T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI APPELL POLİNOM AİLELERİNİN MATRİS İFADELERİ ÜZERİNE

Levent KARGIN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2014

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI APPELL POLİNOM AİLELERİNİN MATRİS İFADELERİ ÜZERİNE

Levent KARGIN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2014

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI APPELL POLİNOM AİLELERİNİN MATRİS İFADELERİ ÜZERİNE

Levent KARGIN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul/red edilmiştir.

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Prof. Dr. Rıza ERDEM

Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL

Doç. Dr. Mehmet CENKCİ

ÖZET

BAZI APPELL POLİNOM AİLELERİNİN MATRİS İFADELERİ ÜZERİNE

Levent KARGIN

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Prof. Dr. Veli KURT
Haziran 2014, 72 sayfa

Bu tez çalışmasında, bazı klasik özel fonksiyon ailelerinin matris genişlemeleri üzerine çalışılacaktır. Hermite matris polinomlarının sağladığı toplam ve çarpım formülleri, sahip olduğu diğer üreteç fonksiyonları ve hipergeometrik matris fonksiyonları gösterimleri elde edilecektir.

Genelleştirilmiş Hermite matris polinomları tanımlanarak, sağladığı özeliklerde uygun parametre seçimleriyle Hermite matris polinomları için Burchnall operatör formülü ve Nielsen bağıntısı ispatlanacaktır.

Laguerre matris polinomlarının üreteç fonksiyonu modifiye edilerek modifiye Laguerre matris polinomları tanımlanacak, sağladığı üç terimli rekürans bağıntısı, Rodrigues formülü, matris diferansiyel denklemi ve sahip olduğu bilineer ve bilateral üreteç fonksiyonları incelenecektir. Ayrıca, Laguerre-tipli matris polinomları için yeni bir genelleştirme verilecektir.

II. tip Chebyshev matris polinomları genelleştirilerek, özellikleri araştırılacaktır. Sağladığı bir integral gösterimi kullanılarak bu matris polinomları için bazı operatör formülleri ispatlanacaktır. Ayrıca, II. tip Chebyshev matris polinomlarının sağladığı bir matris diferansiyel denklem elde edilecektir.

Genelleştirilmiş Humbert matris polinomları için bazı rekürans bağıntıları, matris diferansiyel denklemi, integral gösterimi gibi özellikler araştırılacaktır. Ayrıca, Gegenbauer matris polinomları için bir seri dönüşüm formülü ispatlanarak birkaç uygulaması verilecektir.

Gamma matris fonksiyonunun bir fonksiyonel eşitliği ispatlanacaktır. Bununla birlikte, sinüs matris fonksiyonu için bir sonsuz çarpım formülü elde edilecektir.

Riemann zeta matris fonksiyonu tanımlanarak bazı matris integralleri hesaplanacaktır. Son olarak, Riemann zeta matris fonksiyonun bir fonksiyonel eşitliği ispatlanacaktır.

ANAHTAR KELİMELER : Hermite matris polinomları, Laguerre matris polinomları, II. tip Chebyshev matris polinomları, Humbert matris polinomları, Gegenbauer matris polinomları, Gamma matris fonksiyonu, Riemann zeta matris fonksiyonu.

JÜRİ: Prof. Dr. Veli KURT (Danışman)

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Prof. Dr. Rıza ERDEM

Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL

Doç. Dr. Mehmet CENKCİ

ABSTRACT

ON MATRIX EXPRESSIONS OF SOME FAMILIES OF APPELL POLYNOMIALS

Levent KARGIN

PhD Thesis, in Mathematics
Supervisor : Prof. Dr. Veli KURT
June 2014, 72 pages

In this thesis, we study on matrix extension of some classical special functions. We give addition and multiplication formulas for Hermite matrix polynomials. We obtain other generating functions for Hermite matrix polynomials and write Hermite matrix polynomials as a hypergeometric matrix functions.

We introduce generalized Hermite matrix polynomials. We obtain Burchnall operational formula and Nielsen identity for Hermite matrix polynomials by choosing appropriate parameters from the properties of generalized Hermite matrix polynomials.

We define modified Laguerre matrix polynomials by modifiying the generating function of Laguerre matrix polynomials. We obtain three term matrix recurrence relation, Rodrigues formula, second-order matrix differential equation and several families of bilinear and bilateral generating matrix functions for modified Laguerre matrix polynomials. Moreover a new generalization of the Laguerre-type matrix polynomials is introduced.

We generalize the second kind Chebyshev matrix polynomials and focus on their properties. Using their integral representation we investigate operational rules associated with operators corresponding to these matrix polynomials. Furthermore we obtain a matrix differential equation of second kind Chebyshev matrix polynomials.

We obtain some properties of generalized Humbert matrix polynomials such as matrix recurrence relations, matrix differential equation and an integral representation. Moreover, we obtain a series transformation formula involving Gegenbauer matrix polynomials. Then we provide a number of applications.

We get a functional equation of the gamma matrix function. Moreover we give the infinite product expansion of sin matrix function.

We define Riemann zeta matrix function and evaluate some matrix integrals. Finally we prove a functional equation of Riemann zeta matrix function.

KEYWORDS : Hermite matrix polynomials, Laguerre matrix polynomials, Second kind Chebyshev matrix polynomials, Humbert matrix polynomials, Gegenbauer matrix polynomials, Gamma matrix function, Riemann zeta matrix function.

COMMITTEE: Prof. Dr. Veli KURT (Supervisor)

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Prof. Dr. Rıza ERDEM

Assoc. Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

Assoc. Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları ile Bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın temel kavramları olan bazı özel matris fonksiyonları Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları bölümünde tanıtılmış ve bunların genel özellikleri verilmiştir.

Bulgular bölümü yedi ana başlık altında toplanmıştır. İlk olarak Hermite matris polinomlarının sağladığı bağıntılar verilmiştir. İkinci olarak genelleştirilmiş Hermite matris polinomları tanımlanarak özellikleri incelenmiş, özel halde Hermite matris polinomları için Burchnall operatör formülü ve Nielsen bağıntısı elde edilmiştir. Üçüncü kesimde Laguerre matris polinomlarının bir genelleştirilmesi verilerek sağladığı matris diferansiyel denklemi, Rodrigues formülü ve bazı üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. Dördüncü kesimde genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları tanımlanarak Hermite matris polinomlarını içeren bir integral gösterimi elde edilmiştir. Beşinci kesimde genelleştirilmiş Humbert matris polinomlarının sağladığı rekürans bağıntıları ve bir matris diferansiyel denklemi araştırılmıştır. Gegenbauer matris polinomlarını içeren seri dönüşüm formülü ispatlanarak bazı uygulaması verilmiştir. Altıncı kesimde gamma matris fonksiyonun fonksiyonel eşitliği elde edilmiş, bu eşitlik ile gamma matris fonksiyonun tanım kümesi genişletilmiştir. Yedinci ve son kesimde ise Riemann zeta matris fonksiyonu tanımlanarak bazı matris integralleri hesaplanmış ve sağladığı bir fonksiyonel eşitlik verilmiştir.

Bu tez çalışmasının, bu alandaki çalışmalara önemli katkılar sağlayacağı kanısındayım.

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen danışmanım Sayın Prof.Dr. Veli KURT' a, yardımlarını gördüğüm Doç. Dr. Mehmet CENKCİ, Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN, Yrd. Doç. Dr. Gültekin SOYLU ve Yrd. Doç. Dr. Ayhan DİL' e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, doktora yaptığım süre boyunca maddi manevi anlamda her zaman yanımda olan aileme ve eşime de saygı ve sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

$\{A_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ Appell polinomlar ailesi

$$\frac{d}{dx}A_n(x)=A_{n-1}(x)\,,\quad n=0,1,2,\ldots$$

özelliğini ya da

$$A(t)=\sum_{k\geq 0}a_k t^k,\quad a_0\neq 0$$

formal serisi için

$$A(t)\exp(xt)=\sum_{n\geq 0}A_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

formal seri eşitliğini sağlayan polinomlara denir. $A(t)$ fonksiyonuna, $\{A_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ailesinin belirleyici fonksiyonu da denir. Appell polinomları teorik ve uygulamalı matematik alanlarının farklı uygulamalarında sık olarak kullanılmaktadır ve en bilinen üyeleri

$$\frac{t}{e^t-1}e^{xt}=\sum_{n\geq 0}B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanan Bernoulli polinomları,

$$e^{2xt-t^2}=\sum_{n\geq 0}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanan Hermite polinomları ve

$$(1-t)^{\alpha}e^{xt}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n L_n^{(\alpha-n)}(x)\,t^n$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanan Laguerre polinomlarıdır.

Karmaşık sayı girdili $r\times r$ tipinde olan matrislerin kümesi $\mathbb{C}^{r\times r}$ olsun. t bir karmaşık değişken ve n negatif olmayan tam sayı olmak üzere n. dereceden matris polinomu $A_j\in\mathbb{C}^{r\times r}$, $0\leq j\leq n$ ve $A_n\neq\mathbf{0}$ için

$$P_n(t)=A_0+A_1t+\ldots+A_nt^n$$

ifadesi ile verilir.

Matris polinomlarının uygulama alanlarından birisi diferansiyel denklemler teorisidir. Denklem sistemlerinin matris gösterimi kullanılarak

$$A(t)\,X''(t)+B(t)\,X'(t)+C(t)\,X(t)=\mathbf{0}$$

tipindeki ikinci dereceden matris diferansiyel denklemleri fizik, kimya ve mekanik problemlerinin çözümlerinde karşımıza çıkmaktadır. Burada $A(t)\,,B(t)$ ve $C(t)$ matris değerli fonksiyonlardır.

Her t değişkeni ve $\mathbb{C}^{r\times r}$'deki herhangi bir A matrisi için

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

olarak tanımlanan ve $\mathbb{C}^{r\times r}$'deki herhangi iki A ve B matrisleri için

i. $e^{\mathbf{0}} = I$,

ii. e^A üstel matrisi her zaman tersinir ve $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$,

iii. $AB = BA$ ise $e^{(A+B)} = e^A e^B$,

iv. B tersinir bir matris olmak üzere $e^{B^{-1}AB} = B^{-1}e^A B$,

v. $t \in \mathbb{R}$ için $e^{It} = Ie^t$,

vi. $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$

özelliklerini sağlayan üstel matris fonksiyonunun Lie grubu, Lie cebiri ve grup teorisinde önemli uygulamaları vardır. Bu bakımdan, üstel matris hesaplaması oldukça önemlidir ve matematikçiler ve sayısal analizciler tarafından yoğun olarak çalışılmaktadır. Üstel matris hesaplamasında birkaç yöntem verelim.

D bir köşegen matris olsun. Bu durumda

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

için

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n} \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. A köşegenlenebilir bir matris ise $A = CDC^{-1}$ ve (iv) özelliğinden

$$e^A = C \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n} \end{bmatrix} C^{-1}$$

dir.

N nilpotent bir matris ise $N^q = \mathbf{0}$ olacak şekilde q doğal sayısı vardır. Bu durumda üstel matris fonksiyonu

$$e^N = \sum_{k=0}^{q} \frac{N^k}{k!} = I + \frac{N}{1!} + \ldots \frac{N^{q-1}}{(q-1)!}$$

şeklinde hesaplanır.

Herhangi bir X matrisi, $X = A + N$ olacak şekilde köşegenlenebilir A ve nilpotent N matrisi cinsinden yazılabilir ve $AN = NA$'dır. Dolayısıyla

$$e^X = e^{A+N} = e^A e^N$$

olarak hesaplanır.

Krein 1949'da matris polinomlarının

$$\langle P, Q \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(x)\, Q(x)\, W(x)\, dx$$

olarak tanımlanan iç çarpım ile ortogonallik özelliğini inceleyerek matris değerli ortogonal matris polinomları kavramını tanımlamıştır. Burada $P, Q \in \mathbb{C}^{r\times r}[x]$ ve $W(x) \in \mathbb{C}^{r\times r}$ ağırlık fonksiyonudur. Duran, $\{P_n\}_{n\geq 0}$ başkatsayısı birim matris olan matris polinomları (monik matris polinomları) olmak üzere

$$\langle P_n, P_m \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P_n(x)\, P_m(x)\, W(x)\, dx = \delta_{n,m} S_n, \quad n, m \geq 0$$

matris integralinin

$$x P_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x)\, A_n + P_{n-1}(x)\, B_n, \quad n \geq 0$$

üç terimli rekürans bağıntısına denk olduğunu ispatlamıştır (Duran 1997).

Hermite, Laguerre, Jacobi polinomları gibi klasik ortogonal polinomlar 1900'lü yıllardan itibaren matematikçiler için önemli bir çalışma alanı olmuştur. Bu polinomlar, Fizik, Astronomi ve İstatistik gibi bilim dallarında da önemli kullanım alanlarına sahiptir. Bu tip polinomların matris genişlemelerini incelemek için, 1994'de Jódar ve Company ilk olarak Hermite matris polinomlarını tanımlayarak $(-\infty, \infty)$ aralığında $w(x, A) = \exp\left(-\frac{Ax^2}{2}\right)$ ağırlık fonksiyonuna göre

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x, A)\, H_m(x, A)\, W(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ 2^n n! \left(2\pi A^{-1}\right)^{1/2} & , n = m \end{cases}$$

integrali ile ortogonal olduğunu göstermişlerdir (Jódar ve Company 1994). Böylece klasik ortogonal polinomların matris genişlemeleri çalışılmaya başlanmış ve şu ana kadar Laguerre matris polinomları (Jódar vd 1994), özdeğerlerinin reel kısmı -1'den büyük olan $\mathbb{C}^{r\times r}$'deki A ve B matrisleri için

$$\begin{aligned} P_n^{(A,B)}(x) &= \frac{(-1)^n}{n!}\,{}_2F_1\left(A+B+(n+1)I,-nI;B+I;\frac{1+x}{2}\right) \\ &\quad \times\Gamma^{-1}(B+I)\,\Gamma(B+(n+1)I) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan Jacobi matris polinomları (Defez ve Jódar 2004), I. tip Chebyshev matris polinomları (Defez ve Jódar 2002), II. tip Chebyshev matris polinomları (Batahan 2006), Gegenbauer matris polinomları (Sayyed vd 2004), çok değişkenli Humbert matris polinomları (Aktaş vd 2011), $\mathbb{C}^{r\times r}$'deki herhangi A ve tersinir B matrisleri için

$$Y_n(x,A,B)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(A+(n+1)I)_k\left(zB^{-1}\right)^k$$

olarak tanımlanan Bessel matris polinomları (Kishka vd 2012), Legendre matris polinomları (Upadhyaya 2011), Pincherle matris polinomları (Khammash 2012a) tanımlanarak temel özellikleri verilmiştir. Bunlarla birlikte klasik özel fonksiyonlar ailesinin önemli üyeleri olan gamma, beta ve hipergeometrik fonksiyonların matris genişlemeleri incelenmiştir (Jódar ve Cortes 1998a, Jódar ve Cortes 1998b). Ayrıca, bu tip matris polinomlarının genelleştirmeleri üzerine birçok çalışma yapılarak özel matris fonksiyonları ailesi hakkında bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir (Metwally vd 2008, Metwally vd 2010, Shehata 2011).

Bu tezde, bazı klasik özel fonksiyonlar ailesinin sağladığı hangi özelliklerin hangi koşullar altında özel matris fonksiyonları ailesine aktarılabileceği düşüncesiyle, Hermite matris polinomlarının özellikleri incelenmiş ve klasik gamma fonksiyonun

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\ \text{ve}\ \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

özellikleri gamma matris fonksiyonuna genişletilmeye çalışılmıştır. Böylece, gamma matris fonksiyonun tanım kümesi genişletilmiştir. II. tip Chebyshev matris polinomları ve Hermite matris polinomları genelleştirilerek sağladığı özelliklerde uygun parametre seçimleriyle II. tip Chebyshev matris polinomları ve Hermite matris polinomları için bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bununla birlikte, modifiye Laguerre matris polinomları tanımlanarak sağladığı üç terimli rekürans bağıntısı, bir matris diferansiyel denklemi, Rodrigues formülü bulunmuş ve sahip olduğu bazı üreteç fonksiyonları gösterilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş Humbert matris polinomları ele alınarak sağladığı üç terimli rekürans bağıntısı, bir matris diferansiyel denklemi, ve klasik Hermite polinomlarını içeren bir integral gösterimi ispatlanmıştır. Özel hali olan Gegenbauer matris polinomları için orijinal sonuçlara ulaşılmıştır. Son olarak sayılar teorisinde önemli bir çalışma alanı olan ve klasik gamma fonksiyonu ile yakın ilişkisi olduğu bilinen klasik Riemann zeta fonksiyonun matris genişlemesi ele alınarak bazı özellikleri ispatlanmıştır.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Matris polinomlarına giriş yapmadan önce ilk olarak tez boyunca kullanılacak olan temel kavram ve özellikleri verelim. Matris teorisinin temeli olan herhangi bir A matrisinin özdeğer kavramı, x sıfırdan farklı $(r \times 1)$ boyutlu bir vektör ve $\mathbf{0}$ sıfır matris olmak üzere

$$Ax = \lambda x \text{ ya da } (A - \lambda I)\, x = \mathbf{0}$$

eşitliğini sağlayan λ değerleri, ya da diğer bir ifadeyle, λ'ya göre r. dereceden bir denklem olan

$$\det (A - \lambda I) = 0$$

şeklindeki A matrisinin karakteristik denkleminin kökleri olarak tanımlanır. A matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir ve $\sigma(A)$'ya A'nın spektrumu denir. Eğer, $\forall z \in \sigma(A)$ için $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ ise $A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisine pozitif kararlı matris denir ve pozitif kararlı her matris tersinirdir (Jódar ve Cortes 1998a). Başka bir önemli kavram da matris fonksiyonlarının tanımlı oldukları bölgeleri incelemek için kullanılacak olan 2-norm kavramıdır. Sıfırdan farklı $x = (x_{1,} \ldots x_r)$ vektörünün 2-normu (Euclid normu);

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{r} |x_k|^2 \right]^{1/2}$$

olmak üzere A matrisinin 2-normu (spektral norm);

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

veya

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

olarak tanımlanır (Golub ve Van Loan 1983). Bu norm tez boyunca $\|A\|$ ile gösterilecektir. Dolayısıyla, $\mathbb{C}^{r \times r}$'deki herhangi bir A matrisi için

$$\alpha(A) = \max\{Re(z) : z \in \sigma(A)\} \text{ ve } \beta(A) = \min\{Re(z) : z \in \sigma(A)\}$$

olmak üzere $t \geq 0$ için

$$\left\| e^{At} \right\| \leq e^{\alpha(A)t} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\|A\| \sqrt{r} t)^j}{j!} \tag{2.0.1}$$

dir (Golub ve Van Loan 1983).

$f(z)$ ve $g(z)$ karmaşık düzlemin Ω açık alt bölgesinde analitik iki fonksiyon olmak üzere $\sigma(A) \subset \Omega$ olan herhangi bir A matrisinin, $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarında $f(A)$ ve $g(A)$ matris değerleri için

$$f(A)g(A) = g(A)f(A) \tag{2.0.2}$$

dır. Ayrıca, B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de $\sigma(B)\subset\Omega$ koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere $AB = BA$ ise

$$f(A)g(B) = g(B)f(A) \tag{2.0.3}$$

olacak şekilde matris fonksiyonları için değişme özelliği vardır (Dunford ve Schwartz 1963). Bu özellikler yardımıyla $\sqrt{A} = A^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\log A\right)$ matris fonksiyonu pozitif kararlı matrisler için (Jódar ve Company 1994),

$$(1-y)^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A)_n}{n!}y^n, \quad |y|<1 \tag{2.0.4}$$

geometrik matris fonksiyonu herhangi bir A matrisi için (Jódar ve Cortes 1998a) ve

$$(I-A)^{-c} = \sum_{n\geq 0}\frac{(c)_n}{n!}A^n \tag{2.0.5}$$

matris fonksiyonu da $\|I\| = 1$ iken $\|A\| < 1$ ve herhangi bir c tamsayısı için iyi tanımlıdır (Lancaster 1969). Ayrıca, $f(P)$ iyi tanımlı ve S, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de tersinir bir matris ise

$$f\left(SPS^{-1}\right) = Sf(P)\,S^{-1} \tag{2.0.6}$$

özelliği sağlanır (Golub ve Van Loan 1983).

Son olarak, $n\geq 0$ ve $k\geq 0$ için $A(k,n)$, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi bir matris olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}A(k,n-2k), \tag{2.0.7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A(k,n-k) \tag{2.0.8}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]}A(k,n-mk) \tag{2.0.9}$$

dır (Defez ve Jódar 1998, Metwally vd 2009).

2.1. Hermite Matris Polinomları

A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere $H_n(x,A)$ Hermite matris polinomları

$$Y''(x) - xAY'(x) + nAY(x) = \mathbf{0}$$

ikinci dereceden matris diferansiyel denkleminin bir çözümü olarak tanımlanır ve

$$H_n(x,A) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\, n!\left(x\sqrt{2A}\right)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!} \tag{2.1.1}$$

ifadesi ile verilir (Jódar vd 1996a).

Bu tip matris polinomlarının Hermite matris polinomları olarak adlandırılmasının nedeni $A = [2]_{1\times 1}$ özel durumunda klasik Hermite polinomlarına indirgenmesidir. Hermite matris polinomları, $(-\infty, \infty)$ aralığında $w(x, A) = \exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) H_n(x, A)\, H_s(x, A) = \begin{cases} 0 & , n \neq s \\ 2^n n!\left(2\pi A^{-1}\right)^{1/2} & , n = s \end{cases}$$

ortogonallik özelliğini gerçekler. Ayrıca, Hermite matris polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, A) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(xt\sqrt{2A} - t^2 I\right) \quad x, t \in \mathbb{C} \tag{2.1.2}$$

fonksiyonu tarafından üretilip,

$$H_{n+1}(x, A) - x\sqrt{2A} H_n(x, A) - 2n H_{n-1}(x, A) = \mathbf{0} \tag{2.1.3}$$

üç terimli rekürans bağıntısı ve

$$H_n(x, A) = (-1)^n e^{\frac{Ax^2}{2}} \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{-n}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{Ax^2}{2}}\right]$$

Rodrigues formülünü gerçekler (Jódar vd 1996a). Bu matris polinomlarının, Jódar vd tarafından 1996b yılında verilen

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, A)\, H_n(y, A) \frac{t^n}{n!} = \left(1 - 4t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2A\left(xyt - \left(x^2 + y^2\right)t^2\right)}{1 - 4t^2}\right), \quad |t| < \frac{1}{2}$$

üreteç fonksiyonu bu çalışmada farklı bir yoldan elde edilecektir.

