T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ POLY-BERNOULLI POLİNOMLARI VE POLY-GENOCCHI POLİNOMLARI

Seçil BİLGİÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ POLY-BERNOULLI POLİNOMLARI VE POLY-GENOCCHI POLİNOMLARI

Seçil BİLGİÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ POLY-BERNOULLI POLİNOMLARI VE POLY-GENOCCHI POLİNOMLARI

Seçil BİLGİÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 15/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Veli Kurt

Prof. Dr. Yılmaz Şimşek

Prof. Dr. Ahmet Işık

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ POLY-BERNOULLI POLİNOMLARI VE POLY-GENOCCHI POLİNOMLARI

Seçil BİLGİÇ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Veli Kurt
Haziran 2016, 30 sayfa

Bu çalışmada Poly-Bernoulli polinomlarının ve Poly-Genocchi polinomlarının genelleştirmesi tanımlandı. Bu polinomların gerçeklediği bazı özellikler incelenmiş, ve sağladığı bazı reküLrans bağıntıları verilmiştir. Diğer taraftan genelleştirilmiş Poly-Bernoulli polinomlarınında simetrik özelliği, kapalı formülü verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bernoulli, Euler, Genocchi polinomları, Poly-Bernoulli, Poly-Euler, Poly-Genocchi polinomları, Genelleştirilmiş Poly-Genocchi polinomları, Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli, Genelleştirilmiş Poