right)^{\vee}(y) = \frac{c_n t}{\left(|y|^2 + t^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \;,\; c_n = \pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \tag{2.17}$$

eşitliği ile tanımlanır. $\varphi(x)$ bir fonksiyon olmak üzere, $p(y;t)$-Poisson çekirdeği vasıtasıyla tanımlanan ve Poisson yarıgrubu $P_t\varphi$ olarak ifade edilen integral operatörler ailesi

$$(P_t\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(y;t)\varphi(x-y)dy \;, \quad (t>0) \tag{2.18}$$

biçiminde tanımlanır. $P_t\varphi$-Poisson yarıgrubunun ve $p(y;t)$-Poisson çekirdeğinin aşağıdaki temel özellikleri iyi bilinmektedir:

1) Her $t>0$ için $p(\cdot;t) \in L_1$ dir ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} p(y;t)dy = 1 \;,\; \left(p(\cdot;t)\right)^{\wedge}(\xi) = e^{-t|\xi|}$$

eşitlikleri sağlanır.

2) $\|P_t\varphi\|_p \le \|\varphi\|_p$, ($\varphi \in L_p$ ve $1 \le p \le \infty$) .

3) $\sup\limits_x |(P_t\varphi)(x)| \le kt^{-\frac{n}{p}}\|\varphi\|_p$, ($\varphi \in L_p$ ve $1 \le p \le \infty$) . Burada k sabiti t'den bağımsızdır.

4) Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in L_p$, $1 \le p \le \infty$ için

$$\sup_{t>0} |(P_t\varphi)(x)| \le (\mathcal{M}\varphi)(x) \quad .$$

Burada $\mathcal{M}\varphi$, (2.6) de tanımlanan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur.

5) $P_s\left[(P_t\varphi)(\cdot)\right](x) = (P_{s+t}\,\varphi)(x)$, ($s>0$, $t>0$) (Yarıgrup özelliği) .

6) Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in L_p$, $1 \le p \le \infty$ için

$$\lim_{t \to 0} (P_t \varphi)(x) = \varphi(x) \ .$$

7) $\varphi \in L_p$ ve $1 \le p < \infty$ için

$$\lim_{t \to 0} \|P_t \varphi - \varphi\|_p = 0$$

eşitliği sağlanır (Rubin 1996a).

2.5. Bessel Kayma Operatörü ve Özellikleri

Bilindiği gibi klasik kayma operatörünü doğuran operatör "$\frac{d}{dt}$" türev operatörü idi. (2.10) ile verilen sınır-değer problemi, $\nu > 0$ verilmiş bir sabit olmak üzere

$$B_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\nu}{t} \frac{d}{dt} \ , \quad (0 < t < \infty)$$

ile gösterilen ve Bessel diferansiyel operatörü denilen operatör için yazılırsa; $0 < x, y < \infty$ ve $\Phi = \Phi(x, y)$ olmak üzere,

$$B_x \Phi = B_y \Phi \ ,$$
$$\Phi|_{x=0} = f(y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi \ |_{x=0} = 0$$

olur. Bu sınır-değer probleminin çözümü

$$\Phi(x, y) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2}) \sin^{2\nu - 1} \theta d\theta$$

dir (Delsarte 1938; Levitan 1951).

$$S^y f(x) \equiv \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2}) \sin^{2\nu - 1} \theta d\theta \ . \qquad (2.19)$$

ile gösterilirse, bu S^y operatörüne Bessel kayması denir. Bessel kaymasının bilinen bazı önemli özellikleri şunlardır (Levitan(1951)):

1) $S^0 f(x) = f(x)$ dir. (2.19) da $y = 0$ yazılırsa

$$S^0 f(x) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(x) \sin^{2\nu - 1} \theta d\theta$$
$$= f(x) \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi \sin^{2\nu - 1} \theta d\theta \ .$$

Burada

$$\int_0^{\pi} \sin^{2\nu-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}$$

eşitliği kullanılırsa

$$S^0 f(x) = f(x)$$

elde edilir.

2) $S^y f(x) = S^{-y} f(x)$ dir. (2.19) deki integralde $\theta = \pi - \varphi$, $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $\sin\theta = \sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$ ve $\cos\theta = \cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$ olduğundan

$$\begin{aligned} S^y f(x) &= \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2 - 2xy\cos\varphi + y^2}) \sin^{2\nu-1}\varphi d\varphi \\ &= S^{-y} f(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Öklid kaymasında, $\tau^y f(x) = f(x+y)$ ve $\tau^{-y} f(x) = f(x-y)$ olduğundan, $\tau^y f(x) = \tau^{-y} f(x)$ eşitliğinin sağlanmadığı görülür.

3) $S^y f(x) = S^x f(y)$ dir. Öklid kaymasında da benzer eşitlik vardır:

$$\tau^y f(x) = f(x+y) = f(y+x) = \tau^x f(y) \, .$$

4) $S^y 1 = 1$ olduğu tanımdan kolayca görülür.

5) $S^y\left(af(x) + bg(x)\right) = aS^y f(x) + bS^y g(x)$ (Lineerlik özelliği).

6) f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ da ölçülebilir ve

$$\int_0^{\infty} |f(t)|\, t^{2\nu} dt < \infty \quad \text{ve} \quad \int_0^{\infty} |g(t)|\, t^{2\nu} dt < \infty$$

ise

$$\int_0^{\infty} S^y f(x) g(y) y^{2\nu} dy = \int_0^{\infty} f(y) S^y g(x) y^{2\nu} dy \tag{2.20}$$

eşitliği sağlanır. Özel halde $g(x) = 1$ ise

$$\int_0^{\infty} S^y f(x) y^{2\nu} dy = \int_0^{\infty} f(y) y^{2\nu} dy \tag{2.21}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlik Öklid kayması için sağlanan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x \mp y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

eşitliğinin benzer bir durumudur.

7) $|S^y f(x)| \leq S^y |f(x)| \leq \sup_{x\geq 0} |f(x)|$ dir.

Genelleşmiş kayma operatörünü tanımlamaya geçmeden önce normalleştirilmiş Bessel Fonksiyonu $j_\lambda(x)$ hakkında bilgi verelim:

$x^2y'' + xy' + (x^2+\lambda^2)y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olan ve birinci tip Bessel fonksiyonu olarak bilinen $J_\lambda(x)$ fonksiyonu ve $\lambda > -\frac{1}{2}$ olmak üzere

$$j_\lambda(x) = 2^\lambda \Gamma(\lambda+1)\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} \tag{2.22}$$

eşitliği ile tanımlanan $j_\lambda(x)$ fonksiyonuna normalleştirilmiş Bessel Fonksiyonu denir. Özel olarak $x = 0$ ve her $\nu > 0$ için

$$j_{\nu-\frac{1}{2}}(0) = 1 \text{ ve } j'_{\nu-\frac{1}{2}}(0) = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

Ayrıca, B_t Bessel diferansiyel operatörü olmak üzere

$$-B_t j_{\nu-\frac{1}{2}}(st) = s^2 j_{\nu-\frac{1}{2}}(st)$$

eşitliğinin her $t > 0$, $\nu > 0$ ve $s > 0$ için sağlandığı bilinmektedir (Levitan 1951). Görüldüğü gibi klasik Fourier harmonik analizinde, klasik Fourier dönüşümünde, integral operatörünün çekirdeği olan e^{-ixt} fonksiyonunun oynadığı rolü (e^{-ixt} fonksiyonu için $\frac{d}{dt}e^{-ixt}\ |_{x=0} = (-ix)\,e^{-ixt}\ |_{x=0} = 0$ ve $e^{-ixt}\ |_{x=0} = 1$ dir) Fourier-Bessel harmonik analizinde $j_\lambda(xt)$ fonksiyonu üstlenmektedir.