Batahan, Hermite matris polinomlarını, üreteç fonksiyonu yardımıyla iki değişkenlilere genişletmiştir. İki değişkenli Hermite matris polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, y, A) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(xt\sqrt{2A} - yt^2 I\right), \quad x, y, t \in \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanır (Batahan 2006). Bununla birlikte, iki değişkenli Hermite matris polinomları

$$H_n(x, y, A) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n! \left(x\sqrt{2A}\right)^{n-2k} y^k}{k!\,(n-2k)!} \tag{2.1.4}$$

eşitliğini,

$$H_{n+1}(x, y, A) - x\sqrt{2A} H_n(x, y, A) - 2ny H_{n-1}(x, y, A) = \mathbf{0}$$

üç terimli reküransı bağıntısını,

$$H_n(x,y,A) = (-1)^n e^{Ax^2/2} y^{n/2} \left(\frac{A}{2}\right)^{-n/2} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{Ax^2}{2}}\right]$$

Rodrigues formülünü ve

$$H_n(x,y,A) = \exp\left(-y(2A)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(x\sqrt{2A}\right)^n$$

operatör formülünü sağlar. Bu polinomlar ayrıca

$$\left[y\frac{\partial^2}{\partial x^2} - xA\frac{\partial}{\partial x} + nA\right] H_n(x,y,A) = \mathbf{0} \tag{2.1.5}$$

ikinci dereceden matris diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

İki değişkenli Hermite matris polinomları $\exp(Ax), \cos(Ax)$ ve $\sin(Ax)$ matris fonksiyonlarının seri açılımlarında ortaya çıkar (Batahan 2006, Defez ve Jodar 1998).. Gerçekten, A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de $\forall z \in \sigma(A)$ için $|\mathrm{Re}(z)| > |\mathrm{Im}(z)|$ spektral koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere

$$\exp(Ax) = \exp(y)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}H_n\left(x,y,\frac{A^2}{2}\right),$$

$$\cos(Ax) = \exp(-y)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n)!}H_{2n}\left(x,y,\frac{A^2}{2}\right)$$

ve

$$\sin(Ax) = \exp(-y)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)!}H_{2n+1}\left(x,y,\frac{A^2}{2}\right)$$

dir.

Hermite matris polinomları için bazı genelleştirmeler yapılarak bazı problemler için çözümler elde edilmeye çalışılmıştır (Metwally vd 2008, Metwally vd 2010, Shehata 2011, Shehata 2012). Bu genelleştirmelerin en önemlilerinden biri Bölüm 3.4.1'de II. tip Chebyshev matris polinomlarının bir genelleştirmesinde kullanılacak olan iki indisli iki değişkenli Hermite matris polinomlarıdır. İki indisli iki değişkenli Hermite matris polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n,m}(x,y,A)\frac{t^n}{n!} = \exp\left(xt\sqrt{mA} - yt^m I\right), \quad x,y,t\in\mathbb{C}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. Bununla birlikte,

$$H_{n,m}(x,y,A) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\frac{(-1)^k\, n!\left(x\sqrt{mA}\right)^{n-mk} y^k}{k!\,(n-mk)!} \tag{2.1.6}$$

eşitliğini,

$$H_{n+1,m}(x,y,A) - x\sqrt{mA}H_{n,m}(x,y,A) + my\frac{n!}{(n+1-m)!}H_{n-m,m}(x,y,A) = \mathbf{0}$$

reküransbağıntısını sağlar ve

$$\left[y\frac{\partial^m}{\partial x^m} - \frac{x}{m}\left(\sqrt{mA}\right)^m\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n}{m}\left(\sqrt{mA}\right)^m\right]H_{n,m}(x,y,A) = \mathbf{0}$$

m. dereceden matris diferansiyel denkleminin bir çözümüdür (Metwally vd 2009). Ayrıca,

$$H_{n,m}(x,y,A) = \exp\left(-y\left(\sqrt{mA}\right)^{-m}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\right)\left(x\sqrt{mA}\right)^n$$

ve

$$H_{n,m}(x,y,A) = \left[x\sqrt{mA} - my\left(\sqrt{mA}\right)^{-m-1}\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}\right]^n (I) \tag{2.1.7}$$

operatör formüllerini gerçekler (Metwally 2011). (2.1.7) bağıntısında özel olarak $m = 2$ ve $y = 1$ alınırsa $H_{n,2}(x,1,A) = H_n(x,A)$ olduğundan Hermite matris polinomlarının

$$H_n(x,A) = \left[x\sqrt{2A} - \left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\right]^n (I)$$

gösterimi elde edilir. Bu eşitliğin Bölüm 3.2'de farklı bir ispatı verilecektir.

2.2. Gamma ve Beta Matris Fonksiyonları

Pochhammer sembolü ya da artan faktoriyel olarak bilinen

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1), \qquad n \geq 1, \quad (z)_0 = 1$$

fonksiyonuna P matrisini uygulayarak elde edilen

$$(P)_n = P(P+I)\dots(P+(n-1)I), \quad n \geq 1$$

bağıntısı iyi tanımlıdır. Burada $(P)_0 = I$'dır. Dolayısıyla,

$$(P)_{2n} = 2^{2n}\left(\frac{P}{2}\right)_n\left(\frac{P+I}{2}\right)_n \tag{2.2.1}$$

dır. Ayrıca, $\Gamma^{-1}(z) = 1/\Gamma(z)$ ile gösterilen gamma fonksiyonunun çarpmaya göre tersi olan fonksiyon tüm kompleks düzlemde analitik bir fonksiyondur. Böylece, $\mathbb{C}^{r\times r}$'deki herhangi bir P matrisinin ters gamma fonksiyonu altındaki görüntüsüne karşılık gelen $\Gamma^{-1}(P)$ matrisi iyi tanımlıdır. Bu durumda

$$\forall n \geq 0 \text{ tam sayısı için } C + nI \text{ matrisleri tersinir} \tag{2.2.2}$$

ise $\Gamma(P)$ matrisinin $\Gamma^{-1}(P)$ ile gösterilen tersi vardır ve

$$P(P+I)\ldots(P+(n-1)I)\Gamma^{-1}(P+nI)=\Gamma^{-1}(P)$$

dir (Hille 1969). Gamma ve ters gamma fonksiyonları analitik olduğundan (2.0.2) özelliği kullanılarak

$$P(P+I)\ldots(P+(n-1)I)=\Gamma(P+nI)\Gamma^{-1}(P)$$

elde edilir ve

$$(P)_n=\Gamma(P+nI)\Gamma^{-1}(P) \tag{2.2.3}$$

şeklinde de yazılabilir.

Beta matris fonksiyonu, klasik gamma ve beta fonksiyonları arasındaki

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \operatorname{Re}(x)>0, \operatorname{Re}(y)>0$$

bağıntısından, pozitif kararlı P matris için

$$B(A,yI)=\Gamma(A)\Gamma(yI)\Gamma^{-1}(A+yI) \tag{2.2.4}$$

ifadesi ile tanımlanabilir. Burada $y\in\mathbb{C}$ için $\operatorname{Re}(y)>0$'dır. Bu koşullar altında Beta matris fonksiyonu

$$B(A,yI)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2A-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta, \quad \operatorname{Re}(y)>0$$

integral gösterimini sağlar (Jódar vd 1995). P, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere gamma matris fonksiyonu

$$\Gamma(P)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{P-I}dt, \quad t^{P-I}=\exp((P-I)\ln t) \tag{2.2.5}$$

şeklinde tanımlanarak,

$$\Gamma(P)=\lim_{n\to\infty}(n-1)!(P)_n^{-1}n^P \tag{2.2.6}$$

limit gösterimi ispatlanmıştır (Jódar ve Cortes 1998b). Bununla birlikte, gamma matris fonksiyonun (2.2.5)' deki integral gösterimi motivasyonu ile Beta matris fonksiyonu, $\mathbb{C}^{r\times r}$'deki pozitif kararlı P ve Q matrisleri için

$$B(P,Q)=\int_0^1 t^{P-I}(1-t)^{Q-I}dt$$

ifadesi ile de tanımlanabilir (Jódar ve Cortes 1998b).

P ve Q, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de değişmeli matrisler ise $B(P,Q) = B(Q,P)$'dir. P ve Q matrisleri değişmeli değil ise bu özellik sağlanmaz. Örneğin, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. $PQ \neq QP$ ve $\sigma(P) = \sigma(Q) = \{1,2\}$'dir. Buradan

$$t^{P-I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t-1 & t \end{bmatrix}, \quad (1-t)^{P-I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1-t \end{bmatrix}$$

ve

$$t^{Q-I} = \begin{bmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & t \end{bmatrix}, \quad (1-t)^{Q-I} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1-t \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} B(P,Q) &= \int_0^1 t^{P-I}(1-t)^{Q-I}\,dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t-1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1-t \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} B(Q,P) &= \int_0^1 t^{Q-I}(1-t)^{P-I}\,dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1-t \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. O halde, $PQ \neq QP$ ise $B(P,Q) \neq B(Q,P)$'dir. Ayrıca, (2.2.4) bağıntısının, P ve Q, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı, köşegenlenebilir ve değişmeli matrisler olmak üzere

$$B(P,Q) = \Gamma(P)\Gamma(Q)\Gamma^{-1}(P+Q) \tag{2.2.7}$$

olacak şekilde genelleştirilmesi verilmiştir (Jódar ve Cortes 1998b). Jódar ve Cortes P ve Q matrisleri için köşegenlenebilirlik koşulunu kaldırıp $\mathbb{C}^{r\times r}$'deki değişmeli P ve Q matrisleri için

$\forall n \geq 0$ tam sayısı için $P+nI, Q+nI, P+Q+nI$ matrisleri tersinir

ise (2.2.7) eşitliğinin sağlandığını ispatlamışlardır (Jódar ve Cortes 1998a).

Ayrıca, P, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de (2.2.2) koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere

$$P\Gamma(P) = e^{-\gamma P}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(I + \frac{P}{n}\right)e^{-\frac{P}{n}}\right]^{-1} \tag{2.2.8}$$

bağıntısı kullanılarak Laguerre matris polinomlarının asimptotik ifadeleri incelenmiştir (Jodar ve Sastre 2000).

Bu motivasyonla, klasik gamma fonksiyonunun sağladığı

$$\sqrt{\pi}\Gamma\left(2z\right)=2^{2z-1}\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\text{ ve }\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(1-z\right)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

Legendre çift kat formülü ve Euler yansıma formülü gamma matris fonksiyonuna genişletilecektir. Ayrıca, sinüs matris fonksiyonu için sonsuz çarpım formülü verilecektir.

2.3. Hipergeometrik Matris Fonksiyonları

A ve B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi iki matris ve C, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de (2.2.2) koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere hipergeometrik matris fonksiyonları

$$_2F_1(A,B;C;z)=\sum_{k\geq 0}\frac{(A)_k\,(B)_k\,[(C)_k]^{-1}}{k!}z^k,\quad |z|<1 \tag{2.3.1}$$

ifadesi ile tanımlanır (Jódar ve Cortes 1998a).

Bu tip matris fonksiyonlarının hipergeometrik matris fonksiyonları olarak adlandırılmasının nedeni $A=[a]_{1\times 1}$, $B=[b]_{1\times 1}$ ve $C=[c]_{1\times 1}$ özel durumunda klasik hipergeometrik fonksiyonlarına indirgenmesidir. Hipergeometrik matris fonksiyonları A,B ve C $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı matrisler olmak üzere

$$\beta(C)>\alpha(A)+\alpha(B)$$

koşulunu sağlıyor ise $|z|=1$ için mutlak yakınsaktır. Bununla birlikte, C, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de (2.2.2) koşulunu sağlayan bir matris ve $CB=BC$ ise $_2F_1(A,B;C;z)$

$$z\left(1-z\right)Y''-zAY'+Y'\left(C-z\left(B+I\right)\right)+AYB=\mathbf{0},\quad 0\leq|z|<1$$

ikinci dereceden matris diferansiyel denkleminin bir çözümüdür (Jódar ve Cortes 1998a).

$n,j\in\mathbb{N}$ olmak üzere özel olarak $A=-nI$ matrisi için $(A)_{n+j}=\mathbf{0}$ olduğundan (2.3.1) eşitliği

$$_2F_1(-nI,B;C;z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-nI)_k\,(B)_k\,[(C)_k]^{-1}}{k!}z^k \tag{2.3.2}$$

şeklinde olan n. dereceden bir matris polinomudur. $\mathbb{C}^{r\times r}$'deki B ve C matrisleri için

(i) $CB=BC$,

(ii) B ve $C-B$ pozitif kararlı,

(iii) $\forall n\geq 0$ doğalsayısı için $C+nI$ tersinir koşullarını sağlıyor ise her n için

$$ {}_2F_1(-nI,B;C;z)=\Gamma\left(C-B+nI\right)\Gamma^{-1}\left(C+nI\right)\Gamma^{-1}\left(C-B\right)\Gamma\left(C\right) $$

bağıntısını gerçekler. Ayrıca, $B,C\in\mathbb{C}^{r\times r}$ matrisleri için B pozitif kararlı, $CB=BC$ ve

$$ \forall k\geq 0 \text{ tam sayısı için } C+kI \text{ ve } C-B+kI \text{ matrisleri tersinir} $$

ise $|z|<1$ ve $n=0,1,\ldots$ için

$$ {}_2F_1(-nI,B;C;z)=(1-z)^n\ {}_2F_1(-nI,C-B;C;\frac{-z}{1-z}) $$

dir (Defez ve Jódar 2002).

2.4. Laguerre Matris Polinomları

A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de her $k>0$ tamsayısı için $-k\notin\sigma(A)$ spektral koşulunu sağlayan bir matris ve $\lambda\in\mathbb{C}$ için $\mathrm{Re}\left(\lambda\right)>0$ olmak üzere

$$ xY^{''}+\left(\left(A+I\right)-\lambda xI\right)Y^{'}+\lambda nY=\mathbf{0} \tag{2.4.1} $$

ikinci dereceden matris diferansiyel denkleminin bir çözümü olarak

$$ L_n^{(A,\lambda)}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^k\left(A+I\right)_n\left[\left(A+I\right)_k\right]^{-1}\lambda^k x^k}{k!\left(n-k\right)!} $$

ifadesiyle tanımlanır (Jódar vd 1994).

Bu tip matris polinomlarının Laguerre matris polinomları olarak adlandırılmasının nedeni $A=\left[\alpha\right]_{1\times 1}$ özel durumunda klasik Laguerre polinomalarına indirgenmesidir. Laguerre matris polinomları, $(0,\infty)$ aralığında $w\left(x,\lambda\right)=\exp\left(-x\lambda\right)$ ağırlık fonksiyonuna göre

$$ \int_0^{\infty}\exp\left(-x\lambda\right)L_n^{(A,\lambda)}\left(x\right)L_s^{(A,\lambda)}\left(x\right)=\begin{cases} 0 & ,n\neq s \\ \frac{\lambda^{-A-I}}{n!}\Gamma\left(A+\left(n+1\right)I\right) & ,n=s \end{cases} $$

ortogonallik özelliğini gerçekler. Ayrıca, Laguerre matris polinomları

$$ \left(1-t\right)^{-(A+I)}\exp\left(\frac{-\lambda xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(A,\lambda)}\left(x\right)t^n,\quad t\in\mathbb{C},\quad |t|<1,\quad x\in\mathbb{C} $$

fonksiyonu tarafından üretilir,

$$ L_n^{(A,\lambda)}\left(x\right)=\frac{x^{-A}\exp\left(\lambda x\right)}{n!}D^n\left[x^{A+nI}\exp\left(-\lambda x\right)\right],\quad n\geq 0 \tag{2.4.2} $$

Rodrigues formülünü ve

$$(n+1)\, L_{n+1}^{(A,\lambda)}(x) + [xI - (A + (2n+1)\, I)]\, L_{n}^{(A,\lambda)}(x) + (A + nI)\, L_{n-1}^{(A,\lambda)}(x) = \mathbf{0} \tag{2.4.3}$$

üç terimli reküransı bağıntısını sağlar (Jódar vd 1994).

Ayrıca, Laguerre matris polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!n!} L_{n+k}^{(A,\lambda)}(x)\, t^n = (1-t)^{-(A+(k+1)I)} \exp\left(\frac{-\lambda x t}{1-t}\right) L_k^{(A,\lambda)}\left(\frac{x}{1-t}\right)$$

üreteç fonksiyonu sağlar ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(A+I)_n\right]^{-1} L_n^{(A,\lambda)}(x)\, t^n = \exp(t)\,{}_0F_1(-; A+I; -\lambda x t),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\Gamma^{-1}(A+(n+1)\, I)\, L_n^{(A,\lambda)}(x)\, L_n^{(A,\lambda)}(y)\, t^n$$

$$= (1-t)^{-(A+I)} \exp\left(\frac{-\lambda (x+y)\, t}{1-t}\right)\ {}_0F_1\left(-; A+I; \frac{\lambda^2 x y t}{(1-t)^2}\right)$$

hipergeometrik matris fonksiyonları cinsinden ifadeleri vardır (Jódar ve Sastre 1998).

Laguerre matris polinomları ile Hermite matris polinomları arasında A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de

$$\forall z \in \sigma(A) \ \text{için} \ \operatorname{Re}(z) > -\frac{1}{2}$$

spektral koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \left(\lambda I - \frac{1}{2}A\right)^k L_{n-k}^{(A+kI,\lambda)}(x)$$

$$= \frac{(-1)^n\, \Gamma(A+(n+1)\, I)\, \Gamma^{-1}\left(A + \frac{1}{2}I\right)}{\sqrt{\pi}\,(2n)!} \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{(A-(1/2)I)} H_{2n}\left(t\sqrt{x}, A\right) dt$$

bağıntısı vardır (Jódar ve Defez 1998). Bu bağıntı yardımıyla

$$\Pi_n^{(A,\lambda)}(x) = \lambda^{(A+I)/2}\Gamma(n+1)\, \Gamma^{-1}(A+(n+1)\, I)^{1/2} L_n^{(A,\lambda)}(x)$$

olarak tanımlanan normalleştirilmiş Laguerre matris polinomlarının asimptotik ifadesi incelenmiştir (Jódar ve Sastre 2000). Laguerre matris polinomlarının başka asimptotik ifadeleri de araştırılmaktadır (Sastre ve Jódar 2006, Sastre ve Defez 2006). Ayrıca, bu matris polinomları

$$\sum_{k=0}^{n} L_k^{(A,\lambda)}(x) = L_n^{(A+I,\lambda)}(x)$$

fonksiyonel eşitliğini sağlar (Sastre vd 2006).

Çekim ve Altın, Laguerre matris polinomlarının

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(A+(k+1)I)_{n-k}}{k!} L_k^{(A,\lambda)}(x) \frac{t^k}{(1-t)^k} = (1-t)^n L_n^{(A,\lambda)}(xt)$$

toplam formülünü, C, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi bir matris olmak üzere

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (C)_n \left[(A+I)\right]^{-1} L_n^{(A,\lambda)}(x)\, t^n &= (1-t)^{-C}\ {}_1F_1\left(C; A+I; \frac{-\lambda x t}{1-t}\right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(A+nI,\lambda)}(x)}{n!} t^n &= \exp(t)\, L_n^{(A,\lambda)}(\lambda x - t)\end{aligned}$$

üreteç fonksiyonlarını ve A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de $\forall z \in \sigma(A)$ için $\mathrm{Re}(z) > -1$ koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere

$$\lim_{s\to\infty} P_n^{(A,Is)}\left(1 - 2x\lambda s^{-1}\right) = L_n^{(A,\lambda)}(x)$$

limit gösterimini sağladığını göstermişlerdir (Çekim ve Altın 2013). Burada, $P_n^{(A,B)}(z)$ Jacobi matris polinomlarıdır (Defez ve Jódar 2004).

2.5. Chebyshev Matris Polinomları

A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de her $z \in \sigma(A)$ için $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ spektral koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere herhangi $n \geq 0$ tam sayısı için n. dereceden I. tip Chebyshev matris polinomları

$$T_n(x, A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n (n+k-1)!}{2^k k! (n-k)!} \Gamma(A) \Gamma^{-1}(A+kI) (1-x)^k$$

ya da hipergeometrik matrix fonksiyonları ile

$$T_n(x, A) = {}_2F_1\left(-nI, nI; A; \frac{1-x}{2}\right)$$

eşitliği ile tanımlanır (Defez ve Jódar 2002).

Özel olarak $r = 1$ için $A = \frac{1}{2}$ alınırsa $T_n\left(x, \frac{1}{2}\right)$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^k n (n+k-1)!}{(2k)! (n-k)!} (1-x)^k$$

olarak bilinen klasik I. tip Chebyshev polinomlarına indirgenir.

n. dereceden I. tip Chebyshev matris polinomları,

$$\left(1-x^2\right) T_n''(x, A) + (-2A + (1-x) I) T_n'(x, A) + n^2 T_n(x, A) = 0, \quad -1 < x < 1$$

ikinci dereceden matris diferensiyel denklemini,

$$T_n(x,A) = \frac{(-1)^n}{2^n}\left[(A)_n\right]^{-1}(1+x)^A(1-x)^{I-A}D^n\left[(1+x)^{-A}(1-x)^{A-I}\left(1-x^2\right)^n\right]$$

Rodrigues formülünü ve

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{A-I}(1+x)^{-A}T_n(x,A)\,T_m(x,A)\,dx$$
$$= \begin{cases} \mathbf{0} & ;n\neq m \\ \Gamma(I-A)\,\Gamma(A) & ;n=m=0 \\ \frac{1}{2}\Gamma(-A+(n+1)I)\,\Gamma^2(A)\,\Gamma^{-1}(A+nI) & ;n=m\neq 0 \end{cases}$$

ortogonallik özelliklerini sağlar (Defez ve Jódar 2002).

A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere herhangi $n\geq 0$ tam sayısı için n. dereceden II. tip Chebyshev matris polinomları

$$U_n(x,A) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(n-k)!\left(x\sqrt{2A}\right)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}$$

eşitliği ya da Hermite matris polinomları cinsinden

$$U_n(x,A) = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty}e^{-t}t^nH_n\left(x,\frac{1}{t},A\right)dt \tag{2.5.1}$$

integral gösterimi ile tanımlanır (Batahan 2006).

n. dereceden II. tip Chebyshev matris polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x,A)\,t^n = \left(I - xt\sqrt{2A}+t^2I\right)^{-1}, \qquad \left\|xt\sqrt{2A}-t^2I\right\|<1$$

fonksiyonu tarafından üretilir ve $n\geq 1$ için

$$U_{n+1}(x,A) - x\sqrt{2A}U_n(x,A) + U_{n-1}(x,A) = \mathbf{0}$$

üç terimli rekürans bağıntısını sağlar (Altın ve Çekim 2012a).

Bu tez çalışmasında II. tip Chebyshev matris polinomları ele alınacak ve sağladığı ikinci dereceden matris diferansiyel denklemi ile birlikte bazı operatör formülleri elde edilecektir.

2.6. Humbert Matris Polinomları

Humbert matris polinomları ile ilgili ilk çalışma Aktaş vd tarafından 2011 yılında çok değişkenli Humbert polinomlarının matris genişlemesi konusunda yapılmıştır. Çok değişkenli Humbert matris polinomları

$$\prod_{i=1}^{r}\left\{(c_i - m_i x_i t + y_i t^{m_i})^{-A_i}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(A_1,\ldots,A_r)}(m,x,y,c)\,t^n \tag{2.6.1}$$

ifadesiyle tanımlanır. Burada $i = 1, 2, \ldots r$ için $A_i \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $|m_i x_i t - y_i t^{m_i}| < |c_i|$, $x = (x_1, \ldots x_r)$, $y = (y_1, \ldots y_r)$, $c = (c_1, \ldots c_r)$, $m = (m_1, \ldots m_r)$ koşullarını sağlar. (2.6.1) bağıntısında verilen matris üreteç fonksiyonu kullanılarak çok değişkenli Humbert matris polinomlarının

$$P_n^{(A_1,\ldots A_r)}(m,x,y,c) = \sum_{m_1k_1+\ldots m_rk_r+n_1+\ldots n_r=n}\ \prod_{p=1}^{r}\left\{\frac{(A_p)_{n_p+k_p}\, c_p^{-A_p-(n_p+k_p)I}}{n_p!k_p!} m_p^{n_p}(-1)^{k_p} x_p^{n_p} y_p^{k_p}\right\}$$

açık gösterimini,

$$\Lambda_{\mu,\upsilon}(z;w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\upsilon k}(z)\, w^k$$

için

$$\Theta_{n,p,\mu,\upsilon}(x,y;z;\zeta) = \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(A_1,\ldots,A_r)}(m,x,y,c)\,\Omega_{\mu+\upsilon k}(z)\,\zeta^k$$

olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_{n,p,\mu,\upsilon}\left(x,y;z;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n = \prod_{i=1}^{r}\left\{(c_i - m_i x_i t + y_i t^{m_i})^{-A_i}\right\}\Lambda_{\mu,\upsilon}(z;\eta)$$

matris üreteç fonksiyonunu ve

$$\Xi_{\mu,\upsilon,c,m}^{n,p}(x,y;z;w) = \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k P_{n-pk}^{(A_1+B_1,\ldots,A_r+B_r)}(m,x,y,c)\,\Omega_{\mu+\upsilon k}(z)\,w^k$$

için

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{[k/p]} a_l P_{n-k}^{(A_1,\ldots,A_r)}(m,x,y,c)\,P_{k-pl}^{(B_1,\ldots,B_r)}(m,x,y,c)\,\Omega_{\mu+\upsilon l}(z)\,w^l = \Xi_{\mu,\upsilon,c,m}^{n,p}(x,y;z;w)$$

bağıntısını sağladığı ispatlanmıştır (Aktaş vd 2011).

Özel olarak $r = 1$ alınırsa (2.6.1) bağıntısından, genelleştirilmiş Humbert matris polinomlarının (G-HMP)

$$F(x,y,t,c,A) = (c - mxt + yt^m)^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^A(m,x,y,c)\,t^n \tag{2.6.2}$$

üreteç fonksiyonu elde edilir.

Bu tez çalışmasında (2.6.2)'deki üreteç fonksiyonu ile tanımlanan genelleştirilmiş Humbert matris polinomlarının sağladığı rekürans bağıntıları, bir matris diferansiyel denklemi ve bir integral gösterimi elde edilecektir.

2.7. Gegenbauer Matris Polinomları

A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere Gegenbauer matris polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x)\,t^n = \left(1-2xt+t^2\right)^{-A}, \qquad \left|2xt-t^2\right|<1$$

biçiminde tanımlanır (Sayyed vd 2004).

Bu tip matris polinomlarının Gegenbauer matris polinomları olarak adlandırılmasının nedeni $A = [\alpha]_{1\times 1}$ özel durumunda klasik Gegenbauer polinomlarına indirgenmesidir. Gegenbauer matris polinomları

$$\begin{aligned} C_n^A(x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (A)_{n-k} (2x)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}, \\ C_n^A(x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (2A)_n \frac{\left[\left(A+\frac{I}{2}\right)_k\right]^{-1}}{k!\,(n-2k)!2^{2k}} \left(x^2-1\right)^k x^{n-2k} \end{aligned}$$

eşitliklerini ve

$$\begin{aligned} C_n^A(x) &= \frac{(2A)_n}{n!}\ {}_2F_1\left(-nI, 2A+nI; A+\frac{I}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \\ C_n^A(x) &= \frac{(2x)^n (A)_n}{n!}\ {}_2F_1\left(\frac{-nI}{2}, \frac{(1-n)I}{2}; I-A-nI; \frac{1}{x^2}\right), \\ C_n^A(x) &= \frac{(2A)_n}{n!}(x-1)^n\ {}_2F_1\left(-nI, \frac{I}{2}-A-nI; -2A-(2n-1)I; \frac{2}{1-x}\right) \end{aligned}$$

hipergeometrik matris fonksiyonu gösterimlerini sağlarlar (Sayyed vd 2004, Altın ve Çekim 2013). Ayrıca, Gegenbauer matris polinomları

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} \left[(A)_n\right]^{-1} C_n^A(x)\,t^n &= \exp(xt)\ {}_0F_1\left(-; A+\frac{I}{2}; \frac{t^2\left(x^2-1\right)}{4}\right), \\ \sum_{n\geq 0} \frac{(n+k)!}{k!n!} C_{n+k}^A(x)\,t^n &= \rho^{-(2A+nI)} C_k^A\left(\frac{x-t}{\rho}\right) \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

ve

$$\sum_{n\geq 0} C_n^A(x)\ {}_2F_1(-nI, \gamma I; 2A; y)\,t^n \tag{2.7.2}$$

$$= \rho^{2\gamma I-2A}\left(\rho^2+xyt-yt^2\right)^{-\gamma}\ {}_2F_1\left(\frac{\gamma I}{2}, \frac{(\gamma+1)I}{2}; A+\frac{I}{2}; \frac{(yt)^2\left(x^2-1\right)}{\left(\rho^2+xyt-yt^2\right)^2}\right)$$

matris fonksiyonları tarafından da üretilir (Khammash 2009). Burada $\rho = (1-2xt+t^2)^{1/2}$'dir. Bununla birlikte, Gegenbauer matris polinomları için

$$C_n^A(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A)_{n-k}(A)_k}{k!\,(n-k)!}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-k}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$$

toplamsal gösterimi vardır (Altın ve Çekim 2013).

Shehata, iki değişkenli Gegenbauer matris polinomlarını A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x,y)\,t^n = \left(1-2xt+yt^2\right)^{-A}, \qquad \left|2xt-yt^2\right|<1$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlayarak,

$$(n+1)\,C_{n+1}^A(x,y) - 2x\,(A+nI)\,C_n^A(x,y) + y\,[2A+(n-1)\,I]\,C_{n-1}^A(x,y) = \mathbf{0}$$

üç terimli rekürans bağıntısı ve

$$\left[\left(y-x^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (2A+I)\,x\frac{\partial}{\partial x} + n\,(2A+nI)\right]C_n^A(x) = \mathbf{0}$$

matris diferansiyel denklemi gibi bazı temel özelliklerini incelemiştir (Shehata 2012b).

2.8. Pincherle Matris Polinomları

A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere Pincherle matris polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^A(x)\,t^n = \left(1-3xt+t^3\right)^{-A}, \qquad \left|3xt-t^3\right|<1$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Khammash ve Shehata 2012a). Bu tip matris polinomları

$$h_n^A(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \frac{(-1)^k\,(A)_{n-2k}\,(3x)^{n-3k}}{k!\,(n-3k)!}$$

eşitliğini ve

$$(n+1)\,h_{n+1}^A(x) - 3x\,(A+nI)\,h_n^A(x) + [3A+(n-2)\,I]\,h_{n-2}^A(x) = \mathbf{0}$$

üç terimli rekürans bağıntısını gerçekler. Ayrıca, Pincherle matris polinomları ile Hermite matris polinomları arasında

$$h_n^A(x) = \frac{\Gamma^{-1}(A)}{n!}\int_0^{\infty} \exp(-t)\,t^{A+(n-1)I}H_n\left(x\sqrt{3}\left(\sqrt{A}\right)^{-1}, \frac{1}{t^2}, A\right)dt$$

integral gösterimi vardır (Khammash ve Shehata 2012a).

3. BULGULAR

3.1. Hermite Matris Polinomlarının Sağladığı Özellikler

Bu bölümde, Hermite matris polinomları için çarpım ve toplam formülleri ispatlanacaktır. Ayrıca hipergeometrik matris fonksiyonları cinsinden ifadeleri ve sağladığı üreteç fonksiyonu elde edilecektir. Bu özelliklerin önemli bir kısmı Kargın ve Kurt tarafından bir makalede verilmiştir (Kargın ve Kurt 2013). Bölüm boyunca A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olarak alınacaktır.

Önerme 3.1.1 *Hermite matris polinomları aşağıdaki çarpım ve toplam formüllerini sağlar.*

$$H_n(\mu x, A) = \mu^n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{k!\,(n-2k)!} \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)^k H_{n-2k}(x, A), \tag{3.1.1}$$

$$(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\lambda z_1 + \mu z_2}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}}, A\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} H_k(z_1, A)\, H_{n-k}(z_2, A). \tag{3.1.2}$$

Burada $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$'dir.

İspat. (2.1.2)'de t yerine $\frac{t}{\mu}$, x yerine μx alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\mu x, A)}{\mu^n} \frac{t^n}{n!} &= \exp\left(xt\sqrt{2A} - \frac{t^2}{\mu^2} I\right) \\
&= \exp\left(xt\sqrt{2A} - t^2 I + t^2 I - \frac{t^2}{\mu^2} I\right) \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, A) \frac{t^n}{n!}\right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)^n \frac{t^n}{n!}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.0.7) bağıntısı kullanılıp $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında (3.1.1)'deki Hermite matris polinomları için çarpım formülü elde edilir. (3.1.2) bağıntısı da benzer şekilde ispatlanır. ■

Sonuç 3.1.2 *Hermite matris polinomları aşağıdaki eşitlikleri gerçekler.*

$$2^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{z_1 + z_2}{\sqrt{2}}, A\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(z_1, A)\, H_{n-k}(z_2, A), \tag{3.1.3}$$

$$2^{\frac{n}{2}} H_n\left(\sqrt{2}x, A\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(x, A)\, H_{n-k}(x, A), \tag{3.1.4}$$

$$2^{\frac{n}{2}} H_n(x + y, A) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k\left(\sqrt{2}x, A\right) H_{n-k}\left(\sqrt{2}y, A\right). \tag{3.1.5}$$

(3.1.5) eşitliği, klasik Hermite polinomlarının sağladığı Runge toplama formülünün (Runge 1914) matris genişlemesidir. Ayrıca (3.1.5) bağıntısı Altın ve Çekim tarafından farklı bir yolla ispatlanmıştır (Altın ve Çekim 2012b).

Önerme 3.1.3 *Hermite matris polinomları*

$$H_n(x,A)\,H_m(x,A) = m!n! \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{2^k H_{m+n-2k}(x,A)}{(m-k)!\,(n-k)!k!} \tag{3.1.6}$$

ve $x \neq y$ için

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{\sqrt{2A}H_m(x,A)\,H_m(y,A)}{2^{m+1}m!} = \frac{H_{n+1}(y,A)\,H_n(x,A) - H_{n+1}(x,A)\,H_n(y,A)}{2^{n+1}n!\,(y-x)} \tag{3.1.7}$$

bağıntılarını sağlar.

İspat. (2.1.2) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} H_n(x,A)\,H_m(x,A)\frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!} &= \exp\left(\sqrt{2A}x\,(u+v) - (u+v)^2 + 2uv\right) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\sum_{r+s=N} \frac{2^M H_{r+s}(x,A)}{r!s!M!} u^{M+r} v^{M+s+r}\end{aligned}$$

elde edilir. $N = 0,1,2,3,\ldots$ için $r = m - N$, $s = n - N$ alınırsa, $r,s \geq 0$'dır ve N değerleri $0,1,2,\ldots,\min(m,n)$ arasında değer alır. Buradan $\frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında istenen elde edilir. (3.1.7)'in ispatı için (2.1.3) bağıntısı

$$x\sqrt{2A}H_m(x,A) = H_{m+1}(x,A) + 2mH_{m-1}(x,A)$$

ve

$$y\sqrt{2A}H_m(y,A) = H_{m+1}(y,A) + 2mH_{m-1}(y,A)$$

olarak yazılır. Birinci denklem $H_m(y,A)$ ile, ikinci denklem $H_m(x,A)$ ile çarpılıp taraf tarafa farkları alınırsa

$$\begin{aligned}&\sqrt{2A}\,(y-x)\,H_m(x,A)\,H_m(y,A) \\ &\quad = H_{m+1}(y,A)\,H_m(x,A) + 2mH_{m-1}(y,A)\,H_m(x,A) \\ &\qquad - H_{m+1}(x,A)\,H_m(y,A) - 2mH_{m-1}(x,A)\,H_m(y,A)\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $2^{m+1}m!$ ile bölünüp ve $m = 0,1,\ldots,n$ üzerinden toplam alındığında ilk n terim sadeleşir. Buradan istenen elde edilir. ■

Özel olarak (3.1.6)'da $A = [2]_{1\times 1}$ alınırsa, klasik Hermite polinomları için Feldheim bağıntısı elde edilir.

Önerme 3.1.4 $\left\| xt\sqrt{2A} \right\| < 1$ *olmak üzere*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n H_n(x,A)}{n!} t^n = \left(I - xt\sqrt{2A}\right)^{-c} {}_2F_0\left(\frac{cI}{2}, \frac{(c+1)I}{2}; -; -4t^2\left(I - xt\sqrt{2A}\right)^{-2}\right) \tag{3.1.8}$$

dir. Burada $c \in \mathbb{Z}^+$ *' dır.*

İspat. Eşitliğin sol tarafına (2.1.1) bağıntısı yazılıp (2.0.7) bağıntısı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n H_n(x,A)}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (c)_n \left(x\sqrt{2A}\right)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (c+2k)_n (c)_{2k} \left(xt\sqrt{2A}\right)^n t^{2k}}{k!n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, (2.0.5) bağıntısı ve

$$(c)_{2k} = 2^{2k} \left(\frac{c}{2}\right)_k \left(\frac{c+1}{2}\right)_k \tag{3.1.9}$$

özelliğinden istenen sonuç elde edilir. ■

Önerme 3.1.5 *Hermite matris polinomlarının hipergeometrik matris fonksiyonları cinsinden ifadesi*

$$H_n(x,A) = \left(x\sqrt{2A}\right)^n {}_2F_0\left(\frac{-nI}{2}, \frac{(1-n)I}{2}; -; \frac{-2A^{-1}}{x^2}\right), \qquad |x| > \sqrt{2\|A\|} \tag{3.1.10}$$

dır.

İspat. (2.1.1) bağıntısında

$$\frac{n!}{(n-2k)!} I = (-nI)_{2k} = 2^{2k} \left(\frac{-nI}{2}\right)_k \left(\frac{(1-n)I}{2}\right)_k$$

olduğu kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa istenen sonuç ispatlanır. ■

Teorem 3.1.6 $k \in \mathbb{Z}^+$ *için Hermite matris polinomlarının diğer bir üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+k}(x,A) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(xt\sqrt{2A} - t^2 I\right) H_k\left(xI - \left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1} t, A\right) \tag{3.1.11}$$

dır.

İspat. $k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+k}(x,A)\frac{t^n}{n!}\frac{u^k}{k!} &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,A)\frac{(t+u)^n}{n!} \\
&= \exp\left(\sqrt{2A}x(t+u)-(t+u)^2\right) \\
&= \exp\left(xt\sqrt{2A}-t^2\right)\sum_{k=0}^{\infty} H_k\left(x-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}t, A\right)\frac{u^k}{k!}
\end{aligned}$$

dir. Her iki tarafta $\frac{u^k}{k!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında istenen sonuç elde edilir. ■

(3.1.11) denkleminin bir uygulaması olarak aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 3.1.7 $|t| < \frac{1}{2}$ *olmak üzere Hermite matris polinomlarının bilineer üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,A)\, H_n(y,A)\frac{t^n}{n!} = \left(1-4t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{2A\left(xyt-\left(x^2+y^2\right)t^2\right)}{1-4t^2}\right) \tag{3.1.12}$$

dir.

İspat. (2.0.7) ve (3.1.11) bağıntıları kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,A)\, H_n(y,A)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\left(x\sqrt{2A}\right)^{n-2k}H_n(y,A)\,t^n}{k!\,(n-2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp\left(2Axyt-2Ax^2t^2\right)H_{2k}(y-2xt,A)\,(-1)^k t^{2k}}{k!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki seride

$$H_{2k}(y-2xt,A) = \sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s\,(2k)!\,(y-2xt)^{2k-2s}\left(\sqrt{2A}\right)^{2k-2s}}{s!\,(2k-2s)!}$$

eşitliği ve

$$(2k)! = (1)_{2k} = 2^{2k}k!\left(\frac{1}{2}\right)_k$$

ifadesi kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,A)\, H_n(y,A)\frac{t^n}{n!} = \left(1-4t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(2Axyt-2Ax^2t^2\right)\exp\left(\frac{-2At^2\,(y-2xt)^2}{1-4t^2}\right)$$

bulunur. Üstel çarpanlar düzenlendiğinde istenen sonuç elde edilir. ■

(3.1.12) denkleminde t yerine $\frac{t}{2}$ alınırsa, Jódar ve Defez tarafından ispatlanan (41) denkleminin farklı bir ispatı verilmiş olur (Jódar ve Defez 1996).

Önerme 3.1.4'e (3.1.11) denklemi uygulanırsa Hermite matris polinomları için aşağıdaki bilateral üreteç fonksiyonu elde edilir.

Teorem 3.1.8 *Hermite matris polinomları aşağıdaki bilateral üreteç fonksiyonunu gerçekler.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_2F_0\left(-nI, cI; -; y\right) H_n\left(x, A\right) \frac{t^n}{n!}$$
$$= \exp\left(xt\sqrt{2A} - t^2\right) \left(I + xyt\sqrt{2A} - 2yt^2 I\right)^{-c}$$
$$\times\, {}_2F_0\left(\frac{cI}{2}, \frac{(c+1)\,I}{2}; -; -4y^2t^2\left(I + xyt\sqrt{2A} - 2yt^2 I\right)^{-2}\right).$$

Burada $\left\|2yt^2 I - xyt\sqrt{2A}\right\| < 1$ *ve* $c \in \mathbb{Z}^+$*'dır.*

Bu bağıntının özel olarak $A = [2]_{1\times 1}$ için ispatı verilmiştir (Brafman 1957).

3.2. Genelleştirilmiş Hermite Matris Polinomları

Bu bölümde genelleştirilmiş iki indisli Hermite matris polinomları tanımlanarak sağladığı temel özellikler incelenecektir. Özel durumda Hermite matris polinomları için Burchnall operatör formülü ve Nielsen bağıntısı ispatlanacaktır.

Tanım 3.2.1 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere $H_{n,m}\left(x, A\right)$ iki indisli Hermite matris polinomları*

$$\begin{aligned} F\left(x, u, v, A\right) &= \exp\left(\sqrt{\frac{A}{2}}x\left(u+v\right) - uv\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} H_{n,m}\left(x, A\right) \frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}, \qquad |u| < \infty, |v| < \infty \qquad (3.2.1) \end{aligned}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Buradan

$$\exp\left(\sqrt{\frac{A}{2}}x\left(u+v\right) - uv\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{n+m} \frac{u^{n+k}v^{m+k}}{k!n!m!}$$

dir ve (2.0.8)'den

$$\exp\left(\sqrt{\frac{A}{2}}x\left(u+v\right)-uv\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\min(m,n)}\left(-1\right)^{k}\tbinom{m}{k}\tbinom{n}{k}k!\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{m+n-2k}\frac{u^{n}v^{m}}{n!m!} \tag{3.2.2}$$

elde edilir. (3.2.1) ve (3.2.2) bağıntılarında $\frac{u^n v^m}{n!m!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında iki indisli Hermite matris polinomlarının

$$H_{n,m}\left(x,A\right)=\sum_{k=0}^{\min(m,n)}\left(-1\right)^{k}\tbinom{m}{k}\tbinom{n}{k}k!\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{m+n-2k} \tag{3.2.3}$$

açık ifadesi bulunur. (3.2.3) bağıntısından $H_{n,m}\left(x,A\right)$ derecesi $m+n$ olan bir matris polinomu ve $H_{n,m}\left(x,A\right)=H_{m,n}\left(x,A\right)$ olduğu görülür. Ayrıca, $m=0$ için $H_{n,0}\left(x,A\right)=\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{n}$'dir. (3.2.3) eşitliğinden

$$H_{n,m}\left(0,A\right)=\begin{cases}\mathbf{0} & ;m\neq n\\ \left(-1\right)^{n}n!I & ;m=n\end{cases} \tag{3.2.4}$$

ve her $m\geq 1$ tamsayısı için

$$H_{1,m}\left(x,A\right)=\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{m+1}-m\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{m-1} \tag{3.2.5}$$

dir.

$H_{n,m}\left(x,A\right)$' nın birkaç terimi aşağıda verilmiştir.

$H_{n,m}\left(x,A\right)$	$m=1$	$m=2$
$n=1$	$\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{2}-I$	$\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{3}-2\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)$
$n=2$	$\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{3}-2\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)$	$\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{4}-4\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{2}+2I$
$n=3$	$\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{4}-3\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)$	$\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{5}-6\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{3}+6\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)$

(3.2.3)'den, $H_{n,m}\left(x,A\right)$'nın

$$H_{n,m}\left(-x,A\right)=\left(-1\right)^{n+m}H_{n,m}\left(x,A\right)$$

simetri formülünü sağladığı kolaylıkla görülür. Bu durumda, $H_{n,m}\left(x,A\right)$, $n+m$'nin tek ya da çift olma durumuna göre tek ya da çift fonksiyondur. (3.2.1) bağıntısında $u=v$ alınırsa (2.1.2)'den

$$H_{n}\left(x,A\right)=\sum_{m=0}^{n}\tbinom{n}{m}H_{n-m,m}\left(x,A\right) \tag{3.2.6}$$

elde edilir.

Şimdi, (3.2.1) matris serisinin $|x| < a$ karmaşık bölgesinde sabit u ve v değerleri için düzgün yakınsaklığını inceleyelim. (3.2.3)'de 2-norm alındığında

$$\|H_{n,m}(x,A)\| \leq H_{n,m}\left(a\left\|\sqrt{\frac{A}{2}}\right\|\right)$$

olur. Burada, $H_{n,m}(x)$

$$H_{n,m}(x) = \sum_{q=0}^{\min(m,n)} (-1)^q \, q! \binom{m}{q}\binom{n}{q} x^{m+n-2q}$$

ifadesi ile verilen klasik iki indisli Hermite polinomudur. Ayrıca,

$$\exp\left(\left\|\sqrt{\frac{A}{2}}\right\| a\,|u+v| + |u|\,|v|\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} H_{n,m}\left(a\left\|\sqrt{\frac{A}{2}}\right\|\right)\frac{|u|^n}{n!}\frac{|v|^m}{m!}$$

olduğundan (3.2.1) matris serisi x'e göre terim terime türevlenebilirdir. Bu durumda, (3.2.1) bağıntısında x'e göre türev alınıp, uygun indis değişiklikleri yapıldığında

$$\frac{d}{dx}H_{n,m}(x,A) = \sqrt{\frac{A}{2}}\left[nH_{n-1,m}(x,A) + mH_{n,m-1}(x,A)\right]$$

bulunur. Buradan yukarıdaki eşitliğe tümevarım uygulanarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.2.2 *$n,m \geq 0$ için $H_{n,m}(x,A)$'nın türev formülü*

$$\frac{d^s}{dx^s}H_{n,m}(x,A) = s!\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^s \sum_{r=0}^{s}\binom{n}{s-r}\binom{m}{r}H_{n-s+r,m-r}(x,A) \qquad (3.2.7)$$

dır.

Önerme 3.2.3 *İki indisli Hermite matris polinomları*

$$H_{n+1,m}(x,A) = x\sqrt{\frac{A}{2}}H_{n,m}(x,A) - mH_{n,m-1}(x,A), \qquad (3.2.8)$$

$$H_{n,m+1}(x,A) = x\sqrt{\frac{A}{2}}H_{n,m}(x,A) - nH_{n-1,m}(x,A), \qquad (3.2.9)$$

$$(n-m)H_{n,m}(x,A) = x\sqrt{\frac{A}{2}}\left(H_{n+1,m}(x,A) - H_{n,m+1}(x,A)\right) \qquad (3.2.10)$$

rekürans bağıntılarını sağlar.

İspat. (3.2.1)'de u değişkenine göre türev alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial u}F(x,u,v,A)=\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}-v\right)F(x,u,v,A)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}&nH_{n,m}(x,A)\frac{u^{n-1}}{n!}\frac{v^m}{m!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x\sqrt{\frac{A}{2}}H_{n,m}(x,A)\frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}H_{n,m}(x,A)\frac{u^n}{n!}\frac{v^{m+1}}{m!}\end{aligned}$$

bulunur. Uygun indis değişiklikleri ile (3.2.8) bağıntısı elde edilir. (3.2.9) bağıntısının ispatı için (3.2.1) bağıntısında v değişkenine göre türev alınarak benzer ispat yöntemi uygulanır. Son olarak (3.2.10) bağıntısı, (3.2.8) ve (3.2.9) bağıntılarının taraf tarafa farkı alınarak elde edilir. ∎

Önerme 3.2.4 *İki indisli Hermite matris polinomları için*

$$H_{n,m}(\mu x,A)=\mu^{m+n}\sum_{k=0}^{\min(n,m)}\binom{n}{k}\binom{m}{k}k!\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)^k H_{n-k,m-k}(x,A) \tag{3.2.11}$$

çarpım formülü ve

$$\begin{aligned}\left(\lambda^2+\mu^2\right)^{\frac{n+m}{2}}H_{n,m}\left(\frac{\lambda z_1+\mu z_2}{\left(\lambda^2+\mu^2\right)^{\frac{1}{2}}},A\right)&=\lambda^{m+n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{l}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k+l}\\&\times H_{n-k,m-l}(z_1,A)\,H_{k,l}(z_2,A)\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

toplam formülü vardır. Burada $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$'dir.

İspat. (3.2.1)'de x yerine μx, u yerine $\frac{u}{\mu}$, v yerine $\frac{v}{\mu}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_{n,m}(\mu x,A)}{\mu^{m+n}}\frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}&=\exp\left(\sqrt{\frac{A}{2}}x(u+v)-\frac{uv}{\mu^2}\right)\\&=\exp\left(\sqrt{\frac{A}{2}}x(u+v)-uv+uv-\frac{uv}{\mu^2}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıda (2.0.8) kullanılarak eşitliğin her iki tarafından $\frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında (3.2.11) elde edilir. (3.2.12) bağıntısı da benzer şekilde ispatlanır. ∎

Sonuç 3.2.5 *İki indisli Hermite matris polinomları aşağıdaki eşitlikleri gerçekler.*

$$\begin{aligned}
2^{\frac{n+m}{2}} H_{n,m}\left(\sqrt{2}x, A\right) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} \tbinom{n}{k}\tbinom{m}{l} H_{n-k,m-l}(x,A)\, H_{k,l}(x,A), \\
2^{\frac{n+m}{2}} H_{n,m}(x+y, A) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} \tbinom{n}{k}\tbinom{m}{l} H_{n-k,m-l}\left(\sqrt{2}x, A\right) H_{k,l}\left(\sqrt{2}y, A\right), \\
2^{\frac{n+m}{2}} H_{n,m}(x, A) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{m} (-1)^k\, k!\tbinom{n}{k}\tbinom{m}{l} H_{n-k,m-l}\left(\sqrt{2}x, A\right).
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.6 *İki indisli Hermite matris polinomlarının operatör formülü*

$$H_{n,m}(x,A) = \left(x\sqrt{\frac{A}{2}} - \left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)^n \left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^m \tag{3.2.13}$$

dir.

İspat. A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere

$$\begin{aligned}
\exp\left(-u\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right) e^{x\sqrt{\frac{A}{2}}v} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-u)^n}{n!}\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-n}\frac{d^n}{dx^n}e^{x\sqrt{\frac{A}{2}}v} \\
&= e^{x\sqrt{\frac{A}{2}}v-uv}
\end{aligned}$$

dir. Her iki taraf $e^{x\sqrt{\frac{A}{2}}u}$ ile çarpılıp gerekli işlemler yapıldığında

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(x\sqrt{\frac{A}{2}} - \left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)^n \left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^m \frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} H_{n,m}(x,A)\frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda $\frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında istenen sonuç elde edilir. ■

Aşağıdaki sonuçta iki indisli Hermite matris polinomları için yeni bir reküranş bağıntısı verilecektir.

Sonuç 3.2.7 *İki indisli Hermite matris polinomları*

$$H_{n+r,m}(x,A) = \left(x\sqrt{\frac{A}{2}} - \left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)^n H_{r,m}(x,A)$$

rekürans bağıntısını sağlar.

İspat. (3.2.13) kullanılarak kolayca ispatlanır. ■

Teorem 3.2.8 *$n, m \geq 0$ için iki indisli Hermite matris polinomları için Rodrigues formülü*

$$H_{n,m}(x,A) = e^{\frac{A}{4}x^2}(-1)^n \left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{m-n} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{A}{4}x^2}x^m\right] \tag{3.2.14}$$

dır.

İspat. Tümevarım ile

$$\left(x\sqrt{\frac{A}{2}} - \left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)^n [f(x)g(x)] = e^{\frac{A}{4}x^2}(-1)^n\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-n}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{A}{4}x^2}f(x)g(x)\right] \tag{3.2.15}$$

eşitliği elde edilebilir. (3.2.15) eşitliğinde $f(x) = \left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^m$, $g(x) = 1$ alınarak Teorem 3.2.6 kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

Bu bağıntıdan, iki indisli Hermite matris polinomları,

$$H_n^{\gamma}(x,\alpha,p) = (-1)^n x^{-\alpha}e^{px^{\gamma}}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha}e^{-px^{\gamma}}\right).$$

olarak tanımlanan genelleştirilmiş Gould-Hopper Hermite polinomlarının (Gould 1962) matris benzerleri için bir alt sınıf oluşturur. Gerçekten $\gamma = 2, \alpha = m$ ve $p = \frac{A}{4}$ alınırsa

$$H_{n,m}(x,A) = x^m\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{m-n} H_n^2\left(x, m, \frac{A}{4}\right)$$

elde edilir.

Bir sonraki önermede, iki indisli Hermite matris polinomlarının çarpımlarının ağırlıklı toplamlarını içeren bir formül verilecektir.

Önerme 3.2.9 *$n, m \geq 0$ olmak üzere iki indisli Hermite matris polinomları için*

$$\begin{aligned} H_{n+r,m}(x,A) &= (-1)^n \sum_{k,s,l=0}^{n,k,s}\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{s-m-k} s!\binom{n}{k}\binom{s}{k}\binom{r}{s-l}\binom{m}{l}(m)_{n-k} \\ &\quad \times \frac{x^k}{x^{m+n}} H_{n-k,m}(x,A)\, H_{r-s+k,m-l}(x,A) \end{aligned}$$

Nielsen bağıntısı sağlanır.

İspat. $g(x)=\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{m}$ için (3.2.15) bağıntısına Leibniz formülü uygulanıp (3.2.14) bağıntısı kullanıldığında

$$\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{n}\left[f(x)\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{m}\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-k}H_{n-k,m}(x,A)\frac{d^{k}}{dx^{k}}[f(x)]$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıda da $f(x)=\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-m}H_{r,m}(x,A)$ alınırsa Sonuç 3.2.7'ten

$$H_{n+r,m}(x,A)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-k}H_{n-k,m}(x,A)\frac{d^{k}}{dx^{k}}\left[\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-m}H_{r,m}(x,A)\right].$$

elde edilir. Son olarak, yukarıdaki denklemde tekrar Leibniz formülü uygulanarak (3.2.7) bağıntısı kullanılırsa ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.6'nın bir uygulaması olarak aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 3.2.10 *İki indisli Hermite matris polinomlarının diğer üreteç fonksiyonları*

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_{n+r,m}(x,A)\frac{u^{n}}{n!}=\exp\left(u\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)\right)H_{r,m}(x,A),\quad(3.2.16)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}H_{n,m}(x,A)H_{n,m}(y,A)\frac{u^{n}}{n!}\frac{v^{m}}{m!}\quad(3.2.17)$$
$$=\exp\left[u\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)\left(y\sqrt{\frac{A}{2}}-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dy}\right)\right]e^{yv\sqrt{\frac{A}{2}}}$$

dir ve bu matris polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}H_{n,m}(x,A)u^{n}v^{m}\quad(3.2.18)$$
$$=\int_{0}^{\infty}\exp-t\left[I-x\sqrt{\frac{A}{2}}(u+v)+u\left(\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{2}v+\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}-vx\frac{d}{dx}\right)\right]dt$$

matris integral gösterimini gerçekler.

İspat. (3.2.17) denklemi

$$W\left(x,u,v,A\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}H_{n+r,m}\left(x,A\right)\frac{u^{n}}{n!}\frac{v^{m}}{m!} \tag{3.2.19}$$

şeklinde yazılarak, Sonuç 3.2.7 kulanılırsa

$$\begin{aligned} W\left(x,u,v,A\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u^{n}}{n!}\frac{v^{m}}{m!}\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{n}H_{r,m}\left(x,A\right) \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{n}\frac{u^{n}}{n!}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}H_{r,m}\left(x,A\right)\frac{v^{m}}{m!}\right] \\ &= \exp\left(u\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)\right)\sum_{m=0}^{\infty}H_{r,m}\left(x,A\right)\frac{v^{m}}{m!} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde iki indisli Hermite matris polinomlarının çarpımını içeren seri

$$G\left(x,u,v,A\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}H_{n,m}\left(x,A\right)H_{n,m}\left(y,A\right)\frac{u^{n}}{n!}\frac{v^{m}}{m!}$$

şeklinde yazılarak Teorem 3.2.6 kullanıldığında (3.2.17) bağıntısı elde edilir. (3.2.18) bağıntısı, (2.0.5) bağıntısı ve Teorem 3.2.6 kullanılarak ispatlanır. ∎

Teorem 3.2.11 *Hermite matris polinomları için Burchnall operatör formülü*

$$H_{n}\left(x,A\right)=\left(x\sqrt{2A}-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I\right) \tag{3.2.20}$$

dir.

İspat. (3.2.13) bağıntısında n yerine $n-m$ alınarak her iki taraf $\binom{n}{m}$ ile çarpılıp m değerleri üzerinden 0'dan n'ye kadar toplam alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}H_{n-m,m}\left(x,A\right) &= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{n-m}\left(x\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{m} \\ &= \left(x\sqrt{2A}-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{n} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (3.2.6) bağıntısından istenen sonuç ispatlanır. ∎

$A=[2]_{1\times 1}$ özel durumunda (3.2.20) bağıntısı Burchnall tarafından klasik Hermite polinomları için ispatlanan operatör formülüne indirgenir (Burchnall 1941).

Sonuç 3.2.12 *Hermite matris polinomları aşağıdaki rekürans bağıntısını sağlar.*

$$H_{n+r}(x,A) = \left(x\sqrt{2A} - \left(\sqrt{\frac{A}{2}} \right)^{-1} \frac{d}{dx} \right)^{n} H_{r}(x,A).$$

Teorem 3.2.13 *Hermite matris polinomları için Nielsen bağıntısı*

$$H_{n+r}(x,A) = \sum_{k=0}^{\min(n,r)} (-2)^k \binom{n}{k} \binom{r}{k} k! H_{n-k}(x,A) H_{r-k}(x,A) \tag{3.2.21}$$

dır.

İspat. Tümevarım ile

$$\left(x\sqrt{2A} - \left(\sqrt{\frac{A}{2}} \right)^{-1} \frac{d}{dx} \right)^{n} [f(x)] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tbinom{n}{k} \left(\sqrt{\frac{A}{2}} \right)^{-k} H_{n-k}(x,A) \frac{d^k}{dx^k} [f(x)]$$

elde edilebilir. Bu durumda, $f(x) = H_r(x,A)$ için

$$H_{n+r}(x,A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tbinom{n}{k} \left(\sqrt{\frac{A}{2}} \right)^{-k} H_{n-k}(x,A) \frac{d^k}{dx^k} [H_r(x,A)]$$

elde edilir. Dolayısıyla $H_{-1}(x,A) = \mathbf{0}$ ve

$$\frac{d^k}{dx^k} H_n(x,A) = \left(\sqrt{2A} \right)^k \frac{n!}{(n-k)!} H_{n-k}(x,A)$$

olduğundan (Jódar vd. 1996a) istenen sonuç elde edilir. ■

$A = [2]_{1\times 1}$ özel durumunda (3.2.21) bağıntısı Nielsen tarafından klasik Hermite polinomları için ispatlanan bağıntıya indirgenir (Nielsen 1918).

3.3. Modifiye Laguerre Matris Polinomları

Bu bölümde, modifiye Laguerre matris polinomları olarak adlandıracağımız yeni bir matris polinomu tanımlanarak sağladığı temel özellikler incelenecektir.

Tanım 3.3.1 *B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi bir matris ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ olsun. Modifiye Laguerre matris polinomları*

$$G(x,t) = (1-t)^{-B} \exp(\lambda x t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(B,\lambda)}(x)\, t^n, \quad |t| < 1, \quad x,t \in \mathbb{C} \tag{3.3.1}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Kargın ve Kurt 2014b).

(2.0.4) ve (2.0.8) bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(B)_n}{n!} t^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(B)_{n-k} \lambda^k x^k}{k!\,(n-k)!} t^n \end{aligned}$$

elde edilir. t^n terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında $f_n^{(B,\lambda)}(x)$ matris polinomu için

$$f_n^{(B,\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(B)_{n-k} \lambda^k x^k}{k!\,(n-k)!} \tag{3.3.2}$$

toplamsal gösterimi elde edilir.

Özel olarak A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de her $k>0$ tamsayısı için $-k \notin \sigma(A)$ spektral koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere $B=-A-nI$ alınırsa

$$(-A-nI)_{n-k} = (-1)^{n-k} (A+I)_n \left[(A+I)_k\right]^{-1}$$

elde edilir. Bu bağıntı (3.3.2) bağıntısında yerine yazılırsa $f_n^{(-A-nI,\lambda)}(x) = (-1)^n L_n^{(A,\lambda)}(x)$ dir. Bu nedenle (3.3.2) açık gösterimine sahip matris polinomlarına modifiye Laguerre matris polinomları denir.

(3.3.2) bağıntısından $f_n^{(B,\lambda)}(x)$, başkatsayısı $\frac{I}{n!}$ olan n. dereceden bir matris polinomudur ve ilk birkaç terimi

$$f_0^{(B,\lambda)}(x) = I, \quad f_1^{(B,\lambda)}(x) = B + \lambda x I, \quad f_2^{(B,\lambda)}(x) = (\lambda x)^2 I + B\lambda x + \frac{B(B+I)}{2}$$

dir.

$G(x,t)$ matris değerli fonksiyonu t değişkenine göre $|t|<1$ için analitik olduğundan t değişkenine göre türev alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(1-t)\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} - \left[B + \lambda x (1-t) I\right] G(x,t) = \mathbf{0}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n f_n^{(B,\lambda)}(x) t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n f_n^{(B,\lambda)}(x) t^n - \sum_{n=\mathbf{0}}^{\infty} B f_n^{(B,\lambda)}(x) t^n \\ &\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda x f_n^{(B,\lambda)}(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda x f_n^{(B,\lambda)}(x) t^{n+1} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

dır. Uygun indis değişiklikleri yapılarak t^n terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında modifiye Laguerre matris polinomlarının

$$(n+1) f_{n+1}^{(B,\lambda)}(x) - \left[\lambda x I + (B+nI)\right] f_n^{(B,\lambda)}(x) + \lambda x f_{n-1}^{(B,\lambda)}(x) = \mathbf{0}, \quad n \geq 1 \tag{3.3.3}$$

üç terimli rekürans bağıntısı elde edilir.

Şimdi, modifiye Laguerre matris polinomlarının sağladığı matris diferansiyel denklemini inceleyelim. $G(x,t)$ matris değerli fonksiyonu x değişkenine göre tam fonksiyon olduğundan x değişkenine göre türev alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$DG(x,t) - \lambda t G(x,t) = \mathbf{0}$$

elde edilir. D türev operatörü d/dx olmak üzere yukarıdaki eşitlikte (3.3.1) bağıntısı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$Df_n^{(B,\lambda)}(x) = \lambda f_{n-1}^{(B,\lambda)}(x) \tag{3.3.4}$$

elde edilir. (3.3.3) bağıntısında x'e göre türev alınıp (3.3.4) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}(n+1)\,Df_{n+1}^{(B,\lambda)}(x) - [\lambda xI + (B+nI)]\,Df_n^{(B,\lambda)}(x) \\ +\lambda x Df_{n-1}^{(B,\lambda)}(x) + Df_n^{(B,\lambda)}(x) - \lambda f_n^{(B,\lambda)}(x) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.4)'de n yerine $n-1$ alınıp yukarıdaki bağıntıda yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}(n+1)\,\lambda f_n^{(B,\lambda)}(x) - [\lambda xI + (B+nI)]\,Df_n^{(B,\lambda)}(x) \\ +\lambda x Df_{n-1}^{(B,\lambda)}(x) + Df_n^{(B,\lambda)}(x) - \lambda f_n^{(B,\lambda)}(x) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

bulunur. Bununla birlikte $\lambda Df_{n-1}^{(B,\lambda)}(x) = D^2 f_n^{(B,\lambda)}(x)$'dir. Bu durumda, modifiye Laguerre matris polinomları

$$xD^2 f_n^{(B,\lambda)}(x) - (\lambda xI + (B+(n-1)\,I))\,Df_n^{(B,\lambda)}(x) + \lambda n f_n^{(B,\lambda)}(x) = \mathbf{0} \tag{3.3.5}$$

ikinci dereceden matris diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

Şimdi de modifiye Laguerre matris polinomlarının sağladığı Rodrigues formulünü inceleyelim. B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi bir matris olmak üzere

$$D^{n-k} x^{-B} = (-1)^{n-k}\,(B)_{n-k}\, x^{-B-(n-k)I}$$

dır. Bununla birlikte, $D^k \exp(-\lambda x) = (-1)^k \lambda^k$ olduğundan Leibnitz formülü kullanılarak

$$D^n\left[x^{-B}\exp(-\lambda x)\right] = (-1)^n\, n!\, x^{-B-nI}\exp(-\lambda x)\sum_{k=0}^{n}\frac{(B)_{n-k}\,\lambda^k x^k}{k!\,(n-k)!}$$

elde edilir. O halde modifiye Laguerre matris polinomları

$$f_n^{(B,\lambda)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!}x^{B+nI}\exp(\lambda x)\,D^n\left[x^{-B}\exp(-\lambda x)\right] \tag{3.3.6}$$

Rodrigues formülünü sağlar.

Şimdiye kadar elde ettiğimiz bağıntıları aşağıdaki teoremde verelim.

Teorem 3.3.2 *B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi bir matris ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ *olsun. Modifiye Laguerre matris polinomları aşağıdaki özellikleri sağlar.*

(i) $n \geq 1$ için

$$(n+1) f_{n+1}^{(B,\lambda)}(x) - [\lambda x I + (B+nI)] f_n^{(B,\lambda)}(x) + \lambda x f_{n-1}^{(B,\lambda)}(x) = \mathbf{0}$$

dır.

(ii) Modifiye Laguerre matris polinomları (3.3.5)'de verilen ikinci dereceden matris diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

(iii) Modifiye Laguerre matris polinomları (3.3.6)'daki Rodrigues formülünü sağlar.

Yukarıdaki teoremde özel olarak $B = -A - nI$ alınırsa Laguerre matris polinomlarının sağladığı üç terimli rekürans bağıntısı (2.4.3), ikinci dereceden matris diferansiyel denklemi (2.4.1) ve Rodrigues formülü (2.4.2) elde edilir.

3.3.1. Modifiye Laguerre Matris Polinomları için Diğer Üreteç Fonksiyonları

Bu kesimde modifiye Laguerre matris polinomlarının diğer üreteç fonksiyonları verilecektir.

Teorem 3.3.3 *B ve C, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de değişmeli herhangi iki matris ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ *olmak üzere modifiye Laguerre matris polinomları için*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C)_n f_n^{(B,\lambda)}(x) t^n = (1-\lambda x t)^{-C} \; {}_2F_0\left(C, B; -; \frac{t}{1-\lambda x t}\right) \tag{3.3.7}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. Modifiye Laguerre matris polinomlarının (3.3.2)'de verilen açık gösterimi kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (C)_n f_n^{(B,\lambda)}(x) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(C)_n (B)_{n-k} \lambda^k x^k}{k!(n-k)!} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(C)_{n+k} (B)_n \lambda^k x^k}{k! n!} t^{n+k}
\end{aligned}$$

elde edilir. $(A)_{n+k} = (A)_n (A+nI)_k$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C)_n f_n^{(B,\lambda)}(x) t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(C+nI)_k (\lambda x t)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C)_n (B)_n}{n!} t^n$$

dir. Buradan istenilen sonuç ispatlanır. ∎

Teorem 3.3.4 *B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi bir matris ve k negatif olmayan bir tamsayı olsun. Bu durumda*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!k!}f_{n+k}^{(B,\lambda)}(x)\,t^n=\exp(\lambda xt)\,(1-t)^{-(B+kI)}\,f_k^{(B,\lambda)}(x\,(1-t)) \tag{3.3.8}$$

dir.

İspat. (3.3.1) bağıntısında t yerine $t+v$ alındığında

$$(1-(t+v))^{-B}\exp(\lambda x\,(t+v))=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(B,\lambda)}(x)\,(t+v)^n \tag{3.3.9}$$

bulunur. $(t+v)^n$'nin binom açılımı yapılıp gerekli düzenlemelerden sonra

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(B,\lambda)}(x)\,(t+v)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!f_{n+k}^{(B,\lambda)}(x)\,t^n}{n!k!}v^k$$

elde edilir. (3.3.9) bağıntısının sol tarafını tekrar ele alalım. $(1-t-v)=(1-t)\left(1-\frac{v}{1-t}\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned}(1-t-v)^{-B}\exp(\lambda x\,(t+v)) &= \exp(\lambda xt)\,(1-t)^{-B}\left[\exp(\lambda xv)\left(1-\frac{v}{1-t}\right)\right]\\ &= \exp(\lambda xt)\,(1-t)^{-B}\sum_{k=0}^{\infty}f_k^{(B,\lambda)}(x\,(1-t))\left(\frac{v}{1-t}\right)^k\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki iki seride v^k terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında istenen sonuç elde edilir. ■

Teorem 3.3.5 *B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi bir matris olmak üzere modifiye Laguerre matris polinomlarının bilineer üreteç fonksiyonu*

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}n!f_n^{(B,\lambda)}(x)\,f_n^{(B,\lambda)}(y)\,t^n \qquad (3.3.10)\\ &\quad=e^{\lambda^2xyt}\,(1-\lambda xt)^{-B}\,(1-\lambda yt)^{-B}\;{}_2F_0\left(B,B;-;\frac{t}{(1-\lambda xt)\,(1-\lambda yt)}\right)\end{aligned}$$

dir.

İspat. Modifiye Laguerre matris polinomları için (3.3.2) bağıntısında verilen açık gösterim kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!f_n^{(B,\lambda)}(x)\,f_n^{(B,\lambda)}(y)\,t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!f_{n+k}^{(B,\lambda)}(x)\,(\lambda yt)^n}{n!k!}(B)_k\,t^k$$

elde edilir. Yukarıdaki seride (3.3.8) bağıntısı yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! f_n^{(B,\lambda)}(x)\, f_n^{(B,\lambda)}(y)\, t^n = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda^2 xyt} (1-\lambda yt)^{-(B+kI)}\, f_k^{(B,\lambda)}(x(1-\lambda yt))\, (B)_k\, t^k$$
$$= e^{\lambda^2 xyt} (1-\lambda yt)^{-B} \sum_{k=0}^{\infty} (B)_k\, f_k^{(B,\lambda)}(x(1-\lambda yt)) \left(\frac{t}{1-\lambda yt}\right)^k$$

bulunur. $C = B$ için (3.3.7) bağıntısı kullanılarak (3.3.10)'da verilen üreteç fonksiyonu elde edilir. ■

Teorem 3.3.6 *B ve C, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de değişmeli herhangi iki matris olsun. Bu durumda modifiye Laguerre matris polinomları aşağıdaki bilateral üreteç fonksiyonunu gerçekler.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_2F_0(C; -nI; -; y)\, f_n^{(B,\lambda)}(x)\, t^n \tag{3.3.11}$$
$$= e^{\lambda xt} (1-t)^{-B} (1+\lambda xyt)^{-C}\ {}_2F_0\left(C, B; -; \frac{-yt}{(1-t)(1+\lambda xyt)}\right).$$

İspat. (3.3.7) bağıntısında x yerine $x(1-t)$ ve t yerine $\frac{yt}{1-t}$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C)_n\, f_n^{(B,\lambda)}(x(1-t)) \left(\frac{yt}{1-t}\right)^n = (1-\lambda xyt)^{-C}\ {}_2F_0\left(C, B; -; \frac{t}{(1-t)(1-\lambda xyt)}\right) \tag{3.3.12}$$

elde edilir. (3.3.12) bağıntısında her iki taraf $e^{\lambda xt}(1-t)^{-B}$ ile çarpıldığında

$$e^{\lambda xt} (1-t)^{-B} (1-\lambda xyt)^{-C}\ {}_2F_0\left(C, B; -; \frac{yt}{(1-t)(1-\lambda xyt)}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (C)_k\, y^k t^k \left[e^{\lambda xt} (1-t)^{-B-kI}\, f_k^{(B,\lambda)}(x(1-t))\right]$$

bulunur. (3.3.8) bağıntısı yukarıda yerine yazılıdığında

$$e^{\lambda xt} (1-t)^{-B} (1-\lambda xyt)^{-C}\ {}_2F_0\left(C, B; -; \frac{yt}{(1-t)(1-\lambda xyt)}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (C)_k\, y^k t^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!} f_{n+k}^{(B,\lambda)}(x)\, t^n$$

elde edilir. Uygun düzenlemelerle y yerine $-y$ alınarak ispat tamamlanır. ■

(3.3.11) bağıntısı, bilateral üreteç fonksiyonu olmasına rağmen, bu bağıntı bir sonraki sonuçta bilineer forma dönüşür.

Sonuç 3.3.7 *B ve C, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de değişmeli herhangi iki matris olmak üzere modifiye Laguerre matris polinomlarının bilineer üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! f_n^{(B,\lambda)}(x)\, f_n^{(C,\lambda)}(y)\, t^n \tag{3.3.13}$$
$$= e^{\lambda xt}(1-yt)^{-B}(1-\lambda xt)^{-C}\ {}_2F_0\left(C,B;-;\frac{t}{(1-yt)(1-\lambda xt)}\right)$$

dir.

İspat. (3.3.2) bağıntısından modifiye Laguerre matris polinomlarının

$$f_n^{(C,\lambda)}(y) = \frac{(\lambda y)^n}{n!}\ {}_2F_0\left(C;-nI;-;\frac{-1}{\lambda y}\right)$$

hipergeometrik matris fonksiyonları gösterimini sağladığı görülür. Bu durumda, (3.3.11) bağıntısında y yerine $\frac{-1}{y}$ ve t yerine yt alınarak istenen sonuç elde edilir. ■

Dolayısıyla (3.3.10) bağıntısındaki üreteç fonksiyonu (3.3.13) bağıntısındaki üreteç fonksiyonunun $C=B$ özel durumudur.

3.3.2. Genelleştirilmiş Laguerre Matris Polinomları

Laguerre matris polinomları ve modifiye Laguerre matris polinomları sırasıyla

$$L_n^{(A,\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k (A+I)_n \left[(A+I)_k\right]^{-1}\frac{\lambda^k x^k}{k!\,(n-k)!},$$

ve

$$f_n^{(A,\lambda)}(x) = (-1)^n L_n^{(-A-nI,\lambda)} = \sum_{k=0}^{n}(A)_{n-k}\frac{\lambda^k x^k}{k!\,(n-k)!}$$

eşitliklerini sağlar. Bu iki gösterimden m negatif olmayan bir tamsayı ve A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi bir matris olmak üzere genelleştirilmiş Laguerre-tipli matris polinomları

$$p_n^{(A,\lambda)}(m;x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{mk}\left(A+(mk+1)I\right)_{n-k}\frac{\lambda^k x^k}{k!\,(n-k)!} \tag{3.3.14}$$

ifadesiyle tanımlanır. Bu durumda, (3.3.14) bağıntısında A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de her $k>0$ tamsayısı için $-k\notin\sigma(A)$ spektral koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere $m=1$ alınırsa

$$p_n^{(A,\lambda)}(1;x) = L_n^{(A,\lambda)}(x)$$

ve A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi bir matris olmak üzere $m=0$ alınırsa

$$p_n^{(A-I,\lambda)}(0;x) = (-1)^n L_n^{(-A-nI,\lambda)} = f_n^{(A,\lambda)}(x)$$

elde edilir. Ayrıca, (3.3.14) bağıntısından genelleştirilmiş Laguerre-tipli matris polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(A,\lambda)}(m;x)\, t^n = (1-t)^{-(A+I)} \exp\left(\frac{\lambda x t}{(1-t)^m}\right)$$

dir.

3.4. Chebyshev Matris Polinomları

Bu bölümde, II. tip Chebyshev matris polinomları genelleştirilerek sağladığı temel özelliklerde uygun parametre seçimleri ile II. tip Chebyshev matris polinomlarının sağladığı matris diferansiyel denklemi ve bazı operatör formülleri verilecektir. Ayrıca, I. tip Chebyshev matris polinomlarının farklı bir genelleştirilmesi elde edilecektir.

3.4.1. Genelleştirilmiş II. tip Chebyshev Matris Polinomları

Bölüm 2.5'de belirtildiği üzere II. tip Chebyshev matris polinomları ile Hermite matris polinomları arasındaki ilişkiyi sağlayan integral gösterimi Batahan tarafından 2006 yılında verilmiştir. Biz de bu bölümde (2.5.1) bağıntısını modifiye ederek II. tip Chebyshev matris polinomlarının bir genelleştirmesini aşağıdaki gibi verelim.

Tanım 3.4.1 *A ve B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı matrisler olmak üzere $AB = BA$ olsun. Bu durumda genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları*

$$U_n(x,y,A,B) = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-Bt} t^n H_n\left(x, \frac{y}{t}, A\right) dt \tag{3.4.1}$$

gösterimi ile tanımlanır (Kargın ve Kurt 2014a).

İki değişkenli Hermite matris polinomlarının açık gösterimi kullanıldığında genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları

$$U_n(x,y,A,B) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (n-k)! B^{k-n-1} \left(x\sqrt{2A}\right)^{n-2k} y^k}{k!\,(n-2k)!}$$

toplamsal gösterimini sağlar. Buradan, genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomlarının ilk birkaç terimi

$$U_{-1}(x,y,A,B) = \mathbf{0}, \quad U_0(x,y,A,B) = B^{-1}, \quad U_1(x,y,A,B) = x\sqrt{2A}B^{-2}$$

dir. Ayrıca,

$$U_n(x,y,A,I) = U_n(x,y,A), \quad U_n(x,1,A,I) = U_n(x,A)$$

ve

$$U_n(x,0,A,B) = B^{-(n+1)}\left(x\sqrt{2A}\right)^n, \quad U_{2n}(0,y,A,B) = (-1)^n B^{-(n+1)} y^n$$

dir.

Önerme 3.4.2 *A ve B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı matrisler olmak üzere $AB = BA$ olsun. Bu durumda genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomlarının üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,y,A,B)\, z^n = \left(I - xz\sqrt{2A} + yz^2 I\right)^{-1} \tag{3.4.2}$$

dir. Burada $\left\| xz\sqrt{2A} - yz^2 I \right\| < \|B\|$'dur.

İspat. (3.4.1) bağıntısında her iki taraf z^n ile çarpılıp n üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x,y,A,B)\, z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-Bt} t^n H_n\left(x, \frac{y}{t}, A\right) dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-Bt} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} H_n\left(x, \frac{y}{t}, A\right) \right] dt \\
&= \int_0^{\infty} \exp\left[-t\left(B - xz\sqrt{2A} + \frac{y}{t} z^2 t I \right) \right] dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki integral $\left\| xz\sqrt{2A} - yz^2 I \right\| < \|B\|$ için yakınsaktır ve çözümü istenen sonucu verir. ■

Önerme 3.4.3 *A ve B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı matrisler olmak üzere $AB = BA$ olsun. Bu durumda genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomlarının diğer bir üreteç fonksiyonu*

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!m!} U_{n+m}(x,y,A,B)\, z^n \\
&= \left(B - x\sqrt{2A}z + yz^2 I\right)^{-(m+1)} U_m\left(xI - yz\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}, \left(B - xz\sqrt{2A} + yz^2 I\right) y, A \right)
\end{aligned}$$

dır. Burada $\left\| xz\sqrt{2A} - yz^2 I \right\| < \|B\|$'dur.

İspat. (3.4.1) bağıntısından

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!m!}U_{n+m}\left(x,y,A,B\right)z^{n}=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-Bt}t^{m}\sum_{n=0}^{\infty}H_{n+m}\left(x,\frac{y}{t},A\right)\frac{(zt)^{n}}{n!}dt$$

bulunur. Yukarıdaki integral dönüşümünde (3.1.11) bağıntısının iki değişkenli Hermite matris polinomlarına genişlemesi olan

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_{n+m}\left(x,y,A\right)\frac{t^{n}}{n!}=\exp\left(x\sqrt{2A}t-yt^{2}I\right)H_{m}\left(xI-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}yt,y,A\right)$$

kullanıldığında

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!m!}U_{n+m}\left(x,y,A,B\right)z^{n}\\&\quad=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t\left(B-x\sqrt{2A}z+yz^{2}I\right)}t^{m}H_{m}\left(xI-\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1}yz,\frac{y}{t},A\right)\end{aligned}$$

matris integrali elde edilir. Burada gerekli işlemler yapıldığında ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.4.4 *$\mathbb{C}^{r\times r}$'deki pozitif kararlı bir A matrisi için II. tip Chebyshev matris polinomları*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!m!}U_{n+m}\left(x,y,A\right)z^{n}&=\left(I-x\sqrt{2A}z+yz^{2}I\right)^{-(m+1)}\\&\times U_{m}\left(xI-yz\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)^{-1},\left(I-xz\sqrt{2A}+yz^{2}I\right)y,A\right)\end{aligned}$$

üreteç fonksiyonu tarafından üretilir. Burada $\left\|xz\sqrt{2A}-yz^{2}I\right\|<1$*'dir.*

Şimdi genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları için bazı rekürans bağıntıları verelim.

Önerme 3.4.5 *A ve B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı matrisler olmak üzere $AB=BA$ olsun. Bu durumda genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları*

$$y\frac{\partial}{\partial x}U_{n-1}\left(x,y,A,B\right)=\sqrt{\frac{A}{2}}\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)U_{n}\left(x,y,A,B\right)\qquad(3.4.3)$$

ve

$$x\frac{\partial}{\partial x}U_{n}\left(x,y,A,B\right)=\left(n-2y\frac{\partial}{\partial y}\right)U_{n}\left(x,y,A,B\right)\qquad(3.4.4)$$

rekürans bağıntılarını sağlar.

İspat. (3.4.1) bağıntısında her iki taraf y ile çarpılıp x değişkenine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} y\frac{\partial}{\partial x}U_{n-1}(x,y,A) &= \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^{n-1}y\frac{\partial}{\partial x}H_{n-1}\left(x,\frac{y}{t},A\right)dt \\ &= \frac{\left(\sqrt{2A}\right)^{-1}}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-Bt}t^n\frac{y}{t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_n\left(x,\frac{y}{t},A\right)dt \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.5)'de verilen ikinci dereceden diferansiyel denklem kullanılarak istenilen sonuç elde edilir. (3.4.4) bağıntısının ispatı da benzer şekilde yapılır. ■

Önerme 3.4.6 *A ve B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı matrisler ve $AB = BA$ olmak üzere genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları için üç terimli rekürans bağıntısı*

$$BU_{n+1}(x,y,A,B) = x\sqrt{2A}U_n(x,y,A,B) - yU_{n-1}(x,y,A,B), \quad n \geq 1 \tag{3.4.5}$$

dir.

İspat. (3.4.2) bağıntısında z değişkenine göre türev alındığında

$$\sum_{n=1}^\infty nU_n(x,y,A,B)z^{n-1} = \left(x\sqrt{2A} - 2yzI\right)\left(B - xz\sqrt{2A} + yz^2I\right)^{-2}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılıp z^n'lerin katsayıları karşılaştırıldığında ispat tamamlanır. ■

Şimdi, elde edilen rekürans bağıntıları yardımıyla genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomlarının sağladığı matris diferansiyel denklemini elde edelim. (3.4.3) ve (3.4.4)'de verilen rekürans bağıntılarını

$$U_{n-1}(x,y,A,B) = \sqrt{\frac{A}{2}}\frac{1}{y}\widehat{D}_x^{-1}\left[x\frac{\partial}{\partial x} - n\right]U_n(x,y,A,B) \tag{3.4.6}$$

ve

$$U_{n+1}(x,y,A,B) = \left[xB^{-1}\sqrt{2A} - B^{-1}\sqrt{\frac{A}{2}}\widehat{D}_x^{-1}\left[x\frac{\partial}{\partial x} - n\right]\right]U_n(x,y,A,B) \tag{3.4.7}$$

olarak ifade edelim. Burada $\widehat{D}_x^{-1}$ operatörü

$$\widehat{D}_x^{-n}[f(x)] = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-\xi)^{n-1}f(\xi)\,d\xi$$

ifadesi ile tanımlanan ters türev operatörüdür (Ditkin 1965). Bu durumda $f(x) = 1$ için

$$\widehat{D}_x^{-n}[1] = \frac{x^n}{n!}$$

dir. (3.4.6) ve (3.4.7) bağıntılarını genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları için sırasıyla indis arttıran ve indis azaltan operatörler olarak

$$\widehat{M} = \left[xB^{-1}\sqrt{2A} - B^{-1}\sqrt{\frac{A}{2}}\widehat{D}_x^{-1}\left[x\frac{\partial}{\partial x} - \widehat{n}\right]\right], \tag{3.4.8}$$

$$\widehat{P} = \left[\sqrt{\frac{A}{2}}\frac{1}{y}\widehat{D}_x^{-1}\left[x\frac{\partial}{\partial x} - \widehat{n}\right]\right],$$

adlandıralım. Burada $\widehat{n}$, $\widehat{n}u_s(x,y,A,B) = su_s(x,y,A,B)$ olarak tanımlanan indis sayma operatörüdür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \widehat{M}\widehat{P}U_n(x,y,A,B) &= \widehat{P}\widehat{M}U_n(x,y,A,B) \\ &= \widehat{P}U_{n+1}(x,y,A,B) \\ &= U_n(x,y,A,B) \end{aligned}$$

yani,

$$\begin{aligned} U_n(x,y,A,B) &= \sqrt{\frac{A}{2}}\frac{1}{y}\widehat{D}_x^{-1}\left[x\frac{\partial}{\partial x} - (n+1)\right] \\ &\quad \times \left\{ xB^{-1}\sqrt{2A} - B^{-1}\sqrt{\frac{A}{2}}\widehat{D}_x^{-1}\left[x\frac{\partial}{\partial x} - n\right]\right\} U_n(x,y,A) \end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki denklemde

$$\partial x\widehat{D}_x^{-1} = \widehat{1}$$

olduğu kullanıldığında aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.4.7 *A ve B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı matrisler olmak üzere $AB = BA$ olsun. Bu durumda genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları*

$$\left[\left(2yB - x^2A\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 3Ax\frac{\partial}{\partial x} + An(n+2)\right]U_n(x,y,A,B) = \mathbf{0}$$

ikinci dereceden matris diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

Sonuç 3.4.8 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere II. tip Chebyshev matris polinomları*

$$\left[\left(2yI - x^2A\right)\frac{d^2}{dx^2} - 3Ax\frac{d}{dx} + An(n+2)\right]U_n(x,y,A) = \mathbf{0}$$

ikinci dereceden matris diferansiyel denklemini sağlar.

Şimdi, genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları ile Hermite matris polinomları arasındaki integral dönüşümünü farklı bir bakış açısıyla inceleyelim. $H_n(x, y, A)$ ve $U_n(x, y, A, B)$ polinomları $y = 1$ için tek değişkenli forma indirgenir ve $y = 1$ için (3.4.1) bağıntısından

$$U_n(x, A, B) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{n}{2}}H_n\left(x\sqrt{t}, A\right)dt \tag{3.4.9}$$

elde edilir. Yukarıdaki integral dönüşümünde $s = x\sqrt{t}$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$U_n(x, A; B) = \frac{2}{n!x^{n+2}}\int_0^\infty s^{n+1}\exp\left(-\frac{Bs^2}{x^2}\right)H_n(s, A)\,ds$$

bulunur. O halde, $U_n(x, A, B)$ tek değişkenli genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları

$$f(\xi, A, B) = \exp\left(-\frac{B\xi^2}{x^2}\right)H_n(\xi, A)$$

matris fonksiyonunun Mellin dönüşümüdür. Ayrıca uygun $f(x)$ fonksiyonu için operatör teorideki

$$\exp\left(\lambda x\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x) = f(x\exp\lambda)$$

özelliği kullanılarak (3.4.9) bağıntısı

$$U_n(x, A, B) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-Bt}t^{\frac{n}{2}}t^{\frac{1}{2}x\frac{d}{dx}}dtH_n(x, A) \tag{3.4.10}$$

biçiminde yazılır. Euler tarafından

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$$

integral gösterimi ile tanımlanan gamma fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.4.9 *A ve B, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı matrisler ve $AB = BA$ olsun. Bu durumda genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları*

$$n!U_n(x, A, B) = B^{-\widehat{Q}}\Gamma\left(\widehat{Q}\right)H_n(x, A) \tag{3.4.11}$$

bağıntısını sağlar. Burada $\widehat{Q} = \left[1 + \frac{1}{2}\left(n + x\frac{d}{dx}\right)\right]$'dir.

Sonuç 3.4.10 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere II. tip Chebyshev matris polinomları aşağıdaki operatör formülünü sağlar.*

$$n!U_n(x, A) = \Gamma\left(\widehat{Q}\right)H_n(x, A)\,. \tag{3.4.12}$$

Şimdi de genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomlarının $B = \alpha I$ özel durumunu inceleyelim.

Önerme 3.4.11 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda*

$$U_n(x, y, A, \alpha I) = \exp\left[y(2A)^{-1}\widehat{D}_\alpha^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\left(x\sqrt{2A}\right)^n}{\alpha^{n+1}} \tag{3.4.13}$$

dir.

