T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPİN-1 ve SPİN-1/2 RELATİVİSTİK PARÇACIKLARININ ÇEŞİTLİ POTANSİYELLER İÇİN (2+1) BOYUTTA KUANTUM MEKANİKSEL DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

SEMRA GÜRTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

2013

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPİN-1 ve SPİN-1/2 RELATİVİSTİK PARÇACIKLARININ ÇEŞİTLİ POTANSİYELLER İÇİN (2+1) BOYUTTA KUANTUM MEKANİKSEL DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

SEMRA GÜRTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

2013

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPİN-1 ve SPİN-1/2 RELATİVİSTİK PARÇACIKLARININ ÇEŞİTLİ POTANSİYELLER İÇİN (2+1) BOYUTTA KUANTUM MEKANİKSEL DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

SEMRA GÜRTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez 14./01/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (95..) not takdir edilerek Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU (Danışman)

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Doç. Dr. Mehmet CENKCİ

ÖZET

SPİN-1 ve SPİN-1/2 RELATİVİSTİK PARÇACIKLARININ ÇEŞİTLİ POTANSİYELLER İÇİN (2+1) BOYUTTA KUANTUM MEKANİKSEL DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Semra GÜRTAŞ

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU
Ocak 2013, 60 sayfa

Bu çalışmada, (2+1) boyutta Dirac ve DKP denklemlerinin sabit manyetik alan ve (2+1) boyutlu uzay-zaman zemininde (solucan/kurt deliği zemininde) tam çözümleri elde edilmiş ve enerji özdeğer ifadeleri hesaplanmıştır. Ayrıca hem spin-1/2 hem de spin-1 parçacıklarının sabit manyetik alandaki akım ifadeleri tartışılmıştır. Ancak spin-1 parçacıkları için (2+1) boyutlu eğri uzay zamanda sadece akım ifadeleri tartışılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Dirac Denklemi, DKP (Duffin-Kemmer-Petiau) denklemi, solucan deliği, (2+1)boyutlu graviti, (2+1) boyutta çeşitli potansiyeller.

JÜRİ : Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU (Danışman)
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Doç. Dr. Mehmet CENKCİ

ABSTRACT

THE ANALYSIS OF INVESTIGATION OF QUANTUM MECHANICAL BEHAVIOUR IN (2+1) DIMENSION FOR SPIN-1 AND SPIN-1/2 RELATIVISTIC PARTICLE IN VARIOUS POTENTIAL

Semra GÜRTAŞ

M.Sc.Thesis in Physics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yusuf SUCU
January 2013, 60 pages

In this work, the exact solution of the (2+1) dimensional Dirac and DKP equations have been obtained in a constant magnetic field and (2+1) dimensional curved spacetime (wormhole) background and the energy eigenvalues have been calculated from these solutions. The current of the spin-1 and spin-1/2 particles in a constant magnetic field have been also discussed. However, it has only been discussed for the spin-1 particle in (2+1) dimensional curved spacetime background.

KEYWORDS: Dirac Equation, DKP Equation(Duffin-Kemmer-Petiau), Wormhole, In (2+1) dimensional Gravity, In (2+1) dimensional various potential

COMMITTEE : Asst. Prof. Dr. Yusuf SUCU (Supervisor)
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Asst. Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesinde ve çalışmanın her aşamasında bilgi ve yardımını esirgemeyen, hayatın her alanında doğru yolu gösteren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU' ya, tez çalışmam süresince bilgi ve önerileriyle destekleyen Arş. Göv. Ganim GEÇİM 'e, ayrıca hayatım boyunca maddi manevi yardım ve fedakarlığını esirgemeyen başta annem ve babam olmak üzere, Okay DÜNDAR ve değerli kardeşlerim Derya DÜNDAR GÜRTAŞ ve Hüseyin GÜRTAŞ 'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$A_\mu = (A_0, \vec{A})$	Elektrodinamik Potansiyel
$\vec{A}$	Vektörel Potansiyel
A_0	Potansiyel
$\vec{B}$	Manyetik Alan
E	Enerji
m	Kütle
$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$	Dirac matrisleri
$\sigma^\mu = (\sigma^3, \sigma^1, \sigma^2)$	Pauli Matrisleri
$\pi_\mu = (\pi_0, \vec{\pi})$	Dörtlü momentum vektörü
$\psi(\vec{x})$	Dalga fonksiyonu
Γ_μ^{DKP}	Spin-1 parçacığının spin bağlantı katsayısı
Γ_μ	Spin-$\frac{1}{2}$ parçacığının spin bağlantı katsayısı
β^μ	Kemmer matrisi

Kısaltmalar

DKP	Duffin-Kemmer-Petiau
QED	Quantum Elektrodinamiği
KG	Klein-Gordon

1. GİRİŞ

Günümüzde (2+1) boyutlu uzay-zaman zemini, (3+1) boyutlu fiziksel uzay-zaman zemininde kurulup geliştirilen kuantum elektrodinamiği ve kütle çekim kuramlarının oyuncak modellerinin ortaya konulduğu ve tartışıldığı, adeta kuramsal fizikçilerin laboratuarı niteliğindedir. Özellikle, (2+1) kütle çekim kuramı, (3+1) boyutlu uzay-zamandaki benzerinin hemen hemen bütün matematiksel ve fiziksel sonuçlarını içermesi ve kuantum elektrodinamiğinde de bazı problemler doğaları gereği (2+1) boyutlu olması; söz konusu (2+1) boyutlu uzay-zaman zemininde çalışmayı, son derece ilginç ve cazip bir hale getirmektedir. Dolayısıyla; sabit manyetik alan veya grafen gibi tek katmanlı yapılar ile 1/2 ve 1 spinli relativistik parçacıkların etkileşmeleri, doğaları gereği (2+1) boyutlu problemlerdir ve (2+1) uzay-zaman boyutu kapsamında incelenmelidir.

Son zamanlarda, (2+1) eğri ve düz uzay-zaman boyutunda çeşitli potansiyeller için Dirac denkleminin tam çözümleri elde edilmiştir. Dirac denklemi, bu potansiyellerin etkisindeki Dirac parçacıkların fiziksel ve matematiksel özelliklerinin anlaşılmasını sağlar. Bundan dolayı, bu alanda yapılan çalışmalar oldukça önemlidir. Dirac denklemiyle açıklanan parçacıkların eğri uzay-zamanda, özellikle genişleyen evrendeki davranışları, astronomi ve kozmoloji alanında büyük öneme sahiptir.

Üç boyutta, özellikle, iki uzay ve bir zaman boyutunda Kuantum Elektrodinamiği (QED_3), uzay-zamanın boyutundan kaynaklı topolojik özelliklere, egzotik istatistiğe ve kesirli spine sahip parçacıkların (anyonların) varlığı nedeniyle büyük ilgi çekmiştir. (2+1) boyutta ayar alanı için topolojik kütle terimi önemlidir. Kütleli ya da kütlesiz, yüklü ve spin-1/2 olan parçacıkların (fermiyonlar) veya spin-0 olan skaler parçacıkların (2+1) boyutlu QED_3'ün, parçacık ve yoğun madde fiziği kapsamında, özellikle düzgün manyetik alanda, birçok uygulaması olduğu görülmektedir. QED_3 kapsamında; (2+1) boyutta Kuantum Hall etkisi (Leither 2008), güçlü bir Coulomb alanı ve Ahoronov-Bohm vektör potansiyeli etkisinde (Coulomb potansiyeliyle birleştirilerek) elde edilen Dirac denkleminin çözümleri ile anlaşılmaya çalışılmaktadır (Gavrilov ve Gitman 2004).

Genel görelilik kuramı, (3+1) uzay-zaman boyutunda oldukça zor ve karmaşık bir kuramdır. Kaldı ki; klasik düzeyde, kozmik sicim tekilliklerin doğası ve kapalı zamansal (timelike) eğrilerinin oluşumu hala anlaşılamamıştır. Kuantum düzeyinde ise durum daha da kötüdür. Uzun zamandır süregelen çalışmalara rağmen, söz konusu kuramın tutarlı bir kuantum versiyonu, ne yazık ki, temel düzeyde bile olsa geliştirilememiştir. (3+1) uzay-zaman boyutunda genel görelilik kuramının bu açmazlarının üstesinden gelebilmek için daha basit modeller (oyuncak modeller) ortaya konulmaktadır. Bu bağlamda ortaya konulan uzay-zaman geometrisinin genel bir kovaryant kuramı olarak (2+1) boyutlu kütle çekim kuramı, gerçekçi (3+1) boyutlu genel görelilik kuramı ile aynı kavramsal temele sahip olur. Ancak, birkaç istisnai durum dışında, (2+1) boyutlu model, (3+1) boyutlu modellere göre matematiksel hesap açısından oldukça basit olduğu halde; genel görelilik kuramının (2+1) boyutlu modelinin kuantum dinamiğinin anlaşılması, yine de kolay gözükmemektedir.

Özellikle (2+1) boyutlu genel görelilik kuramı ilk ortaya atılma aşamasında, bir Newtonyen limitine sahip değildi. Ancak, kütle çekim kuramının kavramsal sorunlarının analiz edilmesi açısından (zamanın doğası, gözlenebilirlerin ve özdurumların oluşturulması, topoloji ve topolojik değişikliklerin rolü, kuantizasyon için farklı yaklaşımlar ve bunların arasındaki ilişki) açısından son derece yararlı olduğu görülmektedir.

(2+1) boyutlu kütle çekim kuramına ilişkin ilk çalışma 1963 yılında yapıldı (Staruszkiewicz 1963). Bu çalışmayı takip eden yirmi yıl içinde, zaman zaman, bu konuda birkaç çalışma yapılmış olsa da (2+1) boyutta kütle çekim kuramı, özellikle elde edilen sonuçların Newtonyen bir limiti içermemesi nedeniyle pek ilgi çekmemiştir. Fakat, Deser, Jackiw ve 't Hooft, (2+1) boyutta noktasal parçacık kaynaklarının klasik ve kuantum dinamiğini ve Witten, Chern-Simons terimini ekleyerek (2+1) boyut kütle çekim temsilini ortaya koyması ve kuramın bu boyutta klasik limitin elde edilmesi ile (2+1) boyutlu kütle çekim kuramı, en yoğun çalışılan alanlardan biri haline geldi. Daha önce (3+1) boyutlu eğri zeminlerin kuantum elektrodinamiksel ve termodinamiksel özellikleri, bu kez (2+1) boyutlu eğri zeminler için de yoğunlukla çalışılmaya başlandı. Çünkü bu boyutta matematiksel hesap, hem kütle çekim kuramı hem de kuantum elektrodinamiği açısından oldukça basit bir hale gelmektedir. Bu basitliğe örnek oluşturması açısından; bir (2+1) boyutlu eğri uzay-zaman zemininde; değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak Dirac denkleminin tam çözümleri, kolay bir şekilde hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden bulunmaktadır. Ayrıca, söz konusu zeminde; Dirac akımlarının Gordon ayrışımı yapılmakta ve bu ayrışım sonucu Dirac akımlarının manyetizasyon ve polarizasyon yoğunlukları ifadeleri üzerinden parçacık çift üretimi tartışılmaktadır (Sucu ve Ünal, 2007). Bu çalışmada elde edilen fiziksel sonuçlar, (3+1) uzay-zamanda elde edilen sonuçlarla tutarlık içerisinde olduğu görülmektedir.

Son zamanlarda, “oyuncak” kütle çekim modellerinin zeminlerinde Dirac parçacıklarının klasik ve kuantum mekaniksel davranışları, grafen gibi tek katmanlı yapıların şaşırtıcı özelliklerinin araştırılması konusunda, yoğun madde fiziğinin ilgi odağı haline gelmektedir. Özellikle, (2+1) eğri uzay zamanda kütlesiz Dirac parçacıkları için elde edilen fiziksel sonuçlar dikkate alındığında; bu sonuçların bazılarının "yapay" kütle çekim alanındaki fermiyon çiftlerinde ortaya çıktığı gözlemlenmektedir (Novoselov ve Katsnelson 2005). Bu sonuç, kütle çekim ile kuantum mekaniği arasında nadir ve doğrudan bir bağlantı oluşturması bakımından; eğri uzay zamanda Dirac denklemini çalışmak için bir başka güçlü motivasyon sağlamaktadır.

Einstein'ın (3+1) kütle çekim kuramının en sansasyonel sonuçlarından solucan delikleri çözümlerin benzerleri, (2+1) boyutlu kütle çekim kuramı çerçevesinde de elde edilmektedir (Clement 1976). Clement tarafından önerilen bir solucan deliği uzay-zamanında; relativistik skaler alanın fiziksel davranışı incelenmektedir (Harriott ve Williams 2001). Ayrıca söz konusu bu çözümler, grafen yapılarının fiziksel özelliklerinin anlaşılmasında kullanılabileceği öngörülmektedir (Gonzalez ve Herrero, 2010).

Grafen, karbon atomlarının düzgün tek tabakalı olarak bir araya gelmelerinden oluşan iki boyutlu (2D) petek kafes içine paketlenmiş ve farklı boyutlarda bulunan diğer tüm grafitik malzemelerin temel yapı taşı durumundadır. İki boyutlu grafenin elektromanyetik özellikleri, ilk olarak 1984 yılında incelenmektedir (Semenoff 1984). 2004 yılında, grafen beklenmeyen bir şekilde laboratuvarda elde edildikten sonra yapılan deneylerde yük taşıyıcıların kütlesiz Dirac fermiyonları gibi davrandığı doğrulanmaktadır (Novoselov vd 2005). Grafenin içindeki yük taşıyıcılar hiç bir saçılma olmadan binlerce atom arasındaki mesafeyi alabilmektedir (Novoselov vd 2004).

Karbon atomları etrafındaki elektronların hareketi göreli olmamasına rağmen, grafenin petek örgüsünün periyodik potansiyeli ile etkileşimi düşük enerjilerdeki yeni parçacıksıların oluşumuna sebebiyet verir. Bu parçacıksılara da kütlesiz Dirac fermiyonları adı verilir. Kütlesiz Dirac fermiyonları kütlesini kaybetmiş elektronlar ya da elektron yüküne sahip nötrinolar olarak tasvir edilebilirler. Alışılmadık iki boyutta Dirac parçacığı gibi elektronik uyarımları olan grafen (karbonun bir atom kalınlığındaki allotropu) kuramsal açıdan gözden geçirilmektedir (Castro Neto ve Novoselov 2009).

Klein-Gordon (KG) ve özellikle spin-1/2 parçacığını relativistik olarak tanımlayan Dirac denkleminin başarısından sonra spin-1 parçacıkları için de bir denklem geliştirildi. Ancak, Duffin, Kemmer ve Petiau tarafından geliştirilen bu denklem, spin-1/2 için geliştirilen Dirac denkleminden farklı olarak spin-0 ve spin-1 parçacıkları olmak üzere iki parçacığı temsil etmektedir (Petiau 1936, Duffin 1938 ve Kemmer 1939).

