İÇİNDEKİLER

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU KUADRATİK (SQUARE) FONKSİYONLARIN İNCELENMESİ

Cansu CENGİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU KUADRATİK (SQUARE) FONKSİYONLARIN İNCELENMESİ

Cansu CENGİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU KUADRATİK (SQUARE) FONKSİYONLARIN İNCELENMESİ

Cansu CENGİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (   ) not takdir edilerek oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İlham ALİYEV ....
Prof. Dr. Rıza ERDEM ....
Yrd. Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI (Danışman) ....

ÖZET

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU KUADRATİK (SQUARE) FONKSİYONLARIN İNCELENMESİ

Cansu CENGİZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI

Haziran 2012, 31 Sayfa

Bu çalışmada, öncelikle Laplace diferansiyel operatörünün ürettiği Klasik Kuadratik (Square) fonksiyonların özellikleri incelenmiş ve bu fonksiyonların L_2 uzayındaki sınırlılığı kanıtlanmıştır. Daha sonra ise Bessel diferansiyel operatörünün ürettiği Genelleşmiş Kuadratik (Square) fonksiyonların özellikleri araştırılmış ve bu fonksiyonların $L_{2,\alpha}$ uzayındaki sınırlılığı elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Kuadratik fonksiyonlar, Laplace ve Bessel diferansiyel operatörü, Fourier dönüşümü, girişim, genelleşmiş kayma

JÜRİ : Prof. Dr. İlham ALİYEV
Prof. Dr. Rıza ERDEM
Yrd. Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI (Danışman)

ABSTRACT

ANALYSIS OF SQUARE FUNCTIONS GENERATED BY GENERALIZED TRANSLATION

Cansu CENGİZ

M. Sc. Thesis in Mathematics

Adviser: Asst. Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI

June 2012, 31 Pages

In this work, firstly properties of Classical Square functions generated by Laplace differential operators have been examined and L_2-boundedness of these functions has been proved. Later properties of Generalized Square functions generated by Bessel differential operators have been investigated and $L_{2,\alpha}$-boundedness of these functions has been obtained.

KEY WORDS : Square functions, Laplace and Bessel differential operators, Fourier transform, convolution, generalized translation

COMMITTEE : Prof. Dr. İlham ALİYEV
Prof. Dr. Rıza ERDEM
Asst. Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI (Adviser)

ÖNSÖZ

Harmonik Analizin temel teknik araçlarından birisi de girişim tipli integral operatörleridir.

Bu bağlamda Kuadratik (Square) fonksiyonlar, girişim tipli integral operatörler kullanılarak tanımlanan teknik araçlara örnek olarak verilebilir. Çalışmamızda öncelikle, Laplace diferansiyel operatörünün doğurduğu, "Klasik Kuadratik (Square) fonksiyon" olarak adlandırdığımız fonksiyonlar ve bu fonksiyonların L_2 uzayındaki sınırlılığı incelenmiştir. Buradaki "klasik" kelimesi bildiğimiz kayma operatörü ile ilişkilendirilebilir. Daha sonra Bessel diferansiyel operatörü, bu operatörün doğurduğu ve çalışmamız içerisinde "Genelleşmiş kayma" olarak ifade ettiğimiz operatör ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ardından Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu ve "Genelleşmiş Kuadratik (Square) fonksiyon" olarak adlandırılan fonksiyon tanımlanmıştır. Son olarak da bu girişim tipli integral operatörün ağırlıklı L_2 uzayındaki sınırlılığı ispatlanmıştır.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım, Sayın Yard. Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI'ya (A.Ü.F.F.), teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler :

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n); x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, ...\}$
$L_p(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ 'de ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$C^n(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ 'de n. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
$C_0(\mathbb{R}^n)$	Sonsuzlukta sıfıra giden sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Schwartz uzayı
$\mathcal{S}_+(\mathbb{R}_+)$	Schwartz'ın $\mathbb{R}_+$ 'da tanımlı çift fonksiyonlar uzayı
$f * g$	f ile g 'nin girişimi
$f \circledast g$	f ile g 'nin genelleşmiş girişimi
$f^\wedge$	f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$f^\vee$	f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü
$j_\alpha(t)$	Birinci çeşit normlandırılmış Bessel fonksiyonu
$J_\alpha(t)$	Birinci çeşit Bessel fonksiyonu
$\Gamma(t)$	Gamma fonksiyonu

Kısaltmalar :

h.h.h.	Hemen hemen her
A.Ü.F.F.	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi

1. GİRİŞ

Klasik Kuadratik (Square) fonksiyon, Harmonik Analizin temel yapıtaşlarından birisidir ve uygulamalarda önemli rol oynamaktadır. Laplace diferansiyel operatörü,

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

olmak üzere bu operatörün doğurduğu Klasik Kuadratik fonksiyon, Φ fonksiyonu Schwartz test fonksiyonlar uzayından olmak üzere $\int \Phi = 0$ halinde

$$(\mathcal{S}_\Phi f)(x) = \left(\int_0^\infty |(f * \Phi_t)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $\Phi_t(x) = t^{-n}\Phi\left(\frac{x}{t}\right)$, $t > 0$ 'dır. Yukarıdaki şekilde ifade edilen $f \to \mathcal{S}_\Phi(f)$ dönüşümü Kuadratik fonksiyon belirler. Bu fonksiyon L_2 uzayında iyi tanımlıdır. Ayrıca L_2 uzayındaki sınırlılığı ve Littlewood-Paley teorisi ile ilişkileri iyi bilinmektedir. Detaylar için Stein'e (1993-a, 1993-b) bakınız. Bundan başka Daly ve Phillips (1998), Jones vd (1996), Pipher (1986) Kuadratik fonksiyonların birçok farklı şekilleriyle ve onların çeşitli uygulamalarıyla çalışmışlardır. Stein (1993-a, 1993-b), bu fonksiyonun L_2 uzayındaki sınırlılığını ispatlarken Plancherel teoreminden yararlanmıştır. Ayrıca Aliev ve Bayrakçı (2011) Kuadratik-tipli fonksiyonları uygun dalgacık (wavelet) dönüşümleri vasıtasıyla tanımlamışlar ve L_2-uzayındaki sınırlılığını incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasında ise

$$\mathcal{B}_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{(2\alpha+1)}{t}\frac{d}{dt} \quad , \quad \alpha > -\frac{1}{2}$$

şeklinde tanımlı Bessel diferansiyel operatörünün ürettiği "Genelleşmiş kayma" operatörü

$$T_t^s f(t) = u(t,s) = c_\alpha \int_0^\pi f\left(\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos\xi}\right)(\sin\xi)^{2\alpha} d\xi$$

biçiminde verildi. Ayrıca $\psi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}_+)$ ve $\int_{\mathbb{R}_+} \psi(x)x^{2\alpha+1}dx = 0$ olmak üzere, "Genelleşmiş kayma" operatörünün doğurduğu Genelleşmiş Kuadratik fonksiyon

$$(S_\psi f)(x) = \left(\int_0^\infty |(f \circledast \psi_t)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlandı. Burada, $t > 0$ ve $\alpha > -\frac{1}{2}$ için $\psi_t(x) = t^{-2\alpha-2}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$'dir ve f ile ψ_t 'nin genelleşmiş girişimi $(f \circledast \psi_t)(s) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} T_t^s f(t) g(t) t^{2\alpha+1} dt$ şeklindedir. Ardından, Bessel Plancherel teoremi yardımıyla bu fonksiyonun $L_{2,\alpha}$ uzayındaki sınırlılığı kanıtlandı.

