T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS KATSAYILI ANALİTİK VE MULTİVALENT FONKSİYONLAR VE BUNLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Gültekin TINAZTEPE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANTALYA
2003

KOMPLEKS KATSAYILI ANALİTİK VE MULTİVALENT FONKSİYONLAR VE BUNLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Gültekin TINAZTEPE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS KATSAYILI ANALİTİK VE MULTİVALENT FONKSİYONLAR VE BUNLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Gültekin TINAZTEPE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 15/01/ 2003 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 90 not takdir edilerek oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Veli KURT ....

Yard. Doç. Dr. Hüseyin IRMAK..
(Danışman)

Yard. Doç. Dr. Melike YÜCEL ....

ÖZET

KOMPLEKS KATSAYILI ANALİTİK VE MULTİVALENT FONKSİYONLAR VE BUNLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Gültekin TINAZTEPE

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yard. Doç. Dr. Hüseyin Irmak
Ocak-2003, 48 Sayfa

Bu çalışmanın amacı, bazı analitik ve multivalent fonksiyonların; yıldızıllığı, konveksliği ve konvekse yakınlığını içeren bazı teoriler ileri sürerek Analitik ve Geometrik Fonksiyonlar Teorisi'ne katkıda bulunmaktır. İlk başta fonksiyonların yıldızıllığı, konveksliği ve konvekse yakınlığı ile ilgili temel tanım ve teoriler verilmiş ve de bazıları da ispatlanmıştır. Bu çalışmada kesirsel türev operatörü de kullanılarak analitik ve multivalent fonksiyonların ve bu fonksiyonların oluşturdukları bazı sınıfların çalışma kapsamı biraz daha geniş tutulmuştur.

Tanımlanan $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ ve $\mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ aileleri, multivalent fonksiyonların oluşturduğu alt sınıflar olup, bu sınıfların analitik ve geometrik fonksiyonlar teorisine katmış olduğu iki yeni teorem elde edilmiş ve bu sonuçlar literatüre girmiştir. Bu elde edilen teoremlerin çok özel sonuçları da literatürde yayınlanan bazı başka çalışmaları içermektedir. Ayrıca; Bazı operatörlerle (Kesirsel integral operatörü, kesirsel türev operatörü, adi türev operatörü ve integral operatörü) tanımlanan yeni fonksiyonların üstte belirtmiş olduğumuz sınıflarla olan ilişkisi belirlenerek bazı sonuçlara varılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Birim disk, analitik fonksiyon, multivalent fonksiyon, yıldızıl fonksiyon, konveks fonksiyon, konvekse yakın fonksiyon, kesirsel türev, kesirsel integral, integral operatörü, kompleks eşitsizlikler.

JÜRİ: Prof.Dr. Veli Kurt
Yard. Doç. Dr. Hüseyin Irmak
Yard. Doç. Dr. Melike Yücel

ABSTRACT

ANALYTIC AND MULTIVALENT FUNCTIONS WITH COMPLEX COEFFICIENTS AND THEIR CERTAIN SUBCLASSES

Gültekin TINAZTEPE

M.Sc. in Mathematics
Adviser: Assistant Professor Hüseyin Irmak
January-2003, 48 Pages

The aim of this thesis is to contribute to Analytic and Geometric Functions Theory by using some theories concerning convexity, starlikeness and close-to-convex of some analytic and multivalent functions. Because of this reason, at the begining, fundemental theorems and definitions concerning starlikeness, convexity and close-to-convexity of functions given and some of them proved. In this work, working content of analytic and multivalent functions and some of their classes was extended by using fractional derivative operator.

Defined $\mathbb{W}_{\delta}(p;\mu)$ and $\mathbb{V}_{\delta}(p;\mu)$ families are subclasses of multivalent functions and two theorems which were introduced to analytic and geometric functions by these subclasses were derived and results entered to mathematical literature. Special forms of these theorems include other works published. Furthermore, by determining the relation between functions defined with some operators (fractional integral operator, fractional derivative operator, ordinary derivative operator and ordinary integral operator) and classes expressed above, some results derived.

KEY WORDS: Unit Disk, analytic function, multivalent function, starlike function, convex function, close to convex function, fractional derivative, fractional integral, integral operator, complex inequalities.

COMMITTEE: Prof.Dr. Veli Kurt
Assist. Prof. Dr. Hüseyin Irmak
Assist. Prof. Dr. Melike Yücel

ÖNSÖZ

Analitik fonksiyonların geometrik özellikleri Karmaşık fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu özelliklere ilişkin çalışmalar 1930 lu yıllara dayanmaktadır. Bu tür fonksiyonlar için önceleri çok özel fonksiyonlar kullanılmakta olup, daha sonraki yıllarda da; açık birim diskte analitik ve bire bir olan

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k$$

ve açık delinmiş birim diskte de yine analitik ve univalent olan

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{k=-p+n}^{\infty} a_k z^k$$

şeklinde olan seri açılımlı fonksiyonlara genişletilmiştir. Bu her iki türdeki seri açılımlı fonksiyonlarda n ve p birer doğal sayı ve a_k kompleks katsayılardır. Bunlara ilişkin birçok çalışma kaynaklar kısmında verilmiştir. Literatürde, ilk başta, her iki seri için katsayılar pozitif veya negatif olarak alınmış ve daha sonraları da kompleks katsayılar olarak incelenmiştir.

Bu tür fonksiyonlara ait katsayı bağıntıları ve diğer özellikleri belirlenmiştir. Bu çalışmada, birinci türdeki fonksiyonlar ele alınarak, Analitik ve Geometrik Fonksiyonlar Teorisi'ne, yeni tanımlar ve bu tanımlar paralelinde yeni teoriler eklenilmiştir. Elde edilen bu teorilerin çok özel sonuçlarını da, literatürde yer alan bazı çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Bu alanda ülkemizde çok az sayıda bilim adamı, çalışmalar da bulunduğundan dolayı, bu alanda çalışanlara ve çalışacak olanlara yardımcı olacak şekilde toplu bir çalışma özelliğini taşıyacağı kanısındayız.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanı Sayın Yard. Doç. Dr. Hüseyin IRMAK'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

β	Beta fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$D_z^{\delta}(f(z))$	Bir $f(z)$ fonksiyonunun kesirsel mertebeden türevi
$D_z^{-\delta}(f(z))$	Bir $f(z)$ fonksiyonunun kesirsel mertebeden integrali
$\mathbb{E}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z \rvert < 1\}$
$\partial\mathbb{E}$	$\mathbb{E}$ kümesinin sınırı
$f^{(q)}(z)$	Bir $f(z)$ fonksiyonunun q. mertebeden adi türevi
Γ	Gamma fonksiyonu
$J(f)$	Bir $f(z)$ fonksiyonunun integrali
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}_0^-$	$\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı ve Amacı

Birim diskte yani $\mathbb{E}$ de analitik olan fonksiyonların ; konveks'e yakınlığı, konveks'liği ve de yıldızıllığı, Analitik ve Geometrik Fonksiyonlar Teorisi'nde (Analytic and Geometric Function Theory) önemli bir yer tutmaktadır. Bu alandaki araştırmalara, ilk önce;

$$f(z) = 1 + \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.1}$$

şeklindeki seri açılımları olan analitik fonksiyonlarla başlanmıştır. Bu tür çalışmalara Marx (1932), Libera (1964), Bernardi (1969), Calys (1965) ve Robertson (1932,1964), yayınları örnek verilebilir. Daha sonraları da, üstte verilen fonksiyonlar bir adım daha genişletilerek:

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.2}$$

şeklindeki fonksiyonlar ele alınmıştır. Bu tür fonksiyonlarla ilgili çalışmalara, Marx (1932), Robertson (1936,1964), Bernardi (1969), Szegö ve Polya (1954), Twomey (1970), Jacubowski (1972), Silverman (1975), Srivastava, Owa ve Chatterjea (1987) ve Bajpai (1974) yayınları referans olarak verilebilir. Literatürde ise, en son yer alan ve üstteki her iki fonksiyon türünü de kapsayan ve de

$$f(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k \quad (n, p \in \mathbb{N}) \tag{1.3}$$

tipinde olan fonksiyonlarla, geometrik fonksiyonlar teorisi en geniş hale getirilmiştir. Bu tür fonksiyonları içeren makale ve kitaplar içinde Hayman (1958), Yamakawa (1992), Duren (1983), Goodman (1983), Srivastava ve Owa (1992), Chen, Irmak ve Srivastava (1996,1997) yayınları referans olarak verilebilir.

(1.1), (1.2) ve (1.3) formundaki fonksiyonları da kapsayan aşağıdaki seri açılımlı fonksiyonlar varsayılabilir, örneğin

$$f_\alpha(z) = \alpha z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k \quad (\alpha \in \mathbb{C}; n, p \in \mathbb{N}) \tag{1.4}$$

şeklindeki fonksiyonlar verilebilir.

Fakat, bu türdeki seri açılımlı fonksiyonlar, (1.3) şekline indirgenebilir fonksiyonlardır. (1.3) veya (1.4) formundaki fonksiyonlara p--değerli analitik fonksiyon (p--valently analytic function) ya da multivalent analitik fonksiyon (multivalently analytic function) adı verilmektedir.

Bu yukarıdaki bütün fonksiyonlarda a_k katsayıları kompleks sayılar kümesinden seçilirse, ilgili fonksiyonlara kompleks katsayılı multivalent ya da kompleks katsayılı p-değerli, a_k katsayıları pozitif reel sayılar kümesinden seçilirse, ilgili fonksiyonlara pozitif katsayılı multivalent ya da pozitif katsayılı p-değerli, a_k katsayıları negatif reel sayılar kümesinden seçilirse, ilgili fonksiyonlara negatif katsayılı multivalent ya da negatif katsayılı p-değerli fonksiyon adı verilir.

Bu bölümde; belirtmiş olduğumuz (1.3) formundaki fonksiyonları kullanarak, varmak istediğimiz hedefler için gerekli tanım ve teoremler verilecektir.

1.2. Temel Bigiler ve Kavramlar

Tanım 1.2.1. (Brown ve Churchill 1996) Bir $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinin her iç noktasında türevlenebilen fonksiyonlara, $\mathbb{D}$ de analitik ya da regüler fonksiyonlar denir.

Tanım 1.2.2. (Nehari 1952) Bir $f(z)$ fonksiyonu bir $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde bire-bir ise yani; her bir $u, v \in \mathbb{D}$ için $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$ oluyor ise $f(z)$ fonksiyonuna, $\mathbb{D}$ de univalent ya da yalınkat fonksiyon denir.

Tanım 1.2.3. (Nehari 1952) Bir $z \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ için, z den çıkan her ışın ile $\mathbb{D}$ nin arakesiti, doğru parçası veya bir ışın ise, $\mathbb{D}$ bölgesine, z noktasına göre yıldızıldır denir. Eğer, her $z \in \mathbb{D}$ için yıldızıllık korunuyor ise , $\mathbb{D}$ ye sadece yıldızıl bölge adı verilmektedir.

Tanım 1.2.4. (Nehari 1952) $\mathbb{E}$ bölgesinde analitik ve görüntü kümesi yıldızıl olan fonksiyonlara, $\mathbb{E}$ de yıldızıl fonksiyonlar denir. Bu tür fonksiyonların oluşturduğu aile $\mathbb{Y}$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.5. $\mathbb{E}$ bölgesinde analitik ve univalent olan

$$f(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \in \mathbb{R}; n, p \in \mathbb{N}) \tag{1.5}$$

şeklindeki fonksiyonlar sınıfını $\mathbb{T}(n,p)$ ile gösterilsin. Bu tür fonksiyonlara p-değerli ya da multivalent analitik fonksiyonlar adı verilir.

Tanım 1.2.6. Her $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2, x \in \Delta$ ve $y \in \Delta$ olsun. Her λ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ için

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in \Delta$$

oluyorsa, Δ bölgesine konveks bölge denir.

Tanım 1.2.7. $\mathbb{E}$ bölgesinde analitik ve univalent olan

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}) \tag{1.6}$$

şeklindeki fonksiyonlar sınıfı $\mathbb{T}(n)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.8. (Srivastava ve Owa 1992) Eğer $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu,

$$\Re e \left\{ \frac{z f'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \quad (\forall z \in \mathbb{E}; n, p \in \mathbb{N}; 0 \leq \alpha < p) \tag{1.7}$$

koşulunu sağlıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu α mertebeden yıldızıl'dır denir. Bu tür fonksiyonlar sınıfı $\mathbb{Y}_{n,p}(\alpha)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.9. (Srivastava ve Owa 1992) Eğer $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu,

$$\mathfrak{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad (\forall z \in \mathbb{E}; n,p \in \mathbb{N}; 0 \leq \alpha < p) \tag{1.8}$$

koşulunu sağlıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu α mertebeden konveks'tir denir. Bu tür fonksiyonlar sınıfını $\mathbb{K}_{n,p}(\alpha)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.10. (Srivastava ve Owa 1992) Eğer $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu,

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{f'(z)}{z^{p-1}}\right\} > \alpha \quad (\forall z \in \mathbb{E}; n,p \in \mathbb{N}; 0 \leq \alpha < p) \tag{1.9}$$

koşulunu sağlıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu α mertebeden p-değerli konveks'e yakın'dır denir. Bu tür fonksiyonların oluşturduğu aile $\mathbb{KY}_{n,p}(\alpha)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.11. (Goodman 1983) Eğer $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu,

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0, \quad (\forall z \in \mathbb{E}) \tag{1.10}$$

koşulunu sağlıyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna orijine göre yıldızıl'dır denir. Bu tür fonksiyonların oluşturduğu aile $\mathbb{Y}_{n,p}(0)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.12. (Nehari 1952) $\mathbb{E}$ bölgesinde analitik olan ve görüntü kümesi konveks olan fonksiyonlara, $\mathbb{E}$ de konveks fonksiyonlar denir. Bu tür fonksiyonların oluşturduğu aile $\mathbb{K}$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.13. (Nehari 1952) Bir $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \quad (\forall z \in \mathbb{E}) \tag{1.11}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, $f(z)$ ye $\mathbb{E}$ de orijine göre p-değerli yıldızıl fonksiyon adı verilir. Bu tür fonksiyonların oluşturduğu aile $\mathbb{Y}_{n,p}(0)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.14. (Nehari 1952) Bir $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu

$$\mathfrak{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \quad (\forall z \in \mathbb{E}) \tag{1.12}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, $f(z)$ ye $\mathbb{E}$ de orijine göre p-değerli konveks fonksiyon adı verilir. Bu tür fonksiyonların oluşturduğu aile $\mathbb{K}_{n,p}(0)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.15. (Goodman 1983) Eğer $f(z) \in \mathbb{T}(n)$ fonksiyonu,

$$\Re e\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha, \quad (\forall z \in \mathbb{E}, 0 \leq \alpha < 1) \tag{1.13}$$

koşulunu sağlıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu α mertebeden yıldızıldır denir. Bu tür fonksiyonların oluşturduğu aile $\mathbb{Y}_n(\alpha) = \mathbb{Y}_{n,1}(\alpha)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.16. (Goodman 1983) Eğer $f(z) \in \mathbb{T}(n)$ fonksiyonu,

$$\Re e\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad (\forall z \in \mathbb{E}, 0 \leq \alpha < 1) \tag{1.14}$$

koşulunu sağlıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu α mertebeden konvekstir denir. Bu tür fonksiyonların oluşturduğu aile $\mathbb{K}_n(\alpha) = \mathbb{K}_{n,1}(\alpha)$ ile gösterilecektir.

Teorem 1.2.17. (Goodman 1983) Bir $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonunun α $(0 \leq \alpha < p)$ mertebeden konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul $zf'(z)$ fonksiyonunun α $(0 \leq \alpha < p)$ mertebeden yıldızıl olmasıdır.

İspat: Bir $f(z)$ fonksiyonu için,

$$\frac{z(zf'(z))'}{zf'(z)} = \frac{z[f'(z) + zf''(z)]}{zf'(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

olup ve $g(z) = zf'(z)$ denilirse

$$\Re e\left\{\frac{z(zf'(z))'}{zf'(z)}\right\} = \Re e\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\} = \Re e\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

elde edilir. Bu yukarıdaki rasyonel ifadelerin herbirinde $z = 0$ noktası kaldırılabilir tekil noktalarıdır.

Tanım 1.2.18. (Goodman 1983) Eğer $f(z) \in \mathbb{T}(n)$ fonksiyonu,

$$\Re e\{f'(z)\} > \alpha \quad (\forall z \in \mathbb{E}, 0 \leq \alpha < 1) \tag{1.15}$$

koşulunu sağlıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu α mertebeden konveks'e yakındır denir. Bu tür fonksiyonlar sınıfı da $\mathbb{KY}_n(\alpha) \equiv \mathbb{KY}_{n,1}(\alpha)$ ile gösterilecektir.

Sonuç 1.2.19. Sırasıyla, Tanım 1.2.8 - Tanım1.2.11 ve Tanım 1.2.13 tanımlarından ve de Tanım 1.2.15, Tanım1.2.16 ve Tanım 1.2.18'deki tanımlardan da aşağıdaki ilişkiler kolayca görülmektedir.

$$\begin{gathered} \mathbb{Y}_{n,p}(\alpha) \subset \mathbb{Y}_{n,p}(0), \mathbb{K}_{n,p}(\alpha) \subset \mathbb{K}_{n,p}(0), \mathbb{KY}_{n,p}(\alpha) \subset \mathbb{KY}_{n,p}(0), \\ \mathbb{Y}_{n}(\alpha) \subset \mathbb{Y}_{n}(0), \mathbb{K}_{n}(\alpha) \subset \mathbb{K}_{n}(0), \mathbb{KY}_{n}(\alpha) \subset \mathbb{KY}_{n}(0) \end{gathered} \tag{1.16}$$

Teorem 1.2.20. (Duren 1983) Bir $f(z)$ fonksiyonu, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik fakat sabit olmasın. $|f(z)|$ değeri $\mathbb{S}$ nin hiçbir iç noktasında maksimum olmaz. Maksimum değerini, sadece $\mathbb{S}$ nin sınırında alır. Bu Maksimum Modül Prensibi olarak bilinir.

Tanım 1.2.21. Gamma (Γ) fonksiyonu her $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_0^-$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \tag{1.17}$$

şeklinde tanımlanır. Özellikle; $n \in \mathbb{N}$ ise

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \tag{1.18}$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.22. Beta (β) fonksiyonu her $n, m \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_0^-$ için

$$\beta(n,m) = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1} dt \tag{1.19}$$

şeklinde tanımlanır.Özellikle, Gamma ve Beta fonksiyonları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\beta(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \tag{1.20}$$

Eğer $n, m \in \mathbb{N}$ ise

$$\beta(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!} \tag{1.21}$$

Tanım 1.2.23. (Samko vd 1993) Bir $f(z)$ fonksiyonunun δ mertebeden kesirsel integrali:

$$D_z^{-\delta}(f(z)) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^z \frac{f(t)}{(z-t)^{1-\delta}} dt \tag{1.22}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\delta > 0$ ve $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin orijini kapsayan basit bağlantılı bir bölgesinde analitiktir. Eğer, $z-t>0$ ise, $\log(z-t)$ gerçel alınarak $(z-t)^{\delta-1}$ teriminin katlılığı kaldırılır.

Tanım 1.2.24. (Samko vd 1993) Bir $f(z)$ fonksiyonunun δ mertebeden kesirsel türevi:

$$D_z^{\delta}(f(z)) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^z \frac{f(t)}{(z-t)^{\delta}} dt \quad (\forall z \in \mathbb{E}) \tag{1.23}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\delta > 0$ ve $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin orijini kapsayan basit bağlantılı bir bölgesinde analitiktir. Eğer, $z-t>0$ ise, $\log(z-t)$ gerçel alınarak $(z-t)^{-\delta}$ teriminin katlılığı kaldırılır.

Tanım 1.2.25. (Srivastava ve Owa 1989) Tanım 1.2.23 'ün koşulları altında, bir $f(z)$ fonksiyonunun $n+\delta$ mertebeden kesirsel türevi:

$$D_z^{n+\delta}(f(z)) = \frac{d^n}{dz^n} D_z^{\delta}(f(z)) \quad (\forall z \in \mathbb{E}; n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.24}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.26. (Libera 1964) Bir $f(z) \in \mathbb{T}(n)$ univalent fonksiyonunun integral operatörü:

$$J_c(f(z)) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \quad (\forall z \in \mathbb{E}; c > -1) \tag{1.25}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.27. (Bernardi 1969) Bir $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonunun integral operatörü:

$$J_{c,p}(f(z)) = \frac{c+p}{z^c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \quad (\forall z \in \mathbb{E}; c > -p) \tag{1.26}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 1.2.28. (Jack 1971) $w(z)$, $w(0)=0$ koşulunu gerçekleyen E'de analitik bir fonksiyon ve $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$ olsun. Eğer $|w(z)|$, maksimum değerine $|z| = r$ üzerindeki bir z_0 noktasında ulaşıyorsa

$$z_0 w'(z_0) = c w(z_0) \quad (c \geq 1) \tag{1.27}$$

eşitliğini sağlayacak bir c vardır. Bu lemma, Jack's Lemma'sı olarak bilinir.

Lemma 1.2.29. (Szegö ve Polya 1954) $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ analitik, $z \in \mathbb{E}$ noktaları için $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda $z \in \mathbb{E}$ noktaları için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ dir. Üstelik $z_0 \in D$ $(z_0 \neq 0)$ için $|f(z_0)| \leq |z_0|$ ise c, $|c| = 1$ özelliğinde bir sabit olmak üzere, $f(z) = cz$ biçimindedir. Bu lemma da, Schwarz lemma'sı olarak bilinir.

1.3. Bazı Operatörler ve Dönüşümler

Teorem 1.3.1. (Chen vd 1997) $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ olsun. Bu durumda; $\forall z \in \mathbb{E}$ için $f(z)$ fonksiyonunun δ $(\delta > 0)$ kesirsel mertebeden integrali;

$$D_z^{-\delta}(f(z)) = \frac{p!}{\Gamma(p+\delta+1)}\left[1+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p+\delta+1)}{p!\Gamma(k+\delta+1)}a_k z^{k-p}\right]z^{p+\delta} \tag{1.28}$$

şeklindedir.

İspat: $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ olsun. Tanım 1.2.23'ün kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
D_z^{-\delta}(f(z)) &= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^z \frac{f(t)}{(z-t)^{1-\delta}}dt \\
&= \frac{u1}{\Gamma(\delta)}\int_0^z \left\{\frac{t^p+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}a_k t^k}{(z-t)^{1-\delta}}\right\}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\left\{\int_0^z t^p(z-t)^{\delta-1}dt+\int_0^z\left[\sum_{k=n+p}^{\infty}t^k(z-t)^{\delta-1}a_k\right]dt\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\delta)}\left\{\int_0^z t^p(z-t)^{\delta-1}dt+\sum_{k=n+p}^{\infty}a_k\left[\int_0^z t^k(z-t)^{\delta-1}dt\right]\right\}
\end{aligned}$$

Burada

$$I = \int_0^z t^p(z-t)^{\delta-1}dt \;\; \text{ve} \;\; J = \int_0^z t^k(z-t)^{\delta-1}dt \tag{1.29}$$

olarak alınsın ve önce J integrali çözülsün.

$$J = \int_0^z t^k(z-t)^{\delta-1}dt$$

integrali için

$$uz = z-t \Rightarrow dt = -zdu \;\; ve \;\; t = z(1-u)$$

şeklinde değişken değişimi yapılırsa

$$J = z^{k+\delta}\int_0^1 u^{\delta-1}(1-u)^k du$$

elde edilir. Burada, Beta fonksiyonuna geçilirse

$$J = z^{k+\delta}\beta(\delta, k+1) = z^{k+\delta}\frac{k!\Gamma(\delta)}{\Gamma(k+\delta+1)} \tag{1.30}$$

elde edilir. Eğer, (1.30)'da ki ifade de $k = p$ alınırsa

$$I = z^{p+\delta}\beta(\delta, p+1) = z^{p+\delta}\frac{p!\Gamma(\delta)}{\Gamma(p+\delta+1)} \tag{1.31}$$

bulunur. Böylece; I integrali de çözülmüş olur. (1.30) ve (1.31) deki ifadelerden:

$$\begin{aligned} D_z^{-\delta}(f(z)) &= \frac{z^{p+\delta}}{\Gamma(\delta)}\left[\frac{p!\Gamma(\delta)}{\Gamma(p+\delta+1)} + \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(\delta)}{p!\Gamma(k+\delta+1)}a_k z^{k-p}\right] \\ &= \left[\frac{p!}{\Gamma(p+\delta+1)} + \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{\Gamma(k+\delta+1)}a_k z^{k-p}\right] z^{p+\delta} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da, bize (1.28) ü verir. Böylece, (1.5) formundaki bir $f(z)$ fonksiyonunun kesirsel mertebeden integrali bulunmuş olur.