1980'li yıllarda kütleli spin-1 parçacıklarının deneysel olarak gözlenmesi yönünde yapılan çalışmaların artması, bu parçacıkları kuramsal olarak anlamak için yapılan çalışmaları da hızlandırmıştır (Fischbach vd 1973, Friedmann ve Kalbermann 1986, Kalbermann 1986). 2000 yılının başına kadar yapılan pek çok çalışmada, bu parçacıkların düz uzay-zamandaki dinamiği anlamaya yönelik tartışmalar yer almaktadır (Nedjadi Y., Barrett R.C. 1994-1995, Nesrin Yaltkaya Yüksek Lisans tezi 1997). Son zamanlarda, bu parçacıkların eğri uzay-zamandaki davranışları ile ilgili çok az da olsa çalışmalar bulunmaktadır (Pimentel vd 2001, Hossain Ali 2002, Falek ve Merad 2011). (3+1) boyutlu eğri uzay zamanda göreli parçacık denklemlerinin yapıları genelde karmaşık olmaları nedeni ile çözümleri zordur. Özellikle spin-1 denkleminin (3+1) boyutta çözümü oldukça zordur. Çünkü spin-1 denklemi indirgendiği zaman, denklemin içerdiği dalga fonksiyonu 16 bileşenli olduğundan, birbirine bağlı 16 tane birinci mertebeden türev içeren denklemler ortaya çıkar. Fiziksel problemin niteliği (1+1) veya (2+1) gibi daha düşük boyutta çalışmaya izin veriyorsa; denklem sayısı dörde indirgendiğinden spin-1 denklemi gibi göreli parçacık denklemlerini, (1+1) veya (2+1) gibi daha düşük boyutlarda incelemek daha kolay ve çalışılabilir hale gelmektedir.

Duffin, Kemmer ve Petiau tarafından geliştirilen DKP teorisinin önemli bir sorunu, Klein-Gordon (spin-0) ve Proca teorisine (spin-1) denk olmasıyla ilgilidir. Son zamanlarda, çeşitli durumlarda ve özellikle zayıf elektromanyetik alanlarda, KG denklemi ve DKP denkleminin spin-0 kısmı arasındaki denkliği delillerle kesinleştirmek için çabalar olmuştur. Ayrıca, spin-0 ve spin-1 için DKP, KG ve Proca alanları arasındaki eşitlik Riemann uzay-zamanı kapsamında kanıtlanmaktadır. Singular matris kullanarak Riemann uzay zamanında spin-1 denkleminin kütlesiz parçacık limitini tartışılmaktadır (R.Cassana 2002). Ayrıca, bir başka çalışmada, (1+1) boyutta Robertson-Walker uzay-zamanında DKP denklemi (spin-0 ve spin-1 için) çözülmektedir (Falek ve Merad 2009).

Zitterbewegung'un klasik modelinini (Barut modeli) kuantizasyonundan, Dirac parçacıkları ve diğer yüksek spinli parçacıkların relativistik kuantum denklemleri türetilmektedir (Barut,A.O 1990). Bu kuantizasyon ile DKP denkleminin sadece spin-1 kısmı elde edilmektedir. Yine bu modelden aynı kuantizasyon tekniği kullanılarak kütlesiz parçacıkların relativistik kuantum denklemleri elde edilmektedir (Ünal 1997). Bu çalışmadan elde edilen denklemlerin eğri uzay-zamana genellemesi yapılarak kütlesiz spin-1 parçacığı için Friedeman-Robertson-Walker genişleyen evreninde bu denklemlerin tam çözümleri bulunmakta ve bu çözümlerin kompleks Maxwell denklemleri ile özdeş olduğu gösterilmektedir (Sucu ve Ünal 2002). Ayrıca, genişleyen evrende, kütleli vektör bozonlarının relativistik dalga denklemlerinin tam çözümleri elde edilerek fiziksel sonuçları elde edilmekte ve bu çözümlerin Proca ve $m^2 \to 0$ limitinde Maxwell denklemlerine indirgenebildiği gösterilmektedir (Sucu ve Ünal 2005). (1+1) boyutta Riemann-Cartan uzay-zamanında da Proca denklemi ve DKP denkleminin spin-1 kısmı arasındaki ilişki incelenmiş ve DKP denkleminin kompleks Proca denklemine denkliği tartışılmaktadır (Ünal 2005).

Bu tez kapsamında; sabit manyetik alanda ve (2+1) uzay-zaman boyutlu solucan deliklerinde yüklü ve spinli relativistik parçacıkların fiziksel davranışları incelenmekte ve enerji ifadeleri bulunmaktadır. Bu bağlamda; sabit manyetik alan problemi doğası gereği (2+1) boyutlu olması ve (2+1) boyutlu solucan deliklerinin grafen gibi tek tabakalı (katmanlı) yapılara model oluşturmaları nedeniyle; bu potansiyellerde Dirac denkleminin (2+1) boyuttaki versiyonu kullanılarak spin-1/2 parçacıkları ve spin-1 denkleminin (2+1) boyuttaki versiyonu kullanılarak spin-1 parçacıklarının fiziksel özellikleri araştırılmaktadır.

Tezin giriş bölümünde, tezin kapsamına ilişkin literatür gözden geçirilmektedir. Ardından ikinci bölümde, tez kapsamında kullanmış olduğumuz Dirac ve spin-1 denklemlerinin cebrinin yanı sıra solucan delikleri ve bu konulara ilişkin yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmektedir. Üçüncü bölümde ise söz konusu denklemlerin çözümünde kullandığımız yöntemler ve bu yöntemlerin matematiksel özellikleri anlatılmaktadır. Dördüncü bölümde denklemlerin ayrıntılı bir şekilde tam çözümleri verilmektedir. Son bölüm olan sonuç kısmında ise denklemlerin çözümleri olan ve parçacıkları temsil eden dalga fonksiyonlarının, sağlamaları gereken sınır koşullarından öncelikle enerji ifadeleri elde edilmekte ve bu dalga fonksiyonları kullanılarak parçacık akımları hesaplanmaktadır.

2. KURAMSAL BİLGİLER

2.1. Dirac Denklemi

Dirac denklemi, 1928 yılında P.M. Dirac tarafından önerilen bir relativistik kuantum mekanik dalga denklemidir. Kuantum mekaniğinin ilkeleri ile tam uyumlu ve özel görelilik teorisi ile büyük ölçüde tutarlı, elektron ve pozitron gibi 1/2 spinli temel parçacıklar ile proton ve nötron gibi kompozit (bileşik) spin-1/2 parçacıklarını tanımlamak için yararlı bir denklemdir. Dirac denklemi; elektron spinini kendiliğinden içermesi ve anti parçacıkların varlığını ortaya koyması bakımından çok önemlidir (bu parçacık ilk kez 1932 yılında gözlenmiş ve pozitron olarak adlandırılmıştır). Aynı zamanda, tek bir elektron için olasılık genliğini de açıklar. Bu tek parçacık teorisi, elektronun manyetik momentini ve spin tahminini oldukça iyi verir ve ayrıca, atomik spektral çizgilerde gözlenen ince yapıyı çok daha iyi açıklar. Aynı zamanda; Dirac denklemi negatif enerji çözümüne de açıklık getirir. Bu çözüm, pozitif enerjili parçacıkların çözümlerinin bir benzeridir, ancak zamanda geriye doğru hareket eden parçacıkları betimler.

Dirac denklemi, uzay ve zamanın birinci türevlerini içeren bir denklemdir ve aşağıdaki şekilde verilir,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}} = H\psi \quad , \qquad H = \vec{\alpha}.\vec{p}c + \beta mc^2. \tag{2.1}$$

Burada H, hamiltoniyen, m kütle ve $\vec{p}$ momentumdur. $\vec{\alpha}$ ve β birer matristir ve aşağıdaki cebirsel antikomütasyon bağıntılarını sağlarlar:

$$\begin{aligned} &(\alpha^i)^2 = 1, \\ &\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 0, \qquad \text{ve} \quad i \neq j. \\ &\beta^2 = 1, \\ &\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Bu matrislerin kareleri,

$$(\alpha^1)^2 = (\alpha^2)^2 = (\alpha^3)^2 = 1. \qquad (2.3)$$

Buradan gözlenebilir ki; α^i ve β matrisleri, izsiz (köşegen elemanlarının toplamı sıfırdır), Hermityen matrislerdir, ± 1 özdeğerine sahiptirler ve (3+1 boyutta), 4x4'lük matrisler olmalıdırlar. α^i ve β matrislerinin 4x4'lük matris olmaları, parçacığı temsil eden dalga fonksiyonun dört bileşenli bir spinör olmasını gerektirir. Buna göre dalga fonksiyonu,

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

şeklinde ikili spinördür. Burada, χ, parçacığı ve φ, anti-parçacığı temsil eden spinörün bileşenleridir. Ayrıca, bu spinör bileşenleri spin yukarı ve aşağı durumları cinsinden

$$\chi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \varphi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \qquad (2.5)$$

olarak tanımlanır. (2.4) 'deki ifadenin kompleks eşleniğinin transpozu ise,

$$\psi^\dagger = \begin{pmatrix} \chi^* & \varphi^* \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

şeklinde olur.

Dirac parçacıklarının spin cebri, $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$ olmak üzere; $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i)$ Dirac matrislerinden oluşan Clifford cebridir ($\mu = 0,1,2,3$). Bu cebrin bazları (elemanları) olan γ^μ 'lerin arasındaki anti-komütasyon bağıntısı, spin cebiri ile uzay-zaman geometrisinin metriği arasında

$$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2\mathrm{I}g^{\mu\nu} \tag{2.7}$$

şeklinde bir bağıntı sağlarlar. Burada, I, 4x4'lük birim matris ve $g^{\mu\nu}$, uzay-zamanın metriğini temsil eder. e_i^{μ}, uzay-zaman geometrisinin bazları ve $\eta^{ij}=diag(+,-,-,-)$ olmak üzere; $g^{\mu\nu}$,

$$g^{\mu\nu}=e_i^{\mu}e_j^{\nu}\eta^{ij}$$

olarak tanımlanır. Böylece, cebrin bazları ile uzay-zaman geometrisinin bazları bu anti-komütasyon bağıntısı sayesinde birbirine bağlanmış olur. Dolayısıyla, Dirac cebrinin bazlarının (elemanlarının) matris temsili, bu anti-komütasyon bağıntısını koruyacak şekilde çok sayıda değişik şekilde tanımlanabilir. Ayrıca, α^i, Dirac matrisleri Pauli matrisleri cinsinden,

$$\alpha^i=\begin{bmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

şeklinde yazılır. Burada, Pauli matrisleri,

$$\sigma^1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \sigma^2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},\quad \sigma^3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{2.9}$$

şeklindedir. β matrisi, 2x2'lik I birim matrisi cinsinden,

$$\beta=\begin{bmatrix}\mathrm{I} & 0\\ 0 & \mathrm{I}\end{bmatrix} \tag{2.10}$$

şeklinde yazılır. Böylece, Dirac denklemi yukarıda özellikleri verilen spin cebri elemanları ve spinör cinsinden,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\hbar c\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi + \beta mc^2\psi \qquad (2.11)$$

şeklinde genel ifadesi yazılmış olur.

2.2. (2+1) Boyutlu Uzay-Zamanda Dirac Denklemi

Eğri uzay-zamanda, (2+1) boyutta Dirac denklemi,

$$\left(\bar{\sigma}^{\mu}\left(\partial_{\mu} + ieA_{\mu} - \Gamma_{\mu}\right)\right)\Psi = im\Psi \qquad (2.12)$$

şeklinde olur (Dirac 1936). Burada, A_{μ} elektromanyetik potansiyel bileşeni, *e* ve *m* sırasıyla parçacığın yükü ve kütlesidir. (2+1) boyutlu uzay-zamanda Dirac spinörü iki bileşene sahiptir. Bu bileşenler pozitif ve negatif enerji özdeğerlerine veya zamanda ileri ve geri hareket eden parçacık durumlarına karşılık gelir. Bu yüzden, Dirac cebri Pauli matrisleri cinsinden tanımlanabilir. Düz uzay-zamanda Dirac matrisleri σ^i=($\sigma^3,\sigma^1,\sigma^2$)' dir.

$$\sigma^0=\bar{\sigma}^3 \ , \ \sigma^1=\bar{\sigma}^1 \ , \ \sigma^2=\bar{\sigma}^2 \qquad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\sigma^0=\sigma^3$ şeklinde tanımlanarak biri pozitif diğeri negatif olmak üzere iki enerji çözümünün elde edilmesi sağlanır. $\bar{\sigma}^1,\bar{\sigma}^2,\bar{\sigma}^3$ Pauli matrisleridir. Dirac matrisleri arasındaki anti-komutasyon bağıntısı,

$$\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\eta^{ij} \qquad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır. η^{ij}, düz uzay-zamanın metrik tensörüdür. Burada η_{ij}=(1,-1,-1) olarak tanımladık. Eğri uzay-zamanın metrik tensörü ($g_{\mu\nu}$) ile düz uzay zamanın metrik tensörü (η^{ij}) arasındaki bağlantı, üç ayaklar (e^{i}_{μ}) aracılığıyla kurulur. Burada μ,ν=(0,1,2) eğri uzay-zaman indisleri, i,j=(0,1,2) ise düz uzay zaman indisleridir.

$$g_{\mu\nu} = e^i_\mu e^j_\nu \eta^{ij} \;,\; g^{\mu\nu} = e^\mu_i e^\nu_j \eta^{ij} \tag{2.15}$$

şeklinde ifade edilir. Γ_μ, spin bağlantı katsayısıdır ve

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{8} g_{\lambda a}\left(e^i_{\nu,\mu} e^a_i - \Gamma^\nu_{\beta\mu}\right)\left[\sigma^\mu, \sigma^\nu\right] \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanır. $\Gamma^\nu_{\beta\mu}$, Christoffel sembolüdür ve

$$\Gamma^\nu_{\beta\mu} = \frac{1}{2} g^{u\nu}\left[\frac{\partial g^{u\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g^{\gamma\mu}}{\partial x^u} - \frac{\partial g^{u\mu}}{\partial x^\gamma}\right] \tag{2.17}$$

ile tanımlanır. (2.12)'de tanımlanan Dirac denklemi yardımıyla süreklilik denklemi,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \text{ j=0}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $\rho = \psi^+ \psi$ olasılık yoğunluğudur ve pozitif tanımlıdır. Akım yoğunluğu ise,

$$J^\mu = \overline{\psi} \sigma^\mu \psi \tag{2.18}$$

şeklindedir. (2+1) boyutlu uzay zamanda polarizasyon ve manyetizasyon yoğunlukları ise,

$$p^k = \frac{1}{2m} \overline{\psi} \overline{\sigma}^{k0} \psi \quad , \quad M^{[lk]} = \frac{1}{2m} \overline{\psi} \overline{\sigma}^{lk} \psi \tag{2.19}$$

şeklinde bulunur. Burada $\overline{\psi} = \psi^+ \sigma^0$ olarak tanımlanır.

2.3. (2+1) Boyutlu Uzay-Zamanda Spin-1 Denklemi

Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denkleminin spin-1 parçası, Dirac denklemi gibi birinci mertebeden kısmi türevli bir denklemdir. Spin-1 denkleminde gamma matrisleri ile verilen Dirac cebrinin yerini, beta ile gösterilen Kemmer cebri alır.