Çalışmamız üç esas bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, Fonksiyonlar Teorisi'nden gerekli olacak tanım ve kavramlar ile Fourier Harmonik Analiz'in temel kavramları ve önemli teoremleri tanıtıldı. Üçüncü bölümde, Birimin Yaklaşımı, Klasik Kuadratik fonksiyon ve özellikleri incelendi. Dördüncü bölümünde ise Bessel Harmonik Analiz'den önemli kavramlar, Genelleşmiş kayma ve özellikleri, Bessel Plancherel teoremi verildi. Ardından Genelleşmiş Kuadratik fonksiyon tanımlanıp ağırlıklı L_2 uzayındaki sınırlılığı kanıtlandı.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Fonksiyonlar Teorisinden Tanım ve Teoremler

$\mathbb{R}^n = \{\ x : x = (x_1, x_2, ..., x_n)\ ,\ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\ \}$ n-boyutlu Öklid uzayı; Ω, $\mathbb{R}^n$'nin açık bir alt kümesi, $\mathcal{M}$, Lebesque ölçülebilir kümelerin σ-cebiri ve μ, Lebesque ölçümü olmak üzere $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ bir ölçüm uzayıdır.

Not 1 *$C_0(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ 'deki sürekli ve $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayını ve $C^n(\mathbb{R}^n)$ ile de $\mathbb{R}^n$ 'de n. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayını göstereceğiz.*

Tanım 2.1 ***(L_p Uzayları)*** *(Folland 1984) $1 \leqslant p < \infty$ için*

$$L_p = L_p(\Omega) = \left\{ f : f\text{-ölçülebilir ve} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\}$$

*ile tanımlanan kümeye L_p **uzayı** adı verilir. Bu lineer uzay*

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

*normu ile bir **Banach** uzayıdır.*

$p = \infty$ için

$$L_\infty = L_\infty(\Omega) = \left\{ f : f\text{-ölçülebilir ve } ess \sup_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty \right\}$$

lineer uzayı

$$\|f\|_{L_\infty} = ess \sup_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf \{K > 0 : \mu \{x : |f(x)| > K\} = 0\}$$

*normu ile **Banach** uzayıdır.*

Kolaylık için $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x)$ yerine $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx$ veya $\int |f(x)|^p dx$ gösterimini kullanacağız.

Not 2 *(Folland 1984) Bir önerme,* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *ölçüm uzayında sıfır ölçümlü küme dışında doğru ise bu önermeye "**hemen hemen her yerde** sağlanıyor" denir ve bu durum **h.h.h.** ile gösterilir.*

Teorem 2.2 ***(Hölder Eşitsizliği)*** *(Folland, 1984)* $1 \leq p \leq \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *olmak üzere* $f \in L_p$ *ve* $g \in L_q$ *olsun. Bu durumda* $fg \in L_1$*'dir ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.*

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

Eşitlik durumu ancak ve ancak $A.B \neq 0$ *olmak üzere,*

$$A\,|f(x)|^p = B|g(x)|^q$$

halinde sağlanır.

$p = 2$ *için* L_2 *uzayında*

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}dx$$

*eşitliği bir **iç çarpım** tanımlar. Böylece* L_2 *uzayında Hölder eşitsizliği,*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L_2} \|g\|_{L_2}$$

***Cauchy-Schwartz** eşitsizliğine dönüşür.*

Teorem 2.3 ***(Minkowski Eşitsizliği)*** *(Folland 1984)* $f, g \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ *olsun. Böylece*

$$\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{Lp}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu ancak ve ancak $A.B \neq 0$ *olmak üzere,*

$$A|f(x)| = B|g(x)|$$

halinde sağlanır.

Teorem 2.4 ***(İntegraller için Minkowski Eşitsizliği)*** *(Folland 1984)* (X, M, μ), (Y, N, ν) σ*-sonlu ölçüm uzayları ve* $f(x, y)$, $X \times Y$ *üzerinde* $(M \times N)$*-ölçülebilir* *fonksiyon olsun.* $1 \leq p \leq \infty$ *olmak üzere h.h.h.* y *için* $f(.,y) \in L_p(\mu)$ *ve* $y \rightarrow ||f(.,y)||_p$ *fonksiyonu* $L_1(\nu)$*'de ise bu durumda h.h.h.* x *için* $f(x,.) \in L_1(\nu)$, $x \rightarrow \int\limits_Y f(x,y)d\nu(y) \in L_p(\mu)$ *ve*

$$\left\| \int\limits_Y f(.,y)d\nu(y) \right\|_{L_p} \leq \int\limits_Y ||f(.,y)||_{L_p} d\nu(y)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.5 ***(Fubini Teoremi)*** *(Folland 1984)* (X, M, μ), (Y, N, ν) σ*-sonlu ölçüm uzayları ve* $f(x,y)$, $X \times Y$ *üzerinde* $(M \times N)$*-ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer* $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\mu \times \nu$ *ölçümüne göre integrallenebilir ise bu durumda h.h.h.* $x \in X$ *için* $\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)$ *ve h.h.h.* $y \in Y$ *için* $\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)$ *integralleri sonludur ve*

$$\int\limits_{X \times Y} f(x,y)d(\mu \times \nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.6 ***(Lebesque Baskın Yakınsama Teoremi)*** *(Folland 1984)* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathbb{R}^n$ *'de Lebesque anlamında integrallenebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *fonksiyonlar dizisi* f *fonksiyonuna h.h.h. yerde yakınsak (veya noktasal yakınsak) ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *olacak biçimde negatif olmayan integrallenebilir bir* g *fonksiyonu varsa, o zaman* f *fonksiyonu da Lebesque anlamında integrallenebilirdir ve*

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_n(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

sağlanır.

Tanım 2.7 ***(L_p Uzayında Yakınsama)*** *(Folland 1984)* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, L_p *uzayında tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun.*

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{L_p} = 0$$

olacak biçimde $f \in L_p$ *fonksiyonu varsa,* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisi* f *fonksiyonuna* $\mathbf{L}_p$***'de yakınsaktır*** *denir.*

2.2. Girişim (Convolution)

Tanım 2.8 *(Stein ve Weiss 1971) $f, g \in L_1$ olmak üzere $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $F(x,y) = f(x-y)g(y)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 'de ölçülebilirdir. Ayrıca*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\, dxdy &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \right) dy \\ &= \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1} < \infty\end{aligned}$$

olduğundan Fubini teoremine göre, $y \to f(x-y)g(y)$ fonksiyonu h.h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için integrallenebilirdir. Bu integral,

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

ile gösterilir ve f ile g fonksiyonlarının ***girişimi*** *olarak tanımlanır. Ayrıca yukarıdaki eşitlikten $f, g \in L_1$ için $f * g \in L_1$ olduğu görülebilir.*

Tanım 2.9 ***(Klasik Kayma)*** *(Folland 1984) $\mathbb{R}^n$ 'nin doğal (Euclid) kayması τ_y, $(y \in \mathbb{R}^n)$*

$$\tau_y f(x) = f(x-y),$$

şeklinde tanımlanır. τ_y kaymasına bu çalışmada kolaylık olması bakımından ***" Klasik kayma"*** *diyeceğiz.*

Kayma operatörü τ_y $(y \in \mathbb{R}^n)$, L_p normunda süreklidir. Yani, $f \in L_p$ için $\lim\limits_{y \to 0} \|\tau_y f - f\|_{L_p} = 0$ 'dır.

Aşağıdaki teoremler, girişim operatörünün L_p uzaylarındaki bazı özelliklerini vermektedir.

Teorem 2.10 *(Stein ve Weiss 1971, Folland 1984) $f, g, h \in L_1$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

1. $f * g = g * f$.

2. $f * (g * h) = (f * g) * h$.

3. $\tau_y(f * g) = (\tau_y f) * g = f * (\tau_y g)$.

Teorem 2.11 ***(Young Eşitsizliği)*** *(Stein ve Weiss 1971, Folland 1984) $f \in L_1$, $g \in L_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ olsun. Bu durumda $f * g \in L_p$'dir ve*

$$\|f * g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_p}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.12 ***(Genelleşmiş Young Eşitsizliği)*** *(Stein ve Weiss 1971, Folland 1984) $f \in L_p$, $g \in L_q$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ olsun. Bu durumda, $f * g \in L_r$ ve*

$$\|f * g\|_{L_r} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

eşitsizliği sağlanır. $r = \infty$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\|f * g\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$'dur.