Teorem 1.3.2. (Chen vd 1997) $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ olsun. Bu durumda, $\forall z \in \mathbb{E}$ için bir $f(z)$ fonksiyonunun δ $(0 \leq \delta < 1)$ kesirsel mertebeden türevi

$$D_z^{\delta}(f(z)) = \frac{p!}{\Gamma(p-\delta+1)}\left[1 + \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p-\delta+1)}{p!\Gamma(k-\delta+1)}a_k z^{k-p}\right] z^{p-\delta} \tag{1.32}$$

olur.

İspat: Tanım 1.2.24 deki kesirsel mertebeden türev tanımı kullanılırsa, istenene kolayca varılır.

Teorem 1.3.3. (Chen vd 1997) $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ olsun. Bu durumda, $\forall z \in \mathbb{E}$ için

$$D_z^{1+\delta}(f(z)) = \frac{p!}{\Gamma(p-\delta)}\left[1 + \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p-\delta)}{p!\Gamma(k-\delta)}a_k z^{k-p}\right] z^{p-\delta-1} \tag{1.33}$$

olur.

İspat: Teorem 1.3.2. nin ispatında δ yerine $1+\delta$ alınırsa, istenen kolayca görülür.

Sonuç 1.3.4. (Owa 1978) $f(z) \in \mathbb{T}(n)$ olsun. Bu durumda; $\forall z \in \mathbb{E}$ için $f(z)$ fonksiyonunun δ $(\delta > 0)$ kesirsel mertebeden türevi,

$$D_z^{-\delta}(f(z)) = \frac{z^{1-\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\left[1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k!\Gamma(2+\delta)}{\Gamma(k+\delta+1)} a_k z^{k-1}\right] \tag{1.34}$$

olur.

İspat: Teorem 1.3.1. in ispatında $p = 1$ alınırsa, $\mathbb{T}(n,1) \equiv \mathbb{T}(n)$ olur. Bu ise istenen ispat için yeterlidir.

Sonuç 1.3.5. (Owa 1978) $f(z) \in \mathbb{T}(n)$ olsun. Bu durumda; $\forall z \in \mathbb{E}$ için

$$D_z^{\delta}(f(z)) = \frac{z^{1-\delta}}{\Gamma(2-\delta)}\left[1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k!\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(k-\delta+1)} a_k z^{k-1}\right] \tag{1.35}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.3.4 in ispatında δ yerine $-\delta$ alınırsa, istenen kolayca görülür.

Sonuç 1.3.6. (Owa 1978) $f(z) \in \mathbb{T}(n)$ olsun. Bu durumda; $\forall z \in \mathbb{E}$ için

$$D_z^{1+\delta}(f(z)) = \frac{z^{-\delta}}{\Gamma(1-\delta)}\left[1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k!\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(k-\delta)} a_k z^{k-1}\right] \tag{1.36}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.3.5. in ispatında δ yerine $1+\delta$ alınırsa, istenen kolayca görülür.

Teorem 1.3.7. (Chen vd 1997) $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ olsun. Bu durumda;

$$J_{c,p}(f(z)) = \left[1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c+p}{k+c} a_k z^{k-p}\right] z^p, (\forall z \in \mathbb{E}; c > -p) \tag{1.37}$$

olur. Yine, $J_{c,p}f(z) \in T(n,p)$ olur.

İspat: $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ olsun. Tanım 1.2.10 ve Tanım 1.2.27 den:

$$\begin{aligned} J_{c,p}(f(z)) &= \frac{c+p}{z^c}\int_0^z t^{c-1} f(t)dt \\ &= \frac{c+p}{z^c}\int_0^z \left[t^{c+p-1} + \sum_{k=n+p}^{\infty} t^{k+c-1} a_k\right] dt \end{aligned}$$

$$= \frac{c+p}{z^c}\left[\int_0^z t^{c+p-1}dt + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k \left(\int_0^z t^{k+c-1}dt\right)\right]$$

$$= \frac{c+p}{z^c}\left\{ \left.\frac{t^{c+p}}{c+p}\right|_{t=0}^{t=z} + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k \left(\left.\frac{t^{c+k}}{c+k}\right|_{t=0}^{t=z}\right)\right\}$$

$$= z^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c+p}{k+c} a_k z^k$$

bulunur. Böylece, (1.5) deki gibi tanımlanan bir $f(z)$ fonksiyonunun integral operatörü de elde edilmiş olur.

Sonuç 1.3.8. (Libera 1964) $f(z) \in \mathbb{T}(n)$ olsun. Bu durumda;

$$J_c(f(z)) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c+1}{k+c} a_k z^{k+1} \quad (\forall z \in \mathbb{E}; c > -1) \tag{1.38}$$

olur. Yine, $J_c f(z) \in T(n)$ olduğu açıktır.

İspat: Teorem 1.3.7. nin ispatında $p = 1$ alınırsa, istenen elde edilir.

Tanım 1.3.9. (Chen vd 1996) Bir $f(z) \in \mathbb{T}(n, p)$ fonksiyonunun, q. mertebeden adi türevi:

$$f^{(q)}(z) = \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} a_k z^{k-q} \tag{1.39}$$

$$(p \geq q; p \in \mathbb{N}; q \in \mathbb{N}_0)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımda dikkat edilirse:

$$q = 0 \Rightarrow f^{(0)}(z) = f(z)$$

$$q = 1 \Rightarrow f^{(1)}(z) = \frac{df(z)}{dz} = f'(z)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$q = m \Rightarrow f^{(m)}(z) = \frac{d^m f(z)}{dz^m} = f^{(m)}(z)$$

olduğu görülür.

Sonuç 1.3.10. Teorem 1.3.2 da $\delta = 0$ alınırsa, Tanım 1.3.9 daki $q = 0$ haline denk olduğu görülür.

Sonuç 1.3.11. Teorem 1.3.3 da $\delta = 0$ alınırsa, Tanım 1.3.9 daki $q = 1$ haline denk olduğu görülür.

Teorem 1.3.12. (Yamakawa 1992) Bir negatif katsayılı $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu α $(0 \leq \alpha < p; p \in \mathbb{N})$ mertebeden p-değerli yıldızıl ise

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} (k-\alpha)a_k \leq p - \alpha \tag{1.40}$$

şeklinde bir katsayı bağıntısına sahiptir.

İspat: $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ ve (1.3) deki gibi ve de negatif katsayılı bir fonksiyon olsun. Tanım 1.2.15 den

$$\begin{aligned}
\Re\mathfrak{e}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} &= \Re\mathfrak{e}\left\{\frac{z\left\{pz^{p-1} - \sum\limits_{k=n+p}^{\infty} ka_k z^{k-1}\right\}}{z^p - \sum\limits_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k}\right\} \\
&= \Re\mathfrak{e}\left\{\frac{pz^p - \sum\limits_{k=n+p}^{\infty} ka_k z^k}{z^p - \sum\limits_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k}\right\} \\
&= \Re\mathfrak{e}\left\{\frac{p - \sum\limits_{k=n+p}^{\infty} ka_k z^{k-p}}{1 - \sum\limits_{k=n+p}^{\infty} a_k z^{k-p}}\right\} > \alpha
\end{aligned} \tag{1.41}$$

(1.41) deki ifadede z yi reel eksende seçer ve $z \to 1^-$ götürülürse:

$$p - \sum_{k=n+p}^{\infty} ka_k \geq \alpha\left(1 - \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k\right) \quad (0 \leq \alpha < p; p \in \mathbb{N})$$

eşitsizliğini elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında istenen görülür.

Teorem 1.3.13. (Yamakawa 1992) Bir negatif katsayılı $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu α $(0 \leq \alpha < p;\ p \in \mathbb{N})$ mertebeden p-değerli konkveks ise

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} k(k-\alpha)a_k \leq p(p-\alpha) \tag{1.42}$$

şeklinde bir katsayı bağıntısına sahiptir.

İspat: $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu (1.3) deki gibi ve negatif katsayılı olsun. Tanım 1.2.16 dan:

$$\begin{aligned}\Re e\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} &= \Re e\left\{1+\frac{z\left(p(p-1)z^{p-2}-\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}k(k-1)a_kz^{k-2}\right)}{pz^{p-1}-\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}ka_kz^{k-1}}\right\}\\ &= \Re e\left\{1+\frac{p(p-1)z^{p-1}-\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}k(k-1)a_kz^{k-1}}{pz^{p-1}-\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}ka_kz^{k-1}}\right\}\\ &= \Re e\left\{1+\frac{p(p-1)-\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}k(k-1)a_kz^{k-p}}{p-\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}ka_kz^{k-p}}\right\}>\alpha \qquad (1.43)\end{aligned}$$

(1.39) daki ifadede z yi reel eksende seçer ve $z \to 1^-$ götürülürse:

$$p^2-\sum_{k=n+p}^{\infty}k^2a_k \geq p\alpha-\sum_{k=n+p}^{\infty}k\alpha a_k \quad (0\leq\alpha<p;\ p\in\mathbb{N}) \qquad (1.44)$$

eşitsizliği elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında istenen görülür.

Teorem 1.3.14. (Yamakawa 1992) Bir negatif katsayılı $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu α $(0 \leq \alpha < p;\ p \in \mathbb{N})$ mertebeden p-değerli konvekse yakın ise:

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} ka_k \leq p-\alpha \qquad (1.45)$$

şeklinde bir katsayı bağıntısına sahiptir.

İspat: $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ olsun. Tanım 1.2.17 den

$$\begin{aligned}\Re e\left\{\frac{f'(z)}{z^{p-1}}\right\} &= \Re e\left\{\frac{pz^{p-1}-\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}ka_kz^{k+1}}{z^{p-1}}\right\}\\ &= \Re e\left\{p-\sum_{k=n+p}^{\infty}ka_kz^{k-p}\right\}>\alpha \qquad (1.46)\end{aligned}$$

(1.46) deki ifadede $z \to 1^-$ götürülürse:

$$p - \sum_{k=n+p}^{\infty} k a_k \geq \alpha, \quad (0 \leq \alpha < p; p \in \mathbb{N})$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da istenen eşitsizliktir.

Teorem 1.3.15. (Chen vd 1997) Bir $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ olsun. Bu durumda:

(i) $D_z^{-\delta}(J_{c,p}(f(z))) \neq J_{c,p}(D_z^{-\delta}(f(z)))$

(ii) $D_z^{\delta}(J_{c,p}(f(z))) \neq J_{c,p}(D_z^{\delta}(f(z)))$

(iii) $D_z^{1+\delta}(J_{c,p}(f(z))) \neq J_{c,p}(D_z^{1+\delta}(f(z)))$, olur.