(2+1) boyutlu uzay zamanda spin-1 denklemi,

$$\left\{ i\left(\bar{\sigma}^{\mu}(x) \otimes I + I \otimes \bar{\sigma}^{\mu}(x)\right)\left(\partial_{\mu} + ieA_{\mu} - \Gamma_{\mu}^{DKP}(x) - 2m\right)\right\}\Psi(x) = 0 \qquad (2.20)$$

şeklinde verilir. (Dernek, Sucu, Ünal yayına gönderilecek, Mustafa Dernek doktora tezi 2009) Burada A_{μ} elektromanyetik potansiyel bileşeni, e ve m sırasıyla parçacığın yükü ve kütlesidir. Ayrıca,

$$\beta_{\mu} = \frac{1}{2}\left(\sigma^{\mu}(x) \otimes I + I \otimes \sigma^{\mu}(x)\right) \qquad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır. $\Gamma_{\mu}^{DKP}(x)$, spin-1 parçacığı için spin bağlantı katsayısıdır ve

$$\Gamma_{\mu}^{DKP} = \Gamma_{\mu}(x) \otimes I + I \otimes \Gamma_{\mu}(x) \qquad (2.22)$$

şeklinde tanımlanır. Burada Γ_{μ} spin-1/2 parçacığının spin bağlantı katsayısıdır ve uzay-zamana bağlı Dirac matrisi, $\sigma^{\mu}(x)$, cinsinden,

$$\Gamma_{\mu}(x) = -\frac{1}{8}\left[\sigma^{\nu}(x), \sigma_{\nu}(x)_{;\mu}\right] \qquad (2.23)$$

ile gösterilir. Burada kovaryant türev noktalı virgülle tanımlanmaktadır.

Serbest parçacık için spin-1 denklemi,

$$\left(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\Psi = 0 \tag{2.24}$$

olur. Burada β^{μ}, Kemmer cebrini sağlar:

$$\beta^{\mu}\beta^{\nu}\beta^{\lambda} + \beta^{\lambda}\beta^{\nu}\beta^{\mu} = g^{\mu\nu}\beta^{\lambda} + g^{\lambda\mu}\beta^{\mu} \; . \tag{2.25}$$

Bu ifadede tanımlanan β^{μ}, (2+1) boyutta, 4x4'lık matrislerdir. (2+1) boyutlu uzay zamanda spin-1 denklemi ise,

$$\left(i\overline{\beta}^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\Psi = 0 \tag{2.26}$$

şeklindedir ve Kemmer cebrin elemanları olan Kemmer matrisleri (2+1) boyutlu uzay zamanda,

$$\overline{\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^{\mu} \otimes I + I \otimes \overline{\sigma}^{\mu}\right) \tag{2.27}$$

şeklinde olur. Burada, *I*, 4x4'lük birim matris ve $\overline{\sigma}^{\mu}$ Dirac matrisleridir. Ayrıca, dalga fonksiyonu dört bileşenli bir spinördür ve

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_0 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemin, serbest parçacık çözümleri, parçacığın durgun kaldığı gözlem çerçevesinde elde edildi. Bu gözlem çerçevesinde bu çözümlerin ve bu denklemlerin çözümlerinden akım ifadeleri ile klasik limiti tartışılmaktadır (Dernek, Sucu ve Ünal, yayına gönderilecek).

Spin-1 denklemi için (2+1) boyutlu uzay zamanda akım yoğunluğu ifadesi,

$$J^{\mu} = \frac{1}{2m}\overline{\Psi}\left(\overline{\sigma}^{\mu} \otimes I + I \otimes \overline{\sigma}^{\mu}\right)\Psi \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanır (Sucu ve Ünal 2005). Burada,

$$\overline{\Psi} = \Psi^{+}(\overline{\sigma}^{0} \otimes \overline{\sigma}^{0}) \tag{2.30}$$

şeklinde ifade edilir.

2.4. (2+1) Boyutlu Uzay Zamanda Solucan Deliği

Solucan deliği, aynı uzay-zamanın iki farklı bölümlerini birleştirebileceği gibi farklı uzay-zamanları da birbirine bağlayabileceği öngörülen, iki ağız ve bu ağızları birleştiren bir boğazdan oluşur. Tarihte solucan deliği fikri 1916 yılında Flamm tarafından ortaya atıldı (Einstein alan denklemlerinin yayınlanmasından kısa bir süre sonra). Benzer bir yapı, daha Einstein ve Rosen tarafından çalışıldı. Einstein-Rosen köprüsü olarak adlandırılan bu çalışma Schwarzschild metriğini çözerek, uzay-zamanın iki farklı bölümünü birleştirecek bir köprü fikrine dayanmaktadır. Daha sonra Morris, Thorne ve Yurtsever "egzotik" olarak adlandırdıkları maddeden oluşan solucan deliklerinin özelliklerini incelediler. Bu egzotik madde, basınç ve yoğunluk ilişkisini gösteren temel denklemi ihlal etmektedir. Thorne ve arkadaşları, bu maddeden yapılacak bir solucan deliği ile yolculuğun mümkün olabileceğini kuramsal olarak gösterdiler.

Birden fazla solucan deliği örneği bulunmaktadır. Solucan deliklerinin birini diğerinden ayıran en önemli özelliklerinden ilki solucan deliğinin boğazının kararlı ya da kararsız olup olmadığıdır. Yani, açılış ve kapanışının sürekliliğidir. İkincisi, solucan deliğinin kütle çekim alanını oluşturmak için gerekli malzeme miktarı, ‘sadece’ Vissel solucan deliği için gezegen kütlesi gibi ya da Schwarzchild solucan deliği için birkaç güneş kütlesi kadar büyük olabilir. Solucan deliklerinin daha iyi anlaşılması için Schwarzschild, Morris-Thorne ve Vissel solucan deliği türlerinin temel bazı özelliklerine bir göz atalım:

Schwarzschild solucan deliğinin kararsız bir boğazı vardır. Schwarzschild solucan deliğinin avantajı, sadece diğer solucan deliklerine göre daha az, gezegen büyüklüğünde kütle gerektirmesidir. Morris-Thorne solucan deliği, Schwarzschild solucan deliğinden birkaç açıdan farklıdır. İlk olarak bu solucan deliğinin boğazı daha kararlıdır. Ağızda büyük gelgit kuvvetleri olmasına rağmen ufku yoktur. Morris-Thorne metriği, yolculuk edilebilir bir solucan deliği üretmek için yeterli bir metrik değildir. Çünkü metrik, tam boğazda tekil olur. Vissel solucan deliği ise bir boğazı oluşturmak için iki ‘derin’ potansiyel kuyusuyla birlikte örülerek oluşturulur. Boğazı açık tutmak için bir çok egzotik maddeye ihtiyaç olması rahatsız edicidir. Yukarıdaki iki solucan deliğinin aksine Vissel solucan deliği, aşırı egzotik madde nedeniyle önemli ölçüde daha az gelgit kuvvetlerine sahiptir. Bu solucan delikleri, bilinenlerin sadece bir kaç tanesidir. (Noyola, J.P. Relativity and Wormholes 2006)

Uzay geometrik olarak üç türlü yapıda olabilir: Eğriliği sıfır (düz), pozitif eğrilikli (küre gibi) ve negatif eğrilikli (semer gibi). Uzay zamanın geometrisi genellikle `metrik' ile tanımlanır. Metrik, herhangi iki nokta arasındaki uzaklığın hesaplanması ile ilgili olup yay uzunluğunun karesi ile ifade edilmektedir,

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \tag{2.31}$$

burada g_{ab}, metrik tensördür. Metrik katsayıları, eğri uzay zamanda konuma bağlı fonksiyonlardır.

$$g_{ab} = g_{ab}(x^c) \quad , \quad x^c = (x^0, x^1, x^2),\ x^0 = ct \tag{2.32}$$

burada $\alpha = 1{,}2$ olmak üzere $x^\alpha = (r, \theta)$ olur.

Bu çalışmada kullanılacak olan solucan deliği metriği, Clement tarafından, (2+1) boyutlu uzay zamanda,

$$ds^2 = dt^2 - (a^2 + r^2)(dr^2 + r^2 d\theta^2) \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlanan metriktir. Burada a pozitif bir sabit ve $0\leq \theta\leq 2\pi$' dir.

(2.33)'teki metrik kullanılarak, (2+1) boyutta, eğri uzay-zamanda Klein-Gordon denkleminin tam çözümleri elde edilmektedir.(Harriott ve Williams 2000). Genel çözüm, Whittaker fonksiyonlarıyla ifade edilmektedir. Nokta kaynak limitinde, çözümler Bessel fonksiyonlarıyla alışılmış ifadelere indirgenmektedir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu çalışmada denklemler analitik olarak çözülmüştür. İlk olarak sabit manyetik alanda Dirac ve spin-1 denklemlerinin çözümleri incelenmektedir. Sabit manyetik alan için Dirac ve spin-1 denkleminin çözümü için kutupsal koordinatlar kullanılmaktadır. Enerji özdeğer ifadesi, kuvvet serisi yöntemi kullanılarak elde edilmektedir. Daha sonra (2.33)'te tanımlanan metrik için Dirac denkleminin çözümü incelenmekte ve sonuçta Konfluent Heun denklemi elde edilmektedir. Son zamanlarda söz konusu denklem fizik alanında çeşitli uygulamalarına sıkça rastlanmaktadır (Hortacsu 2011).

Heun denklemi, dört adet tekilliğe sahip bir denklemdir. Genel formu 12 karmaşık parametre ile temsil edilir. 7 tanesi karakteristik üstlerdir. Kalan bir tane ise lokal olmayan yardımcı bir parametredir. Heun denkleminin genel hali,

$$\begin{aligned} &x(1-x)(x-t)R''(x)+[c(x-1)(x-t)+dx(x-t)t+ \\ &(c-(a+b+1-c-d)x(x-1))]R'(x)+(abx-\lambda)R(x)+\lambda R(x)=0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada boyutsuz lokal parametreler a,b,c ve d Frobenius çözümündeki tekilliklere karşılık gelen karakteristik üstleri belirler. Ölçeklendirme parametresi, t, bir tekilliğin konumunu belirler. Yardımcı parametre, λ, çoğunlukla spektral bir parametre olarak sunulur. Heun denklemlerinden biri olan Konfluent Heun denklemine geçmeden önce konfluent denklemlerin nasıl oluştuğundan bahsedelim. Konfluent denklemleri denklemlerin düzenli sonlu bir tekil noktası ile $x=\infty$ düzenli tekil noktasının sonsuzda düzensiz bir tekilliğe yol açmasıyla ortaya çıkar. Böylece denklemlerin parametre sayısı bir azalırken, sonsuzdaki tekilliğinin derecesi bir artar. Dolayısıyla (3.1) Heun denkleminde iki düzenli tekilliğinin x=t ve $x=\infty$, sonsuzda düzensiz bir tekilliğe yol açmasıyla Konfluent Heun denklemi elde edilir (Ronveaux 1995). Bu denklem,

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2}+\left(\alpha+\frac{\beta+1}{z}+\frac{\xi+1}{z-1}\right)\frac{dW(z)}{dz}+\left(\frac{\mu}{z}+\frac{\nu}{z-1}\right)W(z)=0 \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$\mu=\frac{1}{2}[\alpha-\beta-\xi-2\eta+\beta(\alpha-\xi)]$,

$$\nu=\frac{1}{2}[\alpha+\beta+\xi+2\delta+2\eta+\xi\ (\alpha+\beta)]\ , \tag{3.3}$$

kısaltmaları kullanılmış olup, denklem (3.2)' nin çözümü ise

W(z)=HeunC(α, β, ξ ,δ,η,z)

şeklinde olur. z=0 ve z=1 düzenli tekil noktasıdır. z=∞ ise düzensiz tekil noktasıdır. Konfluent Heun denkleminde polinom çözümler için bilinen koşul,

$$\delta=-\left(n+\frac{\beta+\xi+2}{2}\right)a, \quad (n=1,2...) \tag{3.4}$$

(3.4) bağıntısı kullanılarak enerji öz değer ifadesini elde edilir (Ronveaux 1995). Heun denkleminin bilinen diğer çeşitlerinin belli başlı özelliklerini kısaca inceleyelim.

3.1. Genel Heun denklemi

Genel Heun diferansiyel denklemi,

$$\frac{d^2W(x)}{dx^2}+\left(\frac{\gamma}{x}+\frac{\delta}{x-1}+\frac{\xi}{x-a}\right)\frac{dW(x)}{dx}+\left(\frac{\alpha\beta x-q}{x(x-1)(x-a)}\right)W(x)=0 \tag{3.5}$$

şeklindedir. Burada parametreler arasında,

$$\delta+\gamma+\xi=\alpha+\beta+1 \tag{3.6}$$

şeklinde bir bağıntı vardır. $x = 0,\ 1,\ a$ ve ∞ olmak üzere dört tane düzenli tekil noktaya sahiptir. Eğer, $a = 1$ ve q=$\alpha\beta$ veya a=q=0 veya $\xi = 0$ ve $q = a\alpha\beta$ olursa, bu denklem Hipergeometrik denklemlere indirgenir. $\gamma = \delta = \xi = \frac{1}{2}$ olursa Lame denklemi olur. HeunG($a, q, \alpha, \gamma, \delta, x$) polinom çözümler için bilinen koşulu,

$\alpha = -n$ (n pozitif tam sayı)

olarak tanımlanır (Ronveaux 1995).

3.2. İkili Konfluent Heun Denklemi

Bu form, aynı anda $a \to \infty$ ve $b \to 0$ olduktan sonra; x=1'deki tekillik, x=b noktasına taşındığında elde edilir. Bu denklem,

$$\frac{d^2W(x)}{dx^2} + \left(\alpha_1 x + \frac{\alpha_{-1}}{x}\right)\frac{dW(x)}{dx} + \left[\left(B_1 + \frac{\alpha_1}{2}\right)x + \left(B_0 + \frac{\alpha_1\alpha_{-1}}{2}\right) + \left(B_{-1} - \frac{\alpha_{-1}}{2}\right)\frac{1}{x}\right]W(x) = 0 \tag{3.7}$$

şeklindedir. Burada, x=0 ve ∞ olmak üzere iki düzensiz tekil nokta vardır. Ayrıca, α ve β katsayıları kompleks katsayılardır. Bu denklem özel durumlarda Konfluent Hipergeometrik, Bessel, Euler ve Matiau denklemlerine indirgenebilir. $\alpha_i = 0$ olduğu dejenere durum Matiau denklemini verir (Ronveaux 1995).