2.6. Genelleşmiş Kayma Operatörü ve Özellikleri

Bu kısımda ilk önce klasik harmonik analizin çok boyutlu hali olan ve Bessel kayma operatörü S^y ile ilişkilendirilen Fourier-Bessel harmonik analizin nasıl oluşturulduğundan bahsedelim.

Diferansiyel operatörü dilinde, tüm değişkenlere göre B_t-Bessel diferansiyel operatörü veya k değişkene göre Bessel ve $(n-k)$ değişkene göre de klasik Laplace diferansiyel operatörü uygulanarak, Fourier-Bessel harmonik analizi oluşturulabilir. Kayma operatörü dilinde, n değişkenin hepsine Bessel kayması uygulanarak veya k değişkenine göre Bessel kayması ve $(n-k)$ değişkenine göre de klasik Öklid kayması uygulayarak "hibrit girişim operatörü" elde edilebilir. Benzer şekilde n boyutlu genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümü de, n değişkenin tamamına F_B ile gösterilen ve Fourier-Bessel dönüşümü denilen

$$(F_B f)(x) = \int_0^\infty f(t) j_{\nu-\frac{1}{2}}(xt) t^{2\nu} dt\,, \qquad (0 \leq x < \infty)$$

formülü uygulanarak tanımlanabilir. Ya da k değişkene göre F_B-Fourier-Bessel dönüşümü, $(n-k)$ değişkene göre de klasik F-Fourier dönüşümü uygulayarak "hibrit Fourier-Bessel dönüşümü" (genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümü) tanımlanabilir.

T^y ile gösterilen genelleşmiş kayma operatörünün , $1 \leq p < \infty$ ve $\nu > 0$ olmak üzere $f \in L_{p,\nu}$ fonksiyonuna etkisi

$$T^y f(x) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(x'-y'; \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\theta + y_n^2}) \sin^{2\nu-1}\theta d\theta$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $x = (x', x_n)$, $y = (y', y_n)$, $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, $y' = (y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ olmak üzere x'-değişkenine göre klasik Öklid kayması, x_n değişkenine göre de S^y-Bessel kayması uygulanarak elde edilmiştir. Aslında T^y-genelleşmiş kayma operatörü , τ^y-klasik Öklid kayması ile S^y-Bessel kaymasının bir kompozisyonudur. Diğer yandan, S^y-Bessel kayma operatörü de, T^y-genelleşmiş kayma operatörünün bir değişkenli durumdaki karşılığıdır.

T^y-genelleşmiş kayma operatörünün iyi bilinen özellikleri aşağıdaki gibidir (Sezer 2005):

1) $T^y f(x) = T^{-y} f(x)$,

2) $T^0 = I$,

3) $T^y (af(x) + bg(x)) = aT^y f(x) + bT^y g(x)$ (Lineerlik özelliği) ,

4) $T^y T^z f(x) = T^z T^y f(x)$,

5) $T^y f(x) = T^x f(y)$,

6) $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow T^y f_n(x) \rightrightarrows T^y f(x)$,

7) $T^y j_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda t) = j_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda t)\, j_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda y)$,

8) $1 \leq p < \infty$ için

$$\|T^y f - f\|_{p,\nu} \longrightarrow 0, \;\; |y| \longrightarrow 0 \, . \tag{2.23}$$

9) T^y-genelleşmiş kayma operatörü $L_{p,\nu}$ 'den $L_{p,\nu}$ 'ye sınırlı (sürekli) bir operatördür. Yani; $f \in L_{p,\nu}$, $(1 \leq p \leq \infty)$, $y \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\|T^y f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu} \; . \tag{2.24}$$

T^y nin sınırlı operatör olduğu aşağıdaki şekilde görülür:

T^y operatörü, $y' = (y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ değişkenlerine göre klasik Öklid kayması ile $x_n \in \mathbb{R}_+$ değişkenine göre Bessel kaymasının kompozisyonu olduğundan ve Öklid kayması için yukarıdaki eşitsizlik sağlandığından söz konusu eşitsizliğin S^y-Bessel kayması için sağlandığını göstermek yeterlidir. Bunun için her $t \geq 0$ için

$$\left(\int_0^\infty \left| S^t \varphi(r) \right|^p r^{2\nu} dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^\infty |\varphi(r)|^p r^{2\nu} dr \right)^{\frac{1}{p}} , \quad 1 \leq p \leq \infty$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterilmelidir. $p = \infty$ için eşitsizlik açık olduğundan,$1 \leq p < \infty$ varsayılabilir. İlk olarak

$$\left| S^t \varphi(r) \right|^p \leq S^t(|\varphi(r)|^p) \, , \; 1 \leq p < \infty$$

olduğunu gösterelim. $p = 1$ için sonuncu eşitsizlik aşikar olduğundan, $1 < p < \infty$ alınabilir. q sayısını $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ olacak şekilde seçersek, (2.2) ile verilen Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left| S^t \varphi(r) \right|^p &\leq \left(c_\nu \int_0^\pi \left| \varphi(\sqrt{r^2 - 2rk\cos\theta + k^2}) \right| \sin^{2\nu-1}\theta d\theta \right)^p \\
&= \left(\int_0^\pi \left| \varphi(\sqrt{r^2 - 2rk\cos\theta + k^2}) \right| (c_\nu \sin^{2\nu-1}\theta)^{\frac{1}{p}} (c_\nu \sin^{2\nu-1}\theta)^{\frac{1}{q}} d\theta \right)^p \\
&\leq \left(\int_0^\pi \left| \varphi(\sqrt{r^2 - 2rk\cos\theta + k^2}) \right|^p c_\nu \sin^{2\nu-1}\theta d\theta \right) \left(\int_0^\pi c_\nu \sin^{2\nu-1}\theta d\theta \right)^{\frac{p}{q}} \\
&= ... \left(\int_0^\pi c_\nu \sin^{2\nu-1}\theta d\theta = c_\nu \frac{1}{c_\nu} = 1 \right) ... \\
&= S^t(|\varphi(r)|^p)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak S^t-Bessel kaymasının (2.20) ile verilen 6. özelliği kullanılırsa istenilen

$$\int_0^\infty \left|S^t\varphi(r)\right|^p r^{2\nu}dr \leq \int_0^\infty S^t(|\varphi(r)|^p)r^{2\nu}dr = \int_0^\infty |\varphi(r)|^p r^{2\nu}dr$$

eşitsizliği elde edilir.

2.7. Fourier-Bessel Dönüşümü ve Özellikleri

T^y-genelleşmiş kayma operatörünün tanımlanmasına benzer olarak $f \in L_{1,\nu}$ fonksiyonunun genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümü $(n-1)$ değişkene göre klasik Fourier dönüşümü F, n. değişkene göre de Fourier-Bessel dönüşümü F_B uygulanarak

$$(F_\nu f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y)e^{-ix'\cdot y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)y_n^{2\nu}dy\ , \quad \left(x \in \mathbb{R}_+^n\right) \tag{2.25}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada; $x' \cdot y' = x_1y_1 + ... + x_{n-1}y_{n-1}$ dir.