Bu kesimde Fourier Harmonik Analizden bizim için gerekli olacak tanım ve teoremleri hatırlatacağız. Çalışmanın devamında $\lambda > 0$ için $\delta_\lambda f(x) = f(\lambda x)$, $f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^n} f(x/\lambda) = \frac{1}{\lambda^n}\delta_{1/\lambda} f(x)$ ve $\widetilde{f}(x) = f(-x)$ notasyonlarını kullanacağız.

Tanım 2.13 *(Folland 1984) $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere x ve y vektörlerinin* ***"iç çarpımı"***

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.14 *(Folland 1984) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ 'ye* ***multi-indeks*** *denir. $|\alpha| = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$ olup $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ için*

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} \quad ve \quad D^\alpha = \partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n} / \partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}$$

'dir.

2.3. Fourier Dönüşümü

Tanım 2.15 *(Stein ve Weiss 1971) $f \in L_1$ fonksiyonunun **Fourier dönüşümü**,*

$$(Ff)(\xi) = f^{\wedge}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x.\xi} dx \quad , \quad dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$$

ile tanımlanır.

Aşağıdaki teorem, Fourier dönüşümünün temel özelliklerini içermektedir, Fourier Analizin bu temel özelliklerinin daha iyi anlaşılabilmesi için teorem, ispatı ile verilmiştir. Detaylar için Stein ve Weiss (1971) ile Folland (1984)'a bakınız.

Teorem 2.16 *$f, g \in L_1$ için aşağıdakiler sağlanır:*

1. $||f^{\wedge}||_{L_\infty} \leq ||f||_{L_1}$.
2. $(f+g)^{\wedge}(\xi) = f^{\wedge}(\xi) + g^{\wedge}(\xi)$; $(af)^{\wedge}(\xi) = af^{\wedge}(\xi)$, a - *skaler.*
3. *(Riemann-Lebesque Lemması)* $f^{\wedge}(\xi) \to 0$, $|\xi| \to \infty$.
$$\left(\lim_{|p|\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \cos p.x dx = 0 \text{ ve } \lim_{|p|\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \sin p.x dx = 0 \right)$$
4. $(f * g)^{\wedge}(\xi) = f^{\wedge}(\xi) g^{\wedge}(\xi)$.
5. $(\tau_y f)^{\wedge}(\xi) = e^{-2\pi i y.\xi} f^{\wedge}(\xi)$.
6. $(e^{2\pi i x.y} f(x))^{\wedge}(\xi) = (\tau_y f^{\wedge})(\xi)$.
7. $(\delta_\lambda f)^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{\lambda^n}(\delta_{1/\lambda} f^{\wedge})(\xi) = \frac{1}{\lambda^n} f^{\wedge}_{1/\lambda}(\xi)$.
8. $\partial_j f \in L_1$ *ise* $(\partial_j f)^{\wedge}(\xi) = 2\pi i \xi_j f^{\wedge}(\xi)$. *Ayrıca* $(D^\alpha f)^{\wedge}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha f^{\wedge}(\xi)$.
9. $x_j f \in L_1$ *ise* $(\partial_j f^{\wedge})(\xi) = ((-2\pi i x_j) f(x))^{\wedge}(\xi)$ *'dir. Bundan başka* $x^\alpha f \in L_1$ *ve* $D^\alpha f^{\wedge} < \infty$ *ise* $(D^\alpha f^{\wedge})(\xi) = ((-2\pi i x)^\alpha f(x))^{\wedge}(\xi)$ *'dir.*
10. $(\widetilde{f})^{\wedge}(\xi) = (-1)^n \widetilde{(f^{\wedge})}(\xi)$.
11. $(\overline{f})^{\wedge}(\xi) = \overline{\widetilde{(f^{\wedge})}}(\xi)$.

İspat.

1. $f^\wedge(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x.\xi}dx$ olduğundan,

$$|f^\wedge(\xi)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x.\xi}dx\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_{L_1}$$

ve

$$\|f^\wedge\|_{L_\infty} = ess \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |f^\wedge(\xi)| \leq \|f\|_{L_1}$$

elde edilir.

2.

$$\begin{aligned}(f+g)^\wedge(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}(f+g)(x)e^{-2\pi i x.\xi}dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x.\xi}dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-2\pi i x.\xi}dx \\ &= f^\wedge(\xi) + g^\wedge(\xi).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(af)^\wedge(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}(af)(x)e^{-2\pi i x.\xi}dx \\ &= a\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x.\xi}dx \\ &= af^\wedge(\xi).\end{aligned}$$

3. Ölçüm uzayında sonlu veya sayılabilir değer alan fonksiyonlara **basamak** veya **adım fonsiyonları** denir. Basamak fonksiyonları L_1 uzayında yoğundur ve karakteristik fonksiyonların lineer bileşimleri olarak ifade edilmektedirler. Böylece Riemann-Lebesque lemmasını karakteristik fonksiyonlar için kanıtlamak yeterlidir. İspatı $n = 1$ için $\mathbb{R}$'de yapalım. Benzer şekilde $\mathbb{R}^n$ 'de de yapılır. f fonksiyonu olarak $[a, b]$ aralığının karakteristik fonksiyonunu alalım. Yani, $f(x) = \mathcal{X}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1\ , & x \in [a, b] \\ 0\ , & \text{diğer} \end{cases}$ olsun. Böylece,

$$f^\wedge(\xi) = \int\limits_a^b e^{-2\pi i x\xi}dx = -\frac{1}{2\pi i\xi}e^{-2\pi i x\xi}\Big|_a^b = -\frac{1}{2\pi i\xi}(e^{-2\pi i b\xi} - e^{-2\pi i a\xi})$$

elde edilir. Buradan $\xi \to \infty$ için $f^\wedge(\xi) \to 0$ olduğu görülebilir.

4.

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-2\pi i x.\xi} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) e^{-2\pi i x.\xi} dy dx$$

elde edilir. Bu eşitlikte $z = x - y$, $dz = dx$ değişken değişimi yapılarak

$$\begin{aligned}
(f * g)^\wedge(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y) e^{-2\pi i (y+z).\xi} dy dz \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i y.\xi} dy \right) e^{-2\pi i z.\xi} dz \\
&= f^\wedge(\xi) g^\wedge(\xi)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

5.

$$\begin{aligned}
(\tau_y f)^\wedge(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\tau_y f)(x) e^{-2\pi i x.\xi} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-2\pi i x.\xi} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (x+y).\xi} dx \\
&= e^{-2\pi i y.\xi} f^\wedge(\xi).
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\left(e^{2\pi i x y} f(x) \right)^\wedge (\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x.y} f(x) e^{-2\pi i x.\xi} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x.(\xi - y)} dx \\
&= f^\wedge(\xi - y) \\
&= (\tau_y f^\wedge)(\xi).
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
(\delta_\lambda f)^\wedge(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\delta_\lambda f)(x) e^{-2\pi i x.\xi} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) e^{-2\pi i x.\xi} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x.\frac{\xi}{\lambda}} \lambda^{-n} dx \\
&= \lambda^{-n} f^\wedge(\xi/\lambda) \\
&= f_\lambda^\wedge(\xi).
\end{aligned}$$

8. $n = 1$, $\alpha = 1$ için

$$(f')^\wedge(\xi) = \int f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = f(x) e^{-2\pi i \xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int f(x)(-2\pi i \xi) e^{-2\pi i \xi x} dx = 2\pi i \xi f^\wedge(\xi)$$

olur. Genel halde

$$\alpha = (0, 0, ..., 0, \underbrace{1}_{j.\ koordinat}, 0, ..., 0)$$

seçilirse j. değişkene göre kısmi integralleme yapılarak istenen eşitlikler elde edilir.

9. Kanıtı $n = 1$, $\alpha = 1$ için yapalım.

$$(f^\wedge)'(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[f^\wedge(\xi + h) - f^\wedge(\xi) \right] = ((-2\pi i x) f(x))^\wedge(\xi)$$

eşitliğini görmek istiyoruz. Fourier dönüşümünün tanımı uygulanırsa,

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x\xi} \left[\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right] dx = 0$$

elde edilir. Bunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right| &\leq \left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} \right| + |2\pi i x| \\
&\leq \left| \frac{\cos 2\pi x h - 1}{h} - i \frac{\sin 2\pi x h}{h} \right| + |2\pi i x| \\
&\leq \left| \frac{1}{h}(\cos 2\pi x h - \cos 0) \right| + \frac{|\sin 2\pi x h|}{|h|} + |2\pi i x|
\end{aligned}$$

'dir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk kısma Lagrange Ortalama Değer formülü uygulandığında, $c > 0$ için

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h}+2\pi ix\right| &\leq \frac{1}{|h|}|(-\sin 2\pi xc_h)|\ |2\pi xh-0|+2\pi|x|\frac{|\sin 2\pi xh|}{|2\pi xh|}+|2\pi ix| \\ &\leq \frac{1}{|h|}2\pi|x|\ |h|+2\pi|x|+|2\pi ix|\leq c|x|\end{aligned}$$

olduğundan **Lebesque baskın yakınsama** teoremi gereğince $h \to 0$ iken yukarıdaki limit sıfıra gider. Bu ise istenilen eşitliği gösterir. Genel halde, α multi-indeksi

$$\alpha = (0,0,...,0,\underbrace{1}_{j.\ koordinat},0,...,0)$$

biçiminde seçilirse, yine **Lebesque baskın yakınsama** teoremine göre,

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[\frac{e^{-2\pi ix.(\xi+he_j)}-e^{-2\pi ix.\xi}}{h}-(-2\pi ix_j)\,e^{-2\pi ix.\xi}\right]dx = 0$$

elde edilir.

10.

$$\begin{aligned}(\widetilde{f})^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}(x)e^{-2\pi ix.\xi}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)e^{-2\pi ix.\xi}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{2\pi ix.\xi}(-1)^n dx \\ &= (-1)^n f^\wedge(-\xi) \\ &= (-1)^n\widetilde{(f^\wedge)}(\xi).\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}(\overline{f})^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(x)}e^{-2\pi ix.\xi}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(x)e^{2\pi ix.\xi}}dx \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{2\pi ix.\xi}dx} \\ &= \overline{f^\wedge(-\xi)} \\ &= \overline{\widetilde{(f^\wedge)}}(\xi).\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Birimin Yaklaşımı (Approximation Identity)

Tanım 3.17 *(Folland 1984)* $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, *L_1'de ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer her k için $\|h_k\|_{L_1} = 1$ ve her $f \in L_1$ için $f * h_k \xrightarrow{L_1} f$, $k \to \infty$ ise $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine* ***birimin yaklaşımı*** *denir.*

Teorem 3.18 *(Folland 1984)* $\Phi \in L_1$, $\Phi \geq 0$ *ve* $\|\Phi\|_{L_1} = 1$ *olsun.*

Bu durumda $\Phi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^n}\Phi(x/\lambda)$, $\lambda > 0$ *olmak üzere* $\{\Phi_\lambda\}_{\lambda>0}$ *birimin yaklaşımıdır. Yani her* $f \in L_1$ *için* $\Phi_\lambda * f \xrightarrow{L_1} f$, $\lambda \to 0$ *'dır.*

İspat. $\|\Phi_\lambda\|_{L_1} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\lambda(y)dy = 1$ olduğundan $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Phi_\lambda(y)dy$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
(\Phi_\lambda * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\lambda(y) f(x-y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\lambda(y) f(x)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\lambda(y)(f(x-y) - f(x))dy
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\|(\Phi_\lambda * f) - f\|_{L_1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\lambda(y)(f(x-y) - f(x))dy \right| dx \\
&\leq \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y/\lambda)\, |f(x-y) - f(x)| dydx \\
&\overset{Fubini}{=} \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y/\lambda) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| dx \right) dy \\
&\leq \frac{1}{\lambda^n} \int_{|y|\leq\delta} \Phi(y/\lambda) \|(\tau_y f) - f\|_{L_1} dy + \frac{2\|f\|_{L_1}}{\lambda^n} \int_{|y|>\delta} \Phi(y/\lambda)\, dy \\
&\leq \int_{|z|\leq\frac{\delta}{\lambda}} \Phi(z) \|(\tau_{\lambda z} f) - f\|_{L_1} dz + 2\|f\|_{L_1} \int_{|z|>\frac{\delta}{\lambda}} \Phi(z)\, dz
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\lambda \to 0$ için $\delta > 0$ sayısı

$$\|(\Phi_\lambda * f) - f\|_{L_1} < \varepsilon$$

sağlanacak şekilde seçilebilir. ■

Örneğin, $\Phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ fonksiyonunu alalım. $\|\Phi\|_{L_1} = 1$ 'dir. Bu fonksiyonun

$$\Phi^\wedge(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$$

biçimindeki Fourier dönüşümü **Gauss-Weierstrass çekirdeği** olarak bilinir. $\Phi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\pi\left|\frac{x}{\lambda}\right|^2}$, $\lambda > 0$ birimin yaklaşımı olmak üzere

$$(\Phi_\lambda * f)(x) = \frac{1}{\lambda^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-\pi\left|\frac{y}{\lambda}\right|^2} dy$$

integrali, **Gauss-Weierstrass integrali** olarak adlandırılır ve yukarıdaki teoreme göre her $f \in L_1$ için Gauss-Weierstrass integrali $\lambda \to 0$ iken f fonksiyonuna yakınsar.

Tanım 3.19 ***(Schwartz Uzayı)*** *(Folland 1984) Schwartz uzayı sonsuz türevlenen, kendisi, türevleri polinomla çarpıldıktan sonra sıfıra giden test fonksiyonlar uzayıdır. α ve β multi-indeks olmak üzere*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|x^\alpha (D^\beta \Phi)(x)\right| < \infty \ , \ \forall \alpha, \beta \ \}$$

ile tanımlanır.

Not 3 *Schwartz uzayı, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L_p uzayında yoğundur. Bu yüzden* ***test fonksiyonlar uzayı*** *adını alır. Fourier dönüşümü, Schwartz uzayını yine Schwartz uzayına dönüştürür.*

3.2. Ters Fourier Dönüşümü

Tanım 3.20 *(Stein ve Shakarchi 2003, Folland 1984) $f \in \mathcal{S}$ olmak üzere f'nin ters Fourier dönüşümü,*

$$f^\vee(x) \equiv (F^{-1}f)(x) = f^\wedge(-x) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

ile tanımlanır.

Ters Fourier dönüşümü de Fourier dönüşümü ile aynı özelliklere sahiptir.

Teorem 3.21 *(Stein ve Shakarchi 2003) $f, g \in \mathcal{S}$ için*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g^\wedge(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(x)g(x)dx$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g^\wedge(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i x.y}dy\right]dx \\
&\overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)e^{-2\pi i x.y}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x.y}dx\right]dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(y)g(y)dy
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}$ uzayı L_1'de yoğun olduğundan eşitlik L_1 uzayında da sağlanır. ■

Teorem 3.22 ***(Fourier Inversion Teoremi)*** *(Stein ve Shakarchi 2003, Folland 1984) $f \in \mathcal{S}$ için*

$$(f^\wedge)^\vee = f = (f^\vee)^\wedge$$

'dir. Yani, $x \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(\xi)e^{2\pi i \xi.x}d\xi\ .$$

İspat. Bu teoremin kanıtında "Birimin yaklaşımı" uygulanacaktır. Öncelikle $t > 0$ ve $\xi, x \in \mathbb{R}^n$ için

$$g(\xi) = e^{2\pi i \xi.x}e^{-\pi|t\xi|^2}$$

fonksiyonu tanımlansın. Teorem 2.16 'nın 6. ve 7. özellikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} g^{\wedge}(y) &= \tau_x\left(e^{-\pi|t\xi|^2}\right)^{\wedge}(y) \\ &= \tau_x\left(\delta_t e^{-\pi|\xi|^2}\right)^{\wedge}(y) \\ &= \tau_x\left(t^{-n}e^{-\pi|y/t|^2}\right) \\ &= t^{-n}e^{-\pi\left|\frac{x-y}{t}\right|^2} = \Phi_t(x-y) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $\Phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ olmak üzere $\Phi_t(x) = t^{-n}e^{-\pi\left|\frac{x}{t}\right|^2}$'dir. Teorem 3.21 'e göre

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi)e^{2\pi i\xi.x}e^{-\pi|t\xi|^2}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\Phi_t(x-y)dy = (f*\Phi_t)(x)$$

eşitliği elde edilir. $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} = 1$ olduğundan Teorem 3.18 'e göre $t \to 0$ için limite geçilirse $(f*\Phi_t)(x) \xrightarrow{L_1} f$ ve Lebesque 'in baskın yakınsama teoreminden,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi)e^{2\pi i\xi.x}e^{-\pi|t\xi|^2}d\xi \\ f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi)e^{2\pi i\xi.x}d\xi \end{aligned}$$

olur. ■

Teorem 3.23 ***(Parseval Eşitliği)*** *(Folland 1984)* $f, g \in \mathcal{S}$ *için*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{h(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi)\overline{h^{\wedge}(\xi)}d\xi$$

'dir.

İspat. Teorem 3.21 'deki eşitlikte $g = \overline{h^{\wedge}}$ alalım.Teorem 2.16 'da verdiğimiz Fourier dönüşümünün 11. özelliğine göre $g^{\wedge} = \overline{\widetilde{(h^{\wedge})^{\wedge}}}$ elde edilir. Ayrıca $f^{\vee} = \widetilde{f^{\wedge}}$ olduğundan $g^{\wedge} = \overline{(h^{\wedge})^{\vee}} = \overline{h}$ bulunur. Böylece

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{h(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x)\overline{h^{\wedge}(x)}dx$$

olduğu görülür. ■

Teorem 3.24 ***(Plancherel Teoremi)*** *(Folland 1984)* $f \in L_1 \cap L_2$ *ise*

$$||f||_{L_2} = ||f^\wedge||_{L_2} = ||f^\vee||_{L_2}$$

'dir.

İspat. Teorem 3.23 'ten

$$||f||_{L_2}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(x)\,\overline{f^\wedge(x)} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f^\wedge(x)|^2 dx = ||f^\wedge||_{L_2}^2$$

elde edilir. $||f^\vee||_{L_2}$'nin de diğerlerine eşit olduğu benzer şekilde görülebilir. ■

3.3. Klasik Kuadratik (Square) Fonksiyon

Fourier harmonik analizde çalışılan temel teknik araçların başında girişim tipli operatörler gelmektedir. Maksimal operatörler, Singular integraller bu tip operatörlere örnek olarak verilebilir. Ayrıca Kuadratik (Square) fonksiyonlar tanımlanırken de girişim tipli operatörler kullanılmıştır.

Φ fonksiyonu Schwartz test fonksiyonlar uzayından olmak üzere, $\int \Phi = 0$ olması halinde $f \to \mathcal{S}_\Phi(f)$ dönüşümü,

$$(\mathcal{S}_\Phi f)(x) = \left(\int\limits_0^\infty |(f * \Phi_t)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanan Kuadratik fonksiyonu belirler. Burada $\Phi_t(x) = t^{-n}\Phi\left(\frac{x}{t}\right)$, $t > 0$ 'dır.

Klasik Kuadratik fonksiyon olarak adlandırmamızın sebebi ise Klasik kaymanın doğurduğu (Laplace diferansiyel operatörünün ürettiği) girişim ile tanımlanmasıdır.

Bu çalışmamızda Genelleşmiş kaymanın doğurduğu (Bessel diferansiyel operatörünün ürettiği) Kuadratik fonksiyonları inceleyeceğimiz için yukarıda tanımladığımız Kuadratik fonksiyonu yeri geldikçe Klasik Kuadratik fonksiyon olarak ifade edeceğiz.

Kuadratik fonksiyonların L_2 uzayındaki tahminleri Plancherel teoremi vasıtasıyla kolaylıkla bulunabilmektedir.

Aşağıdaki teorem, Klasik Kuadratik fonksiyonun L_2 uzayındaki sınırlılığını ifade etmektedir.

Teorem 3.25 *(Stein 1993-b)* $\Phi \in \mathcal{S}$ *ve* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)dx = 0$ *olsun.* $\forall t > 0$ *için* $\Phi_t(x) = t^{-n}\Phi\left(\frac{x}{t}\right)$ *olmak üzere*

$$(\mathcal{S}_\Phi f)(x) = \left(\int\limits_0^\infty |(f * \Phi_t)(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Kuadratik fonksiyonu, $f \in L_2$ *için* $\|\mathcal{S}_\Phi f\|_{L_2} \leq A||f||_{L_2}$ *eşitsizliğini sağlar.*

İspat. $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ olsun. Sırasıyla Fubini teoremi, Plancherel teoremi, Teorem 2.16 'daki 4. özellik ve tekrar Fubini teoremi uygulanarak

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_\Phi f\|_{L_2}^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^\infty |(f * \Phi_t)(x)|^2 \frac{dt}{t} dx \\
&= \int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(f * \Phi_t)(x)|^2 dx \frac{dt}{t} \\
&= \int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(f * \Phi_t)^\wedge(x)|^2 dx \frac{dt}{t} \\
&= \int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f^\wedge(x)|^2 |\Phi_t^\wedge(x)|^2 dx \frac{dt}{t} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f^\wedge(x)|^2 \left(\int\limits_0^\infty |\Phi_t^\wedge(x)|^2 \frac{dt}{t}\right) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $\int\limits_0^\infty |\Phi_t^\wedge(x)|^2 \frac{dt}{t}$ integralini hesaplayalım:

$\Phi_t(x) = t^{-n}\Phi\left(\frac{x}{t}\right)$ olmak üzere, Teorem 2.16 'daki 7. maddeye göre,

$$\Phi_t^\wedge(x) = t^{-n}\left(\delta_{\frac{1}{t}}\Phi\right)^\wedge(x) = t^{-n}t^n\ \Phi^\wedge(tx) = \Phi^\wedge(tx)$$

olur. Φ-fonksiyonu Schwartz uzayından olduğundan $\Phi^\wedge$ fonksiyonu da Schwartz uzayındandır. Bundan başka $\int \Phi(x)dx = 0$ olduğundan $\Phi^\wedge(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\xi)\ e^{-2\pi i\xi x}d\xi$ ve $\Phi^\wedge(0) = 0$ olur. Buradan, $x = 0$ noktası komşuluğunda

$$|\Phi^\wedge(x)| \leq c_1|x|$$

sağlanır. Ayrıca, $\Phi^\wedge(x)$ Schwartz uzayından olduğundan, $|x| \to \infty$ için $\Phi^\wedge(x)$ fonksiyonu $|x|^{-1}$ 'den daha hızlı sıfıra gitmektedir. Bundan dolayı

$$|\Phi^\wedge(x)| \leq c_2|x|^{-1}$$

'dir. $\int\limits_0^\infty |\Phi_t^\wedge(x)|^2 \frac{dt}{t}$ integraline $t = \frac{\tau}{|x|}$, $\frac{dt}{t} = \frac{d\tau}{\tau}$ dönüşümü uygulanarak yukarıdaki iki eşitsizlik yardımıyla

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty |\Phi_t^\wedge(x)|^2 \frac{dt}{t} &= \int\limits_0^\infty |\Phi^\wedge(tx)|^2 \frac{dt}{t} \\
&= \int\limits_0^\infty \left|\Phi^\wedge\left(\frac{\tau}{|x|}x\right)\right|^2 \frac{d\tau}{\tau} \\
&\leq \int\limits_0^1 c_1^2\tau^2 \frac{d\tau}{\tau} + \int\limits_1^\infty c_2^2\tau^{-2} \frac{d\tau}{\tau} < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \int\limits_0^\infty |\Phi_t^\wedge(x)|^2 \frac{dt}{t} \leq A^2$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_\Phi f\|_{L_2}^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f^\wedge(x)|^2 \left(\int\limits_0^\infty |\Phi_t^\wedge(x)|^2 \frac{dt}{t}\right) dx \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left(\int\limits_0^\infty |\Phi_t^\wedge(x)|^2 \frac{dt}{t}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f^\wedge(x)|^2 \, dx \\
&\leq A^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f^\wedge(x)|^2 \, dx \\
&\leq A^2 ||f^\wedge||_{L_2}^2
\end{aligned}$$

ve buradan da Plancherel teoreminden

$$\|\mathcal{S}_\Phi f\|_{L_2} \leq A||f||_{L_2}$$

olduğu görülür. ■

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Genelleşmiş Kayma ve Özellikleri

Genelleşmiş kayma (Bessel kayma) operatörü $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ aralığında tanımlı en önemli kayma operatörlerindendir. Bessel kayması kullanılarak ağırlıklı L_p uzaylarında tanımlı fonksiyonların özelliklerini incelemek ise Yaklaşım (Approximation) teoresindeki önemli problemlerden birisidir. Öncelikle çalışmamız için gerekli olacak temel tanım ve kavramları verelim.

Tanım 4.26 *(Levitan 1951, Platonov 2009) α reel sayısı $\alpha > -\frac{1}{2}$ koşulunu sağlamak üzere*

$$B_t := \frac{d^2}{dt^2} + \frac{(2\alpha + 1)}{t} \frac{d}{dt}$$

diferansiyel operatörüne ***Bessel diferansiyel operatörü*** *denir.*

Not 4 *α reel sayısı burada ve bundan sonra her yerde $\alpha > -\frac{1}{2}$ koşulunu sağlayacak şekilde seçilecektir.*

Tanım 4.27 *(Levitan 1951) Birinci çeşit normlandırılmış Bessel fonksiyonu $j_\alpha(t)$,*

$$j_\alpha(t) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \frac{J_\alpha(t)}{t^\alpha}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $J_\alpha(t)$, Bessel'in birinci çeşit fonksiyonu ve $\Gamma(x)$ ise iyi bilinen Gamma fonksiyonudur. $y = j_\alpha(t)$ fonksiyonu $B_t y + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ diferansiyel denklemini sağlar. Bundan başka, $j_\alpha(t)$ fonksiyonu sonsuz türevlenen, çift ve tam analitik bir fonksiyondur.

Tanım 4.28 *(Levitan 1951) $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ olmak üzere $f \in C(\mathbb{R}_+)$ fonksiyonunun* ***Genelleşmiş kayması (Bessel kayması)***

$$T_t^s f(t) = c_\alpha \int_0^\pi f\left(\sqrt{t^2 + s^2 - 2ts\cos\xi}\right) (\sin\xi)^{2\alpha} d\xi$$

ile tanımlanır. Burada

$$c_\alpha = \left(\int_0^\pi (\sin\xi)^{2\alpha} d\xi \right)^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}$$

'dir. Genelleşmiş kayma, aşağıdaki Cauchy probleminin tek türlü belirli çözümüdür:

$$\begin{cases} B_t u(s,t) = B_s u(s,t) \\ u(t,0) = f(t)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial s}(t,0) = 0 \end{cases}$$

B_s ve B_t sırasıyla s ve t'ye göre Bessel diferansiyel operatörleridir.

Bu sebepten dolayı Genelleşmiş kayma, Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu kayma olarak bilinir.

Tanım 4.29 *(Löfstrom ve Peetre 1969, Levitan 1951) $1 \le p < \infty$ olmak üzere $\mathbb{R}_+$'da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların ağırlıklı L_p uzayı,*

$$L_{p,\alpha} = L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+) := \left\{ f : ||f||_{L_{p,\alpha}} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p x^{2\alpha+1} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

ile tanımlanan bir Banach uzayıdır. $p = \infty$ için L_∞ uzayı $\mathbb{R}_+$'da düzgün sürekli fonksiyonların Banach uzayı olup $||f||_{L_\infty} := \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|$ biçimindedir.

Not 5 *(Löfstrom ve Peetre 1969, Levitan 1951) Schwartz'ın $\mathbb{R}_+$'da tanımlı çift fonksiyonlar uzayını da bundan sonra $\mathcal{S}_+ = \mathcal{S}_+(\mathbb{R}_+)$ ile göstereceğiz. Ayrıca $\mathcal{S}_+$ uzayının $L_{p,\alpha}$ uzayında yoğun olduğu bilinmektedir.*

Tanım 4.30 *(Levitan 1951) $f(t) \in L_{1,\alpha}$ olmak üzere Bessel dönüşümü*

$$(\mathcal{B}f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t) j_\alpha(\lambda t) t^{2\alpha+1} dt\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}_+$$

ile tanımlanır. Bessel dönüşümü için $\mathcal{F}(f(t))$ veya $f^\wedge(\lambda)$ gösterimlerini kullanacağız. Birinci çeşit normlandırılmış Bessel fonksiyonu $j_\alpha(t)$ için sağlanan

$$j_\alpha(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(tu) du$$

eşitliğinden $\forall t \in \mathbb{R}$ *için* $|j_\alpha(t)| \leq 1$ *elde edilir. Dahası eşitlik hali* $t = 0$ *için sağlanır. Buradan, Fourier dönüşümüne benzer olan Bessel dönüşümünün aşağıdaki özellikleri elde edilmektedir.*

Teorem 4.31 *(Levitan 1951)* $f(t) \in L_{1,\alpha}$ *olsun. O halde* $(\mathcal{B}f)(\lambda)$ *sürekli ve sınırlı olup*

$$||\mathcal{B}f||_\infty \leq ||f||_{L_{1,\alpha}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bundan başka

$$\lim_{\lambda \to \infty} (\mathcal{B}f)(\lambda) = 0$$

'dır.

İspat. Yukarıda da bahsedildiği gibi

$$j_\alpha(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(tu) du$$

eşitliğine Riemann-Lebesque lemması uygulanırsa, $t \to \infty$ için $j_\alpha(t)$ ve tüm $j_\alpha^{(k)}(t)$ türevlerinin sıfıra gittiği görülür. Bundan başka, $|j_\alpha(\lambda t)| \leq 1$ olduğundan

$$|(\mathcal{B}f)(\lambda)| \leq \int_{\mathbb{R}_+} |f(t)||j_\alpha(\lambda t)|t^{2\alpha+1} dt \leq ||f||_{L_{1,\alpha}}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $||\mathcal{B}f||_{L_\infty} \leq ||f||_{L_{1,\alpha}}$ olur. Tekrar Riemann-Lebesque lemması uygulanılarak

$$\lim_{\lambda \to \infty} (\mathcal{B}f)(\lambda) = 0$$

olduğunu görülebilir. ■

Şimdi de Bessel dönüşümünün ileride bizim için gerekli olacak aşağıdaki özelliğini ispatıyla verelim.

Teorem 4.32 *(Levitan 1951)* $\mathcal{B}(f(t)) = (\mathcal{B}f)(\lambda)$ *ile ifade edilmek üzere,*

$$\mathcal{B}(f(at)) = a^{-2\alpha-2}(\mathcal{B}f)\left(\frac{\lambda}{a}\right) \ , \ a > 0$$

'dır.