3.3. Çiftkonfluent Heun denklemi

Çiftkonfluent Heun denklemi, Genel Heun denkleminden, $a \to \infty$ ve $b \to \infty$ limitinde ve x=1'deki tekilliğin, x=b notasına taşınmasıyla elde edilir. Sonsuzdaki tekillik düzenli olur. x=0' daki tekillik de düzenli kalır. Denklem

$$\frac{d^2W(x)}{dx^2} + \left(Ax^2 + Bx + C + \frac{D}{x} + \frac{E}{x^2}\right)W(x) = 0 \tag{3.8}$$

şeklindedir. Özel durumlarda bu denklem Kummer denklemine indirgenebilir. HeunB($\alpha,\beta,\gamma,\delta,x$) polinom çözümler için bilinen koşulu,

$\gamma = 2(n+1)+\alpha$, (n pozitif tamsayı)

şeklindedir (Ronveaux 1995).

3.4. Üçlükonfluent Heun Denklemi

Bu denklem,

$$\frac{d^2W(x)}{dx^2} + \left(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right)W(x) = 0 \tag{3.9}$$

şeklindedir. HeunT (α,β,γ,x) polinom çözümler için bilinen koşulu,

$\beta = 3(n+1)$ 'dir , (n pozitif tamsayı).

Bu tezde, Dirac denkleminin, (2.33) 'teki metrik için yapılan çözümlerinden Konfluent Heun denklemi elde edilmiştir. (2.33) 'teki metrik için spin-1 denkleminin çözümünde ise ${}_1F_1$ (z)=(a;b;z) elde edilmektedir. Burada

a=-n , (n=0,1,2..) (3.10)

şeklinde seri kesilir (Abramowitz 1964) ve buradan enerji öz değeri ifadesi elde edilir.

4. BULGULAR

4.1. Sabit Manyetik Alanda Dirac Denkleminin Çözümü

(2+1) uzay-zaman boyutunda Dirac denklemi,

$$(\sigma^{u}\pi^{u} - m)\psi = 0 \tag{4.1}$$

şeklinde yazılır. Burada, σ^{u} Dirac matrislerinin, Pauli matrisleri cinsinden ifadeleri,

$$\sigma^{0} = \overline{\sigma}^{3}, \ \ \sigma^{1} = i\overline{\sigma}^{1}\ , \ \sigma^{2} = i\overline{\sigma}^{2}\ , \ \hbar\text{=c=1}, \tag{4.2}$$

şeklindedir. Dörtlü momentum vektörü ise,

$$\pi^{u} = p^{u} - \frac{e}{c}\mathrm{A}^{u} \quad , p^{u} = i\frac{\partial}{\partial x^{u}} \tag{4.3}$$

olarak tanımlanır. μ=0,1,2 için (4.1)'deki Dirac denklemi,

$$[\sigma^{0}(p^{0} - \frac{e}{c}A^{0}) + \sigma^{1}(p^{1} - \frac{e}{c}A^{1}) + \sigma^{2}(p^{2} - \frac{e}{c}A^{2})]\ \psi = 0 \tag{4.4}$$

şeklinde olur. Dirac matrisleri yerine Pauli matrisleri yazılırsa,

$$[\mathrm{i}\overline{\sigma}^{3}\frac{\partial}{\partial t} - \overline{\sigma}^{1}\frac{\partial}{\partial x^{1}} - \overline{\sigma}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{2}} - \overline{\sigma}^{3}\,\mathrm{e}\,A^{0} - \mathrm{ie}\,\overline{\sigma}^{1}A^{1} - \mathrm{ei}\,\overline{\sigma}^{2}A^{2} - m\,]\psi = 0 \tag{4.5}$$

şeklini alır.

$$\overline{\sigma}^{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\sigma}^{2} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\sigma}^{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi_{1} \\ \psi_{2} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

ifadeleri (4.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\{ i\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1} - \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^2} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} eA^0 - ie\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}A^1$$

$$-ie\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}A^2 - m\}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}=0 \qquad (4.7)$$

şeklinde olur. Burada $x^0 = ct$ (c=1), $x^1 = x$, $x^2 = y$ 'dir. Bu ifadeler (4.7)'de yerine yazılırsa,

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - eA^0 - m)\,\psi_1 - (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} + ieA^x + eA^y)\psi_2 = 0,$$

$$(-i\frac{\partial}{\partial t} - eA^0 - m)\psi_2 - (\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + ieA^x - eA^y)\,\psi_1 = 0 \qquad (4.8)$$

şeklinde iki denklem elde edilir. Skaler potansiyel $A^0 = 0$ 'dır. Burada sistem kararlı olduğu için kararlı durumlarda $\psi_1 = e^{-iEt}\chi$ ve $\psi_2 = e^{-iEt}\phi$ seçilerek (4.8)'deki denklemler düzenlenirse,

$$(E - m)\chi - (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} + ieA^x + eA^y)\,\phi = 0, \qquad (4.9)$$

$$(E + m)\phi + (\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + ieA^x - eA^y)\,\chi = 0 \qquad (4.10)$$

şekline dönüşür. (4.9) denklemlerinden χ ,

$$\chi = \frac{\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} + ieA^x + eA^y}{E - m}\,\phi$$

biçiminde çekilip, (4.10) 'da yerine yazılırsa,

$$(E+m)\phi+\frac{(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}+ieA^x-eA^y)(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}+ieA^x+eA^y)}{E-m}\phi=0 \tag{4.11}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde ϕ ifadesi de çekilip yerine yazılabilir. Bu iki denklem arasında matematiksel olarak hiçbir fark yoktur. Bu yüzden birini çözmek yeterlidir. Denklem (4.11) düzenlenirse,

$$\left(E^2-m^2\right)\phi+[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-(e^2A^{x^2}+e^2A^{y^2})+2\mathrm{ie}(A^x\frac{\partial}{\partial x}+A^y\frac{\partial}{\partial y})+\mathrm{eB}]\phi=0, \tag{4.12}$$

şeklinde yazabiliriz. Yukarıdaki denklemde,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ ,\quad A^x=-\frac{1}{2}y\hat{x}B\ ,\quad A^y=\frac{1}{2}x\hat{y}B \tag{4.13}$$

ifadeleri denklem (4.12)'de yerine yazılırsa,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{e^2B^2}{4}(x^2+y^2)-\frac{2ieB}{2}(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y})+E^2-m^2+eB\right]\phi=0 \tag{4.14}$$

şeklinde elde edilir. Yukarıda potansiyel ifadesi, kutupsal koordinatlar cinsinden

$$(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y})=r\sin\theta(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})-r\cos\theta(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})=-\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{4.15}$$

şeklinde elde edilir. Burada $x^2+y^2=r^2$ ve (4.15)'te verilen ifade, denklem (4.14) 'te yerine yazılırsa,

$$[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{e^2B^2}{4}r^2+ieB\frac{\partial}{\partial\theta}+E^2-m^2+eB\,]\phi=0 \tag{4.16}$$

olarak elde edilir. Denklem (4.16)'nın çözümü için,

$$\rho=\frac{eB}{2}r^2 \tag{4.17}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa, o zaman (4.16) denklemi,

$$(\frac{d^2}{d\rho^2}\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}+\frac{1}{4\rho^2}\frac{d^2}{d\theta^2}+\frac{i}{2\rho}\frac{d}{d\theta}-\frac{1}{4}+\frac{E^2-m^2+eB}{2eB\rho})\phi(\rho)=0 \tag{4.18}$$

şekline dönüşür. Denklem (4.18)'e değişkenlerine ayırma yöntemini kullanarak,

$$\phi(\rho)=e^{ik\theta}\,U(\rho) \tag{4.19}$$

olacak şekilde bir dönüşüm uygulanırsa,

$$[\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\frac{k^2}{4\rho^2}-\frac{k}{2\rho}-\frac{1}{4}+\frac{E^2-m^2+eB}{2eB\rho}\,]U(\rho)=0$$

şeklinde sadece ρ değişkenine bağlı olacak biçimde elde edilir. Burada,

$$L=\frac{E^2-m^2-keB+eB}{2eB} \tag{4.20}$$

kısaltması kullanılırsa,

$$[\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\frac{k^2}{4\rho^2}-\frac{1}{4}+\frac{L}{\rho}]U(\rho)=0 \tag{4.21}$$

şeklinde elde edilir. (4.21) denklemi çözmek için öncelikle denklemin $\rho \to 0$ ve $\rho \to \infty$ limitindeki asimptotik davranışlarına bakılır. $\rho \to 0$ limitinde, $\rho \to 0$ iken $U(\rho)=0$ koşulundan (4.21) denkleminin çözümü,

$$U(\rho) \approx \rho^{\frac{k}{2}} \tag{4.22}$$

olarak bulunur. $\rho \to \infty$ limitindeki söz konusu denklemin davranışı ise

$$U(\rho) \approx e^{-\frac{\rho}{2}} \tag{4.23}$$

şeklinde bulunur. $0<\rho<\infty$ aralığında bu denklemin çözümünü bulmak için, öncelikle

$$U(\rho)=e^{\frac{-\rho}{2}}\rho^{\frac{k}{2}}R(\rho) \tag{4.24}$$

tanımı yapılır ve denklemde yerine yazılırsa,

$$\rho\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+(k+1-\rho)\frac{dR(\rho)}{d\rho}+(-\frac{k+1}{2}+L)R(\rho)=0 \tag{4.25}$$

şeklinde elde edilir. (4.25)' teki denklem,

$$R(\rho)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\rho^{i+s} \quad , \quad \rho>0 \quad , \quad a_0\neq 0 \tag{4.26}$$

şeklinde tanımlanan kuvvet serisi yöntemini kullanarak çözülür. Bu indisel denklemin çözümünden elde edilen tekrarlama bağıntısı,

$$a_{i+1}=\frac{i+s-N}{(i+s+1)(i+s+k+1)}a_i \tag{4.27}$$

şeklindedir. (4.27)'deki tekrarlama bağıntısı, s=0 ve s=-k durumları için incelenirse, s=0 için, tekrarlama bağıntısı,

$$a_{i+1} = \frac{i-N}{(i+1)(i+k+1)} a_i \tag{4.28}$$

olarak bulunur. Sonsuz olan seriyi belli bir yerde kesebilmek için

$$i_{\max} - N = 0 \,, i_{\max} = N = n$$

$$N = n = -\frac{k+1}{2} + L \tag{4.29}$$

şeklindeki koşullara gereksinim vardır. Buna göre (4.20) bağıntısında tanımladığımız lamda değerini, (4.29) bağıntısında kullandığımızda, parçacığın enerji özdeğerlerini tayin etmiş oluruz. Enerji ifadesi,

$$E^2 = 2keB + eBn + m^2 \ ,$$

$$E = \pm\left(2keB + eBn + m^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.30}$$

şeklinde hesaplanır. Benzer hesaplama s=-k için yapılırsa,

$$E = \pm\left(2neB + m^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.31}$$

şeklinde bulunur.

(2.18)' de verilen akım yoğunluğu ve

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} e^{-iEt+ik\theta} \rho^{-\frac{1}{2}} W(L+2\nu, \nu, \rho) \\ e^{-iEt+ik\theta} \rho^{-\frac{1}{2}} W(L, \nu, \rho) \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

dalga fonksiyonu ifadesi yardımıyla akım bileşenleri hesaplanır. Burada, $\nu = \frac{k}{2}$,

$L = \frac{E^2 - m^2 - keB + eB}{2eB}$ ve W, Whittaker fonksiyonudur.

Whittaker fonksiyonunun, $W_{L,k} \cong \rho^L e^{-\frac{\rho}{2}}$ asimptotik ifadesi kullanılarak,

$$J^t = N^2 \rho^{2L-1} e^{\rho} (\rho^{2L} + 1),$$

$$J^r = 0, \tag{4.33}$$

$$J^\theta = 2N^2 \rho^{2L+2\nu-1} e^{-\rho},$$

şeklinde elde edilir. (2.19)'da tanımlanan polarizasyon ve manyetizasyon yoğunluğu

$$P^1 = \frac{N^2}{m} (\rho^{2L+2\nu-1} e^{-\rho}),$$

$$P^2 = 0 \tag{4.34}$$

$$M^{12} = \frac{N^2}{2m} \left(\rho^{2L+4\nu-1} e^{-\rho} + \rho^{2L-1} e^{-\rho} \right)$$

şeklinde olur. Polarizasyon yoğunluğunun hiper yüzey üzeriden integrali,

$$\int_\sigma P^1 d\sigma = \frac{\Gamma(2L+2\nu)}{m[\Gamma(2L+4\nu) + \Gamma(2L)]} \tag{4.35}$$

ve manyetizasyon yoğunluğunun hiper yüzey üzerinden integrali,

$$\int_{\sigma} M^{12} d\sigma = \frac{1}{2m} \tag{4.36}$$

şeklinde elde edilir. Burada, σ hiper yüzey, m elektronun kütlesi ve kartezyen koordinatlardaki $d\sigma = \sqrt{|g|}dx_i dx_j$, kutupsal koordinatlarda,

$$d\sigma = \frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{2\rho eB}} d\rho d\theta \tag{4.37}$$

biçiminde elde edilir. Burada $\sqrt{|g|} = \sqrt{\frac{2\rho}{eB}}$ ile tanımlanır. N, normalizasyon sabiti, olasılık yoğunluğunun tüm uzay üzerinden integrasyonu kullanılarak

$$N = \left(\frac{eB}{2\pi(\Gamma(2L+2\nu)+\Gamma(2L))} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.38}$$

şeklinde elde edilir. (3+1) boyutta sabit manyetik alanda yüklü parçacıklar için elde edilen çözümlerde normalizasyon problemi ortaya çıkmaktadır. Ancak, bu problem (2+1) boyutta incelenmesiyle (3+1) boyuttaki normalizasyon problemi aşılmış olur. İşlemlerimizde $\hbar$=1 ve e=1 alınmayıp denklemlerimizde yerine yazılırsa manyetizasyon yoğunluğunun hiper yüzey üzerinden integrasyonunun, $\frac{e\hbar}{2m}$, yani elektronun manyetik dipol momentinin tam olarak verdiğini görülür.