F_ν-genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümüne uygun F_ν^{-1} genelleşmiş ters Fourier-Bessel dönüşümü de

$$(F_\nu^{-1}f)(x) = c_\nu(n)(F_\nu f)(-x', x_n)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $c_\nu(n)$

$$c_\nu(n) = \left[(2\pi)^{n-1}\, 2^{2\nu-1}\Gamma^2\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)\right]^{-1}$$

dir. Fourier dönüşümü F nin sağladığı özelliklerin hemen-hemen tümünün benzerleri F_ν-genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümü için de geçerlidir (Tartan 2021). $f \in S^+$ olmak üzere

1) $y = (y_1, ..., y_{n-1}, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(F_\nu f(y)) = F_\nu\left[(-ix_k)\, f(x)\right](y)$$

dir. Daha genel olarak $P(z_1, z_2, ..., z_n)$ n değişkenli bir polinom ve $B_{y_n} = \frac{d^2}{dy_n^2} + \frac{2\nu}{y_n}\frac{d}{dy_n}$ Bessel diferansiyel operatörü için

$$P\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, B_{y_n}\right)(F_\nu f)(y) = F_\nu\left[P(-ix_1, ..., -ix_{n-1}, -x_n^2)f(x)\right](y) \tag{2.26}$$

eşitliği sağlanır.

2) $F_\nu \left[\frac{\partial}{\partial y_k} f(y)\right](x) = (ix_k)(F_\nu f)(x)$ dir ve genel halde (2.26) eşitliğine benzer olarak

$$F_\nu \left[P\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, B_{y_n}\right) f(y)\right](x) = P(ix_1, ix_2, ..., ix_{n-1}, -x_n^2) F_\nu f(x) \quad (2.27)$$

eşitliği sağlanır (Kipriyanov 1967; Aliev ve Bayrakçı 1998).

3) Özel olarak

$$\Delta_\nu = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \quad (2.28)$$

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü için

$$F_\nu \left[(-\Delta_\nu) f(x)\right](y) = |y|^2 (F_\nu f)(y) \quad (2.29)$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ için $F_\nu \left[(-\Delta_\nu)^k f(x)\right](y) = |y|^{2k} (F_\nu f)(y)$ eşitlikleri sağlanır.

4) Yine özel olarak, I-birim operatör olmak üzere

$$F_\nu \left[(I - \Delta_\nu) f(x)\right](y) = (1 + |y|^2)(F_\nu f)(y)$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$F_\nu \left[(I - \Delta_\nu)^k f(x)\right](y) = (1 + |y|^2)^k (F_\nu f)(y)$$

eşitlikleri sağlanır.

2.8. Genelleşmiş Girişim ve Özellikleri

Bu kısımda, klasik kayma operatörü τ^y vasıtasıyla tanımlanan (klasik) girişim "$*$" operatörüne benzer olarak T^y-genelleşmiş kayma operatörü vasıtasıyla oluşturulan ve "$\circledast$" ile gösterilen genelleşmiş girişim operatörü tanımlanarak önemli özelliklerinden bahsedilecektir. $f, g \in S^+$ fonksiyonlarının genelleşmiş girişimi $f \circledast g$, T^y genelleşmiş kayma vasıtasıyla

$$(f \circledast g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) T^y g(x) y_n^{2\nu} dy \ , \qquad \left(x \in \mathbb{R}_+^n\right) \quad (2.30)$$

eşitliği ile tanımlanır. Klasik girişimin sahip olduğu özelliklerin benzerleri genelleşmiş girişim için de geçerlidir:

1) $f \circledast g = g \circledast f$ (Değişme özelliği) .

2) $F_\nu(f \circledast g)(x) = (F_\nu f)(x)(F_\nu g)(x)$, (Genelleşmiş girişim, F_ν-genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümü vasıtasıyla noktasal çarpıma dönüşür) .

3) $f \in L_{p,\nu}$, $g \in L_{q,\nu}$, $1 \leq p,q,r \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ olsun. Bu durumda $f \circledast g \in L_{r,\nu}$ dir ve

$$\|f \circledast g\|_{r,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu} \|g\|_{q,\nu} \tag{2.31}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik genelleşmiş Young eşitsizliği olarak bilinir: q sabit tutulup, $r = q, p = 1$ için $\|f \circledast g\|_{q(=r),\nu}$ normu hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\|f \circledast g\|_{q,\nu} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |(f \circledast g)(x)|^q \, x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y) T^y g(x) y_n^{2\nu} dy \right|^q x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte integraller için Minkowski eşitsizliği (2.3) kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}\|f \circledast g\|_{q,\nu} &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(y)|^q \, |T^y g(x)|^q \, x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} y_n^{2\nu} dy \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(y)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |T^y g(x)|^q \, x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{q}} y_n^{2\nu} dy\end{aligned}$$

ve son ifade de (2.24) ile verilen T^y-genelleşmiş kaymanın

$$\|T^y f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}$$

özelliği kullanılırsa

$$\|f \circledast g\|_{q,\nu} \leq \|f\|_{1,\nu} \|g\|_{q,\nu}$$

elde edilir. Yani, genelleşmiş girişim $(1,q)$ tiplidir. Şimdi de $r = \infty$ ve $p = \frac{q}{q-1}$ için $\|f \circledast g\|_{\infty,\nu}$ normu hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\|f \circledast g\|_{\infty,\nu} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} |(f \circledast g)(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y)(T^y g)(x) y_n^{2\nu} dy \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(y)(T^y g)(x)| \, y_n^{2\nu} dy\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifade için önce Hölder Eşitsizliği ve daha sonra da yine (2.24) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|f \circledast g\|_{\infty,\nu} &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n_+}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(y)|^p\, y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|(T^y g)(x)|^q\, y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \|f\|_{p,\nu}\,\|g\|_{q,\nu}\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, genelleşmiş girişim $\left(\frac{q}{q-1},\infty\right)-$tiplidir. Böylece, Riesz-Thorin interpolasyon teoreminden

$$\|f \circledast g\|_{r,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}\,\|g\|_{q,\nu}$$

eşitsizliği elde edilir.

2.9. Genelleşmiş Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü ve Özellikleri

Klasik Fourier Harmonik analizinde Hardy-Littlewood maksimal operatörünün oynadığı önemli rolü Fourier-Bessel harmonik analizinde genelleşmiş kaymanın doğurduğu ve adına genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatörü denilen $\mathcal{M}_\nu f$ operatörü oynamaktadır. Bu kesimde $\mathcal{M}_\nu$ hakkında bilgi verilecektir. Bir $f \in L_{p,\nu}$, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatörü $\mathcal{M}_\nu f$

$$\left(\mathcal{M}_\nu f\right)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{r^{n+2\nu}w\left(n,\nu\right)}\int\limits_{B_r^+}|T^y f\left(x\right)|\, y_n^{2\nu}dy \tag{2.32}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada;

$$B_r^+ = \left\{y\in\mathbb{R}^n_+ :\ |y|\leq r\right\} \text{ ve } w\left(n,\nu\right) = \int\limits_{B_r^+} y_n^{2\nu}dy$$

dir. Teorem 2.5 'in benzeri $\mathcal{M}_\nu$-genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatörü içinde ifade edilebilir.

Teorem 2.6. *$f \in L_{p,\nu}$, $1 < p \leq \infty$ için $(\mathcal{M}_\nu f) \in L_{p,\nu}$ dir ve*

$$\|\mathcal{M}_\nu f\|_{p,\nu} \leq c_p\,\|f\|_{p,\nu}\ ,\ (c_p > 0) \tag{2.33}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.7. $\Psi \in L_{1,\nu}$ *bir radial fonksiyon ve* $\Phi(r) = \Psi(x)|_{|x|=r}$ $(0 < r < \infty)$, $[0,\infty)$ *aralığında negatif olmayan ve artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her* $\varphi \in L_{p,\nu}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *için*

$$\sup_{\varepsilon>0} |(\varphi \circledast \Psi_\varepsilon)(x)| \leq \|\Psi\|_{1,\nu} (\mathcal{M}_\nu \varphi)(x) \tag{2.34}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada,

$$\Psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n-2\nu} \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ , \ (\varepsilon > 0)$$

dir.

