

T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



ÇARPIM T-NORM İLE FUZZY ARİTMETİK

MUHAMMED EYYÜB ASLAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2023

ANTALYA

T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIM T-NORM İLE FUZZY ARİTMETİK

MUHAMMED EYYÜB ASLAN

MATEMATİK

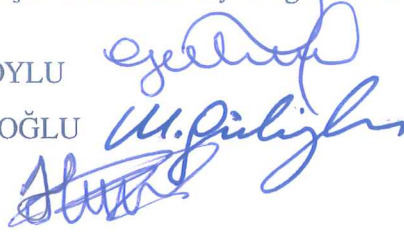
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 13/02/2023 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Gültekin SOYLU

Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK



## ÖZET

### ÇARPIM T-NORM İLE FUZZY ARİTMETİK

MUHAMMED EYYÜB ASLAN

Yüksek Lisans Tezi, MATEMATİK Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gültekin Soylu

ŞUBAT 2023, 41 sayfa

Bu tezin odak noktası çarpım t-normu ile fuzzy aritmetik işlemlerdir. Literatür incelendiğinde çarpım t-normu ile ilgili çalışmalarda bulunan bulgular, şu ana kadar elde edilebilen en iyi yöntemin bile, yalnızca ayrık noktalar için sonuçlar hesaplayabilen, yüksek işlem maliyetli ve sadece yaklaşık sonuç bulabilen bir algoritma olduğu görülmektedir. Çalışmada üçgensel fuzzy sayılar için çarpım t-normu ile toplama ve çarpım t-normu ile çarpma için açık formüller elde edilmektedir. Bu formüller, şimdiye kadar önerilen hesaplama yöntemlerinin aksine, işlem maliyetinden uzak ve tüm noktalar için kesin sonuçlar elde edebilen özellikleriyle, geçmişte yapılan çalışmaların yerini kolayca alabilir. Bu işlemlerde şekil koruma olmaması, tekrarlayan işlemler için sorun yaratmaktadır. Fakat bu sorun uygun yaklaşımların sunumu ile çözülmekte ve tekrarlayan işlemlerin yapılması konusunda önemli sonuçlar doğurmaktadır. Özetle bu çalışmanın amacı çarpım t-normu ile yapılacak aritmetik işlemlerin tam sonucunu, sürekli bir formda üreten yeni bir yöntem sunmaktır.

**ANAHTAR KELİMELER:**Çarpım T-normu, Fuzzy Aritmetik, Fuzzy Sayılar, Fuzzy Kümeler

**JÜRİ:** Dr. Öğr. Üyesi Gültekin SOYLU

Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

## ABSTRACT

### FUZZY ARITHMETIC WITH PRODUCT T-NORM

Muhammed Eyyüb ASLAN

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Gültekin Soylu

FEBRUARY 2023, 41 pages

The focus of this thesis is fuzzy arithmetic operations under the product t-norm. A review of the literature shows that the results of the studies on the product t-norm demonstrate even in the best approach now available an algorithm that can only compute results for discrete points, requiring high computing costs only be able to find approximations of the results. In this study, explicit formulas are obtained for addition with the product t-norm and multiplication with the product t-norm for triangular fuzzy numbers. Contrary to the calculation methods proposed so far, these formulas can easily replace the previous studies with their low computational cost and precise results for all points. The lack of shape preservation in these processes creates problems for repetitive operations. However, this problem is solved by the presentation of appropriate approximations leading to notable results for performing repetitive operations. Briefly, the aim of this study is to present a new method that produces the exact result of the arithmetic operations to be performed with the product t-norm in a continuous form.

**KEYWORDS:** Product t-norm, Fuzzy arithmetic, Fuzzy number, Fuzzy sets

**COMMITTEE:** Dr. Öğr. Üyesi Gültekin SOYLU

Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca, her zaman desteğini ve ilgisini hissettiğim kıymetli danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Gültekin SOYLU'ya minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tez yazım aşamasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen Araş. Gör. Çağla SEKİN'e ve süreç boyunca, fikirleri ve bakış açısıyla destek olan Zeynep YİĞİT'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Son olarak, her zaman maddi-manevi desteklerini hissettiğim çok kıymetli aileme teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET . . . . .	i
ABSTRACT . . . . .	ii
ÖNSÖZ . . . . .	iii
AKADEMİK BEYAN . . . . .	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR . . . . .	vii
1. GİRİŞ . . . . .	1
1.1. Fuzzy Mantık ve Klasik Mantık . . . . .	1
2. KAYNAK TARAMASI . . . . .	4
2.1. Fuzzy Kümeler Kuramı . . . . .	4
2.2. Fuzzy Kümelere Özel Tanımlar . . . . .	4
2.3. Fuzzy Sayılar . . . . .	7
2.3.1. Fuzzy Reel Sayılar . . . . .	7
2.3.2. Üçgensel Fuzzy Sayılar . . . . .	7
2.3.3. L-R Fuzzy Sayılar . . . . .	7
2.4. Fuzzy Aritmetik . . . . .	8
2.4.1. Zadeh Genişleme Prensipleri . . . . .	8
2.4.2. Nguyen Teoremi . . . . .	9
2.4.3. Alfa Kesimleri Yöntemi . . . . .	11
3. MATERYAL VE METOT . . . . .	13
3.1. T-norm Genelleştirilmesi . . . . .	13
3.1.1. Minimum T-normu . . . . .	13
3.1.2. Çarpım T-normu . . . . .	14
3.1.3. Lukasiewicz T-normu . . . . .	15
3.1.4. Drastic T-normu . . . . .	15
3.2. Genelleştirilmiş Zadeh Genişleme Prensipleri . . . . .	16
3.3. Genelleştirilmiş Nguyen Teoremi . . . . .	17
3.4. Seresht ve Fayek Yöntemi . . . . .	19
4. BULGULAR VE TARTIŞMA . . . . .	24
4.1. Çarpım T-normu ile Fuzzy Aritmetik . . . . .	24
4.1.1. Çarpım T-normu ile Toplama . . . . .	24
4.1.2. Çarpım T-normu ile Çarpma . . . . .	29
4.1.3. Bazı Cebirsel Özellikler . . . . .	35
4.1.4. Üçgensel Yaklaşım . . . . .	36

5. SONUÇLAR . . . . .	39
6. KAYNAKLAR . . . . .	40
ÖZGEÇMİŞ	

## AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans/Doktora Tezi olarak sunduğum “Çarpım T-normu ile Fuzzy Aritmetik” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

13/02/2023

Muhammed Eyyüb ASLAN

İmza





## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler:

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0^+$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$(a, b, c)$	: Üçgensel fuzzy sayı
$\mu_A$	: $A$ fuzzy sayısının üyelik fonksiyonu
$\alpha$	: Fuzzy sayının sol kanat açıklığı
$\beta$	: Fuzzy sayının sağ kanat açıklığı
$A_\alpha$	: $A$ fuzzy sayısının alfa kesmesi
$\mathbf{F}(\mathbb{R})$	: Fuzzy reel sayılar kümesi
$L$	: Fuzzy sayının sol tarafı
$R$	: Fuzzy sayının sağ tarafı
$\langle x, \alpha, \beta \rangle$	: L-R gösterimi ile üçgensel fuzzy sayı
$T$	: T-norm(Üçgensel norm)
$\mathcal{F}(X)$	: $X$ in tüm fuzzy alt kümeleri
$\vee \{A, B\}$	: $A$ ve $B$ nin supremumu
$\wedge \{A, B\}$	: $A$ ve $B$ nin infimumu

## 1. GİRİŞ

### 1.1. Fuzzy Mantık ve Klasik Mantık

Klasik mantık, uzun bir geçmişe sahip olup temeli Aristoteles'e kadar dayanmaktadır. Aristoteles tarafından sistematik bir biçimde tanımlanarak ortaya konulan klasik mantık, kıyaslama temelli düşünce biçimidir ve yapılan işlemler önermeler üzerine kurulmuştur. Önerme; kesin yargı bildiren ifadelerdir. Önermeler hükümlere dayanır, ancak her hüküm de bir önerme belirtmeyebilir. Oysa, her önerme bir yargı yani hüküm belirtmeli ve insanı bu konuda düşündürmelidir. Bu düşünce biçimi, mantık kavramı oluşmamışken ortaya konulmuş olan bilgi ve sorunları işleyerek, mantık kavramını bir sistem haline getirmiştir. Aristoteles'in klasik mantığı, mantığın sadeleştirilmesi ve sadece bir düşüncenin 'doğru' veya 'yanlış' olması gerektiğini savunmaktadır. Buna göre bir önerme ya doğrudur ya da yanlıştır. Bu durumda 'daha doğru', 'daha yanlış', 'biraz doğru', 'biraz yanlış', 'pek doğru değil' gibi kavramları dışarıda bırakarak daha yalın ve gerçek hayata uygun olmayan bir mantık sistemi oluşturmuştur. Bu sebeple özellikle modern çağda yapılan klasik mantık eleştirileri, klasik mantığın bilimsel açıdan yeterli olamayacağını savunmaktadır.

Fuzzy mantık ilk kez California Berkeley Üniversitesinden Prof.Dr.Lotfi A. Zadeh'in 1965 yılında yayınlanan "Fuzzy Sets (Bulanık Kümeler)" adlı makalesi ile ortaya atılmıştır (Zadeh 1965). Zadeh'in ortaya attığı bu teori bilim ve teknoloji dünyasında yeni bir çığır açmıştır. Klasik mantığın aksine bu teori, bir önermenin doğruluk ölçüsünün kesin olarak tanımlanmamasından kaynaklanan durumlardaki problemlerle uğraşmaktadır. Zadeh, bu çalışmasında insan düşüncesinin büyük ölçüde bulanık olup, kesin olmadığını belirtmiştir. Gerçek hayata daha uygun olan fuzzy mantık, o tarihten sonra önemini giderek artırarak belirsizliklerin anlatımı ve belirsizliklere çalışabilmek için yeni bir matematik düzen oluşturmuştur. Fuzzy mantık, günümüzde matematiğin gerçek dünyayı yorumlamasında daha geniş bir uygulama alanı sunmaktadır.

Fuzzy mantık sistemi şöyle açıklanabilir; klasik mantıkta bir ifade yanlış ise 0, doğru ise 1 değerini almaktadır, fakat fuzzy mantık klasik mantıkta olduğu gibi sadece iki değerli değildir. Klasik matematiksel yöntemler ile karmaşık sistemleri açıklamak, modellemek ve kontrol etmek oldukça zordur, çünkü veriler tam olmalıdır. Fuzzy mantık kişiyi bu

zorluklardan kurtararak niteliksel bir tanımlama olanağı sağlar. Türkçe karşılığı ‘bulanık’ olan fuzzy sözcüğü, adından da anlaşılacağı üzere mantık kurallarının esnek ve bulanık bir şekilde uygulanmasıdır. Klasik mantığın aksine fuzzy mantıkta sunulan bir önermenin doğruluk değeri 1 ve 0 dışında  $[0, 1]$  kapalı aralığındaki bütün değerlere karşılık gelebilmektedir. Bu durumda kesinlikle doğru veya kesinlikle yanlış yerine bunların arasında değerler alabilen önermelere izin vermektedir. Gerçek hayatta da önermeler genelde kısmen doğru veya kısmen yanlış şeklinde değerlendirilir. Bu sebeple fuzzy mantığa, klasik mantığın gerçek dünya problemleri için yeterli olmadığı durumlarda ihtiyaç duyulmuştur.

Fuzzy mantık, çok değerli mantığın genişlemesidir. Asıl amacı, fuzzy kümeler kuramının temelini oluşturup kesin olmayan önermelerin kullanılmasıyla birlikte bu kümeler için esaslar sağlamaktır. Gerçek hayatın kamaşıklığının doğurduğu ve kesin olarak kavrayamadığımız bir çok özellik yalnızca bulanık bir biçimde ele alınabilir. Bu sebeple 1965 yılında Zadeh belirsizliklerin temsili için fuzzy kümeler teorisini geliştirmiştir. Geçmişte belirsizlik ifade eden terimler veya kavramlar keskin bir ayrıma tabi tutularak klasik kümeler kuramı ile tanımlanmışlardır. Fuzzy kümeler kuramı ise belirsizlik ifade eden terim veya kavramları keskin bir ayrıma tabi tutmadan, belirsizliklere belirlilik dereceleri atayarak bu belirsizliklerin fuzzy kümeler kuramı içinde tanımlanmalarını sağlamıştır. Matematiğin gerçek dünyayı yorumlaması bu uygulama alanı ile daha geniş bir boyuta ulaşmıştır. Artık sadece doğru ve yanlış yoktur. Bunların arasındaki her durum bir bütün olarak belirli bir şekilde sunulmakta ve klasik kümelerin keskin sınırlarının yerini daha gevşek veya daha yumuşak sınırlar almaktadır. Diğer taraftan klasik kümelerde, bir eleman ya kümenin elemanıdır ya da değildir. Sınırlar oldukça keskindir. Bu durum birçok sorunu beraberinde getirmektedir. Örneğin, boyu 1.80 ve üzeri olan kişileri uzun boylu olarak tanımlayan bir klasik küme tanımlayalım. Kümenin elemanları yalnızca 1.80 ve 1.80 den uzun olan kişiler olacaktır. Fakat boyu 1.79 olan kişiler bu kümenin bir elemanı olarak sayılmayacaklardır. Sınırların bu keskinliği 1 cm’lik bir farkı gözeterek, 1.79 boyundaki kişileri kümenin dışında bırakacaktır. Bu durum klasik kümelerdeki keskin sınırların iyi tanımlanmadığını gözler önüne sermektedir. Ancak söz konusu örnek fuzzy kümeler ile ele alındığında durum klasik kümelerden farklı bir hal almaktadır. Klasik kümelerdeki bu keskinlik, fuzzy kümelerde üyelik dereceleri ile giderilir. Böylece boyu 1.80 ve üzerinde olan kişiler kümeye 1.0 üyelik derecesiyle dahil olurken, boyu 1.79 olan kişiler 0.9 üyelik

derecesi ile dahil olabilirler. Burada, iyi tanımlı bir sınır teşkil etmeyen ‘uzun boy’ kümesinin bulanık sınırlar ile daha iyi bir sınıflama içinde olduğu açıktır. Bulanıklığın bu şekli, günlük hayatımızın hemen hemen her yerinde karşımıza çıkmaktadır. Zadeh’in bu zorluğun üstesinden gelebilmek adına önerdiği Fuzzy Kümeler kuramı, başta yöntem bilimi, kontrol teorisi, yapay zeka, akıllı sistemler ve insan davranışları olmak üzere pek çok uygulama alanı bulmuş ve uygulamalar artan bir ölçek ile dünya genelinde yaygınlaşmıştır. Fuzzy kümeler kuramı, matematiksel olarak karasızlığı ve belirsizliği belirtmekte ve bir çok problem için kesin olmayan sonuçları analiz ederek, yeniden şekillendirmektedir.

Özet olarak bu teoride, her bir elemana üyelik fonksiyonu aracılığı ile bir üyelik derecesi atanır. Üyelik dereceleri  $[0, 1]$  kapalı aralığında değerler alabilmektedirler. Herhangi bir eleman için üyelik derecesi 1 ise bu eleman kesinlikle kümenin elemanıdır; üyelik derecesi 0 ise bu eleman kesinlikle kümenin elemanı değildir. Yani 0 kümeyle ait olmamayı, 1 ise tam olarak o kümenin üyesi olmayı gösterir.

Bu tezin ikinci bölümünde fuzzy kümeler için gerekli ve önemli tanımlar ile birlikte fuzzy aritmetik için gerekli tanım ve teoremler verilecektir. Üçüncü bölümde yapılan çalışmanın daha iyi anlaşılabilmesi adına t-normlar, genelleştirilmiş Nguyen teoremi ve Seresht ve Fayek yöntemi tanıtılacaktır. Son bölümde ise çarpım t-normu ile aritmetik işlemler için açık formüller elde edilecektir. Aynı zamanda bu formüller için uygun üçgensel yaklaşım önerisi ve bazı cebirsel özellikler incelenecektir.

## 2. KAYNAK TARAMASI

### 2.1. Fuzzy Kümeler Kuramı

Fuzzy kümeler klasik kümelerin genelleştirilmiş halidir. Klasik kümelerde bir eleman ya kümenin elamanıdır ya da elamanı değildir. Ancak, fuzzy kümelerde bir eleman belirli bir oranda veya kısmen kümeye dahil olabilir. Klasik kümelerde üye olma derecesi 1, üye olmama derecesi 0 iken, fuzzy kümelerde üyelikler 0 ile 1 arasındaki bütün reel sayı değerlerine karşılık gelen üyelik dereceleri alabilirler. Başka bir deyişle fuzzy kümeler, elemanlarının kısmi üyeliklerine de izin verir.

Bu bölümde fuzzy küme tanımı ile diğer temel tanım ve işlemler verilecektir. Bu temel bilgiler herhangi bir kaynaktan rahatlıkla elde edilebilir.

**Tanım 2.1.**  $X$  boştan farklı bir küme ve  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$  tanımlı bir fonksiyon olmak üzere  $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$  kümesine  $A$  fuzzy(bulanık) kümesi denir.  $\mu_A$  fonksiyonuna  $A$  fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu denir.

$A$  fuzzy kümesi  $X$  kümesindeki her elemanın üyelik derecesi ile birlikte oluşturduğu kümedir. Üyelik derecelerini belirleyen fonksiyon ise  $\mu$  üyelik fonksiyonudur.  $\mu_A(x)$  değeri,  $x$  elemanının  $A$  kümesine ait olma derecesi olarak yorumlanabilir. Üyelik fonksiyonları, klasik bir kümenin elemanlarını  $[0, 1]$  aralığına karşılık getiren birer fonksiyondur. Fuzzy kümeler için birleşim, kesişim gibi küme işlemleri kendi üyelik fonksiyonları yardımı ile tanımlanır.

### 2.2. Fuzzy Kümelere Özel Tanımlar

Klasik kümelerde tanımlanan kesişim, birleşim vb. kümelerin, fuzzy kümelere karşılık gelen tanımları aşağıdaki gibidir.

**Tanım 2.2.**  $A$  ve  $B$  birer fuzzy küme olsun. Bunların kesişimi;

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlı  $A \cap B$  fuzzy kümesidir.

**Tanım 2.3.**  $A$  ve  $B$  birer fuzzy küme olsun. Bunların birleşimi;

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlı  $A \cup B$  fuzzy kümesidir.

**Tanım 2.4.**  $A$  fuzzy kümesinin tümleyeni:

$$\mu_{A^t}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlı  $A^t$  fuzzy kümesidir.

**Tanım 2.5.**  $A$  ve  $B$  iki fuzzy küme olsun bunların farkı:

$$A \setminus B = A \cap B^t$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

**Tanım 2.6.** Bir  $A$  fuzzy kümesini çekirdeği  $core(A)$  ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$core(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}.$$

**Tanım 2.7.** Bir  $A$  fuzzy kümesinin dayanağı  $supp(A)$  ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$supp(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}.$$

**Tanım 2.8.** Bir  $A$  fuzzy kümesinin yüksekliği  $hght(A)$  ile gösterilir.

$$hght(A) = maks\mu_A(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Bir fuzzy kümesinin yüksekliği en fazla 1 olabilir. Eğer yükseklik 1 ise normal fuzzy küme, 1 den küçük ise altnormal fuzzy küme denir.

**Tanım 2.9.**  $A$ ,  $X$  kümesinin herhangi bir fuzzy alt kümesi olsun.  $A$  fuzzy alt kümesinin  $\alpha$ -kesmeleri  $A_\alpha$  ile gösterilir ve  $\forall \alpha \in [0, 1]$  için

$$A_\alpha = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır.

Yurakıdaki tanımda  $\geq$  yerine  $>$  olursa buna güçlü  $\alpha$ -kesim kümesi denir.  $\alpha$ -kesmeleri fuzzy kümelerden klasik kümeler üreten dilimlerdir. Başka bir deyişle fuzzy kümenin  $\alpha$ -kesmesi, üyelik fonksiyonunun değeri  $\alpha$  dan az olmayan üyelerin oluşturduğu kesin kümelerdir. Her  $\alpha$ -kesmesi bir üyelik fonksiyonu kesitine karşılık gelir.

**Tanım 2.10.**  $\mathcal{F}(X)$ , bir  $X$  kümesinin tüm fuzzy alt kümelerini belirtir.  $X$  bir topolojik uzay ve  $X$ 'in kompakt üyelik fonksiyonuna sahip tüm fuzzy alt kümelerinin kümesi  $\mathcal{F}(X, \mathcal{L})$  ile gösterilir.

**Tanım 2.11.**  $X = \mathbb{R}^n$  ve  $A$ ,  $X$  in klasik bir alt kümesi olsun. Eğer,  $\forall \lambda \in [0, 1]$  ve  $x, y \in A$  için

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in A$$

ise  $A$  kümesine konveks küme denir.

**Tanım 2.12.**  $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  fuzzy küme olmak üzere; eğer  $\forall \lambda \in [0, 1]$  için

$$\mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \leq \mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $A$  kümesine fuzzy konveks denir.

**Teorem 2.13.**  $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  de bir fuzzy küme olsun.  $A$  fuzzy konveks ancak ve ancak  $\forall \alpha \in [0, 1]$  için  $A_\alpha$  konveksdir.

**İspat** ( $\implies$ )  $A$  fuzzy konveks olsun. Fuzzy konvekslik tanımı gereğince  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  ve  $\forall \lambda \in [0, 1]$  için,

$$\mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \leq \mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

olur.  $x, y \in A_\alpha$  ve  $\lambda_0 \in [0, 1]$  olsun. Buradan,  $(\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y) \in A_\alpha$  olduğunu göstermeliyiz.  $\mu_A(x) \geq \alpha$  ve  $\mu_A(y) \geq \alpha$  olduğundan

$$\alpha \leq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \leq \mu_A(\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y)$$

olur. Buradan  $\mu_A(\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y) \geq \alpha \implies (\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y) \in A_\alpha$ 'dır. Dolayısıyla  $A_\alpha$  konveksdir.

( $\impliedby$ ) Şimdi  $\forall \alpha \in [0, 1]$  için  $A_\alpha$  konveks olsun. Diğer taraftan  $\mu_A(x) \wedge \mu_A(y) = \alpha$  olduğunu varsayalım.  $x, y \in A_\alpha$  konvekslik gereği  $\forall \lambda \in [0, 1]$  için  $(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in A_\alpha$  olur. Bu durumda,

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \alpha = \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$$

elde edilir. Dolayısıyla  $A$  fuzzy konveksdir. □

### 2.3. Fuzzy Sayılar

#### 2.3.1. Fuzzy Reel Sayılar

**Tanım 2.14.** Üyelik fonksiyonu, normal, sürekli ve fuzzy konveks olan, reel sayıların fuzzy alt kümelerine fuzzy reel sayılar denir.  $F(\mathbb{R})$  ile gösterilir. Yani,  $A$  nın reel sayı olması için koşullar aşağıdaki gibidir.

- i)  $\mu_A(x) = 1$  olacak şekilde en az bir  $x \in \mathbb{R}$  vardır.
- ii)  $\mu_A(x)$  süreklidir.
- iii)  $A$  fuzzy konvekstir.

#### 2.3.2. Üçgensel Fuzzy Sayılar

**Tanım 2.15.**  $a, b, c$  birer reel sayı ve  $a < b < c$  olmak üzere; tabanı  $[a, c]$  aralığı ve merkezi  $b$  olan sayılara üçgensel fuzzy sayısı denir.  $A = (a, b, c)$  ile gösterilen bir üçgensel fuzzy sayısı,  $\mu_A(x)$  üyelik fonksiyonu ile reel sayılar kümesinde aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ \frac{x-b}{b-c} + 1, & x \in [b, c] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} .$$

$A = (a, b, c)$  bir üçgensel fuzzy sayı olsun. Bu fuzzy sayısının sol ve sağ kanat açıklıkları sırasıyla  $\alpha = b - a$  ve  $\beta = c - b$  ile gösterilecektir.

#### 2.3.3. L-R Fuzzy Sayılar

**Tanım 2.16.**  $\mathbb{R}_0^+$  üzerinde tanımlanan  $L$  ve  $R$  fonksiyonları, aşağıdaki özelliklere sahipse biçim fonksiyonları olarak adlandırılır:

- 1)  $L(x) \in [0, 1]$ , ve  $R(x) \in [0, 1]$ ,  $\forall x$ .
- 2)  $L(0) = R(0) = 1$ .
- 3)  $L(x)$  ve  $R(x)$ ,  $[0, \infty]$ 'de azalandır.
- 4)  $\min_x L(x) = 0$  ise  $L(1) = 0$
- 5)  $\forall x$  için  $L(x) > 0$  ise  $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0$ ,
- 6)  $\min_x R(x) = 0$  ise  $R(1) = 0$ ,
- 7)  $\forall x$  için  $R(x) > 0$  ise  $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$ .



**Örnek 2.17.** *Biçim fonksiyonu için bir örnek olan fuzzy sayı aşağıdaki gibidir,*

$$\max\{0, 1 - x^2\} = L(x) = R(x).$$

**Tanım 2.18.** *L ve R biçim fonksiyonları olsun. Bir L – R bulanık sayısı  $\tilde{A}$  aşağıdaki üyelik fonksiyonuna sahiptir:*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \mu_l(x) = L[\frac{\bar{x}-x}{\alpha}], & x < \bar{x}, \\ \mu_r(x) = R[\frac{x-\bar{x}}{\beta}], & x \geq \bar{x}. \end{cases}$$

Bu tanım yardımıyla bir  $\tilde{A}$  fuzzy sayısı,  $\bar{x}$  merkez değeri ve üyelik fonksiyonunun sırasıyla sol ve sağ kanat açıklığına karşılık gelen,  $\alpha$  ve  $\beta$  dağılımları ile karakterize edilir.  $\tilde{A}$  bir L – R fuzzy sayı olmak üzere  $\tilde{A} = \langle \bar{x}, \alpha, \beta \rangle_{L,R}$  notasyonu ile ifade edilir. Örneğin, standart notasyonda verilen bir  $A = (1, 4, 9)$  üçgensel fuzzy sayısının L – R notasyonu ile gösterimi  $\tilde{A} = \langle 4, 3, 5 \rangle_{1-x, 1-x}$  biçiminde olmalıdır.

**Tanım 2.19.** *A bir fuzzy sayı olmak üzere A sayısının tersi  $-A$  olarak gösterilir ve aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile tanımlanır ,*

$$\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Tanım 2.20.** *A fuzzy sayısının çarpmaya göre tersi  $A^{-1}$  ile gösterilir ve aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile tanımlanır,*

$$\mu_{A^{-1}}(x) = \mu_A(1/x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

## 2.4. Fuzzy Aritmetik

Fuzzy sayılar üzerinde aritmetik iki yolla yapılabilir. Bunlardan ilki Zadeh genişleme prensibi diğeri ise alfa kesmeleri yöntemidir.

### 2.4.1. Zadeh Genişleme Prensibi

Fuzzy kümeler kuramının en önemli kavramlarından biri olan Zadeh genişleme prensibi, fonksiyonları fuzzy kümelere genişletmede kullanılan yöntemdir. Genişleme prensibi, fuzzy kümeler üzerindeki bir fonksiyonun yeni bir fuzzy kümeyle, ne şekilde sonuçlanacağını ifade eder. Bu sayede herhangi bir fonksiyon yardımıyla bir veya birden

fazla fuzzy sayı kullanılarak yeni fuzzy sayılar elde edilebilir. Böylece Zadeh genişleme prensibi yardımıyla fuzzy kümeler üzerinde birçok işlem tanımlanabilir. Zadeh genişleme prensibi aşağıdaki gibi tanımlanır (Zadeh 1974).

**Tanım 2.21.**  $f : X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun ve

$A_1 \subseteq X_1, A_2 \subseteq X_2, \dots, A_n \subseteq X_n$  birer fuzzy küme olsun

$f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) \subseteq Y$  fuzzy kümesi aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

$$\mu_{f(A_1, A_2, \dots, A_n)}(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(a_1, \dots, a_n)} \{ \mu_{A_1}(a_1) \wedge \mu_{A_2}(a_2) \wedge \mu_{A_3}(a_3) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(a_n) \} & , f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Genişleme prensibinin aritmetik fonksiyonlara uygulanması aşağıda gösterilmiştir.