İspat. Eşitliğin sağ tarafındaki üstel fonksiyon $y = 0$ komşuluğunda seriye açıldığında

$$\begin{aligned}\exp\left[y(2A)^{-1}\widehat{D}_\alpha^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\left(x\sqrt{2A}\right)^n}{\alpha^{n+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k(2A)^{-k}}{k!}\widehat{D}_\alpha^{-k}\left[\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right]\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}\left[\left(x\sqrt{2A}\right)^n\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{y^k\left(\sqrt{2A}\right)^{n-2k}n!}{k!(n-2k)!}\widehat{D}_\alpha^{-k}\left[\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\widehat{D}_\alpha^{-k}\left[\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right] = \frac{(-1)^k\alpha^{-(n-k+1)}}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}$$

olduğundan istenen sonuç ispatlanır. ∎

3.4.2. Genelleştirilmiş I. Tip Chebyshev Matris Polinomları

Bu kesimde, Hermite matris polinomları kullanılarak integral dönüşümü yardımıyla I. tip Chebyshev matris polinomlarının farklı bir genelleştirmesi verilecektir. I. tip Chebyshev polinomları

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(n-k-1)!(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \tag{3.4.14}$$

eşitliği ile tanımlanır (Davis 1975). Bu durumda $\mathbb{C}^{r\times r}$'deki pozitif kararlı A ve B matrisleri için $AB = BA$ olmak üzere genelleştirilmiş I. tip Chebyshev matris polinomları

$$T_n(x, A, B) = \frac{\left(\sqrt{2A}\right)^{-1}}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-Bt}t^{n-1}H_n\left(x, \frac{1}{t}, A\right)dt$$

integral gösterimi ile tanımlanır (Kargin ve Kurt 2014a). İki değişkenli Hermite matris polinomlarının (2.1.4) eşitliği kullanılarak genelleştirilmiş I. tip Chebyshev matris polinomları için

$$T_n(x, A, B) = n\left(\sqrt{2A}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k B^{k-n} (n-k-1)! \left(x\sqrt{2A}\right)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}$$

toplamsal gösterimi elde edilir. Yukarıdaki eşitlik $A = [2]_{1\times 1}$ and $B = [1]_{1\times 1}$ durumunda (3.4.14) bağıntısına indirgenir.

Benzer şekilde bu tanım

$$T_n(x, y, A, B) = n\left(\sqrt{2A}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k B^{k-n} (n-k-1)! \left(x\sqrt{2A}\right)^{n-2k} y^k}{k!\,(n-2k)!}$$

eşitliği ya da

$$T_n(x, y, A, B) = \frac{\left(\sqrt{2A}\right)^{-1}}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-Bt} t^{n-1} H_n\left(x, \frac{y}{t}, A\right) dt$$

integral dönüşümüyle genelleştirilmiş iki değişkenli I. tip Chebyshev matris polinomlarına genişletilir.

3.5. Genelleştirilmiş Humbert Matris Polinomları

Bu bölümde, genelleştirilmiş Humbert matris polinomlarının (G-HMP) toplamsal gösterimi, bazı rekürans bağıntıları elde edilecek ve G-HMP'nın m. dereceden matris diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğu gösterilecektir. Son olarak Pincherle matris polinomlarının sağladığı bir üçüncü dereceden matris diferansiyel denklemi verilecektir. Bölüm boyunca A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi bir matris ve m pozitif bir tamsayı olarak alınacaktır.

Teorem 3.5.1 *G-HMP'nın toplamsal gösterimi*

$$P_n^A(m, x, y, c) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]} \frac{(-1)^k c^{-(A+(n-mk+k)I)} (A)_{n-mk+k}}{k!\,(n-mk)!} (mx)^{n-mk} y^k \tag{3.5.1}$$

dır.

İspat. (2.6.2) bağıntısı

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^A(m, x, y, c)\, t^n = c^{-A}\left(1 - c^{-1}mxt + c^{-1}yt^m\right)^{-A}$$

biçiminde yazılabilir. (2.0.4) bağıntısı ve binom açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n^A(m,x,y,c)\,t^n &= c^{-A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A)_n}{n!}\left(c^{-1}mxt+c^{-1}yt^m\right)^n \\ &= c^{-A}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(A)_n}{k!\,(n-k)!}c^{-nI}(mxt)^{n-k}y^k t^{mk}\end{aligned}$$

elde edilir. (2.0.8) ve (2.0.9) bağıntılarından istenen sonuç ispatlanır. ■

(3.5.1) bağıntısından

$$P_n^A(m,x,y,c)=c^{-A}P_n^A\left(m,\frac{x}{c},\frac{y}{c}\right)$$

dir. Ayrıca, $x=0$ ve $y=0$ değerleri için sırasıyla

$$P_{nm}^A(m,0,y,c)=\frac{(-1)^n c^{-(A+nI)}(A)_n y^n}{n!},\quad P_n^A(m,x,0,c)=\frac{c^{-(A+nI)}(A)_n (mx)^n}{n!}$$

elde edilir.

G-HMP'nın en önemli özelliği, (3.5.1) açık gösteriminde uygun parametre seçimleriyle aşağıda verilen bazı matris polinomlarına indirgenmesidir.

$$\begin{aligned}P_n^A(2,x,y,1) &= C_n^A(x,y), \\ P_n^{[1]_{1\times 1}}\left(2,x\sqrt{\frac{A}{2}},y,1\right) &= U_n(x,y,A), \\ P_n^{\left[\frac{1}{2}\right]_{1\times 1}}\left(2,x\sqrt{\frac{A}{2}},1,1\right) &= P_n(x,A), \\ P_n^A(3,x,1,1) &= h_n^A(x).\end{aligned}$$

Burada $C_n^A(x,y)$: iki değişkenli Gegenbauer matris polinomları (Shehata 2012b), $U_n(x,y,A)$: iki değişkenli II. tip Chebyshev matris polinomları (Batahan 2006), $P_n(x,A)$: Legendre matris polinomları (Upadhyaya ve Shehata 2011), $h_n^A(x)$: Pincherle matris polinomlarıdır (Khammash ve Shehata 2012a).

Şimdi G-HMP için bazı rekürans bağıntıları verelim. (2.6.2) bağıntısında sırasıyla c,x,y,t değişkenlerine göre türev alınacak olursa

$$\frac{\partial}{\partial c}F(x,y,t,c,A) = \frac{-A}{c-mxt+yt^m}F(x,y,t,c,A), \tag{3.5.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,t,c,A) = \frac{t}{c-mxt+yt^m}mAF(x,y,t,c,A), \tag{3.5.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,t,c,A) = \frac{-t^m}{c-mxt+yt^m}AF(x,y,t,c,A), \tag{3.5.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x,y,t,c,A) = \frac{(x-yt^{m-1})}{c-mxt+yt^m}mAF(x,y,t,c,A) \tag{3.5.5}$$

elde edilir. (3.5.3) ve (3.5.4) bağıntıları sırasıyla

$$mA\left(c-mxt+yt^{m}\right)^{-(A+I)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}P_{n+1}^{A}\left(m,x,y,c\right)t^{n} \tag{3.5.6}$$

ve

$$-A\left(c-mxt+yt^{m}\right)^{-(A+I)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}P_{n+m}^{A}\left(m,x,y,c\right)t^{n} \tag{3.5.7}$$

şeklinde yazılırsa (3.5.6) ve (3.5.7) bağıntılarının sol tarafına (2.6.2) bağıntısı uygulandığında

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}mAP_{n}^{A+I}\left(m,x,y,c\right)t^{n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}P_{n+1}^{A}\left(m,x,y,c\right)t^{n},\\ \sum_{n=0}^{\infty}-AP_{n}^{A+I}\left(m,x,y,c\right)t^{n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}P_{n+m}^{A}\left(m,x,y,c\right)t^{n}\end{aligned}$$

bulunur. Burada t^{n} terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}P_{n}^{A}\left(m,x,y,c\right) &= mAP_{n-1}^{A+I}\left(m,x,y,c\right),\\ \frac{\partial}{\partial y}P_{n}^{A}\left(m,x,y,c\right) &= -AP_{n-m}^{A+I}\left(m,x,y,c\right)\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

elde edilir ve tümevarımla

$$\frac{\partial^{r}}{\partial x^{r}}P_{n}^{A}\left(m,x,y,c\right) = m^{r}\left(A\right)_{r}P_{n-r}^{A+rI}\left(m,x,y,c\right), \tag{3.5.9}$$

$$\frac{\partial^{r}}{\partial y^{r}}P_{n}^{A}\left(m,x,y,c\right) = \left(-1\right)^{r}\left(A\right)_{r}P_{n-mr}^{A+rI}\left(m,x,y,c\right) \tag{3.5.10}$$

bulunur. O halde G-HMP için

$$\frac{\partial^{r}}{\partial x^{r}}P_{n}^{A}\left(m,x,y,c\right)+\left(-1\right)^{r-1}m^{r}\frac{\partial^{r}}{\partial y^{r}}P_{n+(m-1)r}^{A}\left(m,x,y,c\right)=\mathbf{0} \tag{3.5.11}$$

kısmi diferansiyel denklemi sağlanır.

Benzer şekilde, (3.5.2) ve (3.5.3) bağıntılarına aynı yöntem uygulandığında

$$\frac{\partial^{r}}{\partial x^{r}}P_{n}^{A}\left(m,x,y,c\right)=\left(-1\right)^{r}m^{r}\frac{\partial^{r}}{\partial c^{r}}P_{n-r}^{A}\left(m,x,y,c\right), \tag{3.5.12}$$

(3.5.3) ve (3.5.4) bağıntılarına aynı yöntem uygulandığında

$$\frac{\partial^{r}}{\partial y^{r}}P_{n}^{A}\left(m,x,y,c\right)=\frac{\partial^{r}}{\partial c^{r}}P_{n-mr}^{A}\left(m,x,y,c\right) \tag{3.5.13}$$

elde edilir.

(3.5.3) ve (3.5.5) bağıntılarına (2.6.2) bağıntısı uygulandığında

$$\begin{aligned}\left(x-yt^{m-1}\right)\frac{\partial}{\partial x}F\left(x,y,t,c,A\right)-t\frac{\partial}{\partial t}F\left(x,y,t,c,A\right) &= \mathbf{0}\\ \sum_{n=0}^{\infty}x\frac{\partial}{\partial x}P_n^A\left(m,x,y,c\right)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}y\frac{\partial}{\partial x}P_n^A\left(m,x,y,c\right)t^{n+m-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}nP_n^A\left(m,x,y,c\right)t^n\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{\partial}{\partial x}P_0^A\left(m,x,y,c\right)=\mathbf{0}$ olduğundan t^n terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında

$$x\frac{\partial}{\partial x}P_n^A\left(m,x,y,c\right)-nP_n^A\left(m,x,y,c\right)=y\frac{\partial}{\partial x}P_{n+1-m}^A\left(m,x,y,c\right) \tag{3.5.14}$$

bulunur. Bununla birlikte, sırasıyla (3.5.3) ve (3.5.5) bağıntıları

$$\frac{mA\left(1-mxt+yt^m\right)^{-A}}{1-mxt+yt^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}P_n^A\left(m,x,y,c\right)t^{n-1} \tag{3.5.15}$$

ve

$$\frac{\left(x-yt^{m-1}\right)mA\left(1-mxt+yt^m\right)^{-A}}{\left(1-mxt+yt^m\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n^A\left(m,x,y,c\right)t^{n-1} \tag{3.5.16}$$

şeklinde yazılıp, (3.5.15) bağıntısı $1-y\left(m-1\right)t$ ile, (3.5.16) bağıntısı mt ile çarpılıp taraf tarafa farkları alınarak uygun düzenlemeler yapıldığında

$$y\left(m-1\right)\frac{\partial}{\partial x}P_{n+1-m}^A\left(m,x,y,c\right)=\frac{\partial}{\partial x}P_{n+1}^A\left(m,x,y,c\right)-m\left(A+nI\right)P_n^A\left(m,x,y,c\right) \tag{3.5.17}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda (3.5.14) kullanıldığında

$$\frac{\partial}{\partial x}P_{n+1}^A\left(m,x,y,c\right)=\left(m-1\right)x\frac{\partial}{\partial x}P_n^A\left(m,x,y,c\right)+\left(mA+nI\right)P_n^A\left(m,x,y,c\right) \tag{3.5.18}$$

bulunur. Son olarak, (3.5.8) bağıntısı, sırasıyla (3.5.17) ve (3.5.18) bağıntılarında kullanıldığında G-HMP için

$$m\left(A+nI\right)P_n^A\left(m,x,y,c\right)=mAP_n^{A+I}\left(m,x,y,c\right)-m\left(m-1\right)AyP_{n-m}^{A+I}\left(m,x,y,c\right), \tag{3.5.19}$$

$$\left(mA+nI\right)P_n^A\left(m,x,y,c\right)=mAP_n^{A+I}\left(m,x,y,c\right)-m\left(m-1\right)AxP_{n-1}^{A+I}\left(m,x,y,c\right) \tag{3.5.20}$$

iki farklı rekürans bağıtısı elde edilir.

(3.5.5) bağıntısı ele alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-mxt+yt^m\right)nP_n^A\left(m,x,y,c\right)t^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x-yt^{m-1}\right)mAP_n^A\left(m,x,y,c\right)t^n$$

bulunur. Uygun indis değişiklikleri yapılarak t^n terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında G-HMP için

$$\begin{aligned} c\,(n+1)\,P_{n+1}^{A}\,(m,x,y,c) &= -mx\,(A+nI)\,P_{n}^{A}\,(m,x,y,c) \\ &\quad -y\,[mA+(n-m+1)\,I]\,P_{n+1-m}^{A}\,(m,x,y,c) \end{aligned} \tag{3.5.21}$$

üç terimli rekürans bağıntısı elde edilir.

Şu ana kadar elde edilen rekürans bağıntılarını aşağıdaki teoremde verelim.

Önerme 3.5.2 *G-HMP için (3.5.11)'deki türev formülü, (3.5.19), (3.5.20) ve (3.5.21)'deki rekürans bağıntıları sağlanır.*

Şimdi, G-HMP'nın sağladığı matris diferansiyel denklemini inceleyelim. $(f_r)_{r=0}^{n}$ matris dizisi

$$f_t = f\,(t) = (n-t)\left(\frac{(n-t)\,I + m\,(A+tI)}{m}\right)_{m-1}$$

ve Δ fark operatörü ile E kaydırma (shift) operatörleri

$$\Delta f_r = f_{r+1} - f_r \quad \text{ve} \quad E f_r = f_{r+1}$$

biçiminde tanımlansın. Dolayısıyla bu iki operatörün k. katları

$$\Delta^0 f_r = f_r, \quad \Delta^k f_r = \Delta\left(\Delta^{k-1} f_r\right), \quad E^k f_r = f_{r+k}$$

dır.

Teorem 3.5.3 *Genelleştirilmiş Humbert matris polinomları*

$$c^{m-1} y \frac{\partial^m}{\partial x^m} P_n^A\,(m,x,y,c) + \sum_{s=0}^{m} a_s x^s \frac{\partial^s}{\partial x^s} P_n^A\,(m,x,y,c) = \mathbf{0} \tag{3.5.22}$$

m. dereceden matris diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Burada a_s katsayıları

$$a_s = \frac{m^{m-1}}{s!} \Delta^s f_0 \tag{3.5.23}$$

dır.

İspat. $p = \left[\frac{n}{m}\right]$ ve $0 \le q \le m-1$ olmak üzere $n = mp+q$ olsun. (3.5.1) bağıntısında x'e göre s defa türev alınıp x^s ile çarpılırsa

$$x^s \frac{\partial^s}{\partial x^s} P_n^A\,(m,x,y,c) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-s}{m}\right]} \frac{(-1)^k\, c^{-(A+(n-mk+k)I)}\, (A)_{n-(m-1)k}}{k!\,(n-mk-s)!} (mx)^{n-mk} y^k$$

elde edilir. Bu durumda $s=m$ için

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}P_n^A(m,x,y,c)=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k c^{-(A+(n-mk+k)I)}(A)_{n-(m-1)k}\,m^m}{k!\,(n-m(k+1))!}(mx)^{n-m(k+1)}y^k$$

dır. Burada $\left[\frac{n-s}{m}\right]=\begin{cases} p & ;s\leq q\ , \\ p-1 & ;s>q \end{cases}$ dir. Yukarıdaki iki bağıntı (3.5.22) diferansiyel denkleminde yerine yazılıp katsayılar karşılaştırıldığında $k=0,1,2,\cdots,p-1$ için

$$\sum_{s=0}^{m}\binom{n-mk}{s}s!a_s=m^m k\,(A+(n-(m-1)k)I)_{m-1} \tag{3.5.24}$$

ve

$$\sum_{s=0}^{q}\binom{n-mp}{s}s!a_s=m^m p\,(A+(n-(m-1)k)I)_{m-1} \tag{3.5.25}$$

elde edilir. Bu durumda, (3.5.25) bağıntısı

$$\sum_{s=0}^{q}\binom{q}{s}m^{m-1}\Delta^s f_0=m^{m-1}(n-q)\left(A+\left(q+\frac{n-q}{m}\right)I\right)_{m-1}$$

biçiminde yazılabilir, çünkü yukarıdaki bağıntı

$$(1+\Delta)^q f_0=E^q f_0=f_q=f(q)$$

bağıntısına denktir. Ayrıca, $k=0,1,2,\ldots,p-1$ için (3.5.24) bağıntısı da

$$\sum_{s=0}^{m}\binom{n-mk}{s}\Delta^s f_0=f_{n-mk} \tag{3.5.26}$$

şeklinde yazılabilir. Çünkü $f(t)$, m. dereceden bir matris polinomudur ve (3.5.26) bağıntısı f fonksiyonunun $t=n-mk$ noktasındaki fark formülüdür. ■

Sonuç 3.5.4 *Pincherle matris polinomları*

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{32}{27}x^3\right)\frac{d^3}{dx^3}h_n^A(x)-\frac{16}{9}(2A+3I)\,x^2\frac{d^2}{dx^2}h_n^A(x)\\ -\frac{8}{27}(3n(2A+(n+1)I)-(3A+2I)(3A+5I))\,x\frac{d}{dx}h_n^A(x)\\ +\frac{8}{27}n(3A+nI)(3A+(n+1)I)\,h_n^A(x)=\mathbf{0}\end{aligned}$$

üçüncü dereceden matris diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

3.5.1. G-HMP için İntegral Gösterimi ve Bazı Uygulamaları

Bu kesimde, G-HMP ile klasik genelleştirilmiş Hermite polinomları arasında bir integral gösterimi elde edilerek, G-HMP'nın sağladığı toplam formülü ve bazı operatör formülleri ispatlanacaktır.

Klasik iki değişkenli genelleştirilmiş Lahiri Hermite polinomları (G-LHP)

$$H_{n,m}(x,y) = n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]} \frac{(-1)^k y^k (mx)^{n-mk}}{k!(n-mk)!} \tag{3.5.27}$$

eşitliği ile tanımlanır ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n,m}(x,y) \frac{t^n}{n!} = \exp(mxt - yt^m) \tag{3.5.28}$$

üreteç fonksiyonuna sahiptir. Bu durumda

$$H_{n,m}(x,y) = y^{\frac{n}{m}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt[m]{y}}\right) \text{ ve } H_{n,m}(x,1) = H_{n,m}(x)$$

dir. Burada $H_{n,m}(x)$ klasik genelleştirilmiş Lahiri Hermite polinomlarıdır (Lahiri 1971). $H_n(x)$ klasik Hermite polinomları için $H_{n,2}(x,1) = H_n(x)$ ve $g_n^m(x,y)$ genelleştirilmiş Gould–Hopper Hermite polinomları (Gould 1962) olmak üzere $H_{n,m}(x,y) = g_n^m(mx,-y)$'dir. Ayrıca, (2.1.6) bağıntısı $A = [m]_{1\times 1}$ için (3.5.27) bağıntısına indirgenir.

Genelleştirilmiş Gould–Hopper Hermite polinomlarının toplam formülünde (Khan ve Al–Saad 2011) x yerine mx, y yerine $-y$ alınırsa, G-LHP için

$$H_{n+s,m}(w,y) = \sum_{k,r=0}^{n,s} \binom{n}{k}\binom{s}{r} m^{k+r}(w-x)^{k+r} H_{n+s-k-r,m}(x,y) \tag{3.5.29}$$

toplam formülü elde edilir.

Bir sonraki teoremde bu kesimin ana sonucunu verelim.

Teorem 3.5.5 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris, $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $c \in \mathbb{C}$ öyle ki $\operatorname{Re}(c) > 0$ olsun. Bu durumda G-HMP'nın integral gösterimi*

$$P_n^A(m,x,y,c) = \frac{\Gamma^{-1}(A)}{n!} \int_0^{\infty} e^{-ct} t^{A+(n-1)I} H_{n,m}\left(x, \frac{y}{t^{m-1}}\right) dt \tag{3.5.30}$$

dir.

İspat. (3.5.30) bağıntısının sağ tarafında (3.5.27) kullanılacak olursa

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma^{-1}(A)}{n!} \int_0^{\infty} e^{-ct} t^{A+(n-1)I} H_{n,m}\left(mx, \frac{y}{t^{m-1}}\right) dt \\ &\quad = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]} \frac{(-1)^k c^{-(A+(n-mk+k)I)} (mx)^{n-mk} y^k}{k!(n-mk)!} \Gamma^{-1}(A)\Gamma(A+(n-mk+k)) \\ &\quad = P_n^A(m,x,y,c) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.5.5'in bir uygulaması olarak aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 3.5.6 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris, $m \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $c \in \mathbb{C}$ öyleki* $\mathrm{Re}\,(c) > 0$ *olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Humbert matris polinomları*

$$P_{n+s}^{A}(m,w,y,c) = \sum_{k,r=0}^{n,s} \frac{\binom{n}{k}\binom{s}{r}(A)_{k+r}\, m^{k+r}(w-x)^{k+r}}{\binom{n+s}{k+r}(k+r)!} P_{n+s-k-r}^{A+(k+r)I}(m,x,y,c) \tag{3.5.31}$$

toplam formülünü sağlar.

İspat. (3.5.30) gösteriminde n yerine $n+s$ alınıp (3.5.29) bağıntısındaki toplam formülünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_{n+s}^{A}(m,w,y,c) &= \sum_{k,r=0}^{n,s} \frac{(-1)^{k+r}\binom{n}{k}\binom{s}{r}(n+s-k-r)!m^{k+r}(w-x)^{k+r}}{(n+s)!} \\ &\quad \times \frac{\partial^{k+r}}{\partial c^{k+r}} P_{n+s-k-r}^{A}(m,x,y,c) \end{aligned}$$

elde edilir ve (3.5.9) bağıntısından ispat tamamlanır. ■

(3.5.31)'de $k=0$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.5.7 *Genelleştirilmiş Humbert matris polinomları aşağıdaki toplam formülünü gerçekler.*

$$P_{n}^{A}(m,w,y,c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A)_{k}\, m^{k}(w-x)^{k}}{k!} P_{n-k}^{A+kI}(m,x,y,c). \tag{3.5.32}$$

Uyarı 3.5.8 *(3.5.32)'de w yerine $w+x$ alınırsa*

$$P_{n}^{A}(m,x+w,y,c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A)_{k}(mw)^{k}}{k!} P_{n-k}^{A+kI}(m,x,y,c)$$

elde edilir.