İspat. Bessel dönüşümü tanımında $f(t)$ yerine $f(at)$ alınıp $t = \frac{\tau}{a}$, $dt = \frac{1}{a}d\tau$ dönüşümü uygulanırsa, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ve $a > 0$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(f(at)) &= \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(at) j_\alpha(\lambda t) t^{2\alpha+1} dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(\tau) j_\alpha(\lambda \frac{\tau}{a}) \tau^{2\alpha+1} a^{-(2\alpha+1)} a^{-1} d\tau \\
&= a^{-2\alpha-2} \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(\tau) j_\alpha(\frac{\lambda}{a}\tau) d\tau \\
&= a^{-2\alpha-2} (\mathcal{B}f) \left(\frac{\lambda}{a}\right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem ise Genelleşmiş Kayma (Bessel Kayması) 'nın bazı özelliklerini vermektedir.

Teorem 4.33 *(Levitan 1951)* $t, s, \lambda \in \mathbb{R}_+$, $f(t), g(t) \in L_{1,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ *olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:*

1. $T_t^s j_\alpha(\lambda t) = j_\alpha(\lambda s) j_\alpha(\lambda t)$.
2. $\int\limits_{\mathbb{R}_+} (T_t^s f(t))\, g(t)\ t^{2\alpha+1} dt = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t)\, (T_t^s g(t))\, t^{2\alpha+1} dt$.
3. $T_t^s f(t) = T_s^t f(s)$.
4. $T_t^s 1 = 1$.

Teorem 4.34 *(Trimeche 1986)* $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \le p \le \infty$ *için*

$$\|T_t^s f\|_{L_{p,\alpha}} \le ||f||_{L_{p,\alpha}}$$

'dır.

İspat. Öncelikle $[0, \pi]$ aralığında $dm(\xi) = c_\alpha (\sin \xi)^{2\alpha} d\xi$ ölçümünü tanımlayalım. Buradaki c_α sabiti Tanım 4.28 'de verilmiştir. Böylece Genelleşmiş Kayma

$$T_t^s f(t) = \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{t^2 + s^2 - 2ts\cos\xi}\right) dm(\xi)$$

şeklini alır. $p=\infty$ için

$$|T_t^s f(t)| \leq \underset{t\in\mathbb{R}_+}{ess\sup}|f(t)| = ||f||_{L_\infty}$$

olur ve

$$||T_t^s f||_{L_\infty} \leq ||f||_{L_\infty}$$

elde edilir. $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere Hölder eşitsizliği kullanılarak her sürekli $f(t)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
|T_t^s f(t)| &= \left| \int_0^\pi f\left(\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos\xi}\right) 1dm(\xi) \right| \\
&\leq \left(\int_0^\pi \left| f\left(\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos\xi}\right)\right|^p dm(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\pi dm(\xi) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(T_t^s(|f(t)|^p)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan da

$$|T_t^s f(t)|^p \leq T_t^s\left(|f(t)|^p\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Şimdi $T_t^s f$ 'nin $L_{p,\alpha}$ normu hesaplanabilir. Bunun için yukarıdaki eşitsizlik ve Teorem 4.33 'ün 2. ve 4. maddeleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|T_t^s f(t)\|_{L_{p,\alpha}}^p &= \int_{\mathbb{R}_+} |T_t^s f(t)|^p t^{2\alpha+1} dt \leq \int_{\mathbb{R}_+} T_t^s(|f(t)|^p) t^{2\alpha+1} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p \left(T_t^s 1\right) t^{2\alpha+1} dt = \int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p\, t^{2\alpha+1} dt = ||f||_{L_{p,\alpha}}^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|T_t^s f\|_{L_{p,\alpha}} \leq ||f||_{L_{p,\alpha}}$$

olduğu görülür. ∎

Aşağıda $L_{1,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ 'da tanımlı $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları için Bessel kaymasının (Genelleşmiş kaymanın) doğurduğu Genelleşmiş girişim operatörü tanımlanmıştır.

Tanım 4.35 *(Levitan 1951) $f(t)$ ve $g(t)$, $L_{1,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ 'da tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere*

$$(f \circledast g)(s) := \int_{\mathbb{R}_+} T_t^s f(t) g(t) t^{2\alpha+1} dt$$

operatörü, ***Genelleşmiş girişim*** *olarak bilinir.*

Genelleşmiş girişimin bazı özellikleri aşağıda listelenmiştir. Bu operatörün Klasik girişim ile benzer özellikleri sağladığı gözlemlenebilir.

Teorem 4.36 *(Levitan 1951) $f, g, h \in L_{1,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

1. $(f \circledast g) \circledast h = f \circledast (g \circledast h)$,
2. $f \circledast g = g \circledast f$,
3. $\mathcal{B}(f \circledast g)(\lambda) = \mathcal{B}f(\lambda)\mathcal{B}g(\lambda)$.

Sonuncu özellik, Bessel dönüşümünün Genelleşmiş girişimi çarpmaya dönüştürdüğü şeklinde yorumlanabilir.

Ayrıca L_p uzayında klasik girişim için kanıtlanan Young eşitsizliğinin bir benzeri $L_{p,\alpha}$ uzayında Genelleşmiş girişim operatörü için de doğrudur ve kanıtı Hölder eşitsizliği vasıtasıyla yapılabilir.

Teorem 4.37 *(Levitan 1951) $f \in L_{1,\alpha}$, $g \in L_{p,\alpha}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,*

$$||f \circledast g||_{L_{p,\alpha}} \leq ||f||_{L_{1,\alpha}}||g||_{L_{p,\alpha}}$$

'dır.

Aşağıda, çalışmamızın bundan sonraki bölümü için bize gerekli olacak Klasik Plancherel teoreminin bir benzeri olan Bessel Plancherel teoremi verilmiştir.

Teorem 4.38 ***(Bessel Plancherel Teoremi)*** *(Dziri 2012) $f \in L_{2,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ olmak üzere*

$$||\mathcal{B}f||_{L_{2,\alpha}} = ||f||_{L_{2,\alpha}}$$

'dır.

4.2. Genelleşmiş Kuadratik (Square) Fonksiyon

Çalışmamızın son bölümünde Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu, yani Genelleşmiş kaymanın (Bessel kaymasının) ürettiği Genelleşmiş Kuadratik (Square) fonksiyon tanımlanmıştır. Klasik halde olduğu gibi Bessel Plancherel teoremi kullanılarak Genelleşmiş Kuadratik fonksiyonun $L_{2,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ uzayındaki sınırlılığı incelenmiştir.

Tanım 4.39 *$\psi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}_+)$ ve $\int\limits_{\mathbb{R}_+} \psi(x) x^{2\alpha+1} dx = 0$ olmak üzere **Genelleşmiş Kuadratik fonksiyon***

$$(S_\psi f)(x) = \left(\int\limits_0^\infty |(f \circledast \psi_t)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

biçimindedir. Burada, $t > 0$ için $\psi_t(x) = t^{-2\alpha-2}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$, $\alpha > -\frac{1}{2}$ 'dir.

Fourier Harmonik Analiz'de olduğu gibi Bessel Harmonik Analiz veya Fourier-Bessel Harmonik Analiz'de de girişim tipli operatörler temel teknik araçlar olarak kabul edilmektedirler.

Aşağıdaki teorem, Genelleşmiş Kuadratik (Square) fonksiyonun $L_{2,\alpha}$ uzayındaki sınırlılığını ifade etmektedir ve Bessel Plancherel teoremi yardımıyla elde edilmiştir.

Teorem 4.40 *$f \in L_{2,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ için Genelleşmiş Kuadratik fonksiyon*

$$(S_\psi f)(x) = \left(\int\limits_0^\infty |(f \circledast \psi_t)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere,

$$||S_\psi f||_{L_{2,\alpha}} \leq c||f||_{L_{2,\alpha}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $\psi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}_+)$, $\int\limits_{\mathbb{R}_+} \psi(x) x^{2\alpha+1} dx = 0$ ve $t > 0$ için $\psi_t(x) = t^{-2\alpha-2}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$, $\alpha > -\frac{1}{2}$ ' dir.

İspat. $f \in L_{2,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ olsun.

$$\begin{aligned}
||S_\psi f||^2_{L_{2,\alpha}} &= \int\limits_{\mathbb{R}_+} \left(\int\limits_0^\infty |(f \circledast \psi_t)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right) x^{2\alpha+1} dx \\
&\overset{Fubini}{=} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}_+} |(f \circledast \psi_t)(x)|^2 x^{2\alpha+1} dx \frac{dt}{t} \\
&= \int\limits_0^\infty \|(f \circledast \psi_t)(x)\|^2_{L_{2,\alpha}} \frac{dt}{t} \\
&\overset{Teorem\ 4.38}{=} \int\limits_0^\infty \|\mathcal{B}(f \circledast \psi_t)(x)\|^2_{L_{2,\alpha}} \frac{dt}{t} \\
&= \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}_+} |\mathcal{B}(f \circledast \psi_t)(x)|^2 x^{2\alpha+1} dx \frac{dt}{t} \\
&\overset{Teorem\ 4.36}{=} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}_+} |\mathcal{B}f(x)|^2 |\mathcal{B}\psi_t(x)|^2 x^{2\alpha+1} dx \frac{dt}{t} \\
&\overset{Fubini}{=} \int\limits_{\mathbb{R}_+} |\mathcal{B}f(x)|^2 \left(\int\limits_0^\infty |\mathcal{B}\psi_t(x)|^2 \frac{dt}{t} \right) x^{2\alpha+1} dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\int\limits_0^\infty |\mathcal{B}\psi_t(x)|^2 \frac{dt}{t}$ integralini hesaplayalım:

$\psi_t(x) = t^{-2\alpha-2}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ olmak üzere, Teorem 4.32 'ye göre

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}\psi_t(x) &= t^{-2\alpha-2}\mathcal{B}\left(\psi\left(\frac{x}{t}\right)\right) \\
&= t^{-2\alpha-2}t^{2\alpha+2}(\mathcal{B}\psi)(tx) \\
&= (\mathcal{B}\psi)(tx)
\end{aligned}$$

'tir. $\psi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}_+)$ olduğundan $\mathcal{B}\psi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}_+)$ 'dır. $(\mathcal{B}\psi)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \psi(t) j_\alpha(\lambda t) t^{2\alpha+1} dt$ ve $j_\alpha(0) = 1$ eşitliklerinden

$$(\mathcal{B}\psi)(0) = 0$$

olur. Böylece

$$|(\mathcal{B}\psi)(\lambda)| \leq k \min\left\{|\lambda|, |\lambda|^{-1}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\mathcal{B}\psi_t(x)|^2 \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty |(\mathcal{B}\psi)(tx)|^2 \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \left|(\mathcal{B}\psi)\left(\frac{tx}{|x|}\right)\right|^2 \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^1 \left|(\mathcal{B}\psi)\left(\frac{tx}{|x|}\right)\right|^2 \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \left|(\mathcal{B}\psi)\left(\frac{tx}{|x|}\right)\right|^2 \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^1 kt^2 \frac{dt}{t} + \int_1^\infty kt^{-2} \frac{dt}{t} < \infty
\end{aligned}$$

ve

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \int_0^\infty |\mathcal{B}\psi_t(x)|^2 \frac{dt}{t} \leq c^2$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
||S_\psi f||^2_{L_{2,\alpha}} &= \int_{\mathbb{R}_+} |\mathcal{B}f(x)|^2 \left(\int_0^\infty |\mathcal{B}\psi_t(x)|^2 \frac{dt}{t}\right) x^{2\alpha+1}dx \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left(\int_0^\infty |\mathcal{B}\psi_t(x)|^2 \frac{dt}{t}\right) \int_{\mathbb{R}_+} |\mathcal{B}f(x)|^2 x^{2\alpha+1}dx \\
&\leq c^2||\mathcal{B}f||^2_{L_{2,\alpha}}
\end{aligned}$$

ve buradan da Bessel Plancherel teoremi uygulanarak

$$||S_\psi f||_{L_{2,\alpha}} \leq c||f||_{L_{2,\alpha}}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

5. SONUÇ

Bu çalışmada, $\psi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}_+)$ ve $\int\limits_{\mathbb{R}_+} \psi(x)x^{2\alpha+1}dx = 0$ olmak üzere

$$\left(S_\psi f\right)(x) = \left(\int\limits_0^\infty \left|\left(f \circledast \psi_t\right)(x)\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

biçimde tanımlanan Genelleşmiş Kuadratik fonksiyonun $L_{2,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ uzayındaki sınırlılığı, Bessel Plancherel teoremi yardımıyla ispatlanmıştır. Bu teorem aşağıdaki gibidir:

$f \in L_{2,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ için Genelleşmiş Kuadratik fonksiyon

$$\left(S_\psi f\right)(x) = \left(\int\limits_0^\infty |(f \circledast \psi_t)(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

biçiminde olup

$$||S_\psi f||_{L_{2,\alpha}} \leq c||f||_{L_{2,\alpha}}$$

'dır. Burada $\psi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}_+)$ için

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \psi(x)x^{2\alpha+1}dx = 0$$

sağlanır. Ayrıca $t > 0$ ve $\alpha > -\frac{1}{2}$ olmak üzere

$$\psi_t(x) = t^{-2\alpha-2}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$$

'dir.

Bu çalışmanın devamı olarak Genelleşmiş Kuadratik fonksiyonun $L_{p,\alpha}$ uzaylarındaki sınırlılığı incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

ALIEV, I. A. and BAYRAKCI, S. 2011. Square-like Functions Generated by a Composite Wavelet Transform, Mediterr. J. Math., 8, 553-561.

ALIEV, I. A. 1987. Riesz Transforms Generated by a Generalized Shift Operator, Izvestiya Akad. Nauk Azerbaijan Rep. (Ser. Fiz. Techn. Mat. Nauk) 1, 7-13 (in Russian).

DALY, J. E. and PHILLIPS, K. L. 1998. Wals Multipliers and Square functions for the Hardy space H^1, Acta Math. Hungar., 4(79), 311-327.

DZIRI, M. 2012. A Class of Integral Operators and Bessel Plancherel Transform on L^2_α , Journal of Function Spaces and Applications, Vol 2012, Article ID 419517, 15.

FOLLAND, G. B. 1984. Real Analysis, Modern Techniquies and Their Applications. John Wiley and Sons, New York, 350.

GRADSHTEYN, I. S. and RYZHIK, I. 1994. Table of Integrals, Series, and Products (fifth edition). Academic Press, New York, 1204.

JONES, R. L., OSTROVSKII, I. V. and ROSENBLATT, J. M. 1996. Square Functions in Ergodic Theory, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 16, 267-305.

LEVITAN, B. M. 1951. Bessel Function Expansions in Series and Fourier Integrals, Uspekhi Mat. Nauk, 6, 102-143 (in Russian).

LOFSTROM, J. and PEETRE, J. 1969. Approximation Theorems Connected with Generalized Translations, Math. Ann., 181, 255-268.

PIPHER, J. 1986. Bounded Double Square Functions, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 2(36), 69-82.

PLATONOV, S. S. 2009. Bessel Generalized Translations and Some Problems of Approximation Theory for Functions on the Half-Line. Siberian Mathematical Journal, 1(50), 123-140.

STEIN, E. 1993-a. The development of square functions in the works of A. Zygmund, Bull. Amer. Math. Soc., 7, 359-376.

STEIN, E. 1993-b. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton N. J., 645.

STEIN, E. and WEISS, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton N. J., 297.

STEIN, E. 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton, N. J., 287.

STEIN, E. and SHAKARCHI, R. 2003. Fourier Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton N. J., 306.

TRIMECHE, K. 1986. "Inversion of the Lions Transmutation Operators Using Generalized Wavelets", Comptes Rendus des Seances de l' Academie des Sciences. Serie I. Mathematique, 1(303), 15-18.

ÖZGEÇMİŞ

Cansu CENGİZ, 1988 yılında Antalya'nın Kaş ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini, Antalya'nın Kaş ilçesinde başlayıp Antalya merkezde tamamladı. 2006 yılında girdiği Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 2010'da Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.