**Tanım 2.22.**  $A$  ve  $B$  iki fuzzy sayı olmak üzere  $A + B$  nin üyelik fonksiyonu Zadeh genişleme prensibi ile aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu_{A+B}(c) = \sup_{c=a+b} \{ \mu_A(a) \wedge \mu_B(b) \}$$

**Tanım 2.23.**  $A$  ve  $B$  iki fuzzy sayı olmak üzere  $A \cdot B$  üyelik fonksiyonu Zadeh genişleme prensibi ile aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu_{A \cdot B}(c) = \sup_{c=a \cdot b} \{ \mu_A(a) \wedge \mu_B(b) \}$$

#### 2.4.2. Nguyen Teoremi

Bu bölümde Nguyen  $\alpha$ -kesmeleri yöntemi incelenmiştir. Nguyen, ünlü makalesinde standart genişleme prensibine dayalı işlemlerde kullanılan fuzzy sayıların çıktılarının  $\alpha$ -kesim kümelerini, süreçte kullanılan sayıların  $\alpha$ -kesim kümeleri cinsinden ifade edilebileceğini kanıtlamıştır. Nguyen'in makalesinde belirttiği gibi genişleme prensibi, klasik bir  $X$  kümesinde tanımlanan bir fonksiyonun veya bağıntının alanını  $X$  in fuzzy alt kümelerine genişletmenin bir yoludur. Bir fonksiyonun etki alanının genişletilmesi gereken uygulamalarda ve fuzzy sayıların analizinde gösterildiği gibi, fuzzy kümenin  $\alpha$ -kesim kümelerinin kullanımı üyelik fonksiyonunun kullanımından daha basittir.

Genel olarak ifade etmek gerekirse;

$$f : X \times Y \rightarrow Z$$

ve  $A, B$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$ 'nin fuzzy alt kümeleri olsun.

$$[f(A, B)]_\alpha = f(A_\alpha, B_\alpha)$$

eşitliği için gerek ve yeter koşul verilecektir. Burada  $A_\alpha$  ve  $B_\alpha$  sırasıyla  $A$  ve  $B$ 'nin  $\alpha$ -kesim kümeleri ve  $[f(A, B)]_\alpha$ ,  $f(A, B)$ 'nin  $\alpha$ -kesim kümesidir. Ayrıca Nguyen çalışmasında bu eşitliğin tüm sürekli  $f$  ler için geçerli olduğu bir fuzzy sayılar sınıfı tanımlamıştır. Detaylı bilgi için "A Note on the Extension Principle for Fuzzy Sets" çalışması incelenmelidir (Nguyen 1978).

**Teorem 2.24.**  $f : X \times Y \rightarrow Z$  ve  $A, B$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$ 'nin fuzzy alt kümeleri olmak üzere

$$[f(A, B)]_\alpha = f(A_\alpha, B_\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (2.1)$$

eşitliği için gerek ve yeter koşul,  $\forall z \in Z$  için  $\sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$  değerine ulaşan  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$  noktalarının bulunmasıdır (Nguyen 1978).

**İspat** (i) Gerek koşul:  $z \in Z$  ve

$$\sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] = t$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \mu_{f(A,B)}(z) = t &\implies z \in [f(A, B)]_t \\ &\implies z \in f(A_t, B_t). \end{aligned}$$

Bu durumda,  $\exists \tilde{x} \in A_t$  ve  $\tilde{y} \in B_t$  öyle ki  $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = z$  dir.

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) \in f^{-1}(z) \text{ ve } \mu_A(\tilde{x}) \geq t \text{ ve}$$

$$\mu_B(\tilde{y}) \geq t \implies \mu_A(\tilde{x}) \wedge \mu_B(\tilde{y}) \geq t$$

olur. Buradan

$$\sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \geq \mu_A(\tilde{x}) \wedge \mu_B(\tilde{y})$$

elde edilir ve böylece

$$\mu_A(\tilde{x}) \wedge \mu_B(\tilde{y}) = t$$

olur.

(ii) Yeter koşul:

$$f(A_\alpha, B_\alpha) \subseteq [f(A, B)]_\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1] .$$

Şimdi  $z \in [f(A, B)]_\alpha$  olsun. Yani

$$\mu_{f(A,B)}(z) = \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \geq \alpha.$$

Eğer  $\mu_{f(A,B)}(z) > \alpha$  ise, supremum tanımı gereği  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in f^{-1}(z)$  olur. Öyle ki:

$$\begin{aligned} \alpha < \mu_A(\tilde{x}) \wedge \mu_B(\tilde{y}) &\leq \mu_{f(A,B)}(z) \\ \implies \tilde{x} \in A_\alpha \text{ ve } \tilde{y} \in B_\alpha. \end{aligned}$$

Böylece  $z = f(\tilde{x}, \tilde{y}) \in f(A_\alpha, B_\alpha)$  dir. Eğer  $\mu_{f(A,B)}(z) = \alpha$  ise, hipoteze göre  $(x', y') \in f^{-1}(z)$  olur. Öyle ki:

$$\begin{aligned} \mu_A(x') \wedge \mu_B(y') &= \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] = \alpha \\ \implies x' \in A_\alpha \text{ ve } y' \in B_\alpha. \end{aligned}$$

Böylece  $z = f(x', y') \in f(A_\alpha, B_\alpha)$  olur. □

### 2.4.3. Alfa Kesmeleri Yöntemi

Fuzzy aritmetik için bir diğer yöntem olan alfa kesmeleri yöntemi, Nguyen teoreminin bir sonucudur. Örneğin,  $A$  ve  $B$  iki üçgensel fuzzy sayı olsun. Bu sayıların  $\alpha$  kesim kümeleri kapalı aralıklar oluşturur. Böylece  $A$  ve  $B$  arasındaki aritmetik, Nguyen teoremi gereğince aralık aritmetiğine indirgenir.

$A = (a, b, c)$  üçgensel fuzzy sayısının alfa kesmesi kısaca

$$A_\alpha = [a + (b - a)\alpha, c - (c - b)\alpha]$$

ile bulunur. Bu şekilde elde edilen aralıklar için, aralık(interval) aritmetiği kullanılarak fuzzy aritmetik işlemler gerçekleştirilebilir.

$A$  ve  $B$  fuzzy sayılarının  $\alpha$ -kesim kümeleri sırasıyla  $A_\alpha = [a_1, a_2]$  ve  $B_\alpha = [b_1, b_2]$  olsun. Bu durumda  $A$  ile  $B$  arasındaki fuzzy aritmetik işlemler aşağıda gösterilmiştir.

Toplama:

$$A_\alpha + B_\alpha = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2].$$

Çıkarma:

$$A_\alpha - B_\alpha = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 + b_1].$$

Çarpma:

$$A_\alpha \cdot B_\alpha = [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)].$$

Bölme:

$$A_\alpha \div B_\alpha = [a_1, a_2] \div [b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right].$$

**Örnek 2.25.**  $A = (1, 3, 4)$  ve  $B = (5, 7, 9)$  üçgensel fuzzy sayıları için  $A + B$ 'yi hesaplayalım.  $A$  ve  $B$  sayılarının alfa kesmeleri  $A_\alpha = [1 + 2\alpha, 4 - \alpha]$  ve  $B_\alpha = [5 + 2\alpha, 9 - 2\alpha]$ 'dir. Bu durumda  $A + B$  aşağıdaki gibidir

$$A_\alpha + B_\alpha = [1 + 2\alpha, 4 - \alpha] + [5 + 2\alpha, 9 - 2\alpha] = [6 + 4\alpha, 13 - 3\alpha] = [A + B]_\alpha = (6, 10, 13).$$

### 3. MATERYAL VE METOT

#### 3.1. T-norm Genelleştirilmesi

T-normlar,  $[0, 1]$  aralığını referans alan bir ikili işlem türüdür. İlk olarak 1942'de Karl Menger'in 'Statistical Metrics' adlı çalışmasıyla ortaya atılan t-normlar, klasik üçgen eşitsizliğinin daha genel yapılara genelleştirilmesini amaçlamıştır (*Menger 1942*). Bununla birlikte 1958, 1960, 1961 yıllarında Berthold Schweizer ve Abe Sklar tarafından yapılan çalışmalar ile t-normların aksiyomları verilmiştir (*Schweizer ve Sklar 1958; Schweizer ve Sklar 1960; Schweizer ve Sklar 1961*). Bu aksiyomlar günümüzde de geçerliliklerini korumaktadırlar. Genel olarak t-normlar arasında  $T_M$ : minimum,  $T_p$ : çarpım (product),  $T_L$ : Lukasiewicz ve  $T_D$ : Drastic t-normları, temel t-normlar olarak adlandırılırlar.

Birçok alanda kullanılan t-normlar, fuzzy aritmetik için de teorik bir altyapı oluşturur. Bu sebeple fuzzy aritmetikte, t-normlar altında aritmetik işlemler tanımlanmıştır.  $T_M$  ve  $T_D$  için aritmetik işlemler Zadeh genişleme prensibi ile açık olarak hesaplanabilmiştir. Ancak, diğer t-normlar altında aritmetik için durum oldukça karmaşıktır. Bu çalışmanın motivasyonu,  $T_p$  t-normu altındaki aritmetiğin incelenmesidir.

Bu bölümde, t-norm tanımı ile birlikte dört temel t-norm incelenip karşılaştırılacaktır.

**Tanım 3.26.**  $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  tanımlı ve her  $x, y, z \in [0, 1]$  için aşağıdaki aksiyomları sağlayan ikili işleme t-norm veya üçgensel norm denir.

- (i)  $T(x, 1) = x$  *sınır koşulu*
- (ii)  $y \leq z$  ise  $T(x, y) \leq T(x, z)$  *monotonluk*
- (iii)  $T(x, y) = T(y, x)$  *simetri*
- (iv)  $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$  *birleşme*

Dört temel t-norm aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

##### 3.1.1. Minimum T-normu

**Teorem 3.27.**  $T_M : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ ,  $T_M(x, y) = \min \{x, y\}$  şeklinde tanımlanan fonksiyon bir t-normdur. Buna minimum t-normu denir.

**İspat** Minimum t-normunun, bir t-norm olduğunu aksiyomlar yardımı ile gösterelim.

$$T_M(x, y) = \min \{x, y\} \text{ olsun.}$$

(i)  $\forall x \in [0, 1]$  için

$$T_M(x, 1) = \min \{x, 1\} = x$$

buna göre (i) sağlanır.

(ii)  $\forall x, y, z \in [0, 1]$  için

$$y \leq z \implies \min \{x, y\} \leq \min \{x, z\} \implies T_M(x, y) \leq T_M(x, z)$$

olduğundan (ii) sağlanır.

(iii)  $\forall x, y \in [0, 1]$  için

$$T_M(x, y) = \min \{x, y\} = \min \{y, x\} = T_M(y, x)$$

$T_M(x, y) = T_M(y, x)$  olduğundan (iii) sağlanır.

(iv)  $\forall x, y, z \in [0, 1]$  için

$$\begin{aligned} T_M(x, T_M(y, z)) &= T_M(x, \min \{y, z\}) = \min \{x, \min \{y, z\}\} \\ &= \min \{\min \{x, y\}, z\} = T_M(T_M(x, y), z) \end{aligned}$$

$T_M(x, T_M(y, z)) = T_M(T_M(x, y), z)$  olduğundan (iv) sağlanır.

Buna göre (i)-(iv) şartları sağlandığından  $T_M$  bir t-normdur.  $\square$

### 3.1.2. Çarpım T-normu

**Teorem 3.28.**  $T_P : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1], T_P(x, y) = x \cdot y$  şeklinde tanımlanan fonksiyon bir t-normdur. Buna çarpım(product) t-normu denir.

**İspat**  $T_P(x, y) = x \cdot y$

(i)  $\forall x \in [0, 1]$  için

$$T_P(x, 1) = x \cdot 1 = x$$

buna göre (i) sağlanır.

(ii)  $\forall x, y, z \in [0, 1]$  için

$$y \leq z \implies x \cdot y \leq x \cdot z \implies T_P(x, y) \leq T_P(x, z)$$

olduğundan (ii) sağlanır.

(iii)  $\forall x, y \in [0, 1]$  için

$$T_P(x, y) = x \cdot y = y \cdot x = T_P(y, x)$$

$T_P(x, y) = T_P(y, x)$  olduğundan (iii) sağlanır.

(iv)  $\forall x, y, z \in [0, 1]$  için

$$T_P(x, T_P(y, z)) = T_P(x, y \cdot z) = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = T_P(T_P(x, y), z)$$

$T_P(x, T_P(y, z)) = T_P(T_P(x, y), z)$  olduğundan (iv) sağlanır.

Buna göre (i)-(iv) şartları sağlandığından  $T_P$  bir t-normdur.  $\square$

Aşağıda verilen  $T_L$  ve  $T_D$  t-normlarının (i)-(iv) koşullarını sağladığı benzer biçimde görülebilir.

### 3.1.3. Lukasiewicz T-normu

**Tanım 3.29.**  $T_L : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ ,  $T_L(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}$  şeklinde tanımlanan fonksiyona Lukasiewicz t-normu denir.

### 3.1.4. Drastic T-normu

**Tanım 3.30.**  $T_D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ ,  $T_D(x, y) = \begin{cases} y & x = 1 \\ x & y = 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$  şeklinde tanımlanan fonksiyona Drastic t-normu denir.

**Sonuç 3.31.** T-norm tanımına göre her  $T$  t-normu için ve her  $x \in [0, 1]$  için aşağıdaki sınır şartı sağlanır.

$$T(x, 1) = x$$

$$T(0, x) = T(x, 0) = 0$$

Bundan dolayı her t-norm  $[0, 1]^2$  birim karesinin sınırları üzerinde çakışıktır.

**Tanım 3.32.**  $T_1$  ve  $T_2$  iki t-norm olsun. Eğer her  $x, y \in [0, 1]^2$  için  $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$  eşitsizliği sağlanıyor ise  $T_1$  t-normu,  $T_2$  t-normundan zayıf veya  $T_2$  t-normu,  $T_1$  t-normundan güçlüdür denir.  $T_1 \leq T_2$  biçiminde gösterilir.



**Sonuç 3.33.** Her  $T$   $t$ -normu ve her  $x, y \in [0, 1]^2$  için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$T(x, y) \leq T(1, y) = y \implies T(x, y) \leq \min(x, y) = T_M(x, y)$$

ve her  $x, y \in [0, 1]^2$  için

$$T(x, y) \geq 0 = T_D(x, y)$$

dir. Bu iki durum göz önüne alındığında

$$T_D \leq T \leq T_M$$

eşitsizliği ortaya çıkar. Bu eşitsizlikten yola çıkarak  $T_M$   $t$ -normunun en güçlü,  $T_D$   $t$ -normunun en zayıf  $t$ -norm olduğu görülmektedir. Geriye  $T_P$  ve  $T_L$   $t$ -normların kıyaslanması kalır. Son durumda dört temel  $t$ -norm arasındaki bağıntı bulunmuş olur.