4.2. Sabit Manyetik Alanda Spin-1 Denkleminin Çözümü

(2+1) boyutlu uzay zamanda spin-1 denklemi,

$$[(\sigma^{u}\otimes \mathrm{I}+\mathrm{I}\otimes\sigma^{u})\pi_{\mu}-2(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})\mathrm{M}]=0 \tag{4.39}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, μ=0,1,2 değerlerini alır. Bu değerler (4.39) denkleminde yerine yazılırsa,

$$[(\sigma^{0}\otimes \mathrm{I}+\mathrm{I}\otimes\sigma^{0})(p_o-\frac{e}{c}A_0)+(\sigma^{1}\otimes \mathrm{I}+\mathrm{I}\otimes\sigma)\pi_1$$

$$+(\sigma^{2}\otimes \mathrm{I}+\mathrm{I}\otimes\sigma^{2})\pi_2\text{-}2(\mathrm{I}\otimes\mathrm{I})\,\mathrm{M})]\psi=0 \tag{4.40}$$

şeklinde bulunur. (4.40) denkleminde, Pauli matrisleri yerine,

$$\sigma^1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \sigma^2=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\quad \sigma^3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}, \tag{4.41}$$

dalga fonksiyonu yerine, $\psi=\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_0\\\psi_0\\\psi_2\end{bmatrix}$ ve birim matris yerine $\mathrm{I}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ifadeleri yazılırsa,

$$\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}(p_o-\frac{e}{c}A_0)\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_0\\\psi_0\\\psi_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&i\pi_1&i\pi_1&0\\i\pi_1&0&0&i\pi_1\\i\pi_1&0&0&i\pi_1\\0&i\pi_1&i\pi_1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_0\\\psi_0\\\psi_2\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0&\pi_2&\pi_2&0\\-\pi_2&0&0&\pi_2\\-\pi_2&0&0&\pi_2\\0&-\pi_2&-\pi_2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_0\\\psi_0\\\psi_2\end{bmatrix}\text{-}2\mathrm{M}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_0\\\psi_0\\\psi_2\end{bmatrix}=0 \tag{4.42}$$

olarak elde edilir. Sabit manyetik alan için,

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} y\hat{x}B + \frac{1}{2} x\hat{y}B \qquad (4.43)$$

seçilir ve dörtlü momentum vektörü,

$$\pi_x = p_x - eA_x = p_x + \frac{e}{2} yB \,, \qquad (4.44)$$

$$\pi_y = p_y - eA_y = p_y - \frac{e}{2} xB \qquad (4.45)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, π_- ve π_+ ifadeleri ise,

$$\pi_- = \pi_x - i\pi_y \,, \qquad (4.46)$$

$$\pi_+ = \pi_x + i\pi_y \qquad (4.47)$$

şeklinde tanımlanır. (4.44) ve (4.45)'te verilen ifadeler, (4.46) ve (4.47)'de yerine yazılırsa,

$$\pi_- = e^{-i\theta}\left(-i\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{ieB}{2} r\right), \qquad (4.48)$$

$$\pi_+ = e^{i\theta}\left(-i\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{ieB}{2} r\right) \qquad (4.49)$$

şeklinde elde edilir. (4.42)'de verilen matris ifadesi düzenlenirse,

$$2\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 + \mathrm{i}(\pi_1 - i\pi_2)\,\psi_0 + \mathrm{i}(\pi_1 - i\pi_2)\,\psi_0 - 2\mathrm{M}\psi_1 = 0, \qquad (4.50)$$

$$\mathrm{i}(\pi_1 + i\pi_2)\,\psi_1 + \mathrm{i}(\pi_1 - i\pi_2)\,\psi_2 - 2\mathrm{M}\psi_0 = 0, \qquad (4.51)$$

$$-2i\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 + i(\pi_1 + i\pi_2)\psi_0 + i(\pi_1 + i\pi_2)\psi_0 - 2M\psi_2 = 0 \tag{4.52}$$

olmak üzere üç tane denklem elde edilir. (4.48) ve (4.49)'da verilen π_- ve π_+ bağıntıları, denklem (4.50), ve (4.52)'de yerine yazılırsa,

$$(\frac{\partial}{\partial t} + im)\psi_1 + e^{-i\theta}(-i\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{ieB}{2}r)\psi_0 = 0, \tag{4.53}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - im)\psi_2 - e^{i\theta}(-i\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{ieB}{2}r)\psi_0 = 0 \tag{4.54}$$

şeklinde bulunur. Bu spinör bileşenlerine

$$\psi_1 = e^{-iEt}\Psi_1(r,\theta), \quad \psi_2 = e^{-iEt}\Psi_2(r,\theta), \quad \psi_0 = e^{-iEt}\Psi_0(r,\theta), \tag{4.55}$$

şeklinde bir dönüşüm uygulanır ve (4.53) ve (4.54) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$(-iE + im)\Psi_1(r,\theta) + e^{-i\theta}(-i\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{ieB}{2}r)\Psi_0(r,\theta) = 0, \tag{4.56}$$

$$(-iE - im)\Psi_2(r,\theta) + e^{i\theta}(-i\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{ieB}{2}r)\Psi_0(r,\theta) = 0 \tag{4.57}$$

denklemleri elde edilir. Aynı şekilde (4.48) ve (4.49)'da verilen π_- ve π_+ bağıntıları denklem (4.51) 'de yerine yazılırsa,

$$ie^{i\theta}\left(-i\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{ieB}{2}r\right)\Psi_1(r,\theta) + ie^{-i\theta}\left(-i\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{ieB}{2}r\right)\Psi_2(r,\theta) - 2M\Psi_0(r,\theta) = 0 \tag{4.58}$$

şeklinde olur. (4.56) ve (4.57) denklemlerinden $\Psi_1(r,\theta)$) ve $\Psi_2(r,\theta)$ ifadeleri,

$$\Psi_1(r,\theta)=\frac{-e^{-i\theta}(-i\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{ieB}{2}r}{-i(E-m)}\ \Psi_0(r,\theta), \tag{4.59}$$

$$\Psi_2(r,\theta)=\frac{e^{i\theta}(-i\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{ieB}{2}r)}{-i(E+m)}\ \Psi_0(r,\theta) \tag{4.60}$$

şeklinde yalnız bırakılıp, (4.58) 'de yerine yazılırsa,

$$\frac{ie^{i\theta}(-i\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{ieB}{2}r)e^{-i\theta}(-i\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{ieB}{2}r)}{i(E-m)}\ \Psi_0(r,\theta)$$

$$+\frac{ie^{-i\theta}(-i\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{ieB}{2}r)e^{i\theta}(-i\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{ieB}{2}r)}{-i(E+m)}\ \Psi_0(r,\theta)\text{-2M}\,\Psi_0(r,\theta)=0 \tag{4.61}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde yeniden düzenlendiğinde,

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-ieB\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{EeB}{2}-\frac{e^2B^2r^2}{4}+E^2-m^2)\ \Psi_0(r,\theta)=0 \tag{4.62}$$

şeklinde ikinci mertebeden kısmi türevli denklem elde edilir. Denklem (4.62), değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olduğu için,

$$\Psi_0(r,\theta)=e^{ik\theta}U(r) \tag{4.63}$$

şeklinde bir çözüm tanımlarsak,

$$(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{k^2}{r^2}-\frac{e^2B^2}{4}r^2+\frac{kmeB-EeB+m(E^2-m^2)}{m})U(r)=0 \tag{4.64}$$

şeklinde sadece r değişkenine bağlı bir denklem elde edilir. Daha sonra denklem (4.64)'ün çözümü için, $x = \frac{eB}{2} r^2$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dU(x)}{dx} - \frac{k^2}{4x^2}U(x) + \frac{L}{x}U(x) - \frac{1}{4}U(x) = 0 \tag{4.65}$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$L = \frac{kmeB + m(E^2 - m^2) - EeB}{2meB} \tag{4.66}$$

olarak tanımlanır. Denklem (4.65)'e, sıfır ve sonsuz limitindeki asimptotik davranışından elde ettiğimiz,

$$U(x) = e^{\frac{-x}{2}} x^{\frac{k}{2}} R(x) \tag{4.67}$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$x\frac{d^2R(x)}{dx^2} + (k + 1 - x)\frac{dR(x)}{dx} + (-\frac{k+1}{2} + L)R(x) = 0 \tag{4.68}$$

olarak elde edilir. (4.68)'de verilen denklemi çözmek için,

$$\mathrm{R(x)}=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+s} \quad , \qquad a_0 \neq 0 \quad \mathrm{x} > 0 \tag{4.69}$$

(4.69)'da tanımlanan kuvvet serisi yöntemi kullanılır. İndisel denkleminin çözümlerinden,

$$\mathrm{s}=0, \ \ \mathrm{s}=-k \tag{4.70}$$

ve tekrarlama bağıntısı,

$$a_{i+1} = \frac{i+s-N}{(i+s+1)(i+s+k+1)} a_i \tag{4.71}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$N = -\frac{k+1}{2} + L \tag{4.72}$$

şeklinde tanımlanır. (4.71)'deki bağıntıda seri,

$$i_{\max} = N = n \tag{4.73}$$

şeklinde kesilir. (4.72) bağıntısından, L, ifadesi

$$L = n + \frac{k+1}{2} \tag{4.74}$$

şeklinde elde edilir. Enerji değerini bulmak için, (4.74)'te

$$L = \frac{kmeB + m(E^2 - m^2) - EeB}{2meB} \tag{4.75}$$

ifadesi yerine yazılırsa ve düzenlenirse,

$$E^2 - E\frac{eB}{m} - 2eB\lambda + keB - m^2 = 0, \tag{4.76}$$

$$E_{1,2} = \frac{eB}{2m} \pm \sqrt{m^2 + eB + 2eBn + \frac{e^2B^2}{4m^2}} \quad , \quad \text{n=0,1,2…} \tag{4.77}$$

olarak bulunur. s=-k için enerji ifadesi ise,

$$E_{1,2}=\frac{eB}{2m}\pm\sqrt{\frac{e^2B^2}{4m^2}+eB-2ekB+2eBn'+m^2} \tag{4.78}$$

şeklinde elde edilir. (2.29)'da verilen akım yoğunluğu ifadesi yardımıyla, akım yoğunlunun bileşenleri,

$$J^t=\frac{1}{m}\left(\Psi^*{}_1\Psi_1-\Psi^*{}_2\Psi_2\right),$$

$$J^r=\frac{i}{m}\left((\Psi^*{}_1+\Psi^*{}_2)\Psi_0-\Psi_0{}^*(\Psi_1+\Psi_2)\right), \tag{4.79}$$

$$J^\theta=\frac{1}{m}\left((\Psi^*{}_1-\Psi^*{}_2)\Psi_0+\Psi_0{}^*(\Psi_1-\Psi_2)\right)$$

şeklinde elde edilir. Dalga fonksiyonları

$$\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_0\\ \Psi_0\\ \Psi_2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}\dfrac{e^{-i\theta+ik\theta-iEt}}{-E+m}\left(\left(r^{-\frac{3}{2}}(-\frac{1}{2}-L-k)+\dfrac{r^{-\frac{1}{2}}}{2}-\dfrac{eB}{2}r^{\frac{1}{2}}\right)W(L,\frac{k}{2},r)-r^{-\frac{3}{2}}W(L+1,\frac{k}{2},r)\right)\\ e^{ik\theta-iEt}r^{-\frac{1}{2}}W(L,\frac{k}{2},r)\\ e^{ik\theta-iEt}r^{-\frac{1}{2}}W(L,\frac{k}{2},r)\\ \dfrac{e^{i\theta+ik\theta-iEt}}{E+m}\left(r^{-\frac{3}{2}}(-\frac{1}{2}-L+k)+\dfrac{r^{-\frac{1}{2}}}{2}+\dfrac{eB}{2}r^{\frac{1}{2}}\right)W(L,\frac{k}{2},r)-r^{-\frac{3}{2}}W(L+1,\frac{k}{2},r)\end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$L=\frac{EeB-kemB-m(E^2-m^2)}{2emB} \tag{4.80}$$

olarak tanımlanır. W, Whittaker fonksiyonunun asimptotik ifadesi,

$$W(L,\frac{k}{2},r)\cong r^L e^{-r/2} \tag{4.81}$$

şeklinde alınarak, (4.79) ifadesi yardımıyla akım yoğunlunun bileşenleri hesaplanırsa,

$$J^t=\frac{N^2e^{-r}r^{2L-1}}{m}\left[\left(\frac{\alpha_-}{E-m}\right)^2-\left(\frac{\alpha_+}{E+m}\right)^2\right],$$

$$J^r=\frac{N^2\beta_-\sin[(-2k+1)\theta]+\beta_+\sin[(2k+1)\theta]}{m}, \tag{4.82}$$

$$J^\theta=\frac{N^2\beta_-\cos[(-2k+1)\theta]-\beta_+\cos[(2k+1)\theta]}{m}$$

şeklinde elde edilir. Burada, N, normalizasyon sabitidir. Ayrıca,

$$\alpha_\pm=\frac{(1-eB)}{2}+\frac{L\pm k+\frac{1}{2}}{r},$$

$$\beta_\pm=\frac{2e^{-r}\left[\left(-\frac{1}{2}-L\pm k\right)+\frac{r^{2L-1}}{2}+\frac{eB}{2}r^{2L}-r^{2L-1}\right]}{m\pm E} \tag{4.83}$$

şeklinde tanımlanır.

4.3. (2+1) Boyutlu Uzay Zamanda Solucan Deliği İçin Dirac Denkleminin Çözümü

(2+1) boyutlu eğri uzay zamanda Dirac denklemi,

$$\left(\sigma^{\mu}(\partial_{\mu}-\Gamma_{\mu})+im\right)\psi(x)=0 \tag{4.84}$$

şeklinde ifade edilir. σ^{μ} Dirac matrisinin, Pauli matrisleri cinsinden ifadeleri,

$$\sigma^{\mu}=(\overline{\sigma}^{3},i\overline{\sigma}^{1},i\overline{\sigma}^{2}),\ i\overline{\sigma}^{1}=\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix},\ i\overline{\sigma}^{2}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\ \overline{\sigma}^{3}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{4.85}$$

şeklinde tanımlanır. (2.33)'te verilen,

$$ds^{2}=dt^{2}-(a^{2}+r^{2})(dr^{2}+r^{2}d\theta^{2})$$

solucan deliği metriği için metrik tensör ve metrik tensörün tersi,

$$g_{uv}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -(a^{2}+r^{2}) & 0\\ 0 & 0 & -r^{2}(a^{2}+r^{2})\end{pmatrix}, \tag{4.86}$$

$$g^{uv}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -(a^{2}+r^{2})^{-1} & 0\\ 0 & 0 & -r^{-2}(a^{2}+r^{2})^{-1}\end{pmatrix} \tag{4.87}$$

şeklinde yazılır. (2.17)'de Christoffel sembolleri için verilen tanım kullanarak, sıfırdan faklı Christoffel sembolleri,

$$\Gamma^{1}_{11}=\frac{r}{(a^{2}+r^{2})},\quad \Gamma^{1}_{22}=-\frac{r(a^{2}+2r^{2})}{(a^{2}+r^{2})},\quad \Gamma^{2}_{12}=\Gamma^{1}_{21}=\frac{a^{2}+2r^{2}}{r(a^{2}+r^{2})} \tag{4.88}$$

şeklinde hesaplanır. (2.33)'teki solucan deliği metriği kullanılarak ve

$$g^{\mu\nu} = e_i^{\mu} e_i^{\nu} \eta^{ij}$$

bağıntısı yardımı ile triyadlar (üçayaklar) ,

$$e_0^0 = 1 \ , \ e_1^1 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{r}^2}} \ , \ e_2^2 = \frac{1}{r\sqrt{a^2 + r^2}} \tag{4.89}$$

şeklinde elde edilir. Eğri uzay-zamandaki Dirac matrisleri, düz uzay-zaman Dirac matrisleri türünden,

$$\sigma^0 = e_0^0 \overline{\sigma}^0 = \overline{\sigma}^3 \ , \quad \sigma^1 = e_1^1 \overline{\sigma}^1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \overline{\sigma}^1 , \tag{4.90}$$

$$\sigma^2 = e_2^2 \overline{\sigma}^2 = \frac{1}{\sqrt{r^2 (a^2 + r^2)}} \overline{\sigma}^2$$