İspat: $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonunun integral operatörü:

$$J_{c,p}(f(z)) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{c+p}{k+c} a_k z^k, \quad (\forall z \in \mathbb{E}; c > -p)$$

$\delta(\delta > 0)$ mertebeden integralinin:

$$D_z^{-\delta}(f(z)) = \frac{p!}{\Gamma(p+\delta+1)} \left[1 + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!\Gamma(p+\delta+1)}{p!\Gamma(k+\delta+1)} a_k z^{k-p} \right] z^{p+\delta}$$

ve de $\delta(0 \leq \delta \leq 1)$ mertebeden türevinin de

$$D_z^{\delta}(f(z)) = \frac{p!}{\Gamma(p-\delta+1)} \left[1 + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!\Gamma(p-\delta+1)}{p!\Gamma(k-\delta+1)} a_k z^{k-p} \right] z^{p-\delta}$$

ve

$$D_z^{1+\delta}(f(z)) = \frac{p!}{\Gamma(p-\delta)} \left[1 + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!\Gamma(p-\delta)}{p!\Gamma(k-\delta)} a_k z^{k-p} \right] z^{p-\delta-1}$$

olduklarını (1.37), (1.28), (1.32) ve (1.33) dan biliyoruz. (1.37) ve (1.28) deki ifadelerden:

$$D_z^{-\delta}(J_{c,p}(f(z))) = \frac{p!}{\Gamma(p+\delta+1)} \left[1 + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!(c+p)\Gamma(p+\delta+1)}{p!(k+c)\Gamma(k+\delta+1)} a_k z^{k-p} \right] \quad (1.47)$$

ve de

$$J_{c,p}(D_z^{-\delta}(f(z))) = \frac{c+p}{(c+p+\delta)\Gamma(p+\delta+1)}$$
$$\times \left[p! + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!(c+p+\delta)\Gamma(p+\delta+1)}{p!(k+c+\delta)\Gamma(k+\delta+1)} a_k z^{k-p} \right] z^{p+\delta} \quad (1.48)$$

olduğu görülür. (1.47) ve (1.48) den de, (i) şıkkının ispatı kolayca elde edilir. Yine; (ii) şıkkı için (1.37) ve (1.32), (iii) şıkkı içinde (1.37) ve (1.43),(1.37) ve (1.32) kullanılarak istenenlere kolayca varılır.

Teorem 1.3.16. (Chen vd 1996) (1.5) deki gibi tanımlanan negatif katsayılı bir $f(z)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $$\left| \frac{f'(z)}{z^{p-1}} - p \right| \le p - \alpha, \quad (0 \le \alpha < p; p \in \mathbb{N}) \quad (1.49)$$

(ii) $$\Re\mathfrak{e} \left\{ \frac{f'(z)}{z^{p-1}} \right\} > \alpha, \quad (0 \le \alpha < p; p \in \mathbb{N}; z \in \mathbb{E}) \quad (1.50)$$

(iii) $$\sum_{k=n+p}^{\infty} k a_k \le p - \alpha \quad (0 \le \alpha < p; p \in \mathbb{N}). \quad (1.51)$$

İspat: Bir $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonunun (1.5) deki gibi ve de negatif katsayılı olduğu kabul edilsin.

(i)⇒(ii):

$$\Re\mathfrak{e} \left\{ \frac{f'(z)}{z^{p-1}} - p \right\} < \left| \frac{f'(z)}{z^{p-1}} - p \right| \le p - \alpha$$
$$\Rightarrow \Re\mathfrak{e} \left\{ \frac{f'(z)}{z^{p-1}} - p \right\} \le p - \alpha$$
$$\Rightarrow \Re\mathfrak{e} \left\{ \frac{f'(z)}{z^{p-1}} \right\} > \alpha \quad (0 \le \alpha < p; p \in \mathbb{N}; z \in \mathbb{E}).$$

(ii)⇒(iii): Bu yön, Teorem 1.3.14. den açıktır.

(iii)⇒(i):

$\left|\frac{f'(z)}{z^{p-1}}-p\right|>p-\alpha,\ (0\leq\alpha<p;p\in\mathbb{N};z\in\mathbb{E})$ olduğunu kabul edip, çelişki elde edilmesine çalışılacaktır:

$$\begin{aligned}
p-\alpha &< \left|\frac{f'(z)}{z^{p-1}}-p\right| = \left|-\sum_{k=n+p}^{\infty} ka_k z^{k-p}\right| \\
&\leq \sum_{k=n+p}^{\infty} ka_k\,|z|^{k-p} \\
&\leq \sum_{k=n+p}^{\infty} ka_k \quad (z\in\partial\mathbb{E})
\end{aligned}$$

olur ki, bu da istenen ispatı bitirir.

Teorem 1.3.15 in ispatında, izlenen mantıkla aşağıda verilen teoremlerdeki denklikler kolayca gösterilebilinir.

Teorem 1.3.17. (Chen vd 1996) (1.5) deki gibi tanımlanan negatif katsayılı bir $f(z)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-p\right|\leq p-\alpha,\ (0\leq\alpha<p;p\in\mathbb{N};z\in\mathbb{E}) \tag{1.52}$$

(ii) $$\Re\mathfrak{e}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha,\ (0\leq\alpha<p;p\in\mathbb{N};z\in\mathbb{E}) \tag{1.53}$$

(iii) $$\sum_{k=n+p}^{\infty}(k-\alpha)a_k\leq p-\alpha\quad (0\leq\alpha<p;p\in\mathbb{N}). \tag{1.54}$$

Teorem 1.3.18. (Chen vd 1996) (1.5) deki gibi tanımlanan negatif katsayılı bir $f(z)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $$\left|1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-p\right|\leq p-\alpha,\quad (0\leq\alpha<p;p\in\mathbb{N}) \tag{1.55}$$

(ii) $$\Re\mathfrak{e}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha,\quad (0\leq\alpha<p;p\in\mathbb{N};z\in\mathbb{E}) \tag{1.56}$$

(iii) $$\sum_{k=n+1}^{\infty}k(k-\alpha)a_k\leq p(p-\alpha)\quad (0\leq\alpha<p;p\in\mathbb{N}). \tag{1.57}$$

Teorem 1.3.19. (Silverman 1970) (1.6) deki gibi tanımlanan negatif katsayılı bir $f(z)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $$|f'(z) - 1| \leq 1 - \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1) \tag{1.58}$$

(ii) $$\Re\mathrm{e}\,\{f'(z)\} > \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1; z \in \mathbb{E}) \tag{1.59}$$

(iii) $$\sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k \leq 1 - \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1) \tag{1.60}$$

Teorem 1.3.20. (Silverman 1970) (1.6) deki gibi tanımlanan negatif katsayılı bir $f(z)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| \leq 1 - \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1; \in \mathbb{E}) \tag{1.61}$$

(ii) $$\Re\mathrm{e}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1;\ z \in \mathbb{E}) \tag{1.62}$$

(iii) $$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k - \alpha) a_k \leq 1 - \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1) \tag{1.63}$$

Teorem 1.3.21. (Silverman 1970) (1.6) deki gibi tanımlanan negatif katsayılı bir $f(z)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1 - \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1) \tag{1.64}$$

(ii) $$\Re\mathrm{e}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1;\ z \in \mathbb{E}) \tag{1.65}$$

(iii) $$\sum_{k=n+1}^{\infty} k(k - \alpha) a_k \leq 1 - \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1) \tag{1.66}$$

2. BAZI MULTİVALENT (P-DEĞERLİ) FONKSİYONLAR

2.1 $\mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ Ailesi:

$$\delta \in \mathbb{R}-\{0\}, n,p \in \mathbb{N}, 0 \le \mu \le 1, z \in \mathbb{E} \text{ ve } f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$$

olsun ve

$$\mathbb{V}_\delta(p;\mu) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| \left(\frac{zD_z^{1+\mu}(f(z))}{D_z^\mu(f(z))} \right)^\delta - (p-\mu)^\delta \right| < (p-\mu)^\delta \right\} \tag{2.1}$$

şeklinde fonksiyonlar ailesi tanımlansın. Burada ; $D_z^{1+\mu}(f(z))$, $D_z^\mu(f(z))$ operatörleri, bir $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonunun Tanım 1.2.24 ve Teorem 1.3.2'de verilen kesirsel mertebeden türev operatörleridir. Bu sınıfa ait çalışmanın bir kısmı Irmak vd. (2002) tarafından yayınlanmıştır.

Eğer ; (2.1) de tanımlanan $\mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ ailesinde, δ, μ ve p parametreleri uygun olarak seçilirse, Analitik ve Geometrik Fonksiyonlar Teorisi'nde önemli sonuçlara kolayca varılabilir.

Örneğin;

i) $\delta = 1$ seçilirse $\mathbb{V}_1(p;\mu)$ ailesi elde edilir ve bu aile $\mathbb{A}_\mu^1(p)$ ile gösterilsin. Bu ise,

$$\mathbb{A}_\mu^1(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| \frac{zD_z^{1+\mu}(f(z))}{D_z^\mu(f(z))} - (p-\mu) \right| < p-\mu \right\} \tag{2.2}$$

$$(\, n,p \in \mathbb{N};\ 0 \le \mu \le 1;\ z \in \mathbb{E}),$$

ii) $\delta = -1$ seçilirse $\mathbb{V}_{-1}(p;\mu)$ ailesi elde edilir ve bu aile de $\mathbb{A}_\mu^2(p)$ ile gösterilsin. Bu ise,

$$\mathbb{A}_\mu^2(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| \frac{D_z^\mu(f(z))}{zD_z^{1+\mu}(f(z))} - \frac{1}{p-\mu} \right| < \frac{1}{p-\mu} \right\} \tag{2.3}$$

$$(\, n,p \in \mathbb{N};\ 0 \le \mu \le 1;\ z \in \mathbb{E}),$$

iii) $\mu = 0$ seçilirse $\mathbb{V}_\delta(p;0)$ ailesi elde edilir ve bu aile de $\mathbb{A}_\delta^3(p)$ ile gösterilsin. Yani,

$$\mathbb{A}_\delta^3(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^\delta - p^\delta \right| < p^\delta \right\} \tag{2.4}$$

$$(\delta \in \mathbb{R} - \{0\};\ n, p \in \mathbb{N};\ z \in \mathbb{E}),$$

iv) $\mu \to 1-$ seçilirse $\mathbb{V}_\delta(p;1)$ ailesi elde edilir ve bu aile de $\mathbb{A}_\delta^4(p)$ ile gösterilsin. O halde

$$\mathbb{A}_\delta^4(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)^\delta - (p-1)^\delta \right| < (p-1)^\delta \right\} \tag{2.5}$$

$$(\delta \in \mathbb{R} - \{0\},\ p \in \mathbb{N};\ z \in \mathbb{E}),$$

v) $\mathbb{A}_\mu^1(p)$ ailesinde $\mu = 0$ veya $\mathbb{A}_\delta^3(p)$ ailesinde $\delta = 1$ alınırsa

$$\mathbb{A}_0^1(p) \equiv \mathbb{A}_1^3(p) \equiv \mathbb{V}_1(p;0)$$

olduğu açıktır ve bu denk aileler $\mathbb{A}^5(p)$ ile gösterilsin. Yani

$$\mathbb{A}^5(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - p \right| < p \right\} \tag{2.6}$$

$$(n, p \in \mathbb{N};\ z \in \mathbb{E}),$$

vi) $\mathbb{A}_\mu^1(p)$ ailesinde $\mu \to 1-$ veya $\mathbb{A}_\delta^4(p)$ ailesinde $\delta = 1$ alınırsa

$$\mathbb{A}_1^1(p) \equiv \mathbb{A}_1^4(p) \equiv \mathbb{V}_1(p;1)$$

elde edilir. Bu denk aileler $\mathbb{A}^6(p)$ ile gösterilsin. Yani

$$\mathbb{A}^6(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| 1 - p + \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < p - 1 \right\} \tag{2.7}$$

$$(n \in \mathbb{N}; p \in \mathbb{N} - \{1\};\ z \in \mathbb{E}),$$

vii) $p = 1$ seçilirse $\mathbb{V}_\delta(1;\mu)$ ailesi elde edilir ve bu aile de $\mathbb{A}^7(\mu)$ ile gösterilsin. O halde

$$\mathbb{A}^7(\mu) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n) : \left| \left(\frac{zD_z^{1+\mu}(f(z))}{D_z^\mu(f(z))} \right)^\delta - (1-\mu)^\delta \right| < (1-\mu)^\delta \right\} \tag{2.8}$$

$$(\delta \in \mathbb{R} - \{0\};\ 0 \leq \mu \leq 1;\ z \in \mathbb{E}),$$

viii) $p = 1$ ve $\mu = 0$ seçilirse $\mathbb{V}_{\delta}(1;0)$ ailesi elde edilir ve bu aile de $\mathbb{A}^8(\mu)$ ile gösterilsin. O halde

$$\mathbb{A}^8(\mu) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n) : \left| \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^{\delta} - 1 \right| < 1 \right\} \tag{2.9}$$

$$(\delta \in \mathbb{R} - \{0\};\ z \in \mathbb{E})$$

bulunur.

Şimdi bir $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu için aşağıdaki teoremi verip ispatlanılacaktır:

Teorem 2.1.1. (Irmak vd 2002)

$\delta \in \mathbb{R} - \{0\}$, $n,p \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mu \leq 1$, $z \in \mathbb{E}$ ve $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu

$$\Re e \left\{ z \left(\frac{D_z^{2+\mu}(f(z))}{D_z^{1+\mu}(f(z))} - \frac{D_z^{1+\mu}(f(z))}{D_z^{\mu} f(z)} \right) \right\} \left\{ \begin{array}{ll} > \dfrac{1}{2\delta} - 1, & \delta < 0 \text{ ise} \\ < \dfrac{1}{2\delta} - 1, & \delta > 0 \text{ ise} \end{array} \right\} \tag{2.10}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, $f(z) \in \mathbb{V}_{\delta}(p;\mu)$ dir.

İspat:

$f(z)$ fonksiyonunun kesirsel türevinin

$$D_z^{\mu}(f(z)) = \frac{p!}{\Gamma(p-\mu+1)} z^{p-\mu} + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!}{\Gamma(k-\mu+1)} a_k z^{k-\mu-1} \tag{2.11}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\frac{zD_z^{1+\mu}(f(z))}{D_z^{\mu}(f(z))} \quad (f(z) \in \mathbb{T}(n,p); z \in \mathbb{E}; 0 \leq \mu < 1)$$

ifadesini (2.11) i kullanarak hesaplamaya çalışalım.

$$\frac{z\left(\frac{p!}{\Gamma(p-\mu)}z^{p-\mu-1}+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{\Gamma(k-\mu)}a_kz^{k-\mu-1}\right)}{\frac{p!}{\Gamma(p-\mu+1)}z^{p-\mu}+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{\Gamma(k-\mu+1)}a_kz^{k-\mu-1}}$$

$$=\frac{\frac{p!}{\Gamma(p-\mu)}z^{p-\mu}+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{\Gamma(k-\mu)}a_kz^{k-\mu}}{\frac{p!}{\Gamma(p-\mu+1)}z^{p-\mu}+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{\Gamma(k-\mu+1)}a_kz^{k-\mu-1}}$$

$$=\frac{\frac{p!z^{p-\mu}}{\Gamma(p-\mu)}\left(1+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p-\mu)}{\Gamma(k-\mu)}a_kz^{k-p}\right)}{\frac{p!z^{p-\mu}}{\Gamma(p-\mu+1)}\left(1+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p-\mu+1)}{p!\Gamma(k-\mu+1)}a_kz^{k-p}\right)}$$

$$=(p-\mu)\left[\frac{1+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p-\mu)}{\Gamma(k-\mu)}a_kz^{k-p}}{1+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p-\mu+1)}{p!\Gamma(k-\mu+1)}a_kz^{k-p}}\right]$$

$$=(p-\mu)[1+\Omega_1(z)] \tag{2.12}$$

Burada $\Omega_1(z)=\sum c_kz^k$ şeklinde ve $\Omega_1(0)=0$ koşulunu sağlayan ve $\mathbb{E}$ da analitik bir fonksiyondur.

Şimdi (2.12) eşitliğinin her iki tarafının δ. kuvvetini gözönüne alalım. Bu durumda

$$G(z)=\left(\frac{zD_z^{1+\mu}f(z)}{D_z^{\mu}f(z)}\right)^{\delta}=[(p-\mu)(1+\Omega_1(z))]^{\delta} \tag{2.13}$$

olur. Eşitlikte

$$\left(\frac{zD_z^{1+\mu}f(z)}{D_z^{\mu}f(z)}\right)^{\delta}\quad(\delta\neq0;0\le\mu<1)$$

ifadesi için esas dalı gözönüne almaktayız.

(2.13) eşitliğinin sağ tarafının $z=0$ noktasında seri açılımını elde edelim.

$$G(z)=(p-\mu)^{\delta}[1+\Omega_1(z)]^{\delta}$$

$$G'(z)=(p-\mu)^{\delta}\delta[1+\Omega_1(z)]^{\delta-1}\Omega_1'(z)$$

$$G''(z) = (p-\mu)^{\delta}\delta[1+\Omega_1(z)]^{\delta-1}\Omega_1''(z) + (p-\mu)^{\delta}\delta(\delta-1)[1+\Omega_1(z)]^{\delta-2}(\Omega_1'(z))^2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Yukarıda G ve G nin türevlerinden

$$G(0) = (p-\mu)^{\delta}$$

$$G'(0) = (p-\mu)^{\delta}\delta c_1$$

$$G''(0) = (p-\mu)^{\delta}2\delta c_2 + (p-\mu)^{\delta}\delta(\delta-1)c_1^2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

sonuçlarını elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} G(z) &= G(0) + \frac{G'(0)z}{1!} + \frac{G''(0)z^2}{2!} + \dots \\ &= (p-\mu)^{\delta} + (p-\mu)^{\delta}\delta c_1 z + \frac{(p-\mu)^{\delta}2\delta c_2 + (p-\mu)^{\delta}\delta(\delta-1)c_1^2}{2!}z^2 + \dots \\ &= (p-\mu)^{\delta}\left[1 + \delta c_1 z + \frac{2\delta c_2 + \delta(\delta-1)c_1^2}{2!}z^2 + \dots\right] \\ &= (p-\mu)^{\delta}[1+w(z)] \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Dolayısıyla

$$G(z) = \left(\frac{zD_z^{1+\mu}f(z)}{D_z^{\mu}f(z)}\right)^{\delta} = (p-\mu)^{\delta}(1+w(z)) \tag{2.14}$$

şeklinde olduğu görülür.

Açıkça görüldüğü gibi; $w(z)$, $w(0) = 0$ koşulunu sağlayan ve $\mathbb{E}$ de analitik bir fonksiyondur. (2.14) eşitliğinin her iki tarafının türevini alınırsa:

$$\delta\left(\frac{zD_z^{1+\mu}f(z)}{D_z^{\mu}f(z)}\right)^{\delta-1}\left[\frac{\left[zD_z^{2+\mu}f(z) + D_z^{1+\mu}f(z)\right]D_z^{\mu}f(z) - z\left[D_z^{1+\mu}f(z)\right]^2}{\left[D_z^{\mu}f(z)\right]^2}\right]$$

$$= \delta \left(\frac{zD_z^{1+\mu} f(z)}{D_z^{\mu} f(z)} \right)^{\delta-1} \left[\frac{zD_z^{2+\mu} f(z)}{D_z^{\mu} f(z)} + \frac{D_z^{1+\mu} f(z)}{D_z^{\mu} f(z)} - z \left(\frac{D_z^{1+\mu} f(z)^2}{D_z^{\mu} f(z)^2} \right) \right]$$

$$= \frac{\delta \left(\frac{zD_z^{1+\mu} f(z)}{D_z^{\mu} f(z)} \right)^{\delta} \left[\frac{zD_z^{2+\mu} f(z)}{D_z^{\mu} f(z)} + \frac{D_z^{1+\mu} f(z)}{D_z^{\mu} f(z)} - z \left(\frac{D_z^{1+\mu} f(z)^2}{D_z^{\mu} f(z)^2} \right) \right]}{\frac{zD_z^{1+\mu} f(z)}{D_z^{\mu} f(z)}}$$

$$= \delta(p-\mu)^{\delta}[1+w(z)]^{\delta-1} w'(z) \tag{2.15}$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade z ile çarpılır ve her iki taraf (2.14) ile taraf tarafa bölünür ve düzenlenirse

$$\frac{\frac{zD_z^{1+\mu} f(z)}{D_z^{\mu} f(z)} + z^2 \left(\frac{D_z^{2+\mu} f(z)}{D_z^{\mu} f(z)} - \left(\frac{D_z^{1+\mu} f(z)^2}{D_z^{\mu} f(z)^2} \right)^2 \right)}{\frac{zD_z^{1+\mu} f(z)}{D_z^{\mu} f(z)}}$$

$$= 1 + z \left(\frac{D_z^{2+\mu} f(z)}{D_z^{1+\mu} f(z)} - \frac{D_z^{1+\mu} f(z)}{D_z^{\mu} f(z)} \right)$$

$$= \frac{1}{\delta} \frac{zw'(z)}{1+w(z)} \tag{2.16}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\max_{|z|<|z_0|} |w(z)| = |w(z_0)| = 1 \quad (w(z_0) \neq -1) \tag{2.17}$$

olacak şekilde bir $z_0 \in \mathbb{E}$ var olsun. Bu durumda Jack's Lemması uygulanırsa

$$z_0 w'(z_0) = c w(z_0) \quad (c \geq 1) \tag{2.18}$$

olacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ vardır ve

$$w(z_0) = e^{i\theta} \quad (\theta \neq \pi) \tag{2.19}$$

olarak yazılabilir.

(2.18) ve (2.19) ifadeleri (2.16) te gözönüne alınırsa:

$$\Re\left\{1+z\left(\frac{D_z^{2+\mu}f(z)}{D_z^{1+\mu}f(z)}-\frac{D_z^{1+\mu}f(z)}{D_z^{\mu}f(z)}\right)\Bigg|_{z=z_0}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&=\Re\left\{\frac{1}{\delta}\frac{zw'(z)}{1+w(z)}\Bigg|_{z=z_0}\right\}\\
&=\Re\left\{\frac{1}{\delta}\frac{z_0w'(z_0)}{1+w(z_0)}\right\}\\
&=\Re\left\{\frac{c}{\delta}\frac{w(z_0)}{1+w(z_0)}\right\}\\
&=\frac{c}{\delta}\Re\left\{\frac{w(z_0)}{1+w(z_0)}\right\}\\
&=\frac{c}{\delta}\Re\left\{\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\right\}\\
&=\frac{c}{\delta}\Re\left\{\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\frac{\overline{1+e^{i\theta}}}{\overline{1+e^{i\theta}}}\right\}\\
&=\frac{c}{\delta}\Re\left\{\frac{e^{i\theta}(1+e^{-i\theta})}{|1+e^{i\theta}|^2}\right\}\\
&=\frac{c}{\delta}\Re\left\{\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right\}\\
&=\frac{c}{2\delta}\left\{\begin{array}{ll}\le\frac{1}{2\delta}, & \delta<0 \text{ ise}\\ \ge\frac{1}{2\delta}, & \delta>0 \text{ ise}\end{array}\right\}
\end{aligned}\tag{2.20}$$

elde edilir. Fakat (2.20) eşitsizliği (2.10) eşitsizliği ile çelişki oluşturur. Bu durumda $\forall z\in\mathbb{E}$ için $|w(z)|<1$ olmak zorundadır. O halde, (2.14) ten

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{zD_z^{1+\mu}f(z)}{D_z^{\mu}f(z)}\right)^{\delta}-(p-\mu)^{\delta}\right| &= \left|(p-\mu)^{\delta}w(z)\right|\\
&=|w(z)|\,(p-\mu)^{\delta}\\
&<(p-\mu)^{\delta}
\end{aligned}$$

olur. Bu ise istenen sonuçtur. Yani $f(z)\in\mathbb{V}_{\delta}(p;\mu)$

Teorem 2.1.1. de $\delta=1$ yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.2. $n, p \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mu < 1$ ve $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ olsun. Eğer $f(z)$

$$Re\left\{1 + z\left(\frac{D_z^{2+\mu}(f(z))}{D_z^{1+\mu}(f(z))} - \frac{D_z^{1+\mu}(f(z))}{D_z^{\mu}(f(z))}\right)\right\} < \frac{1}{2}\ (z \in \mathbb{E}) \tag{2.21}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f(z) \in \mathbb{V}_1(p;\mu)$.

Sonuç 2.1.2 de $\mu = 0$ veya Teorem 2.1.1 de $\delta - 1 = \mu = 0$ konulursa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.3. (Irmak ve Çetin (a) 1999) $n, p \in \mathbb{N}$ ve $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ olsun. Eğer $f(z)$,

$$Re\left\{1 + z\left(\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right)\right\} < \frac{1}{2}\ (z \in \mathbb{E}) \tag{2.22}$$

eşitsizliğini sağlarsa, $f(z) \in \mathbb{Y}_{n,p}$ olur.

Sonuç 2.1.2 de $\mu \to 1^-$ veya Teorem 2.1.1 de $\mu \to 1^-$ ve $\delta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.4. (Irmak ve Çetin (b) 1999) Eğer $f(z) \in \mathbb{T}(n)$ fonksiyonu,

$$Re\left\{1 + z\left(\frac{f'''(z)}{f''(z)} - \frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right\} < \frac{1}{2}\ (z \in \mathbb{E}; p \in \mathbb{N} - \{1\}) \tag{2.23}$$

eşitsizliğini sağlarsa, $f(z) \in \mathbb{K}_{n,p}$ olur.

Teorem 2.1.5. $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ ve $g(z)$ fonksiyonu da

$$g(z) = J_{c,p}(f(z)) \tag{2.24}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer

$$Re\left\{z\left(\frac{D^{2+\mu}(g(z))}{D^{1+\mu}(g(z))} - \frac{D^{1+\mu}(g(z))}{D^{\mu}(g(z))}\right)\right\}\left\{\begin{array}{ll} > \frac{1}{2\delta} - 1 & \delta > 0 \\ < \frac{1}{2\delta} - 1 & \delta < 0 \end{array}\right\} \tag{2.25}$$

ise $g(z) \in \mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ olur. Buradaki $J_{c,p}$ operatörü, Tanım 1.2.27 da tanımlanan integral operatörüdür.

İspat: Teorem 1.3.7 de bir $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonunun integral operatörünü bulmuştuk. (1.37) deki bu sonuca bakıldığında

$$g(z) = J_{c,p}(f(z)) \in \mathbb{T}(n,p)$$

olduğu kolayca görülür. Yani,

$$J_{c,p}:\ \mathbb{T}(n,p)\to\mathbb{T}(n,p)$$

bir lineer dönüşümdür. O halde, bu lineer dönüşüm Teorem 2.1.1 deki eşitsizliği sağlayacaktır. Bundan dolayı, ilgili ispatın detayına girilmesine gerek görülmemiştir.

Şimdi, bu teoreme ilişkin aşağıdaki bazı sonuçları verelim:

Sonuç 2.1.6. $f(z)\in\mathbb{T}(n,p)$ ve $g(z)$ fonksiyonuda (2.24) deki gibi tanımlansın. Eğer

$$Re\left\{z\left(\frac{D^{2+\mu}(g(z))}{D^{1+\mu}(g(z))}-\frac{D^{1+\mu}(g(z))}{D^{\mu}(g(z))}\right)\right\}<-\frac{1}{2}\quad(z\in\mathbb{E})\tag{2.26}$$

ise $J_{c,p}(f(z))\in\mathbb{V}_1(p;\mu)$ olur.

Sonuç 2.1.7. $f(z)\in\mathbb{T}(n,p)$ ve $g(z)$ fonksiyonuda (2.24) deki gibi tanımlansın. Eğer

$$Re\left\{z\left(\frac{g''(z)}{g'(z)}-\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\right\}<-\frac{1}{2}\quad(z\in\mathbb{E})\tag{2.27}$$

ise $J_{c,p}(f(z))\in\mathbb{Y}_{n,p}$ olur.

Sonuç 2.1.8. $f(z)\in\mathbb{T}(n,p)$ ve $g(z)$ fonksiyonu da (2.24) deki gibi tanımlansın. Eğer

$$Re\left\{z\left(\frac{g'''(z)}{g''(z)}-\frac{g''(z)}{g'(z)}\right)\right\}<-\frac{1}{2}\quad(z\in\mathbb{E})\tag{2.28}$$

ise $J_{c,p}(f(z))\in\mathbb{K}_{n,p}$ olur.

Teorem 2.1.9. $f(z)\in\mathbb{T}(n,p)$ ve $g(z)$ fonksiyonu da

$$g(z)=\frac{(p-q)!}{p!}f^{(q)}(z)\quad(p\in\mathbb{N};q\in\mathbb{N}_0;p>q)\tag{2.29}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer, $g(z)$ fonksiyonu (2.25) deki koşulu sağlıyorsa, $g(z)\in\mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ olur. Buradaki, $f^{(q)}(z)$ operatörü, bir $f(z)\in\mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonunun Tanım 1.3.9 daki gibi tanımlanan q. mertebeden adi türev operatörüdür.

İspat: Tanım 1.3.9 dan, bir $f(z)\in\mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonunun q. mertebeden adi türev tanımı ve de (2.29) daki eşitlik gözönüne alındığında,

$$g(z)=\frac{(p-q)!}{p!}f^{(q)}(z)=z^{p-q}+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}\frac{(p-q)!}{p!}a_kz^{k-q}$$

$$(n, p \in \mathbb{N}; q \in \mathbb{N}_0; p > q)$$

şeklinde olduğu açıkça görülür. O halde,

$$g(z) \ : \ \mathbb{T}(n, p-q) \subseteq \mathbb{T}(n,p) \ \rightarrow \ \mathbb{T}(n, p-q) \subseteq \mathbb{T}(n,p)$$

ifadesi bir lineer dönüşümü verir. Bu da, Teorem 2.1.1 deki eşitsizliğin yine korunması demektir. Bundan dolayı, ispatın detayına girmeye gerek görülmemiştir.

Şimdi, buna ilişkin bazı sonuçları verelim.

Sonuç 2.1.10. $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ ve $g(z)$ fonksiyonu da (2.29) deki gibi tanımlansın. Eğer, $g(z)$ fonksiyonu (2.25) deki koşulu sağlıyorsa,

$$g(z) = \frac{(p-q)!}{p!} f^{(q)}(z) \in \mathbb{V}_\delta(p; \mu)$$

olur.

Sonuç 2.1.11. $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ ve $g(z)$ fonksiyonu da (2.29) deki gibi tanımlansın. Eğer, $g(z)$ fonksiyonu (2.27) deki koşulu sağlıyorsa,

$$g(z) = \frac{(p-q)!}{p!} f^{(q)}(z)$$

fonksiyonu p-değerli yıldızıldır, yani $\mathbb{Y}_{n,p}$ sınıfındadır.

Sonuç 2.1.12. $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ ve $g(z)$ fonksiyonu da (2.29) daki gibi tanımlansın. Eğer, $g(z)$ fonksiyonu (2.28) deki koşulu sağlıyorsa,

$$g(z) = \frac{(p-q)!}{p!} f^{(q)}(z)$$

fonksiyonu p-değerli konvekstir, yani $\mathbb{K}_{n,p}$ sınıfındadır.

Şimdi; Teorem 1.3.1, Teorem 1.3.2 ve 1.3.3 de elde edilenlerden, sırasıyla, aşağıdaki gibi fonksiyonlar tanımlanılsın.

$$g_1(z) = z^{-\delta} \frac{\Gamma(p+\delta+1)}{p!} D_z^{-\delta}(f(z)) \ \ (\delta > 0; p \in \mathbb{N}; f(z) \in \mathbb{T}(n,p)), \tag{2.30}$$

$$g_2(z) = z^{\delta} \frac{\Gamma(p-\delta+1)}{p!} D_z^{\delta}(f(z)) \ \ (0 \leq \delta \leq 1; p \in \mathbb{N}; f(z) \in \mathbb{T}(n,p)) \tag{2.31}$$

ve

$$g_3(z) = z^{1+\delta}\frac{\Gamma(p-\delta)}{p!}D_z^{1+\delta}(f(z)) \quad (0 \le \delta \le 1; p \in \mathbb{N}; f(z) \in \mathbb{T}(n,p)) \tag{2.32}$$

fonksiyonlarının herbiri yine $\mathbb{T}(n,p)$ sınıfındadır. Buna göre, aşağıdaki sonuçların doğruluğu yine açık olacaktır.

Sonuç 2.1.13. $g_1(z)$ fonksiyonu (2.30) daki gibi tanımlansın. Eğer; $g_1(z)$, (2.10) daki eşitsizliği sağlıyor ise, $g_1(z) \in \mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ dır.

Sonuç 2.1.14. $g_2(z)$ fonksiyonu (2.31) deki gibi tanımlansın. Eğer; $g_2(z)$, (2.10) daki eşitsizliği sağlıyor ise, $g_2(z) \in \mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ dır.

Sonuç 2.1.15. $g_1(z)$ fonksiyonu (2.32) daki gibi tanımlansın. Eğer; $g_3(z)$, (2.10) daki eşitsizliği sağlıyor ise, $g_3(z) \in \mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ dır.

Bu üstteki üç sonucun, (2.2)-(2.9) da tanımlanan alt ailelerle ilgisi olan birçok sonucu da vardır. Bunların hepsini belirtmeye gerek duymuyoruz.

Ayrıca, (1.47)-(1.48) deki ifadelerden de

$$g_4(z) = z^{-\delta}\frac{\Gamma(p+\delta+1)}{p!}D_z^{-\delta}(J_{c,p}(f(z))) \tag{2.33}$$

$$(\delta > 0; p \in \mathbb{N}; f(z) \in \mathbb{T}(n,p))$$

ve

$$g_5(z) = z^{-\delta}\frac{(c+p+\delta)\Gamma(p+\delta+1)}{c+p}J_{c,p}(D_z^{-\delta}(f(z)) \tag{2.34}$$

$$(0 \le \delta \le 1; p \in \mathbb{N}; f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$$

şeklinde fonksiyonlar tanımlayalım. Yine, bu iki fonksiyonda $\mathbb{T}(n,p)$ sınıfında olup aşağıdaki sonuçlar açıktır.

Sonuç 2.1.16. $g_5(z)$ fonksiyonu (2.33) daki gibi tanımlansın. Eğer; $g_4(z)$, (2.10) daki eşitsizliği sağlıyor ise, $g_5(z) \in \mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ dır.

Sonuç 2.1.17. $g_5(z)$ fonksiyonu (2.34) daki gibi tanımlansın. Eğer; $g_5(z)$, (2.10) daki eşitsizliği sağlıyor ise, $g_3(z) \in \mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ dır.

Yine, bu üstteki iki sonucunda; uygun parametreler seçilmesi durumunda, (2.2)-(2.9) da tanımlanan alt aileleriyle ilgisi olan birçok sonucu elde edilebilinir. Bunların tek tek belirtilmesine gerek duyulmamıştır.

2.2. $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ Ailesi

$$\delta \in \mathbb{R} - \{0\}; n, p \in \mathbb{N}; 0 \leq \mu \leq 1; z \in \mathbb{E}\ ;\ f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$$

olsun. Bu durumda:

$$\mathbb{W}_\delta(p;\mu) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| \left(z^{\mu-p} D_z^\mu f(z)\right)^\delta - \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^\delta \right| < \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^\delta \right\} \tag{2.35}$$

şeklindeki fonksiyonlar ailesini tanımlayalım. Burada ; $D_z^\mu(f(z))$ fonksiyonun Tanım 1.2.24 ve Tanım 1.3.2 de verilen kesirsel mertebeden türev operatörleridir. Bu sınıfa ait çalışmanın bir kısmı Irmak vd. (2002) tarafından yayınlanmıştır.

Eğer; (2.35) de tanımlanan $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ ailesinde, δ, μ ve p parametreleri uygun olarak seçilirse, Analitik ve Geometrik Fonksiyonlar Teorisi için önemli olan sonuçlara kolayca varılabilir.

Örneğin;

i) $\delta = 1$ seçilirse $\mathbb{W}_1(p;\mu)$ ailesi elde edilir ve bu aile $\mathbb{B}_\mu^1(p)$ ile gösterilsin. O halde

$$\mathbb{B}_\mu^1(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| z^{\mu-p} D_z^\mu f(z) - \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)} \right| < \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)} \right\} \tag{2.36}$$

$$(n,\ p \in \mathbb{N};\ 0 \leq \mu \leq 1;\ z \in \mathbb{E}),$$

ii) $\delta = -1$ seçilirse $\mathbb{W}_{-1}(p;\mu)$ ailesi elde edilir ve bu aile de $\mathbb{B}_\mu^2(p)$ ile gösterilsin. O halde

$$\mathbb{B}_\mu^2(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| \frac{z^{p-\mu}}{D_z^\mu f(z)} - \frac{\Gamma(p-\mu+1)}{\Gamma(p+1)} \right| < \frac{\Gamma(p-\mu+1)}{\Gamma(p+1)} \right\} \tag{2.37}$$

$$(n,\ p \in \mathbb{N};\ 0 \leq \mu \leq 1;\ z \in \mathbb{E}),$$

iii) $\mu = 0$ seçilirse $\mathbb{W}_\delta(p;0)$ ailesi elde edilir ve bu aile de $\mathbb{B}_\delta^3(p)$ ile gösterilsin. O halde

$$\mathbb{B}_\delta^3(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| \left(\frac{f(z)}{z^p} \right)^\delta - 1 \right| < 1 \right\} \tag{2.38}$$

$$(\delta \in \mathbb{R} - \{0\}; n, p \in \mathbb{N}; z \in \mathbb{E}),$$

iv) $\mu \to 1-$ seçilirse $\mathbb{W}_\delta(p;1)$ ailesi elde edilir ve bu aile de $\mathbb{B}_\delta^4(p)$ ile gösterilsin. O halde

$$\mathbb{B}_\delta^4(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| \left(\frac{f'(z)}{z^{p-1}} \right)^\delta - p^\delta \right| < p^\delta \right\} \tag{2.39}$$

$$(\delta \in \mathbb{R} - \{0\};\ n,\ p \in \mathbb{N};\ z \in \mathbb{E}),$$

v) $\mathbb{B}_\mu^1(p)$ ailesinde $\mu = 0$ veya $\mathbb{B}_\delta^4(p)$ ailesinde $\delta = 1$ alınırsa

$$\mathbb{B}_0^1(p) \equiv \mathbb{B}_1^3(p) \equiv \mathbb{W}_1(p;0)$$

olduğu açıktır ve bu denk aileler de $\mathbb{B}^5(p)$ ile gösterilsin. Yani

$$\mathbb{B}^5(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - p \right| < p \right\} \tag{2.40}$$

$$(n,\ p \in \mathbb{N};\ z \in \mathbb{E}),$$

vi) $\mathbb{B}_\mu^1(p)$ ailesinde $\mu \to 1-$ veya $\mathbb{B}_\delta^4(p)$ ailesinde $\delta = 1$ alınırsa

$$\mathbb{B}_1^1(p) \equiv \mathbb{B}_1^4(p) \equiv \mathbb{V}_1(p;1)$$

elde edilir. Bu denk aileler $\mathbb{B}^6(p)$ ile gösterilsin. O halde

$$\mathbb{B}^6(p) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n,p) : \left| z^{1-p} f'(z) - p \right| < p \right\} \tag{2.41}$$

$$(n, p \in \mathbb{N};\ z \in \mathbb{E}),$$

vii) $p = 1$ seçilirse $\mathbb{W}_\delta(1;\mu)$ ailesi elde edilir ve bu aile de $\mathbb{B}^7(\mu)$ ile gösterilsin. O halde

$$\mathbb{B}^7(\mu) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n) : \left| \left(z^{\mu-1} D_z^\mu f(z)\right)^\delta - \left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\mu)}\right)^\delta \right| < \left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\mu)}\right)^\delta \right\} \tag{2.42}$$

$$(\delta \in \mathbb{R} - \{0\},\ 0 \le \mu \le 1,\ z \in \mathbb{E})$$

viii) $p = 1$ ve $\mu = 0$ seçilirse $\mathbb{W}_\delta(1;0)$ ailesi elde edilir ve bu aile de $\mathbb{B}^8(\mu)$ ile gösterilsin. O halde

$$\mathbb{B}^8(\mu) = \left\{ f(z) \in \mathbb{T}(n) : \left| \left(\frac{f(z)}{z}\right)^\delta - 1 \right| < 1 \right\} \tag{2.43}$$

$$(\delta \in \mathbb{R} - \{0\};\ z \in \mathbb{E})$$

bulunur.

Şimdi bir $f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu için aşağıdaki teoremi verip ispatlayalım:

Teorem 2.2.1. (Irmak vd 2002)

$$\delta \in \mathbb{R} - \{0\}; n, p \in \mathbb{N}; 0 \le \mu \le 1; z \in \mathbb{E}; f(z) \in \mathbb{T}(n,p)$$

olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu

$$\Re\left(\frac{z D_z^{1+\mu} f(z)}{D_z^\mu f(z)}\right) \begin{cases} < p - \mu + \dfrac{1}{2\delta}, & \delta > 0 \\ > p - \mu + \dfrac{1}{2\delta}, & \delta < 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, $f(z) \in \mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ dir.

İspat:

$f(z)$ fonksiyonunun kesirsel türevinin

$$D_z^\mu f(z) = \frac{p!}{\Gamma(p-\mu+1)} z^{p-\mu} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k!}{\Gamma(k-\mu+1)} a_k z^{k-\mu-1}$$

(1.32) den olduğunu biliyoruz.

$$z^{\mu-p} D_z^\mu f(z) \quad (0 \leq \mu < 1; p \in \mathbb{N})$$

ifadesini yukarıdaki ifadeyi kullanarak hesaplamaya çalışalım.

$$\begin{aligned}
z^{\mu-p} & \left(\frac{p! z^{p-\mu}}{\Gamma(p-\mu+1)} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k! a_k z^{k-\mu}}{\Gamma(k-\mu+1)} \right) \\
&= \frac{p!}{\Gamma(p-\mu+1)} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k! a_k z^{k-p}}{\Gamma(k-\mu+1)} \\
&= \frac{p!}{\Gamma(p-\mu+1)} + \frac{(p+1)! a_{p+1}}{\Gamma(p-\mu+2)} z + \frac{(p+2)! a_{p+2}}{\Gamma(p-\mu+3)} z^2 + \ldots \\
&= \frac{p!}{\Gamma(p-\mu+1)} \left[1 + \frac{(p+1) a_{p+1}}{\Gamma(p-\mu+1)} z + \frac{(p+2)(p+1) a_{p+2}}{\Gamma(p-\mu+1)\Gamma(p-\mu+2)} z^2 + \ldots \right] \\
&= \frac{p!}{\Gamma(p-\mu+1)} [1 + \Omega_2(z)] \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

Burada $\Omega_2(z) = \sum c_k z^k$ şeklinde ve $\Omega_2(0) = 0$ koşulunu sağlayan ve $\mathbb{E}$ de analitik bir fonksiyondur.

Şimdi (2.45) eşitliğinin her iki tarafının δ. kuvvetini göz önüne alalım. Bu durumda

$$H(z) = [z^{\mu-p} D_z^\mu f(z)]^\delta = \left[\frac{p!}{\Gamma(p-\mu+1)} [1 + \Omega_2(z)] \right]^\delta \qquad (2.46)$$

olur. Eşitlikte $(z^{\mu-p} D_z^\mu f(z))^\delta$ ifadesi için esas dalı gözönüne almaktayız. (2.46) eşitliğinin sağ tarafının $z = 0$ noktasında seri açılımını elde edelim.

$$H(z) = \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)} \right)^\delta [1 + \Omega_2(z)]^\delta$$

$$H'(z) = \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)} \right)^\delta \delta [1 + \Omega_2(z)]^{\delta-1} \Omega_2'(z)$$

$$H''(z) = \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)} \right)^\delta \delta [1 + \Omega_2(z)]^{\delta-1} \Omega_2''(z) + \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)} \right)^\delta \delta(\delta-1)[1 + \Omega_2(z)]^{\delta-2} (\Omega_2'(z))^2$$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

Yukarıda H ve H nin türevlerinden

$$H(0) = \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta}$$

$$H'(0) = \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta} \delta c_1$$

$$H''(0) = \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta} 2\delta c_2 + \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta} \delta(\delta-1)c_1^2$$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

sonuçları elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} H(z) &= H(0) + \frac{H'(0)z}{1!} + \frac{H''(0)z^2}{2!} + \dots \\ &= \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta} + \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta} \delta c_1 z \\ &+ \frac{\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta} 2\delta c_2 + \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta} \delta(\delta-1)c_1^2}{2!} z^2 + \dots \\ &= \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta} \left[1 + \delta c_1 z + \frac{2\delta c_2 + \delta(\delta-1)c_1^2}{2!} z^2 + \dots\right] \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta} [1 + w(z)]$$

şeklinde olacaktır. Dolayısıyla

$$H(z) = \left(z^{\mu-p} D_z^{\mu} f(z)\right)^{\delta} = \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta} (1 + w(z)) \tag{2.47}$$

bulunmuş olur.

Açıkça görüldüğü gibi $w(z)$ de $w(0) = 0$ koşulunu sağlayan ve $\mathbb{E}$ da analitik bir fonksiyondur.

(2.47) eşitliğinin her iki tarafının türevini alınırsa:

$$\delta[z^{\mu-p}D_z^{\mu}f(z)]^{\delta-1}\left[z^{\mu-p}D_z^{\mu+1}f(z)+(\mu-p)z^{\mu-p-1}D_z^{\mu}f(z)\right]$$

$$=\delta(z^{\mu-p}D_z^{\mu}f(z))^{\delta}\left[\frac{D_z^{\mu+1}f(z)}{D_z^{\mu}f(z)}+\frac{(\mu-p)}{z}\right]$$

$$=\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta}w'(z)$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade z ile çarpılır ve her iki taraf (2.47) ile taraf tarafa bölünür ve düzenlenirse

$$z\frac{D_z^{1+\mu}f(z)}{D_z^{\mu}f(z)}=p-\mu+\frac{1}{\delta}\cdot\frac{zw'(z)}{1+w(z)}\quad(\delta\neq 0)\tag{2.48}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\max_{|z|\leq|z_0|}|w(z)|=|w(z_0)|=1\quad(w(z_0)\neq -1)\tag{2.49}$$

olacak şekilde bir $z_0\in\mathbb{E}$ var olduğunu kabul edelim. Bu durumda Jack's Lemması uygulanırsa

$$z_0w'(z_0)=cw(z_0)\quad(c\geq 1)\tag{2.50}$$

olacak şekilde $c\in\mathbb{R}$ vardır ve

$$w(z_0)=e^{i\theta}\quad(\theta\neq\pi)\tag{2.51}$$

olarak yazılabilir.

(2.50) ve (2.51) ifadeleri (2.48) te gözönüne alınırsa

$$\mathfrak{Re}\left\{p-\mu+\frac{1}{\delta}\frac{zw'(z)}{1+w(z)}\bigg|_{z=z_0}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= p-\mu+\mathfrak{Re}\left\{\frac{1}{\delta}\frac{zw'(z)}{1+w(z)}\bigg|_{z=z_0}\right\}\\
&= p-\mu+\mathfrak{Re}\left\{\frac{1}{\delta}\frac{z_0w'(z_0)}{1+w(z_0)}\right\}\\
&= p-\mu+\mathfrak{Re}\left\{\frac{c}{\delta}\frac{w(z_0)}{1+w(z_0)}\right\}\\
&= p-\mu+\frac{c}{\delta}\mathfrak{Re}\left\{\frac{w(z_0)}{1+w(z_0)}\right\}\\
&= p-\mu+\frac{c}{\delta}\mathfrak{Re}\left\{\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\right\}\\
&= p-\mu+\frac{c}{\delta}\mathfrak{Re}\left\{\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\frac{\overline{1+e^{i\theta}}}{\overline{1+e^{i\theta}}}\right\}\\
&= p-\mu+\frac{c}{\delta}\mathfrak{Re}\left\{\frac{e^{i\theta}(1+e^{-i\theta})}{|1+e^{i\theta}|^2}\right\}\\
&= p-\mu+\frac{c}{\delta}\mathfrak{Re}\left\{\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right\}\\
&= p-\mu+\frac{c}{2\delta}\left\{\begin{array}{ll} >p-\mu+\frac{1}{2\delta}, & \delta>0 \text{ ise}\\ <p-\mu+\frac{1}{2\delta}, & \delta<0 \text{ ise}\end{array}\right\}
\end{aligned}\tag{2.52}$$

elde edilir. Fakat (2.52) eşitsizliği (2.44) eşitsizliği ile çelişki oluşturur. Bu durumda $\forall z\in\mathbb{E}$ için $|w(z)|<1$ olmak zorundadır. O halde, (2.47) den

$$\begin{aligned}
\left|(z^{\mu-p}D_z^{\mu}f(z))^{\delta}-\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta}\right| &= \left|\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta}w(z)\right|\\
&< \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}\right)^{\delta}
\end{aligned}$$

olur. Bu ise istenen sonuç yani, $f(z)\in\mathbb{W}_{\delta}(p;\mu)$ demektir.

Teorem 2.2.1. de $\delta=1$ yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.2. (Irmak ve Çetin 1999) $z\in\mathbb{E}$, $p\in\mathbb{N}$, $0\le\mu<1$ ve $f(z)\in\mathbb{T}(n,p)$

olsun.

$$\Re e\left\{\frac{zD_z^{1+\mu}(f(z))}{D_z^{\mu}(f(z))}\right\} < p-\mu+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; f(z)\in\mathbb{W}_\delta(p;\mu).$$

Sonuç 2.2.2. de $\mu=0$ veya Teorem 2.2.1.de $\delta-1=\mu=0$ konulursa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.3. $z\in\mathbb{E}$, $p\in\mathbb{N}$ ve $f(z)\in\mathbb{T}(p)$ olsun. Eğer $f(z)$,

$$\Re e\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} < p+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \Re e\left\{\frac{f(z)}{z^p}\right\} > 0$$

olur.

Sonuç 2.2.2. de $\mu\to 1^-$ veya Teorem 2.2.1. de $\mu\to 1^-$ ve $\delta=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.4. $z\in\mathbb{E}$, $p\in\mathbb{N}$ ve $f(z)\in\mathbb{T}(p)$ olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu,

$$\Re e\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} < p-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; f(z)\in\mathbb{KY}_p(0)\equiv\mathbb{KY}_p$$

olur

Şimdi, bir $f(z)\in\mathbb{T}(n,p)$ fonksiyonu için

$$J_{c,p}(f(z)) \text{ ve } \frac{(p-q)!}{p!}f^{(q)}(z)$$

lineer dönüşümlerini kapsayan bazı teoremleri ispatsız verelim.

Tanım 2.2.5. $f(z)\in\mathbb{T}(n,p)$ ve (2.24) deki gibi tanımlı $g(z)$ fonksiyonu

$$\Re e\left\{\frac{zD^{1+\mu}(g(z))}{D^{\mu}(g(z))}\right\}\left\{\begin{array}{ll} < p-\mu+\dfrac{1}{2\delta}, & \delta>0 \text{ ise} \\ > p-\mu+\dfrac{1}{2\delta}, & \delta<0 \text{ ise} \end{array}\right\} \tag{2.53}$$

koşulunu sağlıyorsa, $J_{c,p}(f(z))\in\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ dır.

Teorem 2.2.6. $f(z)\in\mathbb{T}(n,p)$ ve $g(z)$ fonksiyonu da (2.29) daki gibi tanımlansın. Eğer, $g(z)$ fonksiyonu (2.27) deki koşulu sağlıyorsa,

$$g(z)=\frac{(p-q)!}{p!}f^{(q)}(z)\in\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$$

olur.

Teorem 2.2.5 ve Teorem 2.2.6 nın birçok aileye ilişkin sonuçları vardır. Bunları vermeye gerek duymuyoruz.

Önceden elde etmiş olduğumuz bazı lineer dönüşümler ve de bu dönüşümlerden elde edilen fonksiyonların $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ ailesinde oldukları için, tekrar bu şekilde elde edilen teoremlerin ispatlarının ispat mantığı aynı olacağı için, ilgili teoremlerin sonuçlar olarak verilmesi daha uygun görülmüştür. Bundan dolayı, (2.30)-(2.37) de elde edilen $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ ailesinin herbir alt sınıfı için de birçok sonuç verilebilir. Fakat, biz bu sonuçların hepsini vermeye gerek duymadık.

Sonuç 2.2.7. $g(z)$ fonksiyonu (2.24) deki gibi tanımlansın. Eğer; $g(z)$, (2.35) deki eşitsizliği sağlıyorsa, $g(z) \in \mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ olur.

Sonuç 2.2.8. $g(z)$ fonksiyonu (2.29) daki gibi tanımlansın. Eğer; $g(z)$, (2.35) deki eşitsizliği sağlıyorsa, $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ sınıfındadır.

Sonuç 2.2.9. $g_1(z)$ fonksiyonu (2.30) daki gibi tanımlansın. Eğer; $g_1(z)$, (2.35) daki eşitsizliği sağlıyorsa, $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ sınıfında olur.

Sonuç 2.2.10. $g_2(z)$ fonksiyonu (2.31) deki gibi tanımlansın. Eğer; $g_2(z)$, (2.35) deki eşitsizliği sağlıyorsa, $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ sınıfına aittir.

Sonuç 2.2.11. $g_3(z)$ fonksiyonu (2.32) deki gibi tanımlansın. Eğer; $g_3(z)$, (2.35) daki eşitsizliği sağlıyorsa, $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ sınıfındadır.

Sonuç 2.2.12. $g_4(z)$ fonksiyonu (2.33) deki gibi tanımlansın. Bu fonksiyon (2.35) daki eşitsizliği sağlıyorsa, $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ sınıfında olur.

Sonuç 2.2.13. $g_5(z)$ fonksiyonu (2.34) deki gibi tanımlansın. $g_5(z)$, (2.35) deki eşitsizliği sağlıyorsa, yine $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ sınıfında olur.

Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.2 teoremleri, $\mathbb{Y}_{n,p}(\alpha), \mathbb{K}_{n,p}(\alpha), \mathbb{KY}_{n,p}(\alpha), \mathbb{Y}_n(\alpha), \mathbb{K}_n(\alpha)$ ve $\mathbb{KY}_n(\alpha)$ sınıflarına genişletilebilinir. Böylesi bir çalışmadan da, yine bir çok çalışmalar elde etmemize yardımcı olacaktır. Doğal olarak; bu elde edilen sonuçların herbiri yine (2.2)-(2.9) ve (2.36)-(2.43) elde edilen alt sınıflarla ilişkiler doğuracaktır. Bu tür çalışmaları da, bu alanda çalışacak olan araştırmacılara araştırma olarak bırakılmıştır.

SONUÇ

(1.5) deki gibi tanımlanan $\mathbb{T}(n,p)$ sınıfındaki fonksiyonların oluşturduğu; (2.1) deki $\mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ sınıfı ile (2.35) deki $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ sınıflarındaki fonksiyonlara ilişkin iki teorem (Teorem 2.1.1 ve Teorem 2.2.1) elde edilmiş ve ispatlanmıştır. Bu iki teorem ve bunlara ilişkin sonuçların bir kısmı Irmak vd (2002) tarafından yayınlanmıştır. Ayrıca, bazı lineer dönüşümler sonucunda elde edilen birçok teorem bazındaki sonuçlar, $\mathbb{V}_\delta(p;\mu)$ ve $\mathbb{W}_\delta(p;\mu)$ ve de bu sınıfların alt sınıflarında olan analitik ve multivalent fonksiyonlara ilişkin birçok özel sonuçları elde edilmiştir. Bu sonuçların bazıları da literatürde karşımıza çıkmaktadır.

KAYNAKLAR

BERNARDI, S.D. 1969. Convex and starlike univalent functions. *Transactions of the American Mathematical Society,* 135: 429-446.

BOJPAI, P.L. and SINGH P. 1974. The radius of starlikeness of certain analytic functions in the unit disc. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 44: 395-402.

BROWN, J.W. and CHURCHILL, R.V. (Editors). 1996. Complex Variables and Applications. Mc. Graw-Hill Inc, (Sixth Edition), 386 pp., Singapore.

CALYS, E.G. 1969. Some classes of regular functions. *Transactions of the American Mathematical Society,* 135: 429-446.

CHEN, M.P., IRMAK, H. and SRIVASTAVA, H.M. 1996. Some multivalent fuctions with negative coefficients defined by using a differential operator. *Panamerican Mathematical Journal,* 6, 2, 55-64.

CHEN, M.P., IRMAK, H. and SRIVASTAVA, H.M. 1997. Some families multivalently analytic functions with negative coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 214: 674-690.

DUREN, P.L. (Editor). 1983. Univalent functions, Grundlehren der Mathematischen Wissenchaffen . Springer-Verlag, 382 pp., New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

GOODMAN, A.W. (Editor). 1983. Univalent functions. Vols: I and II, Polygonal Publishing House, 246+310 pp., Washington-New Jersey.

HAYMAN, N.K. (Editor). 1958. Multivalent functions. Cambridge University Press, 482 pp., London.

IRMAK, H., TINAZTEPE, G., KIM, Y.C. and CHOI, J.H. 2002. Certain classes and inequalities involving fractional calculuc and multivalent functions. *Fractional Calculus and Applied Analysis,* Vol:5, No:3, 267-274.

IRMAK, H. and ÇETİN, Ö.F. (a) 1999. Some theorems involving inequalities on p-valent functions. *Turkish Journal of Mathematics,* 23:453-459.

IRMAK, H. and ÇETİN, Ö.F. (b) 1999. Some inequalities on p-valently starlike and p-valently convex functions. *Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering. Series B. Mathematics and Statistics*, 28: 71-76.

JACK, I.S. 1971. Functions starlike and convex of order. *London Mathematical Society*, 2 (3): 469-474.

JACUBOWSKI, Z.J. 1972. On the coefficients of starlike functions of some classes. *Annales Polonici Mathematici*, 26: 305-313.

LIBERA, R.J. 1964. Some radius of convexity problems. *Duke Mathematical Journal*, 31: 143-158.

MARX, A. 1932. Untersuchungenüher Abhildungen, *Mathematische Annalen*, 107: 40-67.

MILLER, S.S. and NOCANU, P.T. 1978. Second order differential inequalities in the complex plane. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 65: 289-305.

NEHARI, Z. 1952. Conformal Mapping. Mc Grawhill, 640 pp., New York.

OWA, S. 1985. On certain classes of p-valent functions with negative coefficients. *Simon Stevin*, 59: 385-402.

OWA, S. 1978. On the distortion theorems. *Kyungpook Mathematical Journal*, 18: 53-59.

POMMERENKE, C. (Editor). 1975. Univalent Functions. *Studia Mathematica*. Bd.25, Vandenhoeck and Ruprecht, 173 pp., Göttingen.

ROBERTSON, M.S. 1964. An Extremal Problems Functions with Positive Real Part. *The Michigan Mathematical Journal*, 11: 327-335.

ROBERTSON, M.J.S. 1936. On The Theory of Univalent Functions. *Annales Polonici Mathematici*, 37 (2): 374-408.

SAMKO, S.G., KILBAS, A.A. and MARICHEV, O.I. (Editors). 1993. Fractional Integral and Derivatives, Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, 976 pp., USA.

SILVERMAN, H. 1975. Univalent functions with negative coefficients. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 51: 109–116.

SRIVASTAVA, H.M. and OWA, S. (Editors). 1989. Univalent functions, Fractional Calculus and Their Applications. Halsted Press, John Wiley and Sons, 404 pp., New york, Chieschester, Brisbane, Toronto.

SRIVASTAVA, H.M. and OWA, S. (Editors). 1992. Current topics in Analytic Function Theory. World Scientific Publishing Co., 456 pp., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

SRIVASTAVA, H.M., OWA, S. and CHATTERJEA. 1987. A note on certain classes of starlike functions. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,* 77: 115-124.

SZEGÖ, G. and POLYA. 1954. Aufgahen und Lehvsatze Aus der Analysiz. Springer, 660 pp., Berlin.

TWOMEY, J.B. 1970. On starlike functions. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 24: 95-97.

YAMAKAWA, R. 1992. Certain subclasses of p-valently starlike functions with negative coefficients, in Current topics in Analytic function Theory (H.M. Srivastava, S. Owa, Editors), World Scientific Publishing Co.,486 pp., Singapore, New Jersey, London and Hong Kong.

ÖZGEÇMİŞ

Gültekin TINAZTEPE, 1978'de Antalya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Antalya'da tamamladı. 1994 yılında girdiği Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden Temmuz-1999'da matematik öğretmeni olarak mezun oldu. Eylül 2000'de Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.