Şimdi  $T_L \leq T_P$  olduğunu gösterelim. İlk olarak  $T_P(x, y) = x \cdot y$  ve  $T_L(x, y) = \max(0, x + y - 1)$   $t$ -normları için  $x + y \geq 1$  olsun. Bu durumda  $x + y - 1, x \cdot y \in [0, 1]$  olduğundan,

$$x + y - 1 < xy \text{ veya } x + y - 1 > xy$$

olur.  $x + y - 1 > xy$  olduğunu varsayalım. Buradan  $x - 1 > y(x - 1)$  olur.  $x < 1$  için  $y > 1$  çelişkisi elde edilmiş oldu. Son olarak

$$T_L(x, y) = x + y - 1 \leq xy = T_P(x, y)$$

olur. Diğer taraftan  $x + y < 1$  durumu için

$$T_L(x, y) = 0 \leq T_P(x, y)$$

olur. Bu durumda  $T_L \leq T_P$  olduğu açıkça görülür.

Sonuç olarak dört temel  $t$ -norm arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir

$$T_D \leq T_L \leq T_P \leq T_M.$$

### 3.2. Genelleştirilmiş Zadeh Genişleme Prensibi

**Tanım 3.34.**  $A$  ve  $B$  iki fuzzy sayı olmak üzere,  $\odot$  bir işlem ve  $\bullet$  bir  $t$ -norm olsun. Buna göre genelleştirilmiş Zadeh genişleme prensibi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_{A \odot B}(x) = \bigvee_{x=y \odot z} \mu_A(y) \bullet \mu_B(z).$$

Bu tanım, genişleme prensibinin keyfi bir  $t$ -norm için genelleştirilmesini ifade eder.

### 3.3. Genelleştirilmiş Nguyen Teoremi

Robert Fuller ve Tibor Keresztfalvi, yaptıkları çalışmada minimum t-norm tabanlı Nguyen teoremini tüm t-normlar için genelleştirdiler (*Fuller ve Keresztfalvi 1991*). Bu bölümde genelleştirilmiş Nguyen teoremi için gerek ve yeter koşul verilecektir.

$$[f(A, B)]_\alpha = \bigcup_{T(\xi, \eta) \geq \alpha} f(A_\xi, B_\eta), \quad \forall \alpha \in (0, 1] .$$

Bu eşitlikte,  $T(x, y) = \min \{x, y\}$  özel durumunda 2.1 eşitliğini verdiği dikkat edilmelidir. Bu durum Nguyen'in sonucuyla örtüşmektedir.

Ek olarak, fuzzy mantık sadece minimum-maksimum operatörleri yerine t-normları cinsinden tanımlandığından, bu makalenin sonucu algoritmaların uygulanmasında sahadaki çalışanlar için yararlı olabilir.

**Tanım 3.35.**  $T$  bir t-norm,  $f : X \times Y \rightarrow Z$ ,  $A \in \mathcal{F}(X)$  ve  $B \in \mathcal{F}(Y)$  ise  $f(A, B) \in \mathcal{F}(Z)$  genişleme prensibi yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(A, B)(z) = \sup_{f(x, y) = z} T(\mu_A(x), \mu_B(y)), \quad z \in Z .$$

Aşağıdaki teorem, genişleme prensibindeki minimum t-normu yerine keyfi bir t-norm kullanılırsa, Nguyen'in teoremine benzer sonuçlar elde edildiğini göstermektedir.

**Teorem 3.36.**  $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$  ve  $Z \neq \emptyset$  kümeler olsun ve  $T$  bir t-norm olsun.  $f : X \times Y \rightarrow Z$  tanımlı iki değişkenli bir fonksiyon ve  $A \in \mathcal{F}(X), B \in \mathcal{F}(Y)$  olmak üzere

$$[f(A, B)]_\alpha = \bigcup_{T(\xi, \eta) \geq \alpha} f(A_\xi, B_\eta), \quad \alpha \in (0, 1] \quad (3.2)$$

eşitliği için gerek ve yeter koşul,  $\forall z \in Z$  için  $\sup_{(x, y) \in f(z)} T(\mu_A(x), \mu_B(y))$  değerine ulaşan  $(x_0, y_0) \in X \times Y$  noktalarının bulunmasıdır (*Fuller ve Keresztfalvi 1991*).

**İspat** (i) Gerek koşul:  $z \in Z$  ve

$$f(A, B)(z) = \sup_{f(x, y) = z} T(\mu_A(x), \mu_B(y)) = t.$$

O zaman bu hipoteze göre

$$z \in [f(A, B)]_t = \bigcup_{T(\xi, \eta) \geq t} f(A_\xi, B_\eta)$$

dir. Bu nedenle,  $T(\xi_0, \eta_0) \geq t$  ve  $z \in f(A_{\xi_0}, B_{\eta_0})$  olacak şekilde  $\xi_0, \eta_0$  vardır. Yani  $f(x_0, y_0) = z$  olacak şekilde  $(x_0, y_0) \in A_{\xi_0} \times B_{\eta_0}$  vardır.

$$t = \sup_{f(x,y)=z} T(\mu_A(x), \mu_B(y)) \geq T(\mu_A(x_0), \mu_B(y_0)) \geq T(\xi_0, \eta_0) \geq t.$$

Buradan  $T(\mu_A(x_0), \mu_B(y_0)) = t$  olur.

(ii) Yeter koşul: Şimdi

$$z \in \bigcup_{T(\xi,\eta) \geq \alpha} f(A_\xi, B_\eta)$$

için öyle  $\xi_0, \eta_0$  vardır ki  $T(\xi_0, \eta_0) \geq \alpha$  ve  $z \in f(A_{\xi_0}, B_{\eta_0})$  olsun. Bununla birlikte, eğer  $(x_0, y_0) \in A_{\xi_0} \times B_{\eta_0}$ , ise

$$f(A, B)(z) = \sup_{f(x,y)=z} T(\mu_A(x), \mu_B(y)) \geq T(\mu_A(x_0), \mu_B(y_0)) \geq T(\xi_0, \eta_0) \geq \alpha$$

ve buradan  $z \in [f(A, B)]_\alpha$  olur. Diğer taraftan  $z \in [f(A, B)]_\alpha$  olsun. Yani

$$\sup_{f(x,y)=z} T(\mu_A(x), \mu_B(y)) \geq \alpha.$$

Hipoteze göre,  $f(x_0, y_0) = z$  olacak şekilde  $(x_0, y_0) \in X \times Y$  vardır ve

$$T(\mu_A(x_0), \mu_B(y_0)) = \sup_{f(x,y)=z} T(\mu_A(x), \mu_B(y)) \geq \alpha.$$

Böylece,  $\xi_0 = \mu_A(x_0)$  ve  $\eta_0 = \mu_B(y_0)$  olmak üzere,  $T(\xi_0, \eta_0) \geq \alpha$  olduğu biliniyor, yani  $(x_0, y_0) \in A_{\xi_0} \times B_{\eta_0}$  ve  $z \in f(A_{\xi_0}, B_{\eta_0})$ , sonuç olarak  $z \in \bigcup_{T(\xi,\eta) \geq \alpha} f(A_\xi, B_\eta)$  olur.  $\square$

Aşağıdaki teoremde  $X, Y$  ve  $Z$  yerel kompakt topolojik uzaylardır. Aynı zamanda bu teorem 3.2 eşitliğinin tüm üst yarı sürekli t-normlar için geçerli olduğunu gösterir.

**Teorem 3.37.** (Fuller ve Keresztfalvi 1991) Eğer  $f : X \times Y \rightarrow Z$  ve  $T$  üst yarı sürekli ise, her bir  $A \in \mathcal{F}(X, \mathcal{L})$  ve  $B \in \mathcal{F}(Y, \mathcal{L})$  için

$$[f(A, B)]_\alpha = \bigcup_{T(\xi,\eta) \geq \alpha} f(A_\xi, B_\eta), \quad \alpha \in (0, 1].$$

**İspat** İlk teoremi kullanarak göstermek yeterli olacaktır.  $(x, y) \mapsto T(\mu_A(x), \mu_B(y))$  fonksiyonunu  $\varphi$  ile gösterelim. Açıkça,

$$\begin{aligned} \sup_{f(x,y)=z} T(\mu_A(x), \mu_B(y)) &= \sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \varphi(x, y) \\ &= \sup_{(x,y) \in \text{supp}A \times \text{supp}B} \varphi(x, y) \end{aligned}$$

$T(\mu_A(x), \mu_B(y)) = 0$  olduğundan  $\text{supp}A \times \text{supp}B$  kümesinin dışında kalır. Fakat  $\text{supp}A \times \text{supp}B$  kompakt ve  $f^{-1}(z)$ ,  $f$ 'nin sürekliliği ile kapatılır; Dolayısıyla,

$$f^{-1}(z) \cap (\text{supp}A \times \text{supp}B)$$

de kompakt olur.  $T$  azalmayan üst yarı sürekli,  $A$  ve  $B$ 'de üst yarı sürekli, dolayısıyla  $\varphi$ 'de üst yarı sürekli. Böylece  $\varphi$ , her  $z \in Z$  için  $f^{-1}(z) \cap (\text{supp}A \times \text{supp}B)$  kümesinin maksimumunu verir.  $\square$

Aşağıdaki örnekler,  $f(A, B)$  fuzzy kümesinin  $\alpha$ -kesmelerinin, bazı temel t-normların basit bir şekilde üretilebileceğini göstermektedir.

**Örnek 3.38.** Eğer  $T(x, y) = \min\{x, y\}$  ise

$$\xi \geq \alpha \text{ ve } \eta \geq \alpha \implies f(A_\xi, B_\eta) \subset f(A_\alpha, B_\alpha),$$

olur. Genelleştirilmiş Nguyen teorem kullanıldığında bu ifade, klasik Nguyen biçimine indigenir,

$$[f(A, B)]_\alpha = f(A_\alpha, B_\alpha), \quad \alpha \in (0, 1].$$

**Örnek 3.39.** Eğer  $T(x, y) = x \cdot y$  ise genelleştirilmiş Nguyen teorem gereği aşağıdaki ifade oluşur;

$$[f(A, B)]_\alpha = \bigcup_{\xi \in [\alpha, 1]} f\left(A_\xi, B_{\frac{\alpha}{\xi}}\right), \quad \alpha \in (0, 1].$$

### 3.4. Seresht ve Fayek Yöntemi

Fuzzy aritmetiği uygulamak için iki temel matematiksel yöntem söz konusudur. Bunlardan biri  $\alpha$ -kesmeleri yöntemi ikincisi Zadeh genişleme prensibi yöntemidir.  $\alpha$ -kesmeleri ile Zadeh genişleme prensibi  $T = \min$  durumunda çakışmaktadır. Bu durum diğer t-normlar için doğru değildir. Mevcut hesaplama yöntemleri içerisinde  $\alpha$ -kesmeleri yöntemi, basitliği nedeniyle daha sık kullanılmaktadır. Bu yöntem sonuçların yorumlanabilirliğini azaltan bir durum olan, ortaya çıkan fuzzy sayılarda belirsizliğin fazla tahmin edilmesine neden olur. Bu fazla tahmin, genişleme prensibi ile azaltılabilir. Ancak genişleme prensibi yöntemini uygulamaya yönelik mevcut hesaplama yöntemleri, minimum ve drastik t-normlarının kullanımıyla sınırlıdır. Bu yüzden çarpım t-normu ile fuzzy aritmetik pek de kolay değildir. Ancak Nima Gerami Seresht ve Aminah Robinson Fayek

yaptıkları çalışmada genişleme prensibini kullanarak çarpım ve Lukasiewicz t-normları ile aritmetik için bir yöntem tanımlamışlardır. Bu yöntem, iki üçgensel fuzzy sayının toplamının veya çarpımının oluşturduğu tanım aralığını, ayırık noktalara parçalayarak başlar. Her nokta için ayrı ayrı üyelik değeri hesaplanır. Ancak bazı noktalar için birden fazla olasılık söz konusu olabilir. Bu durumda her olasılık için üyelik dereceleri bulunduktan sonra, çıkan sonuçlar arasında kıyaslama yapılmalıdır. Yöntem bir örnek yardımıyla tanımlanacaktır. Daha fazla bilgi için *Seresht ve Fayek (2019)* incelenmelidir.

Aşağıdaki örnekte,  $A = (a_1, b_1, c_1)$  ve  $B = (a_2, b_2, c_2)$  fuzzy sayıları için, kanat açıklıkları  $b_1 - a_1 = \alpha_1$ ,  $c_1 - b_1 = \beta_1$ ,  $b_2 - a_2 = \alpha_2$  ve  $c_2 - b_2 = \beta_2$  ile gösterilecektir.

Çarpım t-normu için  $supp[A + B] = [a_1 + a_2, c_1 + c_2]$  ve  $core[A + B] = b_1 + b_2$  olduğu bilinmektedir.

Örnekte yalnızca  $A + B$  toplamının oluşturduğu  $supp[A + B]$ 'nin sol tarafı için hesaplama yapılacaktır. Bu durumda,  $x \in [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$  olduğu için işlem kolaylığı sağlanması sebebiyle,  $x$  tam sayı olarak seçilecektir. Ancak yöntem, her  $x \in \mathbb{R}$  için geçerlidir.

**Örnek 3.40.**  $A = (3, 6, 8)$  ve  $B = (10, 14, 17)$  birer fuzzy sayı olsun.  $A + B$ 'yi çarpım t-normu kullanarak hesaplayalım. Buradan  $supp[A + B] = [13, 25]$  ve  $core[A + B] = 20$  olur. Kanat açıklıkları  $\alpha_1 = 3$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 4$  ve  $\beta_2 = 3$  olur.  $x$ ,  $A + B$  toplamının sol tarafında alınan bir nokta olsun ve toplamın oluşturduğu  $supp[A + B]$ 'de tüm  $x$  tam sayıları için  $x$ 'in üyelik fonksiyonlarını bulalım.  $x = a_1 + a_2 + t$  olduğunu varsayarsak, bir  $k \in [0, \alpha_1]$  için  $y = a_1 + k$  ve  $z = a_2 + (t - k)$  sayıları yazılabilir. Böylece  $x = y + z$  olur. Genişleme prensibine göre  $x$ 'in üyelik değeri,

$$\mu_{A+B}(x) = \bigvee_{x=y+z} \mu_A(y) \cdot \mu_B(z).$$

İlk olarak  $x = 14$  için  $t = 1$  olduğu açıktır. Bu durumda,  $k \in [0, 3]$  için  $y = 3 + k$ ,  $z = 10 + (1 - k)$  olur. Aynı zamanda bu toplam yalnızca  $y \in [3, 6]$  ve  $z \in [10, 14]$  aralığından gelen sayılar için oluşturulabilir. Bu noktaların üyelik değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\mu_A(y) = \frac{k}{3} \text{ ve } \mu_B(z) = \frac{1 - k}{4}.$$

$\mu(x)$ 'i hesaplamak için  $\mu(x) = \bigvee_{x=y+z} \{\mu_A(y) \cdot \mu_B(z)\}$ , fonksiyonu aşağıdaki gibi ek alı-

nabilir,

$$f(k) = \mu_A(y) \cdot \mu_B(z) = \frac{k}{3} \cdot \frac{1-k}{4} = \frac{k-k^2}{12}.$$

Geriye  $f(k)$ 'nin türevi alınıp sıfıra eşitleyerek fonksiyonun maksimum değerini bulmak kalır.  $\frac{d}{dk}[f_t(k)] = 0$  ise  $k = \frac{1}{2}$  dir. Buradan;

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{12} = \frac{1}{48}.$$

Böylece,  $\mu_{A+B}(x)$ 'in  $x = 14$  noktasındaki üyelik fonksiyonunun değeri  $\frac{1}{48}$  olarak bulunur.