Şimdi de, G-LHP ile G-HMP arasındaki integral dönüşümünü farklı bir bakış açısıyla inceleyelim. $H_{n,m}(x,y)$ ve $P_{n}^{A}(m,x,y,c)$ polinomları $y=1$ için tek değişkenli hale dönüşürler ve (3.5.30)'dan

$$P_{n}^{A}(m,x,c) = \frac{\Gamma^{-1}(A)}{n!} \int_{0}^{\infty} e^{-ct} t^{A+\left(\frac{n}{m}-1\right)I} H_{n,m}\left(\frac{xt}{\sqrt[m]{t}}\right) dt \tag{3.5.33}$$

dir. Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$\exp\left(\lambda x\frac{d}{dx}\right)f(x)=f(x\exp\lambda)$$

özelliği kullanılırsa

$$P_n^A(m,x,c)=\frac{\Gamma^{-1}(A)}{n!}\int_0^\infty e^{-ct}t^{A+\left(\frac{n}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)x\frac{d}{dx}-1\right)I}dtH_{n,m}(x)$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıda, (2.2.5) bağıntısı kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.5.9 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris, $m\in\mathbb{Z}^+$ ve $c\in\mathbb{C}$ öyle ki $\operatorname{Re}(c)>0$ olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Humbert matris polinomları aşağıdaki operatör formülünü sağlar.*

$$\Gamma(A)\,n!P_n^A(m,x,c)=\exp\left(-\widehat{Q}\ln c\right)\Gamma\left(\widehat{Q}\right)H_{n,m}(x). \tag{3.5.34}$$

Burada $\widehat{Q}=\left[A+\left(\frac{n}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)x\frac{d}{dx}\right)I\right]$'dır.

Teorem 3.5.10 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris, $m\in\mathbb{Z}^+$ ve $c\in\mathbb{C}$ öyleki $\operatorname{Re}(c)>0$ olsun. G-HMP için aşağıdaki bağıntı sağlanır.*

$$P_n^A(m,x,y,c)=\frac{(A)_n}{n!}\exp\left[y(-m)^{-m}\widehat{D}_c^{-(m-1)}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\right]c^{-(A+nI)}(mx)^n. \tag{3.5.35}$$

İspat. (3.5.12) ve (3.5.13) bağıntılarından

$$(-m)^m\frac{\partial^m}{\partial c^{m-1}\partial y}P_n^A(m,x,y,c)=\frac{\partial^m}{\partial x^m}P_n^A(m,x,y,c)$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$P_n^A(m,x,0,c)=\frac{(A)_n}{n!}c^{-(A+nI)}(mx)^n$$

olduğundan istenen sonuç elde edilir. ■

$A=[1]_{1\times1}$, $m=2$ alınıp xI yerine $x\sqrt{\frac{A}{2}}$ alınırsa (3.5.34) ve (3.5.35) bağıntıları sırasıyla II. tip Chebyshev matris polinomları için elde edilen (3.4.11) ve (3.4.13) bağıntılarına indirgenir.

3.5.2. Gegenbauer Matris Polinomlarının Bazı Özellikleri

Bu kesimde, Gegenbauer matris polinomları ile klasik Hermite polinomlarını içeren bir integral dönüşümü kullanılarak iki değişkenli Gegenbauer matris polinomları için farklı bir üreteç fonksiyonu ve Gegenbauer matris polinomlarını içeren bir seri dönüşüm formülü elde edilecektir. Ayrıca, bu seri dönüşüm formülünün bazı uygulamaları verilecektir.

Teorem 3.5.5'de $c = 1$, $m = 2$ için n yerine $n + p$ alındığında

$$C_{n+p}^{A}(x, y) = \frac{\Gamma^{-1}(A)}{(n+p)!} \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{A+(n+p-1)I} H_{n+p}\left(x, \frac{y}{t}\right) dt$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıda heriki taraf $\frac{(n+p)!}{n!p!} z^n$ ile çarpılıp n üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!p!} C_{n+p}^{A}(x, y) z^n = \frac{\Gamma^{-1}(A)}{p!} \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{A+(p-1)I} \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+p}\left(x, \frac{y}{t}\right) \frac{(zt)^n}{n!} dt$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+p}(x, y) \frac{z^n}{n!} = \exp\left(2xz - yz^2\right) H_p(x - yz, y) \tag{3.5.36}$$

bağıntısı kullanılarak (Rainville 1960)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!p!} C_{n+p}^{A}(x, y) z^n = \frac{\Gamma^{-1}(A)}{p!} \int_{0}^{\infty} e^{-t\left(1-2xz+yz^2\right)} t^{A+(p-1)I} H_p\left(x - yz, \frac{y}{t}\right) dt$$

elde edilir. O halde, iki değişkenli Gegenbauer matris polinomları için aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.5.11 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris ve $p \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere iki değişkenli Gegenbauer matris polinomlarının diğer bir üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} C_{n+p}^{A}(x, y) z^n = \left(1 - 2xz + yz^2\right)^{-(A+pI)} C_p^{A}\left(x - yz, \left(1 - 2xz + yz^2\right) y\right) \tag{3.5.37}$$

dir. Burada $|2xz - yz^2| < 1$'dir.

(3.5.37) bağıntısı $y = 1$ durumunda Gegenbauer matris polinomları için Khammash tarafından farklı bir yolla ispatlanan bağıntıya indirgenir (Khammash 2009).

Bu kesimdeki ana teoreme geçmeden önce aşağıdaki önteoremi ifade edelim.

Lemma 3.5.12 *(Boyadzhiev ve Dil 2012) Klasik Hermite polinomları için seri dönüşüm formülü*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{2xt-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_n(x-t) \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a_k \right\}$$

dır. Burada

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

olacak şekilde sıfırın komşuluğunda analitik bir fonksiyondur.

Teorem 3.5.13 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere Gegenbauer matris polinomları için seri dönüşüm formülü*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^A(x) z^n = \rho^{-A} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n^A\left(\frac{x-z}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right) z^n \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a_k \right\} \quad (3.5.38)$$

dır. Burada $\rho = 1 - 2xz + yz^2$ olmak üzere $|1-\rho| < 1$'dir.

İspat. $c = 1$ ve $m = 2$ için (3.5.33) bağıntısı

$$C_n^A(x) = \frac{\Gamma^{-1}(A)}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{A+\left(\frac{n}{2}-1\right)I} H_n\left(x\sqrt{t}\right) dt$$

formuna indirgenir. Yukarıdaki bağıntıda her iki taraf $a_n z^n$ ile çarpılıp n üzerinden toplam alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^A(x) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n^A(x-z, \rho) z^n \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a_k \right\}$$

elde edilir ve

$$C_n^A(x, c) = c^{-A} C_n^A\left(\frac{x}{c}, \frac{1}{c}\right)$$

olduğu kullanıldığında ispat tamamlanır. ■

(3.5.38) bağıntısında dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta, eşitliğin sol tarafında tek değişkenli Gegenbauer matris polinomlarının sağ tarafında ise iki değişkenli Gegenbauer matris polinomlarının bulunmasıdır.

Teorem 3.5.13'ün ilk uygulamasını aşağıdaki sonuçta verelim.

Sonuç 3.5.14 *$B \in \mathbb{C}^{r\times r}$ ve C, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de (2.2.2) koşulunu sağlayan bir matris olsun. Bu durumda hipergeometrik matris fonksiyonları ve Gegenbauer matris polinomlarını içeren bilateal seri gösterimi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x) (B)_n \left[(C)_n\right]^{-1} (zy)^n = \rho^{-A} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n^A\left(\frac{x-z}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right) {}_2F_1(-nI, B; C; y) z^n \quad (3.5.39)$$

dir.

İspat. (3.5.38) bağıntısında

$$ {}_2F_1(-nI,B;C;y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\underbrace{(B)_k\left[(C)_k\right]^{-1}y^k}_{a_k} $$

olduğu kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. ■

Yukarıdaki sonuç kullanılarak, hipergeometrik matris fonksiyonları ile iki değişkenli Gegenbauer matris polinomlarını içeren bilateal matris üreteç fonksiyonu elde edilebilir. (3.5.39)'da verilen bilateral seri dönüşüm formülünde $C=2A$ alınıp

$$ \sum_{n=0}^{\infty}(B)_n\left[(2A)_n\right]^{-1}C_n^A(x)\,r^n=(1-xr)^{-B}\ {}_2F_1\Big(\frac{B}{2},\frac{B}{2}+\frac{I}{2};A+\frac{I}{2};\frac{(x^2-1)\,r^2}{(1-xr)^2}\Big) $$

olduğu kullanılırsa (Altın ve Çekim 2013)

$$ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ {}_2F_1(-nI,B;2A;y)C_n^A\left(\frac{x-z}{\rho},\frac{1}{\rho}\right)z^n $$
$$ =(1-xyz)^{-B}\exp\left(A\ln\rho\right)\ {}_2F_1\Big(\frac{B}{2},\frac{B}{2}+\frac{I}{2};A+\frac{I}{2};\frac{(x^2-1)\,(yz)^2}{(1-xyz)^2}\Big) $$

bilateral üreteç fonksiyonu elde edilir. Burada $AB=BA$ dır.

Bir sonraki sonuç için

$$ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\binom{p+k}{k}=(-1)^n\binom{p}{n} $$

binom dönüşüm formülü kullanılacaktır (Riordan 1979). Burada p herhangi bir karmaşık sayıdır ve $a_k=\binom{p+k}{k}$'nın üreteç fonksiyonu

$$ (1-t)^{-p-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p+k}{k}t^k $$

dır.

Sonuç 3.5.15 *Herhangi bir p karmaşık sayısı için*

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p+n}{n}C_n^A(x)\,z^n=\rho^{-A}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}C_n^A\left(\frac{x-z}{\rho},\frac{1}{\rho}\right)z^n $$

dir.

Bu formülün önemli tarafı, p pozitif tamsayı iken yukarıdaki bağıntının sağ tarafının sonlu hale dönüşmesidir. O halde, Gegenbauer matris polinomları için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p+n}{n}C_n^A(x)\,z^n=\rho^{-A}\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}C_n^A\left(\frac{x-z}{\rho},\frac{1}{\rho}\right)z^n \tag{3.5.40}$$

biçiminde kapalı bir formül elde edilir.

Karmaşık sayılara genişletilmiş ikinci tip Stirling sayıları için

$$(-1)^n\,n!\left\{\begin{matrix}\alpha\\ n\end{matrix}\right\}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,k^{\alpha}$$

bağıntısı sağlanır (Butzer vd. 2003). Burada $0\neq\alpha\in\mathbb{C}$'dır. $a_k=k^{\alpha}$ için yukarıdaki bağıntı (3.5.38)'de kullanılacak olursa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.5.16 *$\alpha\neq 0$ karmaşık sayısı için*

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^{\alpha}C_n^A(x)\,z^n=\rho^{-A}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ n\end{matrix}\right\}n!C_n^A\left(\frac{x-z}{\rho},\frac{1}{\rho}\right)z^n$$

seri eşitliği sağlanır.

Bu formülde $\alpha=m\in\mathbb{Z}\cup\{0\}$ alınacak olursa $m<n$ için $\left\{\begin{smallmatrix}m\\ n\end{smallmatrix}\right\}=0$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^{\alpha}C_n^A(x)\,z^n=\rho^{-A}\sum_{n=0}^{m}\left\{\begin{matrix}m\\ n\end{matrix}\right\}n!C_n^A\left(\frac{x-z}{\rho},\frac{1}{\rho}\right)z^n \tag{3.5.41}$$

biçiminde Gegenbauer matris polinomları için Stirling sayılarını içeren başka bir bağıntı elde edilir.

(3.5.41) bağıntısında özel olarak $A=[\gamma]_{1\times 1}$ alınırsa klasik Gegenbauer polinomları için Srivastava tarafından farklı bir yolla ispatlanan bağıntı elde edilir (Srivastava 2000).

3.6. Gamma Matris Fonksiyonlarının Sağladığı Özellikler

Bu bölümde, gamma matris fonksiyonu için Legendre çift kat formülü ve Euler yansıma formülü verilecektir. Dolayısıyla, gamma matris fonksiyonunun tanım kümesi genişletilecektir. Ayrıca, sinüs matris fonksiyonu için sonsuz çarpım formülü elde edilecektir.

Önerme 3.6.1 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de pozitif kararlı bir matris olmak üzere gamma matris fonksiyonu*

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2A)=2^{2A-I}\Gamma(A)\,\Gamma\left(A+\frac{I}{2}\right) \tag{3.6.1}$$

Legendre çift kat formülünü gerçekler.

İspat. (2.2.1) bağıntısında $P = 2A$ alınırsa

$$(2A)_{2n} = 2^{2n} (A)_n \left(A + \frac{I}{2} \right)_n$$

elde edilir. (2.0.3) ve (2.2.3) bağıntılarından

$$\Gamma (2A) \Gamma^{-1} (A) \Gamma^{-1} \left(A + \frac{I}{2} \right) = 2^{-2n} \Gamma (2A + 2nI) \Gamma^{-1} (A + nI) \Gamma^{-1} \left(A + \frac{I}{2} + nI \right) \tag{3.6.2}$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıda (2.2.6) bağıntısı kullanıldığında

$$\begin{aligned} &\Gamma (2A) \Gamma^{-1} (A) \Gamma^{-1} \left(A + \frac{I}{2} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)^{-2A} \Gamma (2A + 2nI)}{(2n-1)!} \right] \left[(n-1)! \Gamma^{-1} (A + nI) n^{A} \right] \\ &\times \left[(n-1)! \Gamma^{-1} \left(A + \frac{I}{2} + nI \right) n^{A + \frac{I}{2}} \right] \cdot \left[\frac{(2n-1)! 2^{2A} n^{-\frac{I}{2}}}{2^{2n} (n-1)! (n-1)!} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve uygun düzenlemelerle

$$\Gamma (2A) \Gamma^{-1} (A) \Gamma^{-1} \left(A + \frac{I}{2} \right) = 2^{2A} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)! n^{-\frac{I}{2}}}{2^{2n} (n-1)! (n-1)!}$$

olduğu gösterilir. Bununla birlikte, C, A'dan bağımsız bir matris olmak üzere

$$2^{-2A} \Gamma (2A) \Gamma^{-1} (A) \Gamma^{-1} \left(A + \frac{I}{2} \right) = C$$

dir. $A = \frac{I}{2}$ için $\Gamma^{-1} \left(\frac{I}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} I$ olduğundan

$$C = \frac{2^{-I}}{\sqrt{\pi}}$$

bulunur ve istenen sonuç elde edilir. ■

Lemma 3.6.2 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi x değişkeni için $\forall k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $k \notin \sigma (xA)$ koşulunu sağlayan bir matris olsun. Bu durumda*

$$\Phi (xA) = \Gamma (xA) \Gamma (I - xA) \sin \pi x A \tag{3.6.3}$$

ise $\Phi (xA + I) = \Phi (xA)$'dır.

İspat. $n = 1$ için (2.2.3) bağıntısında xA ve $-xA$ değerleri için

$$\Gamma (xA + I) = xA \Gamma (xA) \tag{3.6.4}$$

$$\Gamma\left(I-xA\right)=-xA\Gamma\left(-xA\right) \tag{3.6.5}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\Phi\left(xA+I\right)=\Gamma\left(xA+I\right)\Gamma\left(-xA\right)\sin\pi(xA+I)$$

olduğundan burada (3.6.4), (3.6.5) bağıntıları ve $\sin\pi(xA+I)=-\sin\pi xA$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Phi(xA+I) &= -xA\Gamma(xA)\left(xA\right)^{-1}\Gamma(-xA+I)(-\sin\pi xA)\\ &= \Gamma(xA)\Gamma(I-xA)\sin\pi xA=\Phi\left(xA\right)\end{aligned}$$

elde edilir. ■

(3.6.1) bağıntısı

$$\Gamma\left(\frac{xA}{2}\right)\Gamma\left(\frac{xA+I}{2}\right)=2\sqrt{\pi}2^{-xA}\Gamma(xA)$$

şeklinde yazılır ve burada xA yerine $I-xA$ alınıp (3.6.3) bağıntısı kullanıldığında

$$\Phi\left(\frac{xA}{2}\right)\Phi\left(\frac{xA+I}{2}\right)=\pi\Phi\left(xA\right)$$

elde edilir. (3.6.4) bağıntısı ve $\sin xA$'nın seri açılımından

$$\Phi\left(xA\right)=\Gamma\left(xA+I\right)\Gamma(I-xA)\left(\pi-\frac{\pi^3\left(xA\right)^2}{3!}+\frac{\pi^5\left(xA\right)^4}{5!}-\ldots\right)$$

bulunur. $x=0$ için yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı πI olduğundan $\Phi\left(\mathbf{0}\right)=\pi I$'dır. $g\left(xA\right)$, $\log\Phi\left(xA\right)$'nın x değişkenine göre ikinci türevi olsun. Ayrıca,

$$\log\Phi\left(xA\right)=\log(\Gamma(xA)\Gamma(I-xA)\sin\pi xA)$$

matris fonksiyonu periyodik olduğundan $g\left(xA\right)$ matris fonksiyonu da periyodiktir ve

$$g\left(xA\right)=\frac{1}{4}\left[g\left(\frac{xA}{2}\right)+g\left(\frac{xA+I}{2}\right)\right] \tag{3.6.6}$$

biçiminde yazılabilir. $g\left(xA\right)$, $[0,1]$ aralığında sürekli olduğundan, $\left\|g\left(xA\right)\right\|\le M$ olacak şekilde sınırlıdır. $g\left(xA\right)$, periyodik ve her x değeri için bir pozitif M sayısı ile sınırlı olduğundan (3.6.6)'da her iki tarafın 2-normu alınırsa

$$\left\|g\left(xA\right)\right\|\le\frac{1}{4}\left(\left\|g\left(\frac{xA}{2}\right)\right\|+\left\|g\left(\frac{xA+I}{2}\right)\right\|\right)\le\frac{M}{2}$$

elde edilir. Buradan $g\left(xA\right)$, $\frac{M}{2}$ ile sınırlandırılabilir. Benzer şekilde devam edilirse $g\left(xA\right)=\mathbf{0}$ olduğu görülür. $\log\Phi\left(xA\right)$'nın ikinci türevi olarak tanımlanan $g\left(xA\right)=\mathbf{0}$ olduğundan $\log\Phi\left(xA\right)$ doğru denklemi belirtir. Ayrıca, $\log\Phi\left(xA\right)$ periyodik olduğundan $\log\Phi(xA)$ ve dolayısıyla $\Phi(xA)$ sabittir. Bu durumda $\Phi(\mathbf{0}) = \pi I$ olduğundan negatif olmayan her x değeri için

$$\Phi(xA) = \Gamma(xA)\,\Gamma(I - xA)\sin\pi xA = \pi I \tag{3.6.7}$$

dır.

$x = 1$ alınırsa gamma matris fonksiyonu için aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.6.3 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $k \notin \sigma(A)$ koşulunu sağlayan matris olsun. Bu durumda gamma matris fonksiyonu*

$$\Gamma(A)\,\Gamma(I - A) = \pi\,[\sin\pi A]^{-1} \tag{3.6.8}$$

Euler yansıma formülünü sağlar.

Bu fonksiyonel eşitlik gamma matris fonksiyonu için önemli bilgiler vermektedir. Jódar ve Cortes'in tanımıyla özdeğerleri sıfırdan büyük matrislerin gamma değerleri hesaplanabilirken, (3.6.8) bağıntısı

$$\Gamma(A) = \pi\,[\Gamma(I - A)\sin\pi A]^{-1} \tag{3.6.9}$$

biçiminde yazılırsa bu formül ile özdeğerleri sıfırdan küçük ve tamsayı olmayan matrislerin de gamma değerleri hesaplanabilir. Örneğin;

$A = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\mathbb{C}^{2\times 2}$ de bir matris olsun. Bu durumda $\sigma(A) = \left\{\frac{-7}{2}, \frac{-1}{2}\right\}$' dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\Gamma(I - A) &= \int_0^\infty t^{-A}e^{-t}dt = \int_0^\infty \begin{bmatrix} t^{\frac{7}{2}} & 0 \\ t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{7}{2}} & t^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) & 0 \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) & \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{105}{16}\sqrt{\pi} & 0 \\ -\frac{97}{16}\sqrt{\pi} & \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dir. Bununla birlikte,

$$\sin(xA) = \frac{\exp(ixA) - \exp(-ixA)}{2i}$$

olduğundan

$$\sin\pi A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu durumda (3.6.9) bağıntısından

$$\Gamma(A) = \begin{bmatrix} \frac{16}{105}\sqrt{\pi} & 0 \\ -\frac{226}{105}\sqrt{\pi} & -2\sqrt{\pi} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Sonuç 3.6.4 *A, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de herhangi bir matris olmak üzere xA matrisi tersinir ise sinüs matris fonksiyonu*

$$\sin \pi xA = \pi xA \prod_{p=1}^{\infty} \left(I - \frac{(xA)^2}{p^2} \right)$$

sonsuz çarpım gösterimini sağlar.

İspat. (3.6.5) bağıntısının tersi alınarak (3.6.7) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sin \pi xA &= \pi x \Gamma^{-1} (I - xA) \Gamma^{-1} (xA) \\ &= -\pi x \Gamma^{-1} (-xA) (xA)^{-1} \Gamma^{-1} (xA) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, (2.2.8) bağıntısından ispat tamamlanır. ∎

3.7. Riemann Zeta Matris Fonksiyonu

Bu bölümde, Riemann zeta matris fonksiyonu tanımlanarak, sağladığı integral gösterimleri ve bir fonksiyonel eşitlik verilecektir.

P, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de her $z \in \sigma(P)$ için $\operatorname{Re}(z) > 1$ spektral koşulunu sağlayan bir matris olsun. (2.0.1) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| n^{-P} \right\| &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\| e^{-P \ln n} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha(-P) \ln n} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left(\|P\| \sqrt{r} \ln n \right)^k}{k!} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta(P) \ln n} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left(\|P\| \sqrt{r} \ln n \right)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left(\|P\| \sqrt{r} \right)^k}{k!} \zeta^{(k)} (\beta(P)) < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\zeta^{(k)}(s)$ klasik Riemann zeta fonksiyonun k. türevidir. Bu durumda

$$\zeta(P) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-P} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-P \ln n)$$

olarak tanımlanan Riemann zeta matrix fonksiyonu iyi tanımlıdır.