Yukarıdaki teoremlerin ispatı ve $\mathcal{M}_\nu f$ operatörü ile ilgili ayrıntılı bilgi için (Aliev ve Bayrakçı 1998) ve (Guliev 2003) kaynaklarına bakılabilir.

2.10. Genelleşmiş Poisson Çekirdeği, Yarıgrubu ve Özellikleri

$y \in \mathbb{R}^n_+$ ve $t \in (0,\infty)$ olmak üzere $p_\nu(y;t)$ genelleşmiş poisson çekirdeği

$$p_\nu(y;t) = F_\nu^{-1}\left(e^{-t|\cdot|}\right)(y) = \frac{c_{\nu,n} t}{\left(|y|^2 + t^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}}, \ \left(c_{\nu,n} = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)}\right)$$

eşitliği ile tanımlanır. $\mathcal{P}_t\varphi$-genelleşmiş Poisson yarıgrubu $p_\nu(y;t)$-genelleşmiş Poisson çekirdeği vasıtasıyla,

$$(\mathcal{P}_t \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} p_\nu(y;t) T^y \varphi(x) y_n^{2\nu} dy \ , \ (t > 0) \tag{2.35}$$

biçiminde tanımlanır.

Genelleşmiş Poisson yarıgrubu-$\mathcal{P}_t\varphi$ ve genelleşmiş Poisson çekirdeği-$p_\nu(y;t)$'nin sağladığı önemli özellikler aşağıdaki gibidir (Tartan 2021):

1) $p_\nu(|y| \ ;t) = t^{-n-2\nu} p_\nu(t^{-1}|y|\,;1)$ dir.

2) Her $t > 0$ için

$$\|p_\nu(\cdot;t)\|_{1,\nu} = \int_{\mathbb{R}^n_+} p_\nu(|y| \ ;t) y_n^{2\nu} dy = 1 \text{ ve } F_\nu(p_\nu(\cdot,t))(\xi) = e^{-t|\xi|}, \xi \in \mathbb{R}^n . \tag{2.36}$$

3)

$$\|\mathcal{P}_t\varphi\|_{p,\nu} \leq \|\varphi\|_{p,\nu} \ ; \quad (\varphi \in L_{p,\nu} \text{ ve } 1 \leq p \leq \infty) . \tag{2.37}$$

4) $1 \leq p < \infty$ için $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n_+} |(\mathcal{P}_t\varphi)(x)| \leq ct^{-\frac{n+2\nu}{p}} \|\varphi\|_{p,\nu}$.

5)

$$\sup_{t>0} |(\mathcal{P}_t\varphi)(x)| \leq (\mathcal{M}_\nu\varphi)(x) \ . \tag{2.38}$$

burada $(\mathcal{M}_\nu\varphi)(x)$ (2.32) ile tanımlanan genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur.

6) $\mathcal{P}_s[(\mathcal{P}_t\varphi)(\cdot)](x) = (\mathcal{P}_{s+t}\varphi)(x)$, $(s>0, t>0)$ (Yarıgrup özelliği) .

7) $\varphi \in L_{p,\nu}$ ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\lim_{t\to 0^+} \|\mathcal{P}_t\varphi - \varphi\|_{p,\nu} = 0 \ .$$

8) Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}_+^n$, $\varphi \in L_{p,\nu}$ ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\lim_{t\to 0^+} (\mathcal{P}_t\varphi)(x) = \varphi(x) \ . \tag{2.39}$$

(Aliev ve Bayrakçı 1998 ; Sezer ve Aliev 2010). $\mathcal{P}_t\varphi$-genelleşmiş Poisson yarıgrubunun 3)-8) de verilen özelliklerin ispatları aşağıda verilmiştir:

3) eşitsizliğinin ispatı için (2.31) ile verilen genelleşmiş Young eşitsizliğinin ve 2) de verilen $\|p_\nu(\cdot;t)\|_{1,\nu} = 1$ eşitliğinin kullanılması yeterlidir:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_t\varphi\|_{p,\nu} &= \left\| \int_{\mathbb{R}_+^n} p_\nu(y;t) T^y\varphi(x)\, y_n^{2\nu} dy \right\|_{p,\nu} \\
&= \|p_\nu(\cdot;t) \circledast \varphi\|_{p,\nu} \\
&\leq \|p_\nu(\cdot;t)\|_{1,\nu} \|\varphi\|_{p,\nu} = \|\varphi\|_{p,\nu} \ .
\end{aligned}$$

4) 'ün ispatı için genelleşmiş Young eşitsizliğinde $r = \infty$ durumu düşünülürse

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{P}_t\varphi)(x)| &\leq \|\varphi\|_{p,\nu} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |p_\nu(|y|;t)|^q y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|\varphi\|_{p,\nu} t^{-n-2v} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \left|p_\nu\left(t^{-1}|y|;1\right)\right|^q y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
\ldots (y &= tx \ , \ dy = t^n dx \text{ yazılırsa}) \ldots \\
&= \|\varphi\|_{p,\nu} t^{-n+2v} t^{n+2\nu.\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\mathcal{P}_\nu(|x|;1)|^q x_n^{2\nu} dx \right) \\
&= ct^{-\frac{n+2v}{p}} \|\varphi\|_{p,\nu} \ , \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade de görülen c sabiti φ fonksiyonundan bağımsızdır.

5) eşitsizliğinin doğruluğu, genelleşmiş Hardy Littlewood Maksimal fonksiyonunun (2.34) ile verilen

$$\sup_{\varepsilon>0} \left|(\varphi \circledast \Psi_\varepsilon)(x)\right| \leq \|\Psi\|_{1,\nu} (\mathcal{M}_\nu \varphi)(x)$$

özelliğinde $\Psi_\varepsilon(x)$ fonksiyonu yerine $p_\nu(x;\varepsilon) \equiv \varepsilon^{-n-2\nu} p_\nu\left(\frac{x}{\varepsilon};1\right)$ alınarak görülür:

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} \left|(\mathcal{P}_t \varphi)(x)\right| &= \sup_{\varepsilon>0} \left|\varphi \circledast p_\nu(x;\varepsilon)\right| \leq \|p_\nu\|_{1,\nu} (\mathcal{M}_\nu \varphi)(x) \\
&= (\mathcal{M}_\nu \varphi)(x) \ .
\end{aligned}$$

6) 'da yer alan yarıgrup özelliği için $\varphi \in S^+$ için eşitliğin her iki tarafına $F_\nu-$Fourier-Bessel dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
F_\nu\left[\mathcal{P}_s(\mathcal{P}_t \varphi)(\cdot)\right](x) &= F_\nu(\mathcal{P}_{s+t}\varphi)(x) \\
e^{-s|x|} e^{-t|x|} (F_\nu \varphi)(x) &= e^{-(s+t)|x|} (F_\nu \varphi)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece de eşitliğin doğruluğu görülür. S^+ uzayı $L_{p,\nu}$ de yoğun olduğundan bu eşitlik keyfi $\varphi \in L_{p,\nu}$ için de sağlanır.

7) 'nin ispatı için $\|p_\nu(\cdot;t)\|_{1,\nu} = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\|\mathcal{P}_t \varphi - \varphi\|_{p,\nu} = \left\| \int_{\mathbb{R}_+^n} p_\nu(x;t) \left[T^x \varphi(y) - \varphi(y)\right] x_n^{2\nu} dx \right\|_{p,\nu}$$

eşitliği elde edilir. Burada x yerine tx yazarak eşitliğin sağ tarafına (2.3) da verilen Genelleşmiş Minkowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_t \varphi - \varphi\|_{p,\nu} &= \left\| \int_{\mathbb{R}_+^n} p_\nu(x;1) \left[T^x \varphi(y) - \varphi(y)\right] x_n^{2\nu} dx \right\|_{p,\nu} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+^n} p_\nu(x;1) \left\|T^{tx}\varphi(y) - \varphi(y)\right\|_{p,\nu} x_n^{2\nu} dx
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde edilir. Son olarak da, genelleşmiş kaymanın (2.23) ile verilen

$$\lim_{t\to 0^+} \left\|T^t \varphi(\cdot) - \varphi(\cdot)\right\|_{p,\nu} = 0$$

özelliği ve Lebesque majorant yakınsama teoremi kullanılırsa

$$\lim_{t\to 0^+} \|\mathcal{P}_t \varphi - \varphi\|_{p,\nu} = 0$$

elde edilir.

8) özelliği de 4) özelliğinden ve (Stein ve Weiss 1971) kaynağındaki noktasal yakınsama ile ilgili ünlü teoremden

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\mathcal{P}_t \varphi\right)(x) = \varphi(x)$$

eşitliğin hemen hemen her $x \in \mathbb{R}_+^n$ için doğru olduğu görülür.

Modifiye edilmiş genelleşmiş Poisson integrali $V_t f$

$$\left(V_t f\right)(x) = e^{-t}\left(\mathcal{P}_t f\right)(x)\,,\ 0 \le t < \infty \tag{2.40}$$

eşitliği ile tanımlanır. Modifiye edilmiş genelleşmiş Poisson integrali

$$\left(V_\alpha\left(V_\beta f\right)\right)(x) = \left(V_{\alpha+\beta} f\right)(x)$$

yarıgrup özelliğini sağlar. Ayrıca; (2.39) özelliğinden

$$\left(e^{-t}\mathcal{P}_t f\right)(x)\,|_{t=0} \ = f(x) = V_0 f$$

eşitliği sağlanır.

3. MATERYAL VE METOT

Tanım 3.8. *(Flett 1971) İlk olarak T.M.Flett tarafından tanımlanan Flett potansiyeli* $T^{\alpha}\varphi$

$$(T^{\alpha}\varphi)(x) = (\Phi_{\alpha} * f)(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\alpha}(y)\,\varphi(x-y)\,dy \tag{3.1}$$

biçimindedir. Burada

$$\Phi_{\alpha}(y) = \frac{1}{\lambda_n(\alpha)} |y|^{\alpha-n} \int\limits_0^{\infty} \frac{t^{\alpha}e^{-t|y|}}{(1+t^2)^{\frac{(n+1)}{2}}} dt$$

ve

$$\lambda_n(\alpha) = \pi^{\frac{(n+1)}{2}} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

dir (İlham vd 2006). Flett potansiyeli, aslında Fourier dönüşümü terimlerinde

$$(T^{\alpha}\varphi)^{\wedge}(x) = (1+|x|)^{-\alpha}\varphi^{\wedge}(x), \qquad (x\in\mathbb{R}^n, \alpha>0)$$

eşitliği ile tanımlanır ve $\left(I+\sqrt{-\Delta}\right)$ *operatörünün "negatif kesirsel kuvvetleri" olarak yorumlanır. Yani, formal olarak*

$$(T^{\alpha}\varphi) = \left(I+\sqrt{-\Delta}\right)^{-\alpha}\varphi$$

yazılabilir.

Klasik Flett potansiyellerinin klasik Poisson integrali ile ilişkilendirilen ve bu potansiyellerin tek katlı integral şeklinde temsilini veren teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.9. $\varphi \in L_p$ *ve* $1 \leq p \leq \infty$ *olsun. Bu durumda*

$$(T^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}(P_t\varphi)(x)dt \tag{3.2}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 3.10. *Genelleşmiş Flett potansiyeli* $\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi$, $\varphi \in L_{p,\nu}$ *ve* $0 < \operatorname{Re}\alpha < \infty$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi(x) &= (\Phi_{\alpha,\nu}(y) \circledast \varphi)(x)\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \Phi_{\alpha,\nu}(y)\,T^y\varphi(x)\,y_n^{2\nu}dy\end{aligned} \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$\Phi_{\alpha,\nu}(y)=\frac{1}{\lambda_{n,\nu}(\alpha)}|y|^{\alpha-n-2\nu}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{t^{\alpha}e^{-t|y|}}{(1+t^2)^{\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}}dt$$

ve

$$\lambda_{n,\nu}(\alpha)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}$$

dir.

Genelleşmiş Flett potansiyelleri, klasik Flett potansiyellerine benzer olarak Fourier-Bessel dönüşümü dilinde, formal olarak $\varphi\in S^{+}$ ve $0<\operatorname{Re}\alpha<\infty$ için

$$F_{\nu}\left(\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi\right)(x)=(1+|x|)^{-\alpha}F_{\nu}\varphi(x)$$

eşitliği ile tanımlanır ve $\left(I+\sqrt{-\Delta_{\nu}}\right)$ operatörünün "negatif kesirsel kuvvetleri" olarak yorumlanır. Yani,

$$\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi=\left(I+\sqrt{-\Delta_{\nu}}\right)^{-\alpha}\varphi\,.$$

Ayrıca genelleşmiş Flett potansiyellerinin genelleşmiş Poisson yarıgrubu ile ilişkilendirilerek oluşturulan tek katlı integral gösterimini aşağıdaki teorem ifade etmektedir.

Teorem 3.11. *$\varphi\in L_{p,\nu}$ ve $0<\operatorname{Re}\alpha<\infty$ olmak üzere $T_{\nu}^{\alpha}\varphi$-genelleşmiş Flett potansiyeli*

$$\left(\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\left(\mathcal{P}_{t}\varphi\right)(x)\,dt \tag{3.4}$$

eşitliğini sağlar. Burada $(\mathcal{P}_{t}\varphi)$-genelleşmiş Poisson yarıgrubudur. (Sezer 2009)

İspat

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\left(\mathcal{P}_{t}\varphi\right)(x)\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}p_{\nu}(y;t)T^{y}\varphi(x)\,y_{n}^{2\nu}dy\right)dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}T^{y}\varphi(x)\left(\int\limits_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\frac{2\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{t}{\left(|y|^2+t^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}}dt\right)y_{n}^{2\nu}dy$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}T^{y}\varphi(x)\left(\int\limits_{0}^{\infty}\frac{t^{\alpha}e^{-t}}{\left(|y|^2+t^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}}dt\right)y_{n}^{2\nu}dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \ldots \left(\tau = \frac{t}{|y|} \text{ dersek } d\tau = \frac{dt}{|y|} \right) \ldots \\
&= \quad A \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y \varphi\left(x\right) \left(\int\limits_0^\infty \frac{\left(\tau\left|y\right|\right)^\alpha e^{-\tau|y|}}{\left|y\right|^{n+2\nu+1}\left(1+\tau^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}} \left|y\right| d\tau \right) y_n^{2\nu} dy \\
&= \quad A \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y \varphi\left(x\right) \left(\left|y\right|^{\alpha-n-2\nu} \int\limits_0^\infty \frac{\tau^\alpha e^{-\tau|y|}}{\left(1+\tau^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}} d\tau \right) y_n^{2\nu} dy
\end{aligned}
$$

Burada $A\left|y\right|^{\alpha-n-2\nu} = \frac{|y|^{\alpha-n+2\nu}}{\lambda_{n,\nu}(\alpha)}$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece;

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \left(\mathcal{P}_t \varphi\right)\left(x\right) dt &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \Phi_{\alpha,\nu}\left(y\right) T^y \varphi\left(x\right) y_n^{2\nu} dy \\
&= T_\nu^\alpha \varphi\left(x\right)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. □

Aşağıda Rieamann-Liouville kesirsel integralinin tanımı verilecektir. Detaylı bilgi için Samko, S.G. vd. 1993 kaynağına bakılabilir.