Şimdi,  $x = 15$  için aynı adımları kullanarak üyelik fonksiyonunun değerini hesaplayalım. Bu toplamın oluşabilmesi için de tek bir olasılık vardır. Buna göre,  $k \in [0, 3]$  için  $y \in [3, 6]$  ve  $z \in [10, 14]$  aralığından gelen sayılar ile oluşturulur. Bu durumda üyelik değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\mu_A(y) = \frac{k}{3} \text{ ve } \mu_B(z) = \frac{2-k}{4}.$$

Genişleme prensibinden faydalanarak  $f(k)$  tanımlayalım

$$f(k) = \mu_A(y) \cdot \mu_B(z) = \frac{k}{3} \cdot \frac{2-k}{4} = \frac{2k-k^2}{12}.$$

Şimdi,  $f(k)$ 'nin türevini alıp sıfıra eşitleyerek fonksiyonun maksimumunu bulalım. Buna göre,  $\frac{d}{dk}[f_t(k)] = 0$  ise  $k = 1$  dir. Fonksiyonda yerine yazılırsa;

$$f(1) = \frac{2 \cdot 1 - (1)^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Böylece,  $\mu_{A+B}(x)$ 'in  $x = 15$  noktasındaki üyelik fonksiyonunun değeri  $\frac{1}{12}$  olarak bulunur.

Benzer biçimde,  $\text{supp}[A + B]$ 'de  $\forall x \in \mathbb{R}$  için  $x$ 'in üyelik fonksiyonlarını bu yöntem yardımıyla hesaplayabiliriz. Ancak dikkat edilmelidir ki bu  $x$  toplamlarının bazıları birden fazla olasılığa neden olabilirler. Bu durumda bütün olasılıklar ayrı ayrı hesaplanmalı ve supremumları bulunarak işlem tamamlanmalıdır.

Şimdi, bu durumu göstermek adına  $\mu_{A+B}(x)$ 'in  $x = 18$  noktasındaki üyelik fonksiyonunun değerini hesaplayalım. Bu durum için üç olasılık vardır:

1.  $x, y \in [3, 6]$  ve  $z \in [10, 14]$  aralığından gelen iki sayının toplamıdır.
2.  $x, y \in [6, 8]$  ve  $z \in [10, 14]$  aralığından gelen iki sayının toplamıdır.
3.  $x, y \in [3, 6]$  ve  $z \in [14, 17]$  aralığından gelen iki sayının toplamıdır.

Bu üç durum için üyelik fonksiyonunun değeri bulunarak, hangi kombinasyonun daha büyük bir üyeliğe yol açtığını bulacağız.

1. Durum:  $k \in [0, 3]$  için  $y \in [3, 6]$  ve  $z \in [10, 14]$  olduğuna göre üyelik değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\mu_A(y) = \frac{k}{3} \text{ ve } \mu_B(z) = \frac{5-k}{4}.$$

Aynı adımlar izlendiğinde

$$f(k) = \frac{k}{3} \cdot \frac{5-k}{4} = \frac{5k-k^2}{12}$$

ve fonksiyonun maksimumu,  $\frac{d}{dk}[f_t(k)] = 0$  dan  $k = \frac{5}{2}$  olarak bulunur. Yerine yazarsak,

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5 \cdot \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2}{12} = \frac{25}{48} = \mu_1$$

olarak 1. durumu hesaplamış oluruz.

2. Durum:  $y \in [6, 8]$  ve  $z \in [10, 14]$  olmak üzere  $x = y + z$  olsun.  $x \in [16, 20]$  olduğunda,  $x = (6 + 10) + 2$ ,  $k \in [0, 2]$  and  $(2 - k) \in [0, 4]$  kısıtları ile birlikte  $y = 6 + k$  ve  $z = 10 + (2 - k)$  olduğu varsayılabilir. Bu durumda üyelik değerleri aşağıdaki gibi olur,

$$\mu_A(y) = \frac{2-k}{2} \text{ ve } \mu_B(z) = \frac{2-k}{4}.$$

Buna göre,

$$f(k) = \frac{2-k}{2} \cdot \frac{2-k}{4} = \frac{(2-k)(2-k)}{8}$$

olur.  $f(k)$ 'nin türevi şu şekilde görülebilir:

$$\frac{d}{dk}[f(k)] = -\frac{(2-k) + (2-k)}{8} \leq 0.$$

Yani  $f(k)$  azalan bir fonksiyon olup maksimum değerini  $k = 0$  da alır.  $k = 0$  için,

$$\mu_A(y) \cdot \mu_B(z) = \frac{1}{2} = \mu_2$$

2. durumun sonucu  $\frac{1}{2}$  olarak bulunur.

3. Durum:  $y \in [3, 6]$ ,  $z \in [14, 17]$  olmak üzere  $x = y + z$  olsun.  $x \in [17, 20]$  olduğundan,  $x = 3 + 14 + 1$ ,  $k \in [0, 3]$  ve  $(1 - k) \in [0, \alpha_1]$  kısıtları ile birlikte  $y = 3 + (1 - k)$  ve  $z = 14 + k$  olduğu varsayılabilir. Buna göre üyelikler aşağıdaki gibi olur,

$$\mu_A(y) = \frac{1-k}{3}, \mu_B(z) = \frac{3-k}{3}.$$

*Benzer biçimde,*

$$f(k) = \frac{1-k}{3} \cdot \frac{3-k}{3} = \frac{(1-k)(3-k)}{9}$$

*olur.  $f(k)$ 'nin türevi şu şekilde görülebilir:*

$$\frac{d}{dk}[f(k)] = -\frac{(3-k) + (1-k)}{9} \leq 0.$$

*Yani  $f(k)$  azalan bir fonksiyon olup maksimum değerini  $k = 0$  da alır.  $k = 0$  için,*

$$\mu_A(y) \cdot \mu_B(z) = \frac{1}{3} = \mu_3$$

*olur. Böylece 3. durumu  $\frac{1}{3}$  olarak buluruz.  $\mu_{A+B}(x) = \max\{\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x)\}$  olduğundan geriye bu üç durumu kıyaslamak kalır. Sonuç olarak,  $\mu_3 < \mu_2 < \mu_1$  olur ve  $\mu_{A+B}(x)$ 'in  $x = 18$  noktasındaki üyelik fonksiyonunun değeri  $\frac{25}{48}$  olarak bulunur.*

*Bu prosedür,  $\text{supp}[A + B]$ 'deki tüm  $x$  ler için uygulanabilir.*



## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

### 4.1. Çarpım T-normu ile Fuzzy Aritmetik

Bu bölümün odak noktası çarpım t-normu ile fuzzy aritmetik işlemlerdir. Çarpım t-normu ile ilgili çalışmalar incelendiğinde, şu ana kadar elde edilen en iyi yöntemin Seresht ve Fayek yöntemi olduğu görülmektedir. Önceki bölümde incelenen bu yöntemin bile, yalnızca ayrık noktalar için sonuç hesaplayabilen ve yüksek işlem maliyetli bir yöntem olduğu görülmektedir. Çalışmanın amacı, düşük işlem maliyetli ve tüm noktalar için kesin sonuç hesaplayabilen, aynı zamanda çarpım t-normu ile yapılacak aritmetik işlemlerin tam sonucunu, sürekli bir formda üreten açık formüller elde etmektir. Bu tezde bulunan tüm bulgular tarafımızca yapılan *Soylu ve Aslan (2021)* makalesinden alınmıştır.

#### 4.1.1. Çarpım T-normu ile Toplama

Bu bölümde çarpım t-normu kullanılarak toplama için açık bir formül sunulacaktır. Aynı zamanda fuzzy aritmetikte  $A - B = A + (-B)$  özdeşliği kullanılarak bulunan sonuçlar çıkarma işlemine de uygulanabilecektir.

$A = (a_1, b_1, c_1)$  ve  $B = (a_2, b_2, c_2)$  iki üçgensel fuzzy sayı olsun.

Bu sayıların kanat açıklıkları  $b_1 - a_1 = \alpha_1$ ,  $c_1 - b_1 = \beta_1$ ,  $b_2 - a_2 = \alpha_2$  ve  $c_2 - b_2 = \beta_2$  ile gösterilir.

Çarpım t-normu için  $supp[A + B] = [a_1 + a_2, c_1 + c_2]$  ve  $core[A + B] = b_1 + b_2$  olduğu bilinmektedir.

Amacımız  $A$  ve  $B$  fuzzy sayılarının toplamını yani  $A + B$  yi hesaplamak olacak.

Bir fuzzy sayının üyelik fonksiyonunun artan kısmı kısaca sol taraf ( $L$ ) ve azalan kısım sağ taraf ( $R$ ) olarak adlandırılacaktır. Çalışma,  $A + B$ 'nin sol tarafı ile başlayacak.

$x$ ,  $A + B$  toplamının sol tarafında alınan bir nokta olsun yani,

$$x \in [a_1 + a_2, b_1 + b_2].$$

Zadeh genişleme prensibine göre  $x$ 'in üyelik değeri,

$$\mu_{A+B}(x) = \bigvee_{x=y+z} \mu_A(y) \cdot \mu_B(z)$$

dir. Bu duruma göre üç olasılık vardır:

1.  $x$ ,  $A$ 'nın solundan alınan bir nokta ile  $B$ 'nin solundan alınan bir noktanın toplamıdır ( $LL$ ).
2.  $x$ ,  $A$ 'nın sağından alınan bir nokta ile  $B$ 'nin solundan alınan bir noktanın toplamıdır ( $RL$ ).
3.  $x$ ,  $A$ 'nın solundan alınan bir nokta ile  $B$ 'nin sağından alınan bir noktanın toplamıdır ( $LR$ ).

Bu üç durum için hangi seçeneğin daha büyük bir üyeliğe yol açtığını bulacağız. Bunun için özel durumların her biri için optimum değer hesaplanmalı ve birbirleriyle karşılaştırılmalıdır.

Genelliği kaybetmeden, baştan sona  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  ve  $\beta_1 \leq \beta_2$  olduğu varsayılabilir.

Bu noktada  $c_L = a_1 + a_2 + 2\alpha_1$  ve  $c_R = c_1 + c_2 - 2\beta_1$  şeklinde tanımlı koordinatlar konunun devamında faydalı olacaktır.

1. Durum:  $LL$

$y \in [a_1, b_1]$ ,  $z \in [a_2, b_2]$  olmak üzere  $x = y + z$  olsun. Buradan iki alt durum oluşur:  $x \in [a_1 + a_2, c_L]$  veya  $x \in (c_L, b_1 + b_2]$ .  $x \in [a_1 + a_2, c_L]$  durumunu aşağıda ele alalım:

$x = a_1 + a_2 + t$  olduğunu varsayarsak, bir  $k \in [0, \alpha_1]$  için  $y = a_1 + k$  ve  $z = a_2 + t - k$  sayıları yazılabilir. Bu sayılara karşılık gelen üyelik fonksiyonlarının aşağıdaki gibi olduğu görülmektedir.

$$\mu_A(y) = \frac{k}{\alpha_1} \text{ ve } \mu_B(z) = \frac{t - k}{\alpha_2}.$$

$\mu(x) = \bigvee_{x=y+z} \{\mu_A(y) \cdot \mu_B(z)\}$  fonksiyonunu  $f_t(k)$  fonksiyonu ile ifade edelim

$$f_t(k) = \mu_A(y) \cdot \mu_B(z) = \frac{k}{\alpha_1} \cdot \frac{t - k}{\alpha_2} = \frac{tk - k^2}{\alpha_1 \alpha_2}.$$

$\mu(x)$ 'i hesaplamak için geriye  $f_t(k)$  optimizasyonu kalır.  $f_t(k)$ 'nin  $k$ 'ye göre türevini alıp sifıra eşitlersek, fonksiyonun maksimum değerini hesaplamış olacağız.  $\frac{d}{dk}[f_t(k)] = 0$  ise  $k = \frac{t}{2}$  dir. Buradan:

$$f_t\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t^2}{4\alpha_1 \alpha_2}.$$

Bu adımda dikkat edilmelidir ki  $k \in [0, \alpha_1]$  olduğundan  $t \in [0, 2\alpha_1]$  olur. Dolayısıyla  $x \in [a_1 + a_2, c_L]$  dir.

Diğer bir alt durum olan  $x \in (c_L, b_1 + b_2]$  için  $k \in [0, \alpha_1]$  olduğundan  $t > 2\alpha_1$  olur. Bu durumda  $f_t(k)$ 'nin türevi,

$$\frac{d}{dk}[f_t(k)] = \frac{t - 2k}{\alpha_1 \alpha_2} > 0$$

olur. Bu nedenle  $f_t(k)$   $k$ 'ye göre artan olup maksimum değerini  $k = \alpha_1$  de alır. Buradan  $f_t(\alpha_1) = \frac{t - \alpha_1}{\alpha_2}$  olur. Dolayısıyla,  $t = x - (a_1 + a_2)$  olduğundan (LL) durumu için sonuç aşağıdaki gibi elde edilecektir,

$$\mu_1(x) = \begin{cases} \frac{(x - (a_1 + a_2))^2}{4\alpha_1 \alpha_2}, & x \in [a_1 + a_2, c_L] \\ \frac{x - (b_1 + a_2)}{\alpha_2}, & x \in (c_L, b_1 + b_2]. \end{cases} \quad (4.1)$$

$\mu_A(y) \cdot \mu_B(z)$ 'nin supremumunu bulmak için yukarıdaki sonucun (RL) ve (LR) durumları ile karşılaştırılması gerekir.