Gamma matris fonksiyonunda $n \geq 1$ için $t = nx$ alınırsa

$$\Gamma(P) = \int_0^{\infty} e^{-tI} t^{P-I} dt = n^P \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{P-I} dx$$

veya

$$n^{-P}\Gamma(P) = \int_0^{\infty} e^{-nxI}x^{P-I}dx$$

elde edilir. $n \geq 1$ değerleri için toplam alındığında

$$\zeta(P)\Gamma(P) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-nxI}x^{P-I}dx \tag{3.7.1}$$

bulunur. Her $n \geq 1$ için (2.0.1) eşitsizliği ve $x > 0$ için $\ln x \leq x-1$ olduğu kullanırsa

$$\|f_n(x,P)\| \leq \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left(\|P\|\sqrt{r}\right)^k}{k!} e^{-x}x^{k+\alpha(P)-1} = f(x,P)$$

elde edilir. Burada $f_n(x,P) = e^{-nx}x^{P-I}$'dır. Bununla birlikte $f(x,P)$, $[0,\infty]$ aralığında integrallenebilir olduğundan baskın yakınsaklık teoreminden (3.7.1) bağıntısındaki toplam ile integraller yer değiştirebilir. Bu durumda

$$\zeta(P)\Gamma(P) = \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nxI}x^{P-I}dx$$

dir. Ayrıca, $x > 0$ için $0 < |e^{-nx}| < 1$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nxI} = \left(e^{xI}-I\right)^{-1} = \frac{1}{e^x-1}I$$

dır. Dolayısıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.7.1 *P, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de her $z \in \sigma(P)$ için $\operatorname{Re}(z) > 1$ spektral koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere Riemann zeta matrix fonksiyonunun bir integral gösterimi*

$$\zeta(P)\Gamma(P) = \int_0^{\infty} x^{P-I}\left[e^{xI}-I\right]^{-1}dx = \int_0^{\infty}\frac{x^{P-I}}{e^x-1}dx$$

dir.

Bazı matris integrallerinin Riemann zeta matris fonksiyonu cinsinden ifadelerini aşağıdaki önermede verelim.

Önerme 3.7.2 *P, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de her $z \in \sigma(P)$ için $\operatorname{Re}(z) > 1$ spektral koşulunu sağlayan bir matris ve $b \in \mathbb{C}$ için $\operatorname{Re}(b) > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki matris integral* *gösterimleri sağlanır.*

$$\int_0^\infty \frac{x^{P-I}}{\sinh bx}dx = 2b^{-P}\Gamma(P)\left(I-2^{-P}\right)\zeta(P), \tag{3.7.2}$$

$$\int_0^\infty x^{P-I}(1-\tanh bx)\,dx = 2(2b)^{-P}\left(I-2^{I-P}\right)\Gamma(P)\zeta(P), \tag{3.7.3}$$

$$\int_0^\infty x^{P-I}(\coth bx-1)\,dx = 2(2b)^{-P}\Gamma(P)\zeta(P). \tag{3.7.4}$$

İspat. $b=1$ için ispatlayıp $x\to bx$ alarak genel duruma genişletelim. İlk olarak (3.7.2) bağıntısını ispatlayalım. Geometrik seri açılımından

$$\frac{1}{\sinh x} = \frac{2e^{-x}}{1-e^{-2x}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)x}$$

dir. Eşitliğin her iki tarafı x^{P-I} ile çarpılıp sıfırdan sonsuza integral alınırsa

$$\int_0^\infty \frac{x^{P-I}}{\sinh bx}dx = 2\Gamma(P)\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-P}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-P} &= 1^{-P}+3^{-P}+5^{-P}+\ldots\\ &= \zeta(P)-2^{-P}\zeta(P)\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır. (3.7.3) bağıntısının ispatı için $1-\tanh x$ fonksiyonunu üstel fonksiyon cinsinden yazıp geometrik seri açılımı yapıldığında

$$1-\tanh x = 1-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-2nx}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı x^{P-I} ile çarpılıp sıfırdan sonsuza integral alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{P-I}(1-\tanh x)\,dx &= 2\Gamma(P)2^{-P}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-P}\\ &= 2\Gamma(P)2^{-P}\left[1^{-P}-2^{-P}+3^{-P}-4^{-P}+5^{-P}-\ldots\right]\\ &= 2\Gamma(P)2^{-P}\left[\zeta(P)-2^{I-P}\zeta(P)\right]\end{aligned}$$

olduğundan istenen sonuç elde edilir. (3.7.4) bağıntısının ispatı benzer şekilde yapılır. ■

(3.7.3) ve (3.7.4) bağıntılarında b değişkenine göre türev alındığında iki farklı matris integrali elde edilir.

Sonuç 3.7.3 *P, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de her $z \in \sigma(P)$ için $\operatorname{Re}(z) > -1$ spektral koşulunu sağlayan bir matris ve $b \in \mathbb{C}$ için $\operatorname{Re}(b) > 0$ olsun. Bu durumda*

$$\int_0^\infty \frac{x^P}{\cosh^2 bx} dx = 4(2b)^{-(P+I)}\left(I - 2^{I-P}\right)\Gamma(P+I)\zeta(P), \tag{3.7.5}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^P}{\sinh^2 bx} dx = 4(2b)^{-(P+I)}\Gamma(P+I)\zeta(P) \tag{3.7.6}$$

dir.

Bu bölümdeki önemli bağıntılardan biri de kosecant hiperbolik fonksiyonu için kosinüs dönüşümü olarak adlandırılan

$$\int_0^\infty \frac{t\cos xt}{\sinh \frac{\pi}{2}t} = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{3.7.7}$$

integralidir (Widder 1971). Bu integralle birlikte bir sonraki önteorem ileride Riemann zeta fonksiyonunun sağladığı bir fonksiyonel eşitliğinin matris benzerinin ispatında kullanılacaktır.

Lemma 3.7.4 *P, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de her $z \in \sigma(P)$ için $\operatorname{Re}(z) > -1$ spektral koşulunu sağlayan bir matris olsun. $t > 0$ için*

$$\int_0^\infty x^P \cos(xt)\, dx = -\Gamma(P+I)\, t^{-(P+I)} \sin\frac{\pi P}{2} \tag{3.7.8}$$

integrali sağlanır.

İspat. (2.2.5) bağıntısında $b \to it$ ve $b \to -it$ alınarak

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^P \cos(xt)\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^P \left(e^{ixt} + e^{-ixt}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(P+I)\left[\left(\frac{1}{-it}\right)^{P+I} + \left(\frac{1}{it}\right)^{P+I}\right] \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(P+I)\, t^{-(P+I)} i \left[e^{\frac{\pi}{2}iP} - e^{-\frac{\pi}{2}iP}\right] \\
&= -\Gamma(P+I)\, t^{-(P+I)} \sin\frac{\pi P}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Teorem 3.7.5 *P, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de $1 \notin \sigma(P)$ spektral koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere Riemann zeta matris fonksiyonu*

$$\zeta(I-P)\,\Gamma(I-P)\sin\frac{\pi}{2}P = \pi\zeta(P)\,(2\pi)^{-P} \tag{3.7.9}$$

fonksiyonel eşitliğini sağlar.

İspat. (3.7.5) integralini farklı bir yoldan hesaplayalım. (3.7.7) bağıntısı ve Fubini Tonelli Teoremi kullanılarak

$$\int_0^\infty \frac{x^P}{\cosh^2 x}dx = \int_0^\infty x^P\left[\int_0^\infty \frac{t\cos xt}{\sinh\frac{\pi}{2}t}dt\right]dx = \int_0^\infty\left[\int_0^\infty x^P\cos xt\,dx\right]\frac{tdt}{\sinh\frac{\pi}{2}t}$$

elde edilir. Burada, (3.7.2) ve (3.7.8) bağıntıları kullanılarak

$$\int_0^\infty \frac{x^P}{\cosh^2 x}dx = -2\Gamma(P+I)\sin\frac{\pi P}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{P-I}\left(I-2^{P-I}\right)\Gamma(I-P)\,\zeta(I-P)$$

elde edilir. Yukarıdaki matris integrali (3.7.5) bağıntısı ile karşılaştırıldığında ispat tamamlanır. ∎

(3.7.9)'daki fonksiyonel eşitlik Riemann zeta matris fonksiyonu için önemli bilgiler vermektedir. İlk olarak Riemann zeta matris fonksiyonu özdeğerleri 1' den büyük matrisler için tanımlı iken bu fonksiyonel eşitlikten özdeğerleri 1'den küçük matrisler için de tanımlı olduğu görülür. Ayrıca, P, $\mathbb{C}^{r\times r}$'de $\sigma(P) = \{-2k : k \in \mathbb{Z}^+\}$ olacak şekilde bir matris seçilirse

$$\zeta(P) = \frac{(2\pi)^P}{\pi}\zeta(I-P)\,\Gamma(I-P)\sin\frac{\pi}{2}P$$

bağıntısında

$$\sin\frac{\pi}{2}P = \mathbf{0}$$

olduğundan $\zeta(P) = \mathbf{0}$ elde edilir.

$P = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ olsun. Bu durumda

$$[\exp(-P\ln n)]_{ij} = \begin{cases} 0 & ,i \neq j \\ 1 & ,i = j \end{cases}$$

olduğundan

$$[\zeta(P)]_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty}\exp(-P\ln n) = \begin{cases} 0 & ,i \neq j \\ \zeta(0) & ,i = j \end{cases}$$

dır. O halde, $\zeta(0) = \frac{1}{2}$ olduğundan $\zeta(\mathbf{0}) = \frac{I}{2}$ elde edilir.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, bazı klasik özel fonksiyonlar ailesinin matris genişlemeleri üzerine çalışılmıştır. Hermite matris polinomları için yeni bağıntılar bulunmuştur. Hermite matris polinomları genelleştirilerek özellikleri incelenmiş elde edilen operatör formülü yardımıyla Hermite matris polinomlarının Burchnall operatör bağıntısı ve Nielsen bağıntısını sağladığı gösterilmiştir.

Modifiye Laguerre matris polinomları tanımlanarak matris polinomları teorisi için önemli sonuçlar olan üç terimli rekürans bağıntısı ve matris diferansiyel denklemi gibi özellikleri elde edilmiş, sahip olduğu bilineer ve bilateral üreteç fonksiyonları verilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş Laguerre-tipli matris polinomları tanımlanmıştır.

II. tip Chebyshev matris polinomları genelleştirilerek özellikleri incelenmiş, Hermite matris polinomlarını içeren integral gösterimi kullanılarak operatör teorisi yöntemleriyle genelleştirilmiş II. tip Chebyshev matris polinomları için yeni bağıntılar ispatlanmıştır. Ayrıca, II. tip Chebyshev matris polinomlarının sağladığı bir ikinci dereceden matris diferansiyel denklemi elde edilmiştir.

Birçok matris polinomunun genelleştirmesi olan Humbert matris polinomları ele alınarak bazı rekürans bağıntıları, m. dereceden matris diferansiyel denklemi ve integral gösterimi gibi özellikleri elde edilmiştir. Bununla birlikte, Pincherle matris polinomlarının üçüncü dereceden bir matris diferansiyel denkleminin çözümü olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, Gegenbauer matris polinomları için bir dönüşüm formülü ispatlanarak birkaç uygulaması verilmiştir.

Gamma matris fonksiyonu için Legendre çift kat formülü ve Euler yansıma formülü ispatlanmış, böylece gamma matris fonksiyonun tanım kümesi genişletilmiştir. Bununla birlikte, sinüs matris fonksiyonu için sonsuz çarpım formülü elde edilmiştir.

Riemann zeta matris fonksiyonu tanımlanarak bazı matris integralleri hesaplanmış, hakkında daha fazla bilgi sahibi olmamızı sağlayan bir fonksiyonel eşitlik elde edilmiştir.

Tüm bu özel matris fonksiyonları ailelerinin taşıdıkları özellikler, diğer özel matris fonksiyonları ile olan ilişkileri incelenip sayılar teorisi, cebir ve uygulama matematik alanlarındaki uygulamaları araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

AKTAŞ, R., ÇEKİM, B. ve ŞAHİN, R. 2012. The Matrix Version for the Multivariable Humbert Polynomials. *Miskolc Mathematical Notes*, 13 (2): 197-208.

AKTAŞ, R., ÇEKİM, B. ve ÇEVİK, A. 2013. Extended Jacobi matrix polynomials. *Utilitas Mathematica*, 92: 47-64.

ALTIN, A. ve ÇEKİM, B. 2012a. Generating matrix functions for Chebyshev matrix polynomials of the second kind. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 41 (1): 25–32.

ALTIN, A. ve ÇEKİM, B. 2012b. Some properties associated with Hermite matrix polynomials. *Utilitas Mathematica*, 88: 171-181.

ALTIN, A. ve ÇEKİM, B. 2013. Some miscellaneous properties for Gegenbauer matrix polynomials. *Utilitas Mathematica*, 92: 377-387.

BATAHAN, R.S. 2006. A new extension of Hermite matrix polynomials and its applications. *Linear Algebra and its Applications*, 419: 82–92.

BOYADZHIEV, K. N. ve DİL, A. 2012. Series with Hermite polynomials and applications. *Publicationes Mathematicae-Debrecen*, 80 (3-4): 385-404.

BURCHNALL, J. L. 1941. A note on the polynomials of Hermite. *The Quarterly Journal of Mathematics Oxford Series*, 12: 9-11.

BUTZER, P. L., KILBAS, A. A. ve TRUJILLO, J. J. 2003. Stirling functions of the second kind in the setting of difference and fractional calculus. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 24 (7-8): 673-711.

BRAFMAN, F. 1951. Generating functions of Jacobi and related polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2 (6): 942-949.

BRAFMAN, F. 1957. Some generating functions for Laguerre and Hermite polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, 9: 180-187.

ÇEKİM, B., ALTIN, A. ve AKTAŞ, R. 2011. Some relations satisfied by orthogonal matrix polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40 (2): 241-253.

ÇEKİM, B. ve ALTIN, A. 2013. New matrix formulas for Laguerre matrix polynomials. *Journal of Classical Analysis*, 3 (1): 59-67.

ÇEKİM, B., ALTIN, A. ve AKTAŞ, R. 2013. Some new results for Jacobi matrix polynomials. *Filomat*, 27 (4): 713-719.

DAVIS, P.J. 1975. Interpolation and Approximation. Dover, New York, 393 p.

DEFEZ, E. ve JODAR, L. 1998. Some applications of the Hermite matrix polynomials series expansions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 99: 105–117.

DEFEZ, E. ve JODAR, L. 2002. Chebyshev matrix polynomials and second order matrix differential equations. *Utilitas Mathematica*, 61: 107-123.

DEFEZ, E. ve JODAR, L. 2004. Jacobi matrix differential equation, polynomial solutions, and their properties. *Computers and Mathematics with Applications*, 48: 789-803.

DITKIN, V. A. ve PRUDNIKOV, A. 1965. Integral Transforms and Operational Calculus. Pergamon-Press, Oxford, 529 p.

DUNFORD, N. ve SCHWARTZ, J. 1963. Linear Operators, Volume III. Interscience Publisher, New York, 860 p.

DURAN, A. J. 1997. A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation. *Journal of Approximation theory*, 74: 7818-7829.

GOULD, H.W. ve HOPPER, A.T. 1962. Operational formulas connected with two generalizations of Hermite polynomials. *Duke Mathematical Journal*, 29: 51–63.

GOULD, H.W. 1965. Inverse Series Relations and Other Expansions Involving Humbert Polynomials. *Duke Mathematical Journal*, 32 (4): 697-712.

HILLE, E. 1969. Lectures on Ordinary Differential Equations. Addison Wesley, New York, 723 p.

JODAR, L. ve COMPANY, R. 1994. Hermite matrix polynomials and second order matrix differential equations. *Journal of Approximation Theory and its Applications*, 12 (2): 20-30.

JODAR, L., COMPANY, R. ve NAVARRO, E. 1994. Laguerre matrix polynomials and systems of second order differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 15: 53-63.

JODAR, L., COMPANY, R. ve PONSODA, E. 1995. Orthogonal matrix polynomials and systems of second order differential equations. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3 (3): 269–288.

JODAR, L. ve DEFEZ, E. 1996. Some new matrix formulas related to Hermite matrix polynomials theory. Proceedings of the Internatinal Workshop on Orthogonal Polynomials in Mathematical Physics, ss. 93-102, 24-26 June, Leganes.

JODAR, L. ve DEFEZ, E. 1998. A Connection between Lagurre's and Hermite's Matrix Polynomials. *Applied Mathematics Letters*, 11 (1): 13-17.

JODAR, L. ve CORTES, J.C. 1998a. On the hypergeometric matrix function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 99: 205-217.

JODAR, L. ve CORTES, J.C. 1998b. Some properties of gamma and beta functions. Applied Mathematics Letters, 11 (1): 89-93.

JODAR, L. ve SASTRE, J. 1998. On the Laguerre matrix polynomials. *Utilitas Mathematica*, 53: 37-48.

JODAR, L. ve SASTRE, J. 2000. The growth of Laguerre matrix polynomials on bounded intervals. *Applied Mathematics Letters*, 13: 21–26.

JODAR, L. ve SASTRE, J. 2004. Asymptotic expressions of normalized Laguerre matrix polynomials on bounded intervals. *Utilitas Mathematica*, 65: 3–31.

KARGIN, L. ve KURT, V. 2013. Some relations on Hermite matrix polynomials, *Mathematical and Computational Applications* 18 (3): 323-329.

KARGIN, L. ve KURT, V. 2014a. Chebyshev-type matrix polynomials and integral transforms, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, (In press).

KARGIN, L. ve KURT, V. 2014b. Modified Laguerre matrix polynomials. *Filomat*, (In press).

KHAMMASH, G.S. 2009. Some bilateral generating relations involving Gegenbauer matrix polynomials. *Journal of Mathematical Sciences Advances and Applications*, 3 (1): 89-100.

KHAMMASH, G.S. ve SHEHATA, A. 2012a. On Humbert matrix polynomials. *Asian Journal of Current Engineering and Maths*, 5: 232-240.

KHAMMASH, G.S. ve SHEHATA, A. 2012b. On Humbert matrix polynomials of two variables. *Advances in Pure Mathematics*, 2: 423-427.

KHAN, S. ve AL-SAAD, M.W. 2011. Summation formulae for Gould–Hopper generalized Hermite polynomials. *Computers and Mathematics with Applications*, 61: 1536–1541.

KISHKA, Z. M. G., SHEHATA, A. ve ABUL-DAHAB, M. 2012. The generalized Bessel matrix polynomials. *Journal of Mathematical and Computational Science*, 2: 305-316.

LAHIRI, M. 1971. On a generalization of Hermite polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 27: 117–121.

LANCASTER, P. 1969. Theory of Matrices. Academic Press, New York, 316 p.

METWALLY, M.S., MOHAMED, M.T. ve SHEHATA, A. 2008. On Hermite-Hermite matrix polynomials. *Mathematica Bohemica*, 133 (4): 421-434.

METWALLY, M.S., MOHAMED, M.T. ve SHEHATA, A. 2009. Generalizations of two-index two-variable Hermite matrix polynomials. *Demonstratio Mathematica*, 42 (4): 687-701.

METWALLY, M.S., MOHAMED, M.T. ve SHEHATA, A. 2010. On pseudo Hermite matrix polynomials of two variables. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 4: 147-156.

METWALLY, M.S. 2011. Operational rules and arbitrary order two-index two-variable Hermite matrix generating functions. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, 27 (1): 41-49.

NIELSEN, N. 1918. Recherches sur les polynmes d'Hermite. Volume 1 de Mathematisk-fysiske meddelelser. 79 pages Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

RAINVILLE, E.D. 1960. Special Functions. Macmillan Company, Chelsea, New York, 365 p.

RIORDAN, J. 1979. Combinatorial Identities, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 256 p .

RUNGE, C. 1914. ber eine besondere Art von Intergralgleichungen. *Mathematische Annalen*, 75: 130-132.

SASTRE, J. ve JODAR, L. 2006. On the asymptotics of Laguerre matrix polynomials. *Utilitas Mathematica*, 70: 71-98.

SASTRE, J. ve DEFEZ, E. 2006. On the asymptotics of Laguerre matrix polynomials for large x and n. *Applied Mathematics Letters*, 19 (8): 721-727.

SASTRE, J., DEFEZ, E. ve JODAR, L. 2006. Laguerre matrix polynomial series expansion: Theory and computer applications. *Mathematical and Computer Modelling*, 44: 1025–1043.

SAYYED, K.A.M., METWALLY, M.S. ve BATAHAN, R.S. 2004. Gegenbauer matrix polynomials and second order matrix differential equations. *Divulgaciones Matematicas*, 12 (2): 101-115.

SHEHATA, A. 2011. On Tricomi and Hermite-Tricomi matrix functions of complex variable. *Communications in Mathematics and Applications*, 2 (2-3): 97–109.

SHEHATA, A. 2012a. A new extension of Hermite-Hermite matrix polynomials and their properties. *Thai Journal of Mathematics*, 10 (2): 433-444.

SHEHATA, A. 2012b. A new extension of Gegenbauer matrix polynomials and their properties. *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute*, 2: 29-42.

SRIVASTAVA, H.M. ve MANOCHA, H.L. 1984. A Treatise on Generating Functions, Halsted Press–Ellis Horwood Limited–John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 565 p.

SRIVASTAVA, H.M. 2000. Some families of generating functions associated with the stirling numbers of the second kind. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251: 752–769.

TAŞDELEN, F., AKTAŞ, R. ve ÇEKİM, B. 2011. On a multivariable extension of Jacobi matrix polynomials. *Computers and Mathematics with Applications*, 61 (9): 2412-2423.

UPADHYAYA, L.M. ve SHEHATA, A. 2011. On Legendre matrix polynomials and its applications. *International Transactions in Mathematical Sciences & Computer*, 4 (2): 291.

WIDDER, D.V. 1971. An Introduction to Transform Theory. Academic Press, New York, 253 p.

ÖZGEÇMİŞ

Levent Kargın, 1985 yılı Muğla-Fethiye doğumludur. İlk, orta ve lise öğrenimini Muğla' nın Fethiye ilçesinde tamamlamıştır. 2003 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında matematikçi olarak mezun olmuştur. 2007 yılı Eylül ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladığı yüksek lisans eğitimini 2009 yılı Aralık ayında tamamlamıştır. 2010 yılı Ocak ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora eğitimine başlamıştır. Eylül 2010' da Akdeniz Üniversitesi Akseki Meslek Yüksekokuluna öğretim görevlisi olarak atanmıştır ve halen bu görevini sürdürmektedir.