Tanım 3.12. *$f \in L\left[a,b\right]$ olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali,*

$$
I_-^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int\limits_x^\infty (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int\limits_0^\infty \frac{f\left(t+x\right)}{t^{1-\alpha}} dt \tag{3.5}
$$

şekilde tanımlanır.

Önteorem 3.13. *(Stein ve Weiss, s.60) $\left\{T_\varepsilon\right\}_{\varepsilon>0}$ operatörler ailesi L_p $\left(1 \leq p \leq \infty\right)$ den $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar uzayına tanımlı olsun. Ayrıca*

$$
\left(T^* f\right)\left(x\right) = \sup_{\varepsilon>0} \left|(T_\varepsilon f)(x)\right|
$$

olmak üzere her $t > 0$ ve $f \in L_p$ için

$$
\text{ölçüm } \left\{x : \left|(T_\varepsilon f)(x)\right| > t\right\} \leq \left(\frac{c\left\|f\right\|_p}{t}\right)^q
$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti ve $q \geq 1$ reel sayısı mevcut olsun. Eğer her $f \in D$ için $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ var ve sonlu olacak şekilde L_p nin D gibi yoğun bir alt kümesi varsa bu durumda her $f \in L_p$ için de $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ limiti vardır ve hemen hemen her x için sonludur.

Tanım 3.14. *$g(t)$, $t \in \mathbb{R}$ fonksiyonunun $l \in \mathbb{N}$ mertebeden $\tau \in \mathbb{R}$ adımlı sonlu farkı*

$$\Delta_\tau^l[g](t) = \sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} (-1)^k g(t + k\tau)$$

şeklinde tanımlanır. $t = 0$ özel değeri için

$$\Delta_\tau^l[g](0) = \sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} (-1)^k g(k\tau) \tag{3.6}$$

dir. (Samko vd. 1993)

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

B.Rubin, (1986) yılındaki çalışmasında Possion yarıgrubunun $(P_t f)$ doğurduğu $D_\varepsilon^\alpha f$,$(\varepsilon > 0)$ ve metaharmonik yarıgrubun $(M_t f)$ doğurduğu $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f$,$(\varepsilon > 0)$ kesikli hipersingüler integraller ailelerini tanıtmış ve $\alpha > 0$ parametresi ile $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu üzerine konulan bazı koşullar altında $D_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi$ ve $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi$ ifadelerinin $\varepsilon \to 0^+$ için noktasal (hemen hemen heryerde) ve L_p normunda φ'ye yakınsadığını kanıtlayarak, Riesz ve Bessel potansiyellerinin tersleri için yeni formüller elde etmiştir. Burada $I^\alpha \varphi$ ve $J^\alpha \varphi$ sırasıyla $\varphi \in L_p$ fonksiyonunun Riesz ve Bessel potansiyelleri olup D_ε^α ve $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha$ aileleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
(D_\varepsilon^\alpha) f(x) &= \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \left[\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k (P_{k\tau} f)(x) \right] \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} ; \\
(\mathbb{D}_\epsilon^\alpha) f(x) &= \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \left[\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k (M_{k\tau} f)(x) \right] \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} .
\end{aligned}$$

Bu kısımda, esas olarak Rubin'in uyguladığı prosedürden esinlenerek, bir "genelleşmiş kesikli hipersingüler integral ailesi" kullanılarak genelleşmiş Flett potansiyelinin tersi elde edilecektir. Genelleşmiş Flett potansiyellerinin tersini bulma formülünü ifade eden teoremi ispatlamak için ön hazırlık olarak öncelikle "genelleşmiş kesikli hipersingüler integral ailesi"nin tanımı yapılarak gerekli olan bazı önemli önteoremler ispatlanacaktır.

Tanım 4.15. *$f \in L_{p,\nu}$, $(1 \le p < \infty)$, $\alpha > 0$ ve $l > \alpha$ $(l \in \mathbb{N})$ olmak üzere genelleşmiş Poisson yarıgrubunun doğurduğu, $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı "genelleşmiş kesikli hipersingüler integral ailesi"*

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \Delta_\tau^l \left[(V_t f)(x) \right](0) \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \qquad (4.1) \\
&= \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \left[\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k e^{-k\tau} (\mathcal{P}_{k\tau} f)(x) \right] \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Burada,$(V_t f)(x)$, $\Delta_\tau^l h(t)$ ve $\mathcal{P}_\tau h(t)$ sırasıyla (2.40) (3.6) ve (2.35) de tanımlandıkları gibidir. Ayrıca $\chi_l(\alpha)$ ifadesi "normalleyici katsayı" olarak adlandırılır ve

$$\chi_l(\alpha) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-t}\right)^l t^{-1-\alpha} dt$$

dir.

Teorem (2.3) ile verilen integraller için Minkowski eşitsizliği kullanılarak genelleşmiş kesikli hipersingüler integral ailesi $\mathfrak{D}_{\varepsilon}^{\alpha} f$ 'nin $L_{p,\nu}$ uzayında olduğu görülebilir.

Önteorem 4.16. *$f \in L_{p,\nu}$ $(1 \leq p < \infty)$ve $V_t f$ modifiye edilmiş genelleşmiş Poisson integrali olsun. Bir $h(t)$ $(0 < t < \infty)$ fonksiyonunun Riemann kesirli integrali $I_{-}^{\alpha} h(t)$ (3.5) deki gibi tanımlansın. O halde*

$$V_t \left[\mathcal{T}^{\alpha} f\right](x) = I_{-}^{\alpha} \left[(V.f)(x)\right](t) \tag{4.2}$$

dir.

İspat İlk olarak, sağ ve sol tarafların Fourier dönüşümünün tüm $f \in S^{+}$ için eşit olduğu görülmelidir. Eğer $f \in S^{+}$ ise

$$F_{\nu}(V_t \left[\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha} f\right](x))(\xi) = e^{-t(1+|\xi|)}(1+|\xi|)^{-\alpha} F_{\nu}\left(f(\xi)\right) \tag{4.3}$$

ve öte yandan

$$\begin{aligned}
F_{\nu}\left(I_{-}^{\alpha}\left[(V.f)(x)\right](t)\right)(\xi) &= F_{\nu}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{0}^{\infty}(V_{r+t}f)(x) r^{\alpha-1} dr\right]\right)(\xi) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} F_{\nu}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-(r+t)} r^{\alpha-1}\left[(\mathcal{P}_{r+t}f)(x)\right] dr\right)(\xi) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} e^{-(r+t)} r^{\alpha-1} e^{-(r+t)|\xi|} F_{\nu}(f)(\xi) dr \\
&= F_{\nu}(f)(\xi) e^{-t(1+|\xi|)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} e^{-r(1+|\xi|)} r^{\alpha-1} dr \\
&= e^{-r(1+|\xi|)}(1+|\xi|)^{-\alpha} F_{\nu}(f)(\xi).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Böylece (4.3) ve (4.4)'den (4.2)'deki eşitliğin Schwartz uzayından alınmış tüm f fonksiyonları için doğru olduğu görülür. Ayrıca $(Af)(x) = V_t \left[\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha} f\right](x)$ ve $(Bf)(x) = I_{-}^{\alpha}\left[V.f(x)\right](t)$ biçiminde tanımlı A ve B operatörleri güçlü (p,p) tipli ve S^{+} uzayı $L_{p,\nu}$ uzayında yoğun olduğundan (4.2) eşitliğinin tüm $L_{p,\nu}$ den olan fonksiyonlar için sağlandığını görülür. $\square$