## 2. Durum: RL

$y \in [b_1, c_1]$ ,  $z \in [a_2, b_2]$  olmak üzere  $x = y + z$  olsun.  $x \in [b_1 + a_2, b_1 + b_2]$  olduğundan,  $k \in [0, \beta_1]$  ve  $(t - k) \in [0, \alpha_2]$  kısıtları ile birlikte  $y = b_1 + k$  ve  $z = a_2 + (t - k)$  olduğu varsayılabilir. Bu durumda üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi olur,

$$\mu_A(y) = \frac{\beta_1 - k}{\beta_1} \text{ ve } \mu_B(z) = \frac{t - k}{\alpha_2}.$$

O halde  $f_t(k)$  aşağıdaki gibi olur

$$f_t(k) = \mu_A(y) \cdot \mu_B(z) = \frac{\beta_1 - k}{\beta_1} \cdot \frac{t - k}{\alpha_2}.$$

Bu durumda  $k$ 'ye göre türev alıp gözlemleyelim,

$$\frac{d}{dk}[f_t(k)] = -\frac{(t - k) + (\beta_1 - k)}{\beta_1 \alpha_2} \leq 0.$$

Yani  $f_t(k)$  azalan bir fonksiyon olup maksimum değerini  $k = 0$  da alır.  $k = 0$  için,

$$\mu(y) \cdot \mu(z) = \frac{t}{\alpha_2}$$

olur. Dolayısıyla  $t = x - (b_1 + a_2)$  olduğundan (RL) durumu için sonuç şu şekilde elde edilecektir,

$$\mu_2(x) = \frac{x - (b_1 + a_2)}{\alpha_2}, x \in [b_1 + a_2, b_1 + b_2]. \quad (4.2)$$

Bu durumda ortaya çıkan üyelik fonksiyonunun doğrusal fonksiyon olduğuna dikkat edilmelidir.

### 3. Durum: $LR$

$y \in [a_1, b_1]$ ,  $z \in [b_2, c_2]$  olmak üzere  $x = y + z$  olsun.  $x \in [a_1 + b_2, b_1 + b_2]$  olduğundan,  $k \in [0, \beta_2]$  ve  $(t - k) \in [0, \alpha_1]$  kısıtları ile birlikte  $y = a_1 + (t - k)$  ve  $z = a_2 + \alpha_2 + k$  olduğu varsayılabilir. Buna göre üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi olur,

$$\mu_A(y) = \frac{t - k}{\alpha_1}, \quad \mu_B(z) = \frac{\beta_2 - k}{\beta_2}.$$

( $RL$ ) durumunda uyguladığımız prosedürün aynısını uygularsak,

$$f_t(k) = \mu_A(y) \cdot \mu_B(z) = \frac{t - k}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_2 - k}{\beta_2}.$$

$f_t(k)$ 'nin türevi şu şekilde görülebilir:

$$\frac{d}{dk}[f_t(k)] = \frac{-((t - k) + (\beta_2 - k))}{\beta_1 \alpha_2} \leq 0.$$

Yani  $f_t(k)$  azalan bir fonksiyon olup maksimum değerini  $k = 0$  da alır.  $k = 0$  için,

$$\mu_A(y) \cdot \mu_B(z) = \frac{t}{\alpha_1}$$

olur. Dolayısıyla,  $t = x - (a_1 + b_2)$  olduğundan ( $LR$ ) durumu için sonuç şu şekilde elde edilecektir,

$$\mu_3(x) = \frac{x - (a_1 + b_2)}{\alpha_1}, \quad x \in [a_1 + b_2, b_1 + b_2]. \quad (4.3)$$

Böylece ( $LR$ ) durumunun doğrusal bir üyelik fonksiyonuna sahip olduğu gözlemlenebilir.

$\mu_{A+B}(x) = \max\{\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x)\}$  olduğundan, geriye  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  fonksiyonlarını karşılaştırmak kalır.  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  olduğu akıld tutularak tüm  $x \leq b_1 + b_2$  için  $\mu_3 \leq \mu_2$  olduğu açıktır, bu nedenle  $\mu_1$  ile  $\mu_2$ 'yi karşılaştırmak yeterli olacaktır.

Şimdiki iddiammız  $\forall x \in \mathbb{R}$  için  $\mu_2(x) \leq \mu_1(x)$  olduğudur. Bu,  $\mu_1(x) = \mu_2(x)$  denkleminin tek çözümünün  $x_0 = 2\alpha_1 + a_1 + a_2 = c_L$  olduğu gözlemlenerek doğrulanabilir. Sonuç olarak  $\mu_3 \leq \mu_2 \leq \mu_1$ 'dir ve bu fonksiyonların tanım aralıklarının dikkate alınması tartışmayı tamamlar.

Yukarıda elde edilen tüm sonuçlar, simetrik olarak  $A+B$  bulanık sayısının sağ tarafına dönüştürülebilir. Tartışmanın sonucu aşağıdaki teoremden özetlenmiştir.

**Teorem 4.41.**  $A = (a_1, b_1, c_1)$  ve  $B = (a_2, b_2, c_2)$  üçgensel iki fuzzy sayı ve  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  ve  $\beta_1 \leq \beta_2$  olsun. Çarpım  $t$ -normu altındaki  $A + B$  toplamı aşağıdaki üyelik fonksiyonuna sahip bir fuzzy sayıdır,

$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} \frac{(x-(a_1+a_2))^2}{4\alpha_1\alpha_2} & , a_1 + a_2 \leq x \leq a_1 + a_2 + 2\alpha_1, \\ \frac{x-(b_1+a_2)}{\alpha_2} & , a_1 + a_2 + 2\alpha_1 \leq x \leq b_1 + b_2, \\ \frac{-x+(b_1+c_2)}{\beta_2} & , b_1 + b_2 \leq x \leq c_1 + c_2 - 2\beta_1, \\ \frac{(x-(c_1+c_2))^2}{4\beta_1\beta_2} & , c_1 + c_2 - 2\beta_1 \leq x \leq c_1 + c_2. \end{cases} \quad (4.4)$$

**Önerme 4.42.** Eğer  $\alpha_1 > \alpha_2$  ve/veya  $\beta_1 > \beta_2$  ise, sonucun sol kısmındaki  $\alpha, a, b$  ve/veya sonucun sağ kısmındaki  $\beta, b, c$  için tüm indisler yer değiştirmelidir.

**Sonuç 4.43.** Eğer  $\alpha_1 = \alpha_2$  ise  $\mu_{A+B}(x) = \frac{(x-(a_1+a_2))^2}{4\alpha_1\alpha_2}, \forall x \in [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$ .

**Sonuç 4.44.** Eğer  $\beta_1 = \beta_2$  ise  $\mu_{A+B}(x) = \frac{(x-(c_1+c_2))^2}{4\beta_1\beta_2}, \forall x \in [b_1 + b_2, c_1 + c_2]$ .

Bu durumda, fuzzy sayıların sağ ve sol kanat açıklıklarının eşit olması durumunda ortaya çıkacak toplamın yalnızca ikinci dereceden bir fonksiyona karşılık geldiği görülmektedir. Bu gözlem daha önce literatürde Mesiar tarafından ele alınmıştır (Mesiar 1996). Mesiar'ın yaptığı çalışmada,  $\alpha_1 = \alpha_2$  ve  $\beta_1 = \beta_2$  özel durumu için aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir

$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} L^2\left(\frac{b_1+b_2-x}{2\alpha}\right) & , b_1 + b_2 - 2\alpha \leq x \leq b_1 + b_2, \\ R^2\left(\frac{x-(b_1+b_2)}{2\beta}\right) & , b_1 + b_2 \leq x \leq b_1 + b_2 + 2\beta. \end{cases}$$

Bu eşitlikten,

$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{b_1+b_2-x}{2\alpha}\right)\right)^2 & , b_1 + b_2 - 2\alpha \leq x \leq b_1 + b_2, \\ \left(1 - \left(\frac{x-(b_1+b_2)}{2\beta}\right)\right)^2 & , b_1 + b_2 \leq x \leq b_1 + b_2 + 2\beta \end{cases}$$

ve  $b_1 + b_2 = a_1 + a_2 + 2\alpha = c_1 + c_2 - 2\beta$  olduğundan, bu basit hesaplamamızın sonucu olarak şunu gözlemliyoruz,

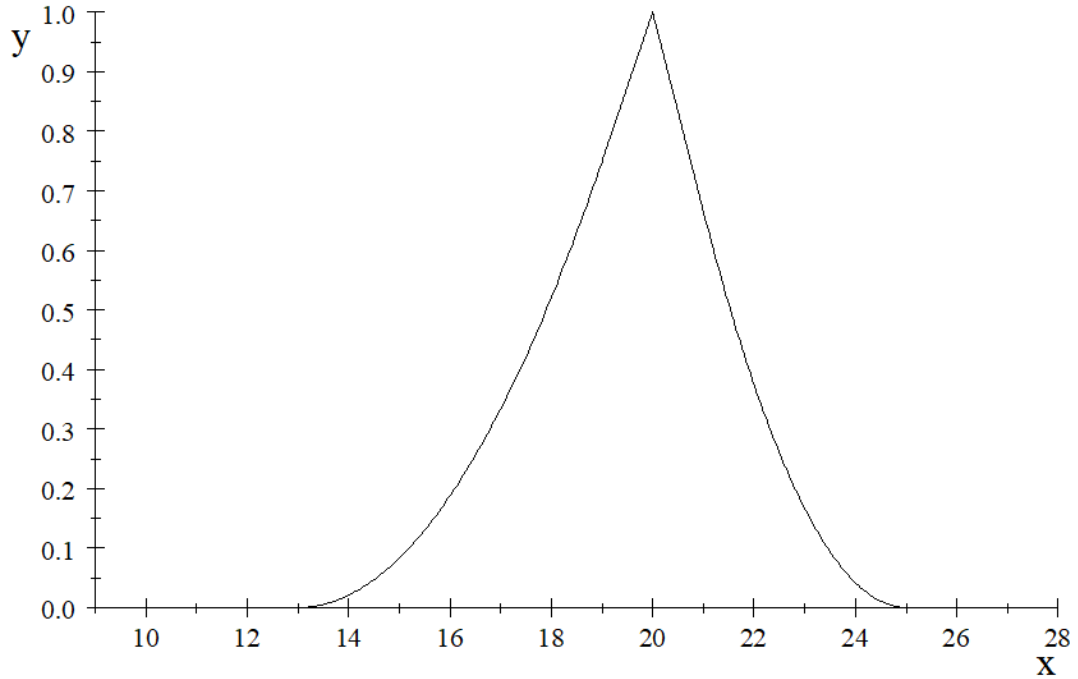
$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-(a_1+a_2)}{2\alpha}\right)^2 & , a_1 + a_2 \leq x \leq b_1 + b_2, \\ \left(\frac{x-(c_1+c_2)}{2\beta}\right)^2 & , b_1 + b_2 \leq x \leq c_1 + c_2. \end{cases}$$

Bu sonuç 4.1 ve sonuç 4.2'de iddia edilen sonuçlarla aynıdır.

**Örnek 4.45.**  $A = (3, 6, 8)$  ve  $B = (10, 14, 17)$  üçgensel iki fuzzy sayı olmak üzere,  $A$  ve  $B$  fuzzy sayılarının toplamı 4.4 formülü yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} \frac{(x-13)^2}{48}, & 13 \leq x \leq 19, \\ \frac{x-16}{4}, & 19 \leq x \leq 20, \\ \frac{-x+23}{3}, & 20 \leq x \leq 21, \\ \frac{(x-25)^2}{24}, & 21 \leq x \leq 25. \end{cases}$$

$\text{supp}[A + B] = [13, 25]$ ,  $\text{core}[A + B] = 20$  olarak bulunur.  $2\alpha_{\min} = 6$  ve  $2\beta_{\min} = 4$  olduğundan  $[13, 19]$  ve  $[21, 25]$  aralıklarının birer parabolik fonksiyona,  $[19, 20]$  ve  $[20, 21]$  aralıklarının birer doğrusal fonksiyona karşılık geldiği gözlemlenebilir.



**Şekil 4.1.**  $\mu_{A+B}(x)$

#### 4.1.2. Çarpım T-normu ile Çarpma

Araştırılan aritmetik operatörün değişmesi, sorunun çözümüne yönelik yaklaşımı değiştirmeyecektir.  $A, B > 0$  olduğu varsayılarak, önce  $A \cdot B$ 'nin sol tarafı oluşturulacaktır.

Buradan,  $supp[A \cdot B] = [a_1 \cdot a_2, c_1 \cdot c_2]$  ve  $core[A \cdot B] = b_1 \cdot b_2$ .  $x \in [a_1 a_2, b_1 b_2]$  olmak üzere  $x$  toplamın sol tarafında bir nokta olsun. Zadeh Genişleme Prensibine göre,

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \bigvee_{x=y \cdot z} \mu_A(y) \cdot \mu_B(z).$$

hesaplanmalıdır. Toplama durumuna benzer şekilde, analiz edilecek üç durum oluşacaktır:

1. Durum *LL*:

$y \in [a_1, b_1]$ ,  $z \in [a_2, b_2]$  olmak üzere  $x = y \cdot z$  olsun.