şeklinde bulunur. (2.16)' daki spin bağlantı katsayısı köşegen (dioganal) metrikler için,

$$\Gamma_\lambda = -\frac{1}{8} g_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}_{\beta\lambda} \left[\sigma^{\mu}, \sigma^{\nu}\right] \tag{4.91}$$

şeklinde yazılır. Bu bağıntı kullanılarak spin bağlantı katsayıları,

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0 \ , \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} r(a^2 + 2r^2)\sigma^1\sigma^2 = -\frac{a^2 + 2r^2}{2(a^2 + r^2)} \overline{\sigma}^1 \overline{\sigma}^2 \tag{4.92}$$

şeklinde hesaplanır. Yukarıdaki ifadeler (4.84)'teki Dirac denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left\{\sigma^0(\partial_0 - \Gamma_0) + \sigma^1(\partial_1 - \Gamma_1) + \sigma^2(\partial_2 - \Gamma_2)\right\}\Psi = -im\Psi \ , \tag{4.93}$$

$$\left\{\bar{\sigma}^3\partial_0+\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\bar{\sigma}^1\partial_1+\frac{1}{\sqrt{r^2(a^2+r^2)}}\bar{\sigma}^2\partial_2+\frac{1}{\sqrt{r^2(a^2+r^2)}}\bar{\sigma}^2\frac{a^2+2r^2}{2(a^2+r^2)}\bar{\sigma}^1\bar{\sigma}^2\right\}\Psi=-im\Psi \quad (4.94)$$

şeklinde elde edilir. (4.85)'de tanımlanan Pauli matrisleri, (4.94) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\partial_t+\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}\partial_1+\frac{1}{\sqrt{r^2(a^2+r^2)}}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\partial_2+\frac{a^2+2r^2}{2(a^2+r^2)^{3/2}}\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}+im\right\}\begin{bmatrix}\Psi_1\\\Psi_2\end{bmatrix}=0 \quad (4.95)$$

elde edilir. (4.95)' deki matris ifadesinden,

$$\partial_t\Psi_1+\frac{i}{\sqrt{a^2+r^2}}\partial_2\Psi_2+\frac{1}{\sqrt{r^2(a^2+r^2)}}\partial_2\Psi_2+i\frac{a^2+2r^2}{2(a^2+r^2)^{3/2}}\Psi_2+im\Psi_1=0,$$

$$-\partial_t\Psi_2+\frac{i}{\sqrt{a^2+r^2}}\partial_1\Psi_1-\frac{1}{\sqrt{r^2(a^2+r^2)}}\partial_2\Psi_1+i\frac{a^2+2r^2}{2(a^2+r^2)^{3/2}}\Psi_1+im\Psi_2=0 \quad (4.96)$$

şeklinde iki denklem elde edilir. (4.96)'daki denklemler düzenlenirse,

$$(\partial_t+im)\Psi_1+\left(\frac{i}{\sqrt{a^2+r^2}}\partial_r+\frac{1}{\sqrt{r^2(a^2+r^2)}}\partial_\theta+i\frac{a^2+2r^2}{2(a^2+r^2)^{3/2}}\right)\Psi_2=0, \quad (4.97)$$

$$(-\partial_t+im)\Psi_2+\left(\frac{i}{\sqrt{a^2+r^2}}\partial_r-\frac{1}{\sqrt{r^2(a^2+r^2)}}\partial_\theta+i\frac{a^2+2r^2}{2(a^2+r^2)^{3/2}}\right)\Psi_1=0 \quad (4.98)$$

şeklinde olur. Değişkenlerine ayırma yöntemini kullanarak spinör bileşenlerine

$$\Psi_1(r,\theta,t)=e^{-iEt}e^{ik\theta}F_1(r)\ ,\ \ \Psi_2(r,\theta,t)=e^{-iEt}e^{ik\theta}F_2(r) \quad (4.99)$$

şeklinde bir dönüşüm uygulanır ve bu ifadeler (4.97) ve (4.98) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\left(E-m\right)F_1-\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}+\frac{1}{2r}+\frac{r}{2(a^2+r^2)}\right)F_2=0,$$

$$\left(E+m\right)F_2-\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}+\frac{1}{2r}+\frac{r}{2(a^2+r^2)}\right)F_1=0 \qquad (4.100)$$

denklemeleri elde edilir. Yukarıdaki iki ifadeye,

$$F_1(r)=(a^2+r^2)^{-\frac{1}{4}}(r)^{-\frac{1}{2}}R_1(r)\ ,$$

$$F_2(r)=(a^2+r^2)^{-\frac{1}{4}}(r)^{-\frac{1}{2}}R_2(r) \qquad (4.101)$$

dönüşümleri uygulanırsa,

$$(E-m)R_1(r)-\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)R_2(r)=0\ , \qquad (4.102)$$

$$(E+m)R_2(r)+\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)R_1(r)=0 \qquad (4.103)$$

şeklinde daha sade denklemler elde edilir. (4.102)’den $R_1(r)$ ifadesi,

$$R_1(r)=\frac{1}{(E-m)}\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)R_2(r) \qquad (4.104)$$

şeklinde çekilir ve (4.103)’te yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{r}{a^2+r^2}\frac{d}{dr}-\frac{k}{r^2}-\frac{k}{a^2+r^2}-\frac{k^2}{r^2}+(E^2-m^2)(a^2+r^2)\right)R_2=0 \qquad (4.105)$$

şeklinde bulunur. Denklem (4.105)'i çözmek için,

$$\rho=-\frac{r^2}{a^2} \qquad (4.106)$$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{d^2R_2(\rho)}{d\rho^2}+\left(\frac{1}{2\rho}+\frac{1}{2(1-\rho)}\right)\frac{dR_2(\rho)}{d\rho}+\left(-\frac{k(k+1)}{4\rho^2}+\frac{k}{4\rho(1-\rho)}-\frac{(E^2-m^2)}{4\rho}a^4(1-\rho)\right)R_2(\rho)=0 \qquad (4.107)$$

denklemi elde edilir. (4.107) denklemine,

$$R_2(\rho)=\rho^{-\frac{k}{2}}\exp\left(\frac{a^2\sqrt{-E^2+m^2}}{2}\rho\right)T(\rho) \qquad (4.108)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{d^2T(\rho)}{d\rho^2}+\left(a^2\sqrt{-E^2+m^2}+\frac{1}{2(1-\rho)}+\frac{1-2k}{2\rho}\right)\frac{dT(\rho)}{d\rho}+\frac{a^2\sqrt{-E^2+m^2}}{4(1-\rho)}T(\rho)$$

$$+\frac{(1-2k)a^2\sqrt{-E^2+m^2}+a^4(-E^2+m)}{4\rho}T(\rho)=0 \qquad (4.109)$$

şeklinde Konfluent Heun diferansiyel denklemine dönüşür. (4.109) denkleminin genel çözümü,

$$T(\rho)=HeunC(a^2\sqrt{-E^2+m^2},-k-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{4}(-E^2+m^2)a^4,-\frac{1}{4}(-E^2+m^2)a^4-\frac{k}{4}+\frac{5}{8},\rho)$$

$$+\rho^{k+\frac{1}{2}}HeunC(a^2\sqrt{-E^2+m^2},k+\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{4}(-E^2+m^2)a^4,-\frac{1}{4}(-E^2+m^2)a^4-\frac{k}{4}+\frac{5}{8},\rho),$$

şeklinde elde edilir. Parçacığın enerji spektrumunu bulmak için, (3.4) ifadesindeki polinom çözümler için bilinen koşul,

$$\delta = -\left(n + \frac{\beta + \xi + 2}{2}\right)\alpha \quad , \quad (n=1,2..) \tag{4.110}$$

yardımıyla enerji ifadesi elde edilir. Burada,

$T(\rho) = HeunC\left(\alpha, \beta, \xi, \delta, \eta, \rho\right)$ ve

$$\delta = -\frac{1}{4}(-E^2 + m^2)a^4, \qquad \alpha = a^2\sqrt{-E^2 + m^2},$$

$$\beta = -k - \frac{1}{2}, \ \xi = -\frac{3}{2}, \quad \eta = -\frac{1}{4}(-E^2 + m^2)a^4 - \frac{k}{4} + \frac{5}{8}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifadeler (4.110)'da yerine yazılırsa,

$$-\frac{1}{4}\left(-E^2 + m^2\right)a^4 = -\left(n + \frac{-k - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2}{2}\right)a^2\left(\sqrt{-E^2 + m^2}\right),$$

$$\frac{(-E^2 + m^2)}{\sqrt{-E^2 + m^2}} = \left(\frac{4n}{a^2} - \frac{2k}{a^2}\right), \tag{4.111}$$

$$-E^2 + m^2 = \left(\frac{4n}{a^2} - \frac{2k}{a^2}\right)^2$$

şeklinde bulunur. Düzenleme yapılırsa,

$$E_n = \pm\left(m^2 - \left(\frac{4n}{a^2} - \frac{2k}{a^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.112}$$

şeklinde elde edilir. (4.112) ifadesinden elde edilen diğer enerji özdeğer ifadeleri $E = \pm m$ 'dir. Ancak bu durumda dalga fonksiyonları ıraksak olur. Bu nedenle, enerjinin $E = \pm m$ değerleri, enerji özdeğeri olarak alınamaz. (4.112) ifadesinde; n=1,2,… değerleri için,

$$n = 1 \rightarrow \quad E_1 = \left(m^2 - \left(\frac{4}{a^2} - \frac{2k}{a^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$n = 2 \rightarrow \quad E_2 = \left(m^2 - \left(\frac{8}{a^2} - \frac{2k}{a^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.113}$$

$$n = 3 \rightarrow \quad E_3 = \left(m^2 - \left(\frac{12}{a^2} - \frac{2k}{a^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. c ve $\hbar$ sabitlerinin yazılı olduğu enerji ifadesi,

$$E_n = \pm\left(m^2c^4 - \frac{4\hbar^2c^2}{a^4}(2n-k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.114}$$

şeklinde olur.

4.4. (2+1) Boyutlu Uzay Zamanda Solucan Deliği İçin Spin-1 Denkleminin Çözümü

(2+1) boyutlu uzay zamanda spin-1 denklemi,

$$\left\{i(\sigma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \sigma^\mu(x))(\partial_\mu - \Gamma_\mu^{DKP}(x)) - 2m\right\}\Psi(x) = 0 \tag{4.115}$$

şeklindedir. Bu denklemin (2+1) boyutlu eğri bir uzay-zaman zeminindeki çözümleri, zaman içinde genişleyen ve büzülen bir evren modeli için daha önce tartışılmaktadır.(Mustafa Dernek, doktora tezi, 2009).

Denklem (4.115)'te, (4.90) 'daki Dirac matrislerinin Pauli matrisler cinsinden ifadeleri ve (4.92)'deki spin bağlantı katsayıları yerine yazılırsa,

$$\left(\sigma^3\otimes I+I\otimes\sigma^3\right)\partial_0\Psi+\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(i\sigma^1\otimes I+I\otimes i\sigma^1\right)\partial_1\Psi+\frac{1}{r\sqrt{a^2+r^2}}\left(i\sigma^2\otimes I+I\otimes i\sigma^2\right)\partial_2\Psi$$

$$+\frac{1}{r\sqrt{a^2+r^2}}\left(i\sigma^2\otimes I+I\otimes i\sigma^2\right)\frac{a^2+2r^2}{2(a^2+r^2)}\left(i\sigma^1 i\sigma^2\otimes I+I\otimes i\sigma^1 i\sigma^2\right)\Psi+2im\Psi=0 \quad (4.116)$$

denklemi elde edilir. Denklem (4.116)'da matris değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1\\\Psi_0\\\Psi_0\\\Psi_2\end{bmatrix}\partial_0+\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\begin{bmatrix}0&i&i&0\\i&0&0&i\\i&0&0&i\\0&i&i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1\\\Psi_0\\\Psi_0\\\Psi_2\end{bmatrix}\partial_1+ \quad (4.117)$$

$$+\frac{1}{r\sqrt{a^2+r^2}}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\-1&0&0&1\\-1&0&0&1\\0&-1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1\\\Psi_0\\\Psi_0\\\Psi_2\end{bmatrix}\partial_2+\frac{a^2+2r^2}{2r(a^2+r^2)^{3/2}}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\2i&0&0&2i\\2i&0&0&2i\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1\\\Psi_0\\\Psi_0\\\Psi_2\end{bmatrix}+2im\begin{bmatrix}\Psi_1\\\Psi_0\\\Psi_0\\\Psi_2\end{bmatrix}=0$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki matris ifadesi düzenlenirse,

$$2\left(\partial_t+im\right)\Psi_1+\left(\frac{i}{\sqrt{a^2+r^2}}\partial_r+\frac{1}{r\sqrt{a^2+r^2}}\partial_\theta\right)\Psi_0+\left(\frac{i}{\sqrt{a^2+r^2}}\partial_r+\frac{1}{r\sqrt{a^2+r^2}}\partial_\theta\right)\Psi_0=0 \quad (4.118)$$

$$\left(\frac{i}{\sqrt{a^2+r^2}}\partial_r-\frac{1}{r\sqrt{a^2+r^2}}\partial_\theta+\frac{i(a^2+2r^2)}{r(a^2+r^2)^{3/2}}\right)\Psi_1+\left(\frac{i}{\sqrt{a^2+r^2}}\partial_r-\frac{1}{r\sqrt{a^2+r^2}}\partial_\theta+\frac{i(a^2+2r^2)}{r(a^2+r^2)^{3/2}}\right)\Psi_2+2im\Psi_0=0 \quad (4.119)$$

$$2(-\partial_t + im)\Psi_2 + \left(\frac{i}{\sqrt{a^2+r^2}}\partial_r - \frac{1}{r\sqrt{a^2+r^2}}\partial_\theta\right)\Psi_0 + \left(\frac{i}{\sqrt{a^2+r^2}}\partial_r - \frac{1}{r\sqrt{a^2+r^2}}\partial_\theta\right)\Psi_0 = 0 \tag{4.120}$$

olmak üzere üç denklem elde edilir. Değişkenlerine ayırma yöntemini kullanarak spinör bileşenlerine

$$\Psi_1 = e^{-iEt}e^{ik\theta}F_1(r), \quad \Psi_2 = e^{-iEt}e^{ik\theta}F_2(r) \quad \text{ve} \quad \Psi_0 = e^{-iEt}e^{ik\theta}F_0(r) \tag{4.121}$$

şeklinde bir dönüşüm uygulanıp, yukarıdaki denklemlerde yerine yazılır ve bu denklemler düzenlenirse,

$$(E-m)F_1(r) - \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)F_0(r) = 0 \tag{4.122}$$

$$(E+m)F_2(r) + \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right)F_0(r) = 0 \tag{4.123}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} + \frac{(a^2+2r^2)}{r(a^2+r^2)}\right)F_1(r) + \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \frac{(a^2+2r^2)}{r(a^2+r^2)}\right)F_2(r) + 2mF_0(r) = 0 \tag{4.124}$$

denklemleri elde edilir. (4.122) ve (4.123) denklemlerinden $F_1(r)$ ve $F_2(r)$ ifadeleri çekilirse,

$$F_1(r) = \frac{1}{(E-m)}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)\right)F_0(r) \ , \tag{4.125}$$

$$F_2(r) = -\frac{1}{(E+m)}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right)\right)F_0(r) \ , \tag{4.126}$$

olmak üzere iki denklem elde edilir. (4.125) ve (4.126) denklemlerindeki $F_1(r)$ ve $F_2(r)$ ifadeleri, denklem (4.124)' te yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d^2F_0(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF_0(r)}{dr}-\frac{k^2}{r^2}F_0(r)+(E^2-m^2)(a^2+r^2)F_0(r)=0 \tag{4.127}$$

şeklinde elde edilir.

$$\rho=\sqrt{-E^2+m^2}\,r^2 \tag{4.128}$$

değişken değiştirmesi yapılır ve yeniden düzenlenir ise denklem (4.127),

$$\frac{d^2F_0(\rho)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dF_0(\rho)}{d\rho}-\frac{k^2}{4\rho^2}F_0(\rho)-\frac{\sqrt{-E^2+m^2}\,a^2}{4\rho}F_0(\rho)-\frac{1}{4}F_0(\rho)=0 \tag{4.129}$$

denklemine dönüşür. (4.129) denkleminin çözümü Konfluent Hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden,

$$F_0(\rho)=\rho^{\frac{1}{2}}\exp(-\frac{\rho}{2})\,{}_1F_1\left(\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-E^2+m^2}}{4}a^2+\frac{k}{2}\right],[k+1],\rho\right) \tag{4.130}$$

şeklinde bulunur. Bu dalga fonksiyonun, $\rho\to\infty$ yakınsaması için

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-E^2+m^2}}{4}a^2+\frac{k}{2}=-n\ ,\quad (\text{n=0,1,2...})\ , \tag{4.131}$$

koşulu yazılır. Bu koşuldan,

$$E_n=\pm\left(m^2-\frac{16}{a^4}\left(\frac{k+1}{2}+n\right)\right)^{\frac{1}{2}}\ , \tag{4.132}$$

şeklinde enerji ifadesi elde edilir. n=0,1,2 değerleri için enerji ifadelerini,

$$E_0 = \pm\left(m^2 - \frac{4(k+1)^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$E_1 = \pm\left(m^2 - \frac{4(k+3)^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.133)$$

$$E_2 = \pm\left(m^2 - \frac{4(k+5)^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde buluruz. Akım yoğunluğu bileşenlerini hesaplamak için,

$$\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_0\\ \Psi_0\\ \Psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-\rho/2+ik\theta-iEt}\sqrt{-E^2+m^2}}{(E-m)\sqrt{-4£+\rho}}\left(\left(\dfrac{1}{\rho}+1-\dfrac{2£}{\rho}\right)W(£,\dfrac{k}{2},\rho)+\dfrac{(1+k+2£)}{\rho}W(£+1,\dfrac{k}{2},\rho)+\dfrac{k}{\sqrt{\rho}}\right) \\ e^{ik\theta-iEt}\rho^{-\frac{1}{2}}W(£,\dfrac{k}{2},\rho) \\ e^{ik\theta-iEt}\rho^{-\frac{1}{2}}W(£,\dfrac{k}{2},\rho) \\ \dfrac{e^{-\rho/2+ik\theta-iEt}\sqrt{-E^2+m^2}}{(E+m)\sqrt{-4£+\rho}}\left(\left(\dfrac{1}{\rho}+1-\dfrac{2£}{\rho}\right)W(£,\dfrac{k}{2},\rho)+\dfrac{(1+k+2£)}{\rho}W(£+1,\dfrac{k}{2},\rho)-\dfrac{k}{\sqrt{\rho}}\right) \end{pmatrix} \qquad (4.134)$$

ile verilen dalga fonksiyonu kullanılır. (4.134)'teki dalga fonksiyonu bağıntısında, Whittaker fonksiyonunun asimptotik ifadesi $W(£,\frac{k}{2},\rho) \cong e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^{£}$ şeklinde alınırsa,

$$\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_0\\ \Psi_0\\ \Psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{e^{-\rho/2+ik\theta-iEt}\sqrt{-E^2+m^2}}{(E-m)\sqrt{-4£+\rho}}\left(-2£\rho^{£-2}+(1+k+2£)\rho^{£}+\dfrac{k}{\sqrt{\rho}}\right)\\ e^{ik\theta-iEt-\frac{\rho}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}+£}\\ e^{ik\theta-iEt-\frac{\rho}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}+£}\\ \dfrac{e^{-\rho/2+ik\theta-iEt}\sqrt{-E^2+m^2}}{(E+m)\sqrt{-4£+\rho}}\left(-2£\rho^{£-2}+(1+k+2£)\rho^{£}-\dfrac{k}{\sqrt{\rho}}\right)\end{pmatrix} \tag{4.135}$$

şeklinde elde edilir. Burada $£=-\dfrac{\sqrt{-E^2+m^2}a^2}{4}$’dir. (4.135)’deki dalga fonksiyonları, (4.79)’da tanımlanan akım yoğunluğu bileşenleri ifadesinde yerine yazılırsa, akım bileşenleri,

$$J^t=\frac{N^2(-E^2+m^2)}{m(\rho-4£)}\left[\beta_+^{\ 2}-\beta_-^{\ 2}\right] \tag{4.136}$$

$$J^r=0\ ,$$

$$J^\theta=\frac{N^2 2m\rho^{£+\frac{1}{2}}\left(-2£(\rho^{-2}-1)+k+1\right)+2kE}{\rho^{\frac{1}{2}}(E^2-m^2)} \tag{4.137}$$

şeklinde bulunur. Burada $A=-2£\rho^{£-2}+(1+k+2£)\rho^{£}$, $\beta_\pm=\dfrac{A\pm k\rho^{-\frac{1}{2}}}{E\mp m}$ ve

N normalizasyon sabitidir.

5. SONUÇ

Bu tezde (2+1) boyutlu uzay-zamanda Dirac ve spin-1 denklemlerinin, sabit manyetik alan ve (2+1) boyutlu uzay zamanda (2.33) ifadesi ile verilen solucan deliği metriği için çözümler elde edilmekte ve bu çözümler tartışılmaktadır. (3+1) boyutta sabit manyetik alanda yüklü parçacıklar için elde edilen çözümlerde ortaya çıkan normalizasyon problemleri (2+1) boyutta aşılmış olur. Grafen gibi tek katmanlı (tabakalı) fiziksel yapıların kuantum mekaniksel davranışlarının anlaşılması için (2+1) boyutlu uzay zamanda solucan (kurt) deliği metriği zemininde relativistik spin-1/2 ve spin-1 parçacıkların kuantum mekaniksel davranışları incelenmekte ve söz konusu parçacıkları bu zeminde temsil eden dalga fonksiyonları, bu fonksiyonlardan enerji ifadeleri ve akım bileşenleri elde edilmektedir.

Sabit manyetik alanda Dirac parçacıkları için enerji ifadesine, c ve $\hbar$ sabitleri de dikkate alındığında, n = 0,1,2.. ve $k = 0 \pm 1, \pm 2...$ olmak üzere,

$$E_n = \pm mc^2 \left(1 + \frac{2eB\hbar^2}{m^2c^4}\left(k + \frac{n}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.1}$$

şeklinde elde edilir. (5.1) ifadesinden n=0 için, sıfır durum enerjisi elde edilir. Burada manyetik alanın çok zayıf ve çok güçlü olduğu durumlar incelenirse, manyetik alanın çok zayıf olduğu durumda, $eB\hbar^2 << m^2c^4$ göz önüne alınarak, Dirac parçacıkları için enerji ifadesi,

$$E_n \cong \pm\left(mc^2 + \frac{2eB\hbar^2}{mc^2}\left(k + \frac{n}{2}\right)\right) \tag{5.2}$$

şeklinde olur. Manyetik alanın çok güçlü olduğu durumda ise enerji ifadesi,

$$E_n \cong \pm m\left(\frac{2eB\hbar^2}{m^2c^4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(k + \frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

şeklinde elde edilir. Spin-1/2 parçacıklarını temsil eden dalga fonksiyonlarının asimptotik ifadeleri kullanılarak akım bileşenleri,

$$J^{t} = \frac{\hbar}{mc}\left(\frac{eB}{2\pi(\Gamma(2L+2\nu)+\Gamma(2L))}\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{2L-1} e^{\rho} (\rho^{2L}+1)\,,$$

$$J^{r} = 0\,, \tag{5.4}$$

$$J^{\theta} = \frac{2\hbar}{m}\left(\frac{eB}{2\pi(\Gamma(2L+2\nu)+\Gamma(2L))}\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{2L+2\nu-1} e^{-\rho}\,.$$

şeklinde bulunur. Normal akım yoğunlukları, (5.4) ifadesinde hesaplanan akım bileşenlerinin "e" parçacık yükü ile çarpılmasıyla elde edilir.

Sabit manyetik alanda, Dirac denklemi için polarizasyon ve manyetizasyon yoğunluklarının bileşenleri,

$$P^{1} = \frac{N^{2}}{m}(\rho^{2L+2\nu-1} e^{-\rho})\,, \tag{5.5}$$

$$M^{12} = \frac{N^{2}}{2m}\left(\rho^{2L+4\nu-1} e^{-\rho} + \rho^{2L-1} e^{-\rho}\right) \tag{5.6}$$

şeklinde bulunur. Bu Polarizasyon ve manyetizasyon yoğunluklarının hiperyüzey üzerinden integralleri,

$$\int_{\sigma} P^{1} d\sigma = \frac{\hbar\Gamma(2L+2\nu)}{mc[\Gamma(2L+4\nu)+\Gamma(2L)]}\,, \tag{5.7}$$

$$\int_{\sigma} M^{12} d\sigma = \frac{1}{2m} \tag{5.8}$$

şeklide hesaplanır. Burada, σ hiper yüzeydir ve iki boyutlu uzayda kartezyen koordinatlarda $d\sigma = \sqrt{|g|}dx_i dx_j$ olarak tanımlanır.

Dirac akımları olasılık akımlarıdır ve hız boyutundadır. Bu nedenle, normal yük akımlarını elde etmek için Dirac akımı "e" yükü ile çarpılır. Dirac akımını Gordon ayrışımından elde edilen polarizasyon ve manyetizasyon olasılık yoğunluklarının, sırasıyla, (5.7) ve (5.8) 'deki integral ifadelerinden elde edilen sonuçlarını "e" parçacık yükü ile çarpılmasıyla, Dirac parçacığının elektrik ve manyetik dipol momentleri elde edilir. Bu durumda; manyetizasyon yoğunluğunun hiperyüzey üzerinden integrasyonundan elde edilen ifadesinden; $\frac{e\hbar}{2m}$, yani elektronun manyetik dipol momentinin, tam olarak hesaplamak mümkün olduğu görülür.

Sabit manyetik alandaki relativistik spin-1 parçacıkları için enerji ifadesi ise,

$$E_{1,2} = \frac{eB}{2mc^2} \pm \left(\frac{e^2B^2}{4m^2c^4} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} + \frac{eB\hbar}{c^2} + \frac{2eB\hbar n}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.9}$$

olarak bulunur. Manyetik alanın çok zayıf olduğu, $eB \ll mc^2$ durumunda spin-1 parçacıkları için enerji ifadesi,

$$E_n \cong \pm \frac{mc^2}{\hbar} + \frac{eB}{2mc^2} \left(1 \pm \frac{2\hbar^2}{c^2}(n + \frac{1}{2}) \right) \tag{5.10}$$

şeklindedir. Manyetik alanın çok güçlü olduğu durumda ise enerji ifadesi,

$$E_n \cong \frac{eB}{2mc^2} \mp \frac{eB}{2mc^2} \tag{5.11}$$

olarak elde edilir. Sabit manyetik alanda, spin-1 parçacıklarını temsil eden dalga fonksiyonlarının asimptotik ifadeleri kullanılarak akım bileşenleri,

$$J^{t} = \frac{N^{2} e^{-r} r^{2L-1}}{m}\left[\left(\frac{\alpha_{-}}{E-m}\right)^{2} - \left(\frac{\alpha_{+}}{E+m}\right)^{2}\right],$$

$$J^{r} = \frac{N^{2}\beta_{-}\sin\left[(-2k+1)\theta\right] + \beta_{+}\sin\left[(2k+1)\theta\right]}{m}, \qquad (5.12)$$

$$J^{\theta} = \frac{N^{2}\beta_{-}\cos\left[(-2k+1)\theta\right] - \beta_{+}\cos\left[(2k+1)\theta\right]}{m}$$

şeklinde bulunur.

(2.33) ifadesinde verilen solucan deliği metriği için Dirac denkleminin çözümü sonucu elde edilen enerji ifadesinde c ve $\hbar$ sabitleri yerine yazılırsa,

$$E_{n} = \pm m_{e} c^{2}\left(1 - \frac{\hbar^{2} c^{2}}{m_{e}^{2} c^{4} a^{4}}(4n - 2k)^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \ (\text{n=1,2.., k=0} \pm 1, \pm 2...) \qquad (5.13)$$

şeklinde olur. Burada, a^2, solucan deliğinin boğazının yarıçapı, yani grafen için örgü sabitidir. Ayrıca, k, açısal momentum ve n, başkuantum sayısı olmak üzere kuantum sayılarıdır. Denklem (4.112)'de verilen ifadeden elde edilen diğer enerji ifadeleri $E = \pm m$'dir. Ancak bu ifade, (3.4)'te verilen Konfluent Heun denkleminin polinom olma koşulunu sağlamaz. Bu nedenle, enerji özdeğeri olarak alınamaz. (5.13)'teki enerji bağıntısından, enerji değerinin gerçel olabilmesi için kök içindeki ifade,

$$m_{e}^{2} c^{4} - \frac{\hbar^{2} c^{2}}{a^{4}}(4n - 2k)^{2} \geq 0 \qquad (5.14)$$

olmalıdır. Bu durumda a^2'nin,

$$a^{2}_{kritik} \leq \frac{2\hbar}{m_{e} c}(2n - k) \qquad (5.15)$$

şeklinde bir kritik değere sahip olur. a^2'nin bu değerinin, $\frac{\hbar}{m_e c}$, ifadesi yani, λ_c, Compton dalga boyu ile aynı mertebede ve boyutta olduğu görülmektedir. Burada, Compton dalga boyunun, enerji ifadesi için eşik değer olduğunu görülür. a^2, tek katmanlı yapılar için örgü sabiti olarak yorumlanması durumunda: $a^2 < \lambda_c$ ise (5.13)'teki enerji ifadesi imajiner olur. Dolayısıyla, kütleli Dirac parçacığı, $m^2 = 0$ kütlesiz durumunda olduğu gibi örgü içerisinde tuzaklanmadan tünelleme yaparak geçer. $a^2 > \lambda_c$ durumunda ise parçacık kuantum sayılarının değerine bağlı olarak örgü içerisinde toplam E enerjisiyle titreşim yapar. Enerji ifadesinden elde edilen bu sonuçlar, literatürdeki deney sonuçları ile tutarlı olduğu görülmektedir (Novoselov vd 2005).

Daha önce solucan deliği metriği kullanılarak, Dirac denkleminin çözümünden elde edilen (4.105) denklemini, Schrödinger tipi bir denkleme dönüştürmek için,

$$R(r) = (a^2 + r^2)^{\frac{1}{4}} T(r) \tag{5.16}$$

biçiminde bir dönüşüm uygularsak, (4.105) denklemi,

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \left(\frac{2a^2 - 3r^2}{4(a^2 + r^2)} - \frac{k(k+1)}{r^2} - \frac{k}{(a^2 + r^2)} + (E^2 - m^2)(a^2 + r^2) \right) T(r) = 0 \tag{5.17}$$

şekline dönüşür. Bu denklemden de etkin potansiyel,

$$V_{etkin} = \frac{2a^2 - 3r^2}{4(a^2 + r^2)} - \frac{k(k+1)}{r^2} - \frac{k}{(a^2 + r^2)} + (E^2 - m^2)(a^2 + r^2)$$

olarak tanımlanabilir. Burada, E'nin a^2'nin ve k'nın bazı değerleri için bu potansiyelin grafiği, Van der Waals potansiyeli grafiğine yaklaşır. Buradan, solucan (kurt) deliği ve elektron arasındaki etkileşme, grafen ile elektron arasındaki etkileşmeye benzediği görülür.

(2.33) ifadesinde verilen solucan deliği metriği zemininde spin-1 denkleminin çözümünden elde edilen enerji ifadesinde c ve $\hbar$ sabitleri yerine yazılırsa, $n = 1,2..,k = 0 \pm 1,\pm 2..$ olduğu durumda,

$$E_n = \pm mc^2 \left(1 - \frac{16\hbar^2 c^2}{m^2 c^4 a^4} \left(\frac{k+1}{2} + n \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.18}$$

şeklinde elde edilir. Burada enerji ifadesinin gerçel olabilmesi için a^2 ifadesinin kritik değeri,

$$a^2{}_{kritik} \leq \frac{2\hbar}{mc}(2n + k + 1) \tag{5.19}$$

şeklinde bulunur. Yine yukarıda tartıştığımız gibi, (5.13) bağıntısında, $\frac{\hbar}{mc}$, ifadesi λ_c, Compton dalga boyudur. Dolayısıyla, a^2, Compton dalga boyu boyutunda ve mertebesindedir. Bu durumda; Compton dalga boyu, enerjinin eşik değeri olur. Yani a^2, örgü sabiti olarak $a^2 < \lambda_c$ ise (5.18)'de verilen enerji ifadesi sanal olur. Dolayısıyla, spin-1 parçacıkları için $m^2 = 0$ durumunda olduğu gibi örgü içerisinde tuzaklanmadan tünelleme yaparak geçer. $a^2 > \lambda_c$ durumunda ise parçacık kuantum sayılarının değerine bağlı olarak örgü içerisinde toplam E enerjisiyle titreşim yapar.

Spin-1 parçacığını temsil eden dalga fonksiyonlarının asimptotik ifadeleri kullanılarak akım bileşenleri,

$$J^t = \frac{N^2(-E^2 + m^2)}{m(\rho - 4£)}\left[\beta_+{}^2 - \beta_-{}^2\right],$$

$$J^r = 0, \tag{5.20}$$

$$J^{\theta} = \frac{N^{2}2m\rho^{£+\frac{1}{2}}\left(-2£(\rho^{-2}-1)+k+1\right)+2kE}{\rho^{\frac{1}{2}}(E^{2}-m^{2})}$$

olarak hesaplanır.

6. KAYNAKLAR

ABRAMOWİTZ, M. AND STEGUN, A. 1964. Handbook of Mathematical Functions p. 504

BAGROV, V.G., GITMAN, D.M. and TLYACHEV, V. B. 2001. Solutions of relativistic wave equations in superpositions of Aharonov–Bohm, magnetic, and electric fields J. Math. Phys. 42: 1933.

BANADOS, M., TEITELBOIM, C. and ZANELLI, J. 1992. Black Hole in Three-Dimensional Spacetime. Phys. Rev. Lett. 69:1849.

BARUT, A. O. and DURU, I. H. 1987. Exact solutions of the Dirac equation in spatially flat Robertson-Walker space-times. Phys. Rev. D 36: 3705.

BARUT, A.O. 1990. Excited States of Zitterbewegung. Phys. Lett.B 237, p 436.

BISWAS, S., SARKAR, N.G. and SHAW, A. 1999. Dirac Current In Expanding Spacetime. arXiv:gr-qc/9906082v1.

BARROW, J.D., BURD, A.B., and LANCASTER, D., 1986. Three-dimensional classical spacetimes. Class. Quantum Grav. 3:551–567.

CARLIP, S. and NELSON, J.E. 1995. Comparative quantizations of (2+1)-dimensional gravity. Phys. Rev. D 51:5643.

CASTRO NETO, A. H.GUINEA, F. PERES, N.M. R. NOVOSELOV, K.S. and GEIM, A.K. 2009.The electronic properties of graphene. Reviews of Modern Phys.81.

CLEMENT, G.1976. Field-Theoretic extended particles in two space dimensions. Nucl. Phys. B114:437.

COLLAS, P. 1977. General Relativity in two- and three-dimensional space-times. Am. J. Phys. 45: 833.

CORNISH, N.J., and FRANKEL, N.E. 1991. Gravitation in 2+1 dimensions, Phys. Rev. D, 43: 2555–2565.

DIRAC, P.A.M. 1936. Relativistic wave equations. Proc. R. Soc. London, Ser. A 155: 447-459.

DONG, S.H. and MA, Z.Q. 2002. The (2+1) Dirac equation with a delta potentail. Found. Phys. Lett.15,171.

DUFFIN, R. J.1938. On the charaacteristic matrices of covariant systems Phys. Rev. 54:1114.

FAINBERG, V.Y. and PIMENTEL, B.M. 2000. Equivalence of the Duffin-Kemmer Petiau and Klein-Gordon-Fock equations. Theor. Math. Phys. 124: 1234.

FAINBERG, V.Y. and PIMENTEL, B.M. 2000. On equivalence of Duffin-Kemer-Petiau and Klein-Gordon equations. BRAZ B. M. J. Phys. 30:275.

FAINBERG, V.Y. and PIMENTEL, B.M. 2000. Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Gordon-Fock equations for electromagnetic, Yang-Mills and external gravitational field interactions: proof of equivalence. Phys. Lett. A 271: 16.

FALEK, M. and MERAD, M. 2009. Duffin-Kemmer-Petiau equation in Robertson-Walker space-time. J. Phys.. 8(3).408-414.

FALEK, M. and MERAD, M. 2011. Duffin-Kemmer-Petiau equation in curved space-time. AIP Conf. Proc. 1444: 367-369.

FRADKIN, E. 1991. Field Theories of Condensed Matter Systems (Addison-Wesley, Reading).

FRIEDMAN, E. and KALBERMANN, G. 1986.Kemmer-Duffin-Petiau equation for pionic atoms and anomalous strong interaction effects. Phys. Rev. C 34:2244-2247.

FISCHBACH,E., NIETO, M.M. and SCOTT, C.K 1973.Duffin- Kemmer -Petiau subalgeras: Representation and applications J. Math. Phys. 14:1760.

GAVRILOV, S.P., GITMAN, D.M. and SMIRNOV, A.A. Focus on, Math. Phys. (Nova Science, NewYork, in press); hep-th/0308093.

GAVRILOV, S.P., GITMAN, D.M. and SMIRNOV, A.A. 2003. Self-adjoint extensions of the Dirac Hamiltonian in the magnetic-solenoid field and related exact solutions. Phys. Rev. A 67:024103.

GAVRILOV, S.P., GITMAN, D.M. and SMIRNOV, A.A. 2004. Green functions of the Dirac equation with magnetic-solenoid field. J.Math. Phys.45:1873.

GONZALEZ, J. and HERRERO, J. 2010. Graphene wormholes: A condensed matter illustration of Dirac fermions in curved space. Nucl. Phys.. B 825 [FS] : 426-443.

HARRIOTT, T.A. and WILLIAMS, J.G.2001. Solution of the Klein-Gordon Equation for a (2+1) curved spacetime. Mod. Phys. Lett.A 16:1151.

HOSSAIN, M.A. 2002. Spinning Particles in Curved Spacetime. International J. Theor. Phys. 41, 12.

HORTACSU, M. 2011. Heun Functions and Their Uses in Physics, http://arxiv.org/abs/1101.0471v1

IMAI, N., ISHIKAWA, K. MATSUYAMA, T. and TANAKA, I. 1990. Field theory in a strong magnetic field and the quantum Hall effect: Integer Hall effect. Phys. Rev. B 42:10610.

ISHIKAWA, K. and MATSUYAMA, T.Z. 1986. Magnetic field induced multi component QED in three- dimensions and quantum Hall effect. Phys, C 33:41.

ISHIKAWA, K. and MATSUYAMA, T.Z. 1987. A microscopic theory of the quantum Hall effect Nucl.Phys. B 280: [FS18], 523.

JACKIW, R. and TEMPLETON, S. 1981. How super-renormalizable interactions cure their infrared divergences. Phys. Rev. D 23: 229.

JACKIW, R., DESER, S. and TEMPLETON, S. 1982. Topologically massive gauge theories. Ann. Phys. N.Y. 140, 372-411.

JACKIW, R., DESER, S. and T'HOOFT, G. 1984. Three-Dimensional Einstein gravity: Dynamics of flat space. G., Ann. Phys. N.Y. 152: 220 , ibid. 153: 405.

KALBERMANN, G. 1986. Kemmer-Duffin-Petiau equation approach to pionic atoms. Phys. Rev. C 34: 6.

KATSNELSON, M.I., NOVOSELOV, K.S. and GEIM, A.K. 2006. Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene. Nat. Phys. 2: 620.

KEMMER, N. 1939. The particle aspect of meson theory. Proc. R. Soc. London 173: 91-116.

KHALILOV, V.R. and HO, C.L. 1998. Dirac electron in a Coulomb field in 2+1 Dimensions. Mod. Phys. Lett. A 13,:615.

KHALILOV, V.R. and HO, C.L. 1999. QED (2+1) radiatıon effects in a strong magnetic field. Theor. And Mat. Phys., 121: 3.

LEUTWYLER, H. 1966. A 2+1 dimensional model for the quantum theory of gravity Nuovo Cimento 42A:159.

LOPEZ A. -ORTEGA. 2005. Hawking radiation and Dirac quasinormal modes of 3D EMDΛ black holes. Gen.Relativ. Gravit. 37:167-190.

LOPEZ A.-ORTEGA. 2006. Absorption and quasinormal modes of classical fields propagating on 3D and 4D de Sitter spacetime. 38:743-771.

LUNARDI, J.T., PIMENTEL, B.M., and TEIXEIRA, R .2001. Duffin-Kemmer-Petiau equation in Riemannian space-times. In Geometrical Aspects of Quantum Fields, proceedings of the 2000 Londrina Workshop, Londrina, Brazil, A. A. Bytsenko, A.E.Gon¸calves, and B. M.Pimentel (Eds.) (World Scientific, Singapore), p. 111. Also available as gr-qc/9909033.

LUNARDI, J.T., PIMENTEL, B. M., TEIXEIRA, R. G. and VALVERDE, J. S. 2000. Remarks on Duffin-Kemmer-Petiau theory and gauge invariance Phys. Lett. A 268:165.

MAROLF, D.M. 1993. Loop representations for 2+1 gravity on a torus. Class. Quantum Grav. 10: 2625-2647.

MATSUYAMA, T. 1987. Quantization of Conductivity Induced by Topological Structure of Energy-Momentum Space in Generalized QED_3 .Prog. Theor. Phys. 77, 711.

MISHRA,V.K. and HAMA,S. 1991. Intermediate Energy Deuteron-Nucleus Scattering. Clarc B.C., Phys. Rev. C, 43: 2.

MORRIS, THORNE,M., K.YURTSEVER, U.1988. Wormhole, Time Machines,and the Weak Energy Condition., Phys.Rev., 61:13.

NEDJADİ,Y. and BARRETTZ, R C. 1994. The Duffin–Kemmer–Petiau Oscillator J.Phys A: Math. Gen. 27 4301.(SERC GR/H53648)

NEDJADİ,Y. and BARRETTZ, R C . 1995. The Duffın- Kemmer- Petıau Oscıllator http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19950016581

NOVOSELOV, K. 2005. Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene S.et al., Nature 438:197.

NOWAKOWSKI, M. 1998. The electromagnetic coupling in Kemmer-Duffin-Petiau theory. Phys. Lett. A 244:329.

PARKER, L. 1969. Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes.I. Phys. Rev. 183:1057.

PARKER, L. 1971. Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes. II. Phys. Rev. D3, 346.

PETIAU, G. 1936. Ph.D Thesis, University of Paris, Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect. 8:16.

RONVEAUX, A. Heun's Differential Equations, Oxford University Press,(1995), 30-35.

SEMENOFF, W.G. 1984. Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly. Phys. Rev .Lett., 53(26):2449-2452.

STARUSZKIEWICZ, A. 1963. Gravitation theory in three- dimensional space. Acta Phys. Polon. 24:734.

SUCU, Y. and UNAL, N. 2002. Solution Of Massless Spin One Wave Equation In Robertson-Walker Space-Time Int.J. Mod. Phys. A17:1137.

SUCU, Y. and UNAL, N. 2005. Vector bosons in the expanding universe. Eur. Phys. J.C 44: 287-291.

SUCU, Y.and UNAL, N. 2007. Exact solution of Dirac equation in 2+1 dimensional gravity. J. Math. Phys. 48:052503.

UNAL, N. 2005. Duffin-Kemmer-Petiau equation, Proca equation and Maxwells equation in (1+1) D. Concepts of Physics, Vol. II.

UNAL, N. 1997. A Simple Model of the Classical Zitterbewegung: Photon Wave Function. Found. of Phys., Vol.27, No.5.

UNAL,N. 1998. Path Integral Quantization of a Spinning Particle. Found. of Phys., Vol . 28, No. 5.

WILCZEK, F. 1990. Fractional Statistics and Anyon Superconductivity World Scientific, Singapore.

WITTEN, E.1988. (2 + 1) D Gravity As An Exactly Soluble System Nucl. Phys. B 11:46.

ZHANG, S. HANSSON, T. and KIVELSON, S. 1989. Effective-Field-Theory Model for the Fractional Quantum Hall Effect Phys. Rev. Lett. 62:82.

ZHOU, F. and SEMENOFF, G. 2006. Quantum Insulating States of *F*=2 Cold Atoms in Optical Lattices Phys. Rev. Lett. 97:180411.

ÖZGEÇMİŞ

Semra GÜRTAŞ, 1984 yılında Sivas'ta doğdu. İlk, orta, lise öğrenimlerini Sivas'ta tamamladı. 2004 yılında Akdeniz Üniversitesi Fizik bölümünü kazandı ve 2008 yılında mezun oldu. 2009 yılında Akdeniz Üniversitesi Fizik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı. 2013 yılında yüksek lisanstan mezun oldu.