Önteorem 4.17. *$\varphi \in L_{p,\nu}$ $(1 \leq p < \infty)$, genelleşmiş kesikli hipersingüler integral ailesi $\mathfrak{D}_{\varepsilon}^{\alpha} f$ (4.1) de tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda, $\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi$, φ fonksiyonunun genelleşmiş Flett potansiyeli ve $\mathcal{P}_t\varphi$ de φ fonksiyonunun genelleşmiş Poisson integrali olmak üzere,*

$$(\mathfrak{D}_{\varepsilon}^{\alpha}\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi)(x) = \int_{0}^{\infty} K_{\alpha}^{(l)}(\eta)e^{-\varepsilon\eta}(\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi)(x)d\eta \tag{4.5}$$

eşitliği her $\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her $x \in \mathbb{R}_{+}^{n}$ için sağlanır. Burada $K_{\alpha}^{(l)}(\eta)$ çekirdeği şu şekilde tanımlanır:

$$K_{\alpha}^{(l)}(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\,\chi_l(\alpha)}\frac{1}{\eta}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k(\eta-k)_{+}^{\alpha}, l > \alpha, \tag{4.6}$$

ve

$$(\eta-k)_{+}^{\alpha} = \begin{Bmatrix} (\eta-k)^{\alpha}, & \eta > k \textit{ ise} \\ 0, & \eta \leq k \textit{ ise} \end{Bmatrix}.$$

İspat (4.2) deki eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{D}_{\varepsilon}^{\alpha}\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi)(x) &= \frac{1}{\chi_l(\alpha)}\int_{\varepsilon}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k e^{-k\tau}(V_{k\tau}F_{\nu}^{\alpha}\varphi)(x)\right]\frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \\ &= \frac{1}{\chi_l(\alpha)}\int_{\varepsilon}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k I_{-}^{\alpha}\left[(V.\varphi)(x)\right](k\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \end{aligned}\tag{4.7}$$

elde edilir, şimdi de

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k I_{-}^{\alpha}\left[(V.\varphi)(x)\right](k\tau) &= \sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{k\tau}^{\infty}(r-k\tau)^{\alpha-1}(V_r\varphi)(x)dr \\ &= \int_{k\tau}^{\infty} h_{\tau}(r)(V_r\varphi)(x)dr \end{aligned}\tag{4.8}$$

elde edilir. Burada

$$h_{\tau}(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k(r-k\tau)_{+}^{\alpha-1}$$

$$(r-k\tau)_{+}^{\alpha-1} = \begin{Bmatrix} (r-k\tau)^{\alpha-1}, & r > k\tau \quad \text{ise} \\ 0, & r \leq k\tau \quad \text{ise} \end{Bmatrix}.$$

dir. Bunlar dikkate alarak (4.8) ifadesi (4.7) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha \mathcal{T}_\nu^\alpha \varphi)(x) &= \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int\limits_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}} \left(\int\limits_0^\infty h_\tau(r)(V_r\varphi)(x)dr \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int\limits_0^\infty (\mathcal{P}_r\varphi)(x) \left(\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}} h_\tau(r)d\tau \right) dr \\
&= \ldots (r = \varepsilon\eta, 0 < \eta < \infty \text{ değişken değiştirilmesi yapılırsa}) \ldots \\
&= \frac{\varepsilon}{\chi_l(\alpha)} \int\limits_0^\infty (V_{\varepsilon\eta}\varphi)(x) \left(\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}} h_\tau(\varepsilon\eta)d\tau \right) d\eta \\
&= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)\chi_l(\alpha)} \int\limits_0^\infty (V_{\varepsilon\eta}\varphi)(x) \left(\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k \int\limits_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}} (\varepsilon\eta - k\tau)_+^{\alpha-1} d\tau \right) d\eta
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

elde edilir. Şimdi

$$
i_k = \int\limits_\epsilon^\infty \tau^{-1-\alpha}(\varepsilon\eta - k\tau)_+^{\alpha-1} d\tau, \; k = 0, 1, ..., l
$$

integrali göz önüne alınırsa $k = 0$ için

$$
i_0 = \int\limits_0^\infty \tau^{-1-\alpha}(\varepsilon\eta)^{\alpha-1} d\tau = \frac{1}{\alpha\varepsilon}\eta^{\alpha-1}
$$

olur. $k = 1, 2, ..., l$ için

$$
i_k = \left\{ \begin{array}{ll} \int\limits_\varepsilon^{\frac{\varepsilon\eta}{k}} \tau^{-1-\alpha}(\varepsilon\eta - k\tau)^{\alpha-1} d\tau \;, & \eta > k \;\; \text{ise} \\ 0 \qquad\qquad , & \eta \le k \;\; \text{ise} \end{array} \right\}
$$

olur. Burada değişken değiştirilmesiyle $\tau = \frac{\varepsilon\eta}{k}\frac{1}{t+1}, 0 < t < \frac{\eta}{k} - 1$

$$
i_k = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\varepsilon\eta\alpha}(\eta - k)^\alpha & , \;\; \eta > k \;\; \text{ise} \\ 0 & , \;\; \eta > k \;\; \text{ise} \end{array} \right\} = \frac{1}{\varepsilon\eta\alpha}(\eta - k)_+^\alpha \tag{4.10}
$$

eşitliğine ulaşılır. Bu son eşitlik (4.9) eşitliğinde kullanılırsa istenen eşitlik elde edilir:

$$
(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha \mathcal{T}_\nu^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta) e^{-\varepsilon\eta} (\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi)(x) d\eta \, .
$$

□

(4.6) ile tanımlanan $K_{\alpha}^{(l)}$ çekirdek fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\text{(a)} \quad K_{\alpha}^{(l)}(\eta) \in L_1(0,\infty)\,, \int_0^{\infty} K_{\alpha}^{(l)}(\eta)d\eta = 1; \tag{4.11}$$

$$\text{(b)} \quad K_{\alpha}^{(l)}(\eta) = \left\{ \begin{array}{ll} O(\eta^{\alpha-1}) & , \eta \to 0^+ \\ O(\eta^{\alpha-l-1}) & , \eta \to \infty \end{array} \right\}. \tag{4.12}$$

Bu konuda ayrıntılı bilgi için (Samko-Kilbas-Marichev, s.125) ve (Rubin 1986b, s.158) kaynaklarına bakılabilir.

Teorem 4.18. *$\varphi \in L_{p,\nu}$ $(1 \leq p < \infty)$ ve $\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi$, φ fonksiyonunun genelleşmiş Flett potansiyeli olsun. Ayrıca $\mathfrak{D}_{\varepsilon}^{\alpha}\varphi\,(\varepsilon > 0)$ "genelleşmiş kesikli hipersingüler integral ailesi" de (4.1) tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} (\mathfrak{D}_{\varepsilon}^{\alpha}\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi)(x) = \varphi\,(x)$$

eşitliği sağlanır. Burada limit $L_{p,\nu}$ normu ve hemen hemen heryerde yakınsama anlamındadır.

İspat (4.11) de yer alan

$$\int_0^{\infty} K_{\alpha}^{(l)}(\eta)d\eta = 1$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \left|(\mathfrak{D}_{\varepsilon}^{\alpha}\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi)(x) - \varphi(x)\right| &= \left| \int_0^{\infty} K_{\alpha}^{(l)}(\eta)e^{-\varepsilon\eta}(\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi)(x)d\eta - \int_0^{\infty} K_{\alpha}^{(1)}\,(\eta)\,\varphi\,(x)\,d\eta \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-\varepsilon\eta}\right) \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| e^{-\varepsilon\eta} \left|(\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi)(x)\right| d\eta \\ &\quad + \int_0^{\infty} \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| \left|(\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi)(x) - \varphi(x)\right| d\eta \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \left\|D_{\varepsilon}^{\alpha}\mathcal{T}_{\nu}^{\alpha}\varphi - \varphi\right\|_{p,\nu} &\leq \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-\varepsilon\eta}\right) \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| \left\|\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi\right\|_{p,\nu} d\eta + \int_0^{\infty} \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| \left\|\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi - \varphi\right\|_{p,\nu} d\eta \\ &= J_1\,(\varepsilon) + J_2\,(\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.14}$$

olur. Burada $\lim\limits_{\epsilon\to 0} J_1\,(\varepsilon) = 0$ ve $\lim\limits_{\epsilon\to 0} J_2\,(\varepsilon) = 0$ olduğu gösterilmelidir.

$\lim\limits_{\epsilon\to 0} J_1(\varepsilon) = 0$ olduğunu göstermek için genelleşmiş Poisson integralinin 3) özelliği olan

$$\|\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi\|_{p,\nu} \leq \|\varphi\|_{p,\nu}$$

kullanılırsa

$$\left(1-e^{-\varepsilon\eta}\right)\left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|\|\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi\|_{p,\nu} \leq \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|\|\varphi\|_{p,\nu}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin sağ tarafı integrallenebilir olduğundan ve $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}(1-e^{-\varepsilon\eta}) = 0$ olduğundan Lebesque majorant yakınsama teoreminden

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0^+} J_1(\varepsilon) &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^\infty \left(1-e^{-\varepsilon\eta}\right)\left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|\|\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi\|_{p,\nu}\,d\eta \\ &= \int_0^\infty \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(1-e^{-\varepsilon\eta}\right)\left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|\|\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi\|_{p,\nu}\,d\eta = 0\end{aligned}$$

$\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} J_2(\varepsilon) = 0$ olduğunu görmek için genelleşmiş Poisson integralinin 3) özelliği kullanılırsa

$$\|\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi-\varphi\|_{p,\nu} \leq 2\|\varphi\|_{p,\nu}$$

ve

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi-\varphi\|_{p,\nu} = 0$$

bulunur ve böylece de Lebesque majorant yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha \mathcal{T}_\nu^\alpha\varphi-\varphi\|_{p,\nu} = 0$$

elde edilir. (4.13) ifadesinde $p=\infty$ durumunda bakılacak olursa, yukarıda yaptığımız gibi, $\varphi\in C_0$ için de

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha \mathcal{T}_\nu^\alpha\varphi-\varphi\|_\infty = 0$$

olduğu görülür. Son olarak (Önteorem3.12) özelliğinden

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon>0}|\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha \mathcal{T}_\nu^\alpha\varphi(x)| &\leq \sup_{t>0}|\mathcal{P}_t\varphi(x)|\int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|d\eta \\ &\leq c(\mathcal{M}\varphi)(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatör $\mathcal{M}_\nu$ zayıf $(p,p)-$ tipli olduğundan

$$(\mathcal{D}^*\varphi)(x) = \sup_{\varepsilon>0}|(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha\varphi)(x)|$$

operatörü zayıf $(p,p)-$ tipli olur. Ayrıca, her $\varphi \in C_0 \cap L_{p,\nu}$ için $(\mathcal{D}^{*}\varphi)(x)$, $\varphi(x)$ fonksiyonuna $\epsilon \to 0$ için noktasal yakınsak olduğundan ve $C_0 \cap L_{p,\nu}$ kümesi $L_{p,\nu}$ de yoğun olduğundan (Önteorem 3.13)' ün tüm koşullarını sağlamış olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar. $\square$

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında genelleşmiş Poisson yarıgrubunun doğurduğu genelleşmiş Flett potansiyelleri tanımlanmış ve bu potansiyellerin ağırlıklı Lp uzaylarındaki önemli özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Daha sonra da bir epsilon parametresine bağlı yeni bir "kesikli integraller ailesi" tanımlanmış ve bu integral ailesi vasıtasıyla genelleşmiş Flett potansiyellerinin tersini ifade eden formül elde edilmiştir.

Harmonik analizde "potansiyellerin terslerini bulma" önemli bir alan olduğundan bu tezdeki yöntem kullanılarak parabolik Flett potansiyelleri için ters bulma formülleri elde edilebilir. Tez çalışmasının potansiyeller teorisi alanında akademik çalışma yapmak isteyenler için ek kaynak niteliğinde olduğu düşünülmektedir.

6. KAYNAKLAR

Aliev, I.A. and Bayrakçı, S. 1998. On inversion of B-eliptic potentials by the method of Balakrishnan-Rubin. *Frac. Calc. Appl. Anal.,* 1(4): 365-384.

Aliev, I., Sezer, S. and Eryiğit, M. 2006. An integral transform associated to the Poisson integral and inversion of Flett potentials. *J. Math. Anal. Appl.,* 321: 691-704.

Delsarte, J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor. *J. Math. Pure Appl.*, 17: 213-231.

Flett, T.M. 1971. Tempratures, Bessel potentials and Lipschitz space, *Proc. London Math. Soc.*, 22: 385-451.

Folland, G.B. 1984. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. John Wiley & Sons.

Guliev, V.S. 2003. On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator. *Math. Inequal. Appl.,* 6: 317-330.

Kipriyanov, I.A.1967. Fourier-Bessel transforms and imbedding theorems for weight classes. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 89: 130-213.

Levitan, B.M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. *Uspekhi Mat. Nauk*, 6(2): 102-143.

Rubin, B. 1986a. A method of characterization an inversion of Bessel and Riesz potentials. *Sov. Math. Japonicae*, 30: 78-89.

Rubin, B. 1986b. Description an inversion of Bessel potentials by means of hypersingular integrals with weighted differenes. *Differ. Uravn*, 22(10): 1805-1818.

Rubin, B. 1996. Fractional Integrals and Potentials. Harlow, UK. Pitman Monographs and Survey in Pure and Applied Mathematics.

Sadosky, C. 1979. Interpolation of Operators and Singular Integrals. Marcel Dekker, Inc. New York, 13-14 pp.

Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev O.I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. London, UK. Gordon and Breach. Sci. Publ.

Samko, S.G. 2002. Hypersingular integrals an their applications. In: Ser. Analytical Methods and Special Funcitons. London, UK. Taylor and Francis.

Sezer, S. 2005. Genelleşmiş kayma operatörünün doğurduğu parabolik potansiyeller uzayı. Doktora tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 63 s.

Sezer, S. 2009. On approximation properties of the families of Flett and generalized Flett potentials. *Int. J. Math. Anal*. 3(39): 1905-1915.

Sezer, S. and Aliev, I.A. 2010. A new characterization of the Riesz potential spaces with the aid of composite Wavelet transform. *J. Math. Anal. Appl.*, 372: 549-558.

Stein, E.M. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton, NJ, USA. Princeton University.

Tartan, V. 2021. Harmonik analizde bazı önemli yarıgrupların özellikleri ve çeşitli uygulamaları. Yüksek lisans tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 60 s.

ÖZGEÇMİŞ

UĞUR ÜLKÜ

ugurulku18@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2017-2022	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2011-2016	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü , Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

2022- Devam Ediyor	Matematik Öğretmeni Kuantum Özel Öğretim Kursu
2021-2022	Matematik Öğretmeni Nuray Özer Özel Öğretim Kursu
2016-2021	Matematik Öğretmeni Kuantum Özel Öğretim Kursu