Bu durumda ilgili üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi olacaktır,

$$\mu_A(y) = \frac{y - a_1}{\alpha_1}, \quad \mu_B(z) = \mu\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x - a_2 y}{\alpha_2 y}.$$

$\mu_{A \cdot B}(x) = \bigvee_{x=y \cdot z} \mu_A(y) \cdot \mu_B(z)$  fonksiyonunu  $f_x(y)$  fonksiyonu ile ifade edelim

$$f_x(y) = \mu_A(y) \cdot \mu_B(z) = \left(\frac{y - a_1}{\alpha_1}\right) \left(\frac{x - a_2 y}{\alpha_2 y}\right).$$

$f_x(y)$ 'nin maksimumunu aşağıdaki gibi belirlenir,

$$\frac{d}{dy}[f_x(y)] = 0 \iff y = \sqrt{\frac{a_1 x}{a_2}}.$$

Buradan,

$$f_x\left(\sqrt{\frac{a_1 x}{a_2}}\right) = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a_1 a_2})^2}{\alpha_1 \alpha_2}$$

olur. Böylece (*LL*) durumu için üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\mu_1(x) = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a_1 a_2})^2}{\alpha_1 \alpha_2}.$$

Bu fonksiyon için geçerli bir değer aralığı bulmamız gerekiyor. Aşağıdaki kısıtlamaları göz önünde alırsak  $y = \sqrt{\frac{a_1 x}{a_2}}$  için aşağıdaki eşitsizlik oluşturulur,

$$a_1 \leq \sqrt{\frac{a_1 x}{a_2}} \leq b_1 \iff a_1 a_2 \leq x \leq \frac{a_2 b_1^2}{a_1}, \quad (4.5)$$

aynı zamanda  $z = \sqrt{\frac{x a_2}{a_1}}$  olduğundan,

$$a_2 \leq \sqrt{\frac{x a_2}{a_1}} \leq b_2 \iff a_2 a_1 \leq x \leq \frac{b_2^2 a_1}{a_2}. \quad (4.6)$$

(4.5) ve (4.6) değer aralıkları birleştirerek  $\mu_1$ 'in değer aralığı bulunmuş olur.

$$a_1 a_2 \leq x \leq \min \left\{ \frac{a_1 b_2^2}{a_2}, \frac{a_2 b_1^2}{a_1} \right\}.$$

Yani *LL* durumunun sonucu,

$$\mu_1(x) = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a_1 a_2})^2}{\alpha_1 \alpha_2}, \quad x \in \left[ a_1 a_2, \min \left\{ \frac{a_1 b_2^2}{a_2}, \frac{a_2 b_1^2}{a_1} \right\} \right]. \quad (4.7)$$

### 2. Durum: *LR*

$y \in [a_1, b_1]$ ,  $z \in [b_2, c_2]$  ve  $x = y \cdot z$  olsun.  $y = \frac{x}{z}$  için aşağıdaki üyelik fonksiyonu meydana gelir

$$\mu_A \left( \frac{x}{z} \right) = \frac{x - a_1 z}{\alpha_1 z},$$

$\mu_A$  fonksiyonu  $z$ 'ye göre azalandır, diğer taraftan

$$\mu_B(z) = \frac{b_2 + \beta_2 - z}{\beta_2}$$

$\mu_B$  fonksiyonu da  $z$ 'ye göre azalandır, dolayısıyla bu fonksiyonların çarpımı, maksimum değerine  $z$ 'nin minimum değerinde yani  $z = b_2$ 'de ulaşır. Buradan

$$\mu_A \left( \frac{x}{b_2} \right) \cdot \mu_B(b_2) = \frac{x - a_1 b_2}{\alpha_1 b_2},$$

*LR* durumunda üyelik fonksiyonun aşağıdaki lineer fonksiyon olduğu sonucuna varılabilir,

$$\mu_2(x) = \frac{x - a_1 b_2}{\alpha_1 b_2}, \quad x \in [a_1 b_2, b_1 b_2]. \quad (4.8)$$

### 3. Durum: *RL*

$y \in [b_1, c_2]$ ,  $z \in [a_2, b_2]$  olmak üzere  $x = y \cdot z$  olsun.  $z = \frac{x}{y}$  için aşağıdaki durum gözlemlenebilir:

$$\mu_A(y) = \frac{b_1 + \beta_1 - y}{\beta_1}$$

üyelik fonksiyonu  $y$ 'ye göre azalandır, diğer taraftan

$$\mu_B \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{x - a_2 y}{\alpha_2 y}$$

$\mu_B$  fonksiyonu da  $y$ 'ye göre azalandır, dolayısıyla bu fonksiyonların çarpımı, maksimum değerine  $y$ 'nin minimum değerinde yani  $y = b_1$ 'de ulaşır. Buradan

$$\mu_A(b_1) \cdot \mu_B \left( \frac{x}{b_1} \right) = \frac{x - a_2 b_1}{\alpha_2 b_1},$$



$RL$  durumunda üyelik fonksiyonun aşağıdaki lineer fonksiyon olduğu sonucuna varılabilir,

$$\mu_3(x) = \frac{x - a_2b_1}{\alpha_2b_1}, \quad x \in [a_2b_1, b_1b_2]. \quad (4.9)$$

Şimdi (4.7),(4.8) ve (4.9) fonksiyonlarının ortak tanım aralıkları karşılaştırılacaktır.

**Önteorem 4.46.** *Eğer*  $\min \left\{ \frac{a_1b_2^2}{a_2}, \frac{a_2b_1^2}{a_1} \right\} = \frac{a_1b_2^2}{a_2}$  *ise*  $\mu_3 \leq \mu_2 \leq \mu_1, \forall x \in x \in [a_1a_2, b_1b_2]$ .

**İspat**  $\min \left\{ \frac{a_1b_2^2}{a_2}, \frac{a_2b_1^2}{a_1} \right\} = \frac{a_1b_2^2}{a_2}$  olsun.

$$\frac{a_1b_2^2}{a_2} \leq \frac{a_2b_1^2}{a_1} \iff a_1b_2 \leq a_2b_1$$

gözlemi ile  $\mu_2$ 'nin  $\mu_3$ 'den daha küçük olduğu sonucuna varılır. Aynı zamanda fonksiyonlar  $(b_1b_2, 1)$  noktasında kesiştiği için tartışılan aralıkta  $\mu_3 \leq \mu_2$  olduğu görülmektedir. Geriye  $\mu_1$  ve  $\mu_2$ 'yi kıyaslamak kalır. Kıyaslama,  $\mu_1$  ve  $\mu_2$ 'nin ortak çözümü ile yapılır ve aşağıdaki gibidir

$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a_1a_2})^2}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{x - a_1b_2}{\alpha_1b_2}$$

$\mu_1 = \mu_2$  ortak çözümünden aşağıdaki ikinci dereceden denklem elde edilir

$$x(\alpha_2 - b_2) + 2b_2\sqrt{a_1a_2}\sqrt{x} - (a_1b_2\alpha_2 + a_1a_2b_2) = 0.$$

Elde edilen ikinci dereceden denklemin diskriminantı

$$(2b_2\sqrt{a_1a_2})^2 - 4(a_2(a_1b_2\alpha_2 + a_1a_2b_2)) = 0$$

olur. Denklemin diskriminantı sıfıra eşit olduğundan,  $\mu_2$ 'nin  $\mu_1$ 'e teğet olduğu ve dolayısıyla  $\mu_2 \leq \mu_1$  olduğu sonucuna varılır.

$\mu_2$ 'nin  $\mu_1$ 'e teğet olduğu gözlemlendikten sonra,  $x = \frac{a_1b_2^2}{a_2}$  çözümünü elde etmek için aşağıdaki eşitlik çözülmelidir

$$\frac{d}{dx}\mu_1(x) = \frac{d}{dx}\mu_2(x).$$

Bu eşitlik çözülerek teğet kesişiminin  $x$  kordinatı hesaplanabilir.  $\square$

Yukarıda elde edilen tüm sonuçlar,  $A \cdot B$  bulanık sayısının sağ tarafına simetrik olarak kolayca dönüştürülebilir. Tartışmanın sonucu aşağıdaki teoremden özetlenmiştir.

**Teorem 4.47.**  $A = (a_1, b_1, c_1)$  ve  $B = (a_2, b_2, c_2)$  üçgensel fuzzy sayı olsun. Çarpım  $t$ -normu altındaki  $A \cdot B$  çarpımı aşağıdaki üyelik fonksiyonuna sahip bir fuzzy sayıdır.

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a_1 a_2})^2}{\alpha_1 \alpha_2}, & a_1 a_2 \leq x \leq \min \left\{ \frac{a_1 b_2^2}{a_2}, \frac{a_2 b_1^2}{a_1} \right\}, \\ \frac{x - a_1 b_2}{\alpha_1 b_2}, & \frac{a_1 b_2^2}{a_2} \leq x \leq b_1 b_2 \text{ ve } a_1 b_2 \leq a_2 b_1, \\ \frac{x - a_2 b_1}{\alpha_2 b_1}, & \frac{a_2 b_1^2}{a_1} \leq x \leq b_1 b_2 \text{ ve } a_2 b_1 \leq a_1 b_2, \\ \frac{c_2 b_1 - x}{\beta_2 b_1}, & b_1 b_2 \leq x \leq \frac{c_2 b_1^2}{c_1} \text{ ve } c_1 b_2 \leq c_2 b_1, \\ \frac{c_1 b_2 - x}{\beta_1 b_2}, & b_1 b_2 \leq x \leq \frac{c_1 b_2^2}{c_2} \text{ ve } c_2 b_1 \leq c_1 b_2, \\ \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c_1 c_2})^2}{\beta_1 \beta_2}, & \max \left\{ \frac{c_1 b_2^2}{c_2}, \frac{c_2 b_1^2}{c_1} \right\} \leq x \leq c_1 c_2. \end{cases} \quad (4.10)$$

Aşağıdaki iki önerme,  $\mu_{A \cdot B}$ 'nin doğrusal parçalarının ortak sınır koşullarında eşleştiğini gösterir.

**Önerme 4.48.** Eğer  $a_1 b_2 = a_2 b_1$  ise  $\frac{x - a_1 b_2}{\alpha_1 b_2} = \frac{x - a_2 b_1}{\alpha_2 b_1}$ .

**İspat**  $a_1 b_2 = a_2 b_1$  olsun.  $a_1 \alpha_2 = a_2 \alpha_1$ 'i gözlemlemek için  $b_2 = a_2 + \alpha_2$  ve  $b_1 = a_1 + \alpha_1$  özdeşliklerini kullanıyoruz. Son eşitliğin her iki tarafına  $a_1 \alpha_2$  terimini ekleyerek  $a_2 b_1 = a_1 b_2$  olduğunu gözlemliyoruz ve bu nedenle,

$$\frac{x - a_1 b_2}{\alpha_1 b_2} = \frac{x - a_2 b_1}{\alpha_2 b_1}.$$

Böylece ortak sınırları üzerinden  $\mu_3 = \mu_2$  olduğunu elde ederiz.

$a_1 b_2 = a_2 b_1$  eşitliği aynı zamanda  $\frac{a_1 b_2^2}{\alpha_2} = \frac{a_2 b_1^2}{\alpha_1}$  eşitliğini belirttiğinden, bunların tanım aralıklarının da eşit olduğunu görürüz ve  $\mu_3 = \mu_2$  olduğu sonucuna varabiliriz.  $\square$

**Önerme 4.49.** Eğer  $c_1 b_2 = c_2 b_1$  ise  $\frac{c_2 b_1 - x}{\beta_2 b_1} = \frac{c_1 b_2 - x}{\beta_1 b_2}, \forall x \in \left[ b_1 b_2, \frac{c_2 b_1^2}{c_1} \right]$ .

**İspat** Yukarıdaki önermenin ispatına benzer bir biçimde yapılabilir.  $\square$

$A < 0$  ve  $B < 0$ , için çarpma,  $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$  özdeşliği ile gerçekleştirilebilir. Eğer  $A < 0, B > 0$  ise  $A \cdot B = -((-A) \cdot (B))$  olur.

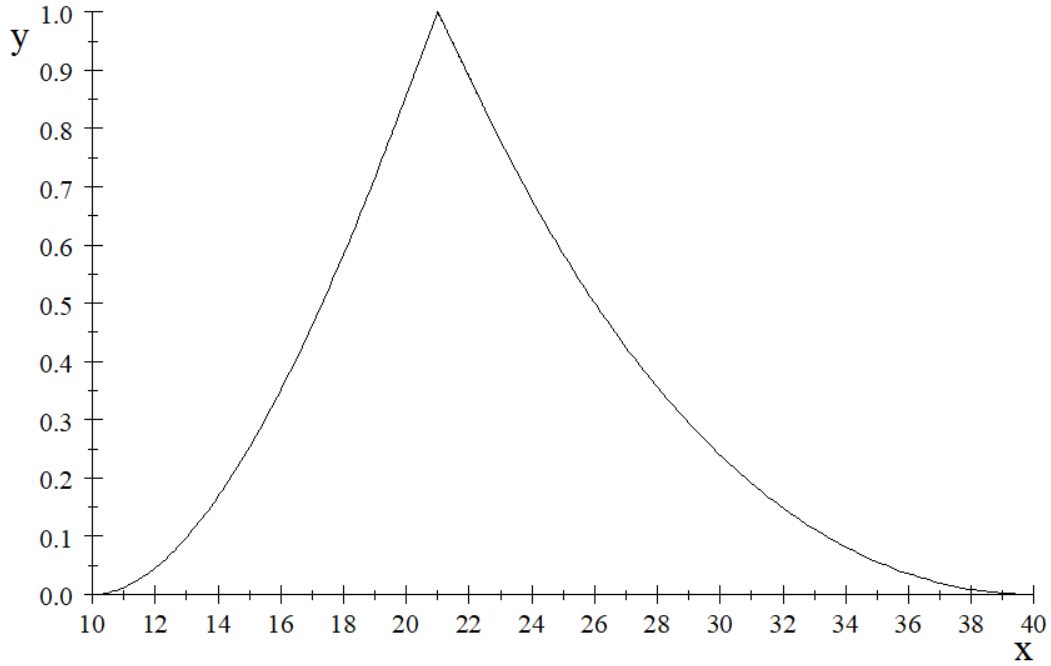
$B^{-1}$  terimi bir üçgensel fuzzy sayı olamayacağından, Seresht ve Fayek (2019)'te iddia edildiği gibi  $A \div B = A \cdot B^{-1}$  eşitliği kullanılarak doğrudan bölme yapılamayacağı anlaşılır. Bölme için bir çözüm,  $B^{-1}$ 'in teğet yaklaşımını ve ardından  $A \div B = A \cdot B^{-1}$  eşitliğini kullanmak olabilir (Hans 2005). Bir pozitif veya negatif fuzzy sayı  $B = (a, b, c)$ 'nin teğet yaklaşımı şu şekildedir:

$$B^{-1} = \left\langle \frac{1}{b}, \frac{\beta}{b^2}, \frac{\alpha}{b^2} \right\rangle_{1-x}.$$

**Örnek 4.50.**  $A = (2, 3, 4)$  ve  $B = (5, 7, 10)$  üçgensel fuzzy sayılar olmak üzere  $A$  ve  $B$ 'nin çarpımını 4.10 formülü ile hesaplayalım. Buradan,  $a_1b_2 = 14, a_2b_1 = 15, c_1b_2 = 28, c_2b_1 = 30$  olduğundan çarpım aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{10})^2}{2}, & 10 \leq x \leq 19.6, \\ \frac{x-14}{7}, & 19.6 \leq x \leq 21, \\ \frac{30-x}{9}, & 21 \leq x \leq 22.5, \\ \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{40})^2}{3}, & 22.5 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

$\text{supp}[A \cdot B] = [10, 40]$ ,  $\text{core}[A + B] = 21$  olarak bulunur.  $\min \left\{ \frac{a_1b_2}{a_2}, \frac{a_2b_1}{a_1} \right\} = 19.6$  and  $\max \left\{ \frac{c_1b_2}{c_2}, \frac{c_2b_1}{c_1} \right\} = 22.5$  olduğundan  $\mu_{A \cdot B}(x)$ ,  $[10, 19.6]$  ve  $[22.5, 40]$  aralıklarında birer parabolik fonksiyon,  $[19.6, 21]$  ve  $[21, 22.5]$  aralıklarında ise birer doğrusal fonksiyon olduğu görülmektedir.



**Şekil 4.2.**  $\mu_{A \cdot B}(x)$

### 4.1.3. Bazı Cebirsel Özellikler

Bu bölümde çarpım aritmetiğinin bazı temel özelliklerini inceleyeceğiz. Fuzzy sayılar  $T$ -aritmetiğin cebirsel özellikleri ayrıntılı olarak *Kawaguchi ve Da-te (1994)*'da incelenmiştir. *Kawaguchi ve Da-te (1994)* içindeki sonuçların çarpım t-normuna nasıl dönüştürülebileceğini göstermek için bazılarını ispatlayacağız. En önemli gözlem, iki normal ve konveks fuzzy sayının toplamının veya çarpımının aynı zamanda normal ve konveks bir fuzzy sayı olmasıdır. Bu kısımdaki önermeler yine *Soylu ve Aslan (2021) makalesinde yer almaktadır*.

**Önerme 4.51.** Çarpım t-normu ile toplama ve çarpmanın değişme özelliği vardır.  $*$   $\in \{+, \cdot\}$

$$A * B = B * A.$$

**İspat**  $Z = A * B$  olsun.  $*$ 'nin çarpım t-normu altındaki değişme özelliği şu anlama gelir:

$$\mu_Z(z) = \sup_{z=x*y} (\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)) = \sup_{z=y*x} (\mu_B(y) \cdot \mu_A(x)).$$

□

**Önerme 4.52.** Çarpım t-normu ile toplama ve çarpmanın birleşme özelliği vardır.  $*$   $\in \{+, \cdot\}$

$$(A * B) * C = A * (B * C).$$

**İspat**  $V = (A * B) * C$  ve  $V' = A * (B * C)$  olsun.  $*$  ve çarpım t-normu arasındaki ilişkiler sonucunda,

$$\begin{aligned} \mu_V(v) &= \sup_{z=s*z} ((\sup_{s=x*y} \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)) \cdot \mu_C(z)) \\ &= \sup_{v=(x*y)*z} (\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)) \cdot \mu_C(z) \\ &= \sup_{v=x*(y*z)} \mu_A(x) \cdot (\mu_B(y) \cdot \mu_C(z)) \\ &= \sup_{v=x*t} (\mu_A(x) \cdot (\sup_{v=x*t} \mu_B(y) \cdot \mu_C(z))) \\ &= \mu_{V'}(v). \end{aligned}$$

□

**Önerme 4.53.** 0 ve 1 çarpım t-normu altında sırasıyla toplama ve çarpmanın etkisiz elemanlarıdır:

$$A + 0 = A, A \cdot 1 = A$$

**Önerme 4.54.** Çarpım t-normu ile toplama ve çarpma işlemleri için ters işlem söz konusu değildir.  $A_+$  ve  $A_\times$  sırasıyla toplama ve çarpmaya göre  $A$ 'nın tersi olsun, diğer taraftan  $E_+$  ve  $E_\times$  sırasıyla toplama ve çarpmanın birim elemanı olsun, buna göre:

$$A + A_+ \neq E_+, A \cdot A_\times \neq E_\times.$$

**Önerme 4.55.** Çarpım t-normu aritmetiğinin dağılma özelliği aşağıdaki gibidir:

$$A \times (B + C) \subset A \times B + A \times C.$$

*Kawaguchi ve Da-te (1994)* makalesi, çarpım aritmetiği durumu için tam dağılma ihlalinin bir örneğini içerir. Bu gözlemler ışığında çarpım aritmetiği ile donatılmış fuzzy sayıların değişmeli monoidler oluşturduğu sonucuna varabiliriz. Bu durumda tam dağılma eksikliği, yarı halkalı bir yapıyı engeller.

#### 4.1.4. Üçgensel Yaklaşım

Çarpım t-normu ile iki fuzzy sayının toplamı veya çarpımının sonucu, genel olarak üçgensel fuzzy sayılar ile sonuçlanmaz. 4.4 ve 4.10 formüllerinde görüldüğü üzere ortaya çıkan sonuç parçalı olup, doğrusal ve ikinci dereceden üyelik fonksiyonlarına sahip fuzzy sayılardır. Yani bu tür işlemlerde şekil koruma yoktur (*Hong 2001*). Diğer taraftan iki fuzzy sayının, sağ ve sol kanat açıklıkları eşit ise toplamları tamamen ikinci dereceden bir üyelik fonksiyonuna sahip fuzzy sayılarla sonuçlanır. Bu durum, gerçekleştirilecek birden fazla toplama veya çarpma işlemi için oldukça karmaşık bir durum yaratmaktadır. Özellikle, sayıların sağ ve sol kanat açıklıkları birbirinden farklı ise oluşacak sonuçlar için genel bir formül bulmak oldukça zordur.

Bu zorluğu aşmanın en uygun yolu üçgensel yaklaşımlar kullanmaktır. Örneğin 4.4'deki toplam formülü için en uygun yaklaşım, ilgili doğrusal kısımları kullanmak ve tanım aralıklarını genişletmektir. Yani, iki fuzzy sayı toplandığında oluşan üyelik fonksiyonları için en iyi yaklaşım, doğrusal kısımların  $x$  eksenini kestiği yerleri baz alıp doğruları o noktaya

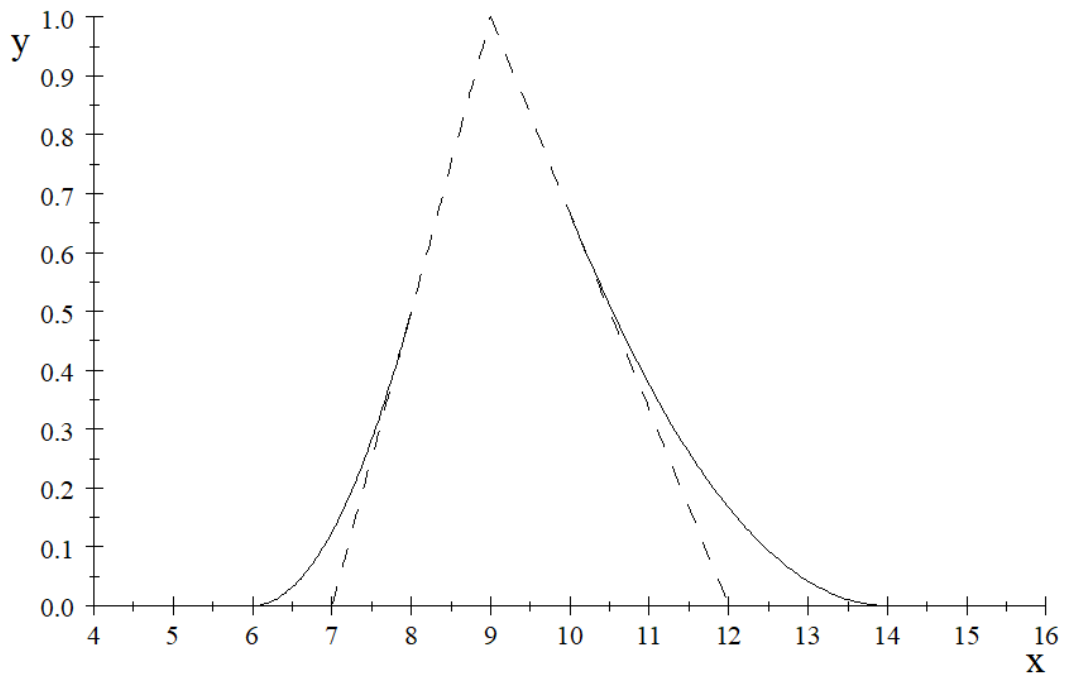
uzatmaktır. Böylece sonuç fuzzy sayısı bir üçgensel sayı formunu alır. Buna göre  $\mu_{A+B}$  nin yaklaşık değeri aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile ifade edilir,

$$\mu_{A+B}(x) \simeq \begin{cases} \frac{x-(b_1+a_2)}{\alpha_2}, & a_1 + a_2 + \alpha_1 \leq x \leq b_1 + b_2, \\ \frac{-x+(b_1+c_2)}{\beta_2}, & b_1 + b_2 \leq x \leq c_1 + c_2 - \beta_1. \end{cases}$$

Aynı durum 4.10'deki çarpım formülü için de geçerlidir. Bu durumda  $\mu_{A.B}(x)$ 'nin yaklaşık değeri  $a_1b_2 \leq a_2b_1$  ve  $c_2b_1 \leq c_1b_2$  için, aşağıdaki gibi olur,

$$\mu_{A.B}(x) \simeq \begin{cases} \frac{x-a_1b_2}{\alpha_1b_2}, & a_1b_2 \leq b_1b_2, \\ \frac{c_1b_2-x}{\beta_1b_2}, & b_1b_2 \leq x \leq c_1b_2. \end{cases}$$

Sonuç olarak bu yaklaşım ile çoklu işlemler kolaylıkla yapılabilir.  $\mu_{A+B}$  nin yaklaşık değeri aşağıdaki örnekte incelenecektir. Aynı zamanda bu yaklaşım *Soylu ve Aslan (2021)* makalesinde detaylı olarak incelenmiştir.



**Şekil 4.3.**  $\mu_{A+B}(x) \simeq$

**Örnek 4.56.**  $A = (1, 2, 4)$  ve  $B = (5, 7, 10)$  üçgensel iki fuzzy sayı olmak üzere,  $A$  ve  $B$  fuzzy sayılarının toplamını üçgensel yaklaşım ile elde edelim.

$\mu_{A+B}$ 'nin üyelik fonksiyonu:

$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} \frac{(x-6)^2}{8}, & 6 \leq x \leq 8, \\ \frac{x-7}{2}, & 8 \leq x \leq 9, \\ \frac{-x+12}{3}, & 9 \leq x \leq 10, \\ \frac{(x-14)^2}{24}, & 10 \leq x \leq 14. \end{cases}$$

Üçgensel yaklaşım ile  $\mu_{A+B}$ 'nin yaklaşık üyelik fonksiyonu:

$$\mu_{A+B}(x) \simeq \begin{cases} \frac{x-7}{2}, & 7 \leq x \leq 9, \\ \frac{-x+12}{3}, & 9 \leq x \leq 12, \end{cases}$$

olarak bulunur. (Bakınız, Şekil 4.3) Böylece, (7, 9, 12) üçgensel fuzzy sayısı elde edilir.

## 5. SONUÇLAR

Çarpım t-normu ile fuzzy aritmetik işlemler oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda, bu tipteki aritmetik için yalnızca yaklaşık sonuçlar hesaplayabilen algoritmalar veya ayrık noktalar için sonuç hesaplayan yöntemler sunulmuştur. Örneğin *Mesiar (1996)*'da önerilen yöntem, yalnızca  $\alpha_1 = \alpha_2$  ve  $\beta_1 = \beta_2$  özel durumunda çalışmaktadır. Oysa bu tezde, çarpım t-normu ile aritmetik için elde edilen formüller  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  ve  $\beta_1 \neq \beta_2$  durumunda da çalıştığından, *Mesiar (1996)*'dan daha genel olduğu gözlemlenebilir. Bu sayede, elde edilen bu formüller şimdiye kadar önerilen hesaplama yöntemlerinin yerini kolaylıkla alacaktır. Diğer taraftan, çarpım t-normu ile aritmetik için bazı cebirsel özellikler gösterilmiştir. Son olarak, formüller incelendiğinde ortaya çıkan üyelik fonksiyonları bir üçgensel fuzzy sayı belirtmemektedir. Bu durum, tekrarlayan işlemler için problem yaratmaktadır. Bu problem, uygun yaklaşımların önerilmesi ile giderilmiştir. Yapılan çalışma, uluslararası indeksli Q1 sınıfı bir dergide yayınlanmış olup literatürdeki yerini almıştır.



## 6. KAYNAKLAR

- Fullér, R. and Keresztfalvi, T. 1991. *On generalization of Nguyen's theorem*. Fuzzy sets and systems. 41(3): 371-374.
- Hanss M. 2005. Applied fuzzy arithmetic, Springer.
- Hong D. H. 2001. *Shape preserving multiplications of fuzzy numbers*. Fuzzy Sets and Systems. 123(1): 81-84.
- Kawaguchi M. F. and Da-te, T.1994. *Some algebraic properties of weakly non-interactive fuzzy numbers*. Fuzzy Sets and Systems, 68(3): 281-291.
- Menger K. 1942. Statistical metrics, Proc. Nat. Acad. Sci., 8: 535-537.
- Mesiar R. 1996. *A note to the t-sum of lr fuzzy numbers*. Fuzzy sets and systems 79(2): 259-261.
- Mesiar R. 1997. *Shape preserving additions of fuzzy intervals*. Fuzzy Sets and Systems 86(1): 73-78.
- Nguyen H. T. 1978. *A note on the extension principle for fuzzy sets*. Journal of mathematical analysis and applications 64(2): 369-380.
- Seresht N. G. and Fayek A. R. 2019. *Computational method for fuzzy arithmetic operations on triangular fuzzy numbers by extension principle*. International Journal of Approximate Reasoning 106: 172-193.
- Schweizer B. and Sklar A. 1958. *Espaces Metriques Aleatoires*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A. 247: 2092-2094.
- Schweizer B. and Sklar A. 1960. *Statistical Metric Spaces*. Pasific J. Math., 10: 313-334.
- Schweizer B. and Sklar A. 1961. *Associative fuctions and statistical triangle inequalities*. Publ. Math. Debrecen. 8: 169-186.
- Soylu, G. and Aslan, M. E. 2021. *Fuzzy arithmetic with product t-norm*. Iranian Journal of Fuzzy Systems 18(6): 185-197.

Zadeh, L. A. 1965. *Fuzzy sets information and control*. 8(3): 338-353.

Zadeh L. A. 1974. *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning*, in: Learning systems and intelligent robots, Springer.1-10.

## ÖZGEÇMİŞ

Muhammed Eyyüb ASLAN  
20195127009@ogr.akdeniz.edu.tr



## ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2019-2023	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2012-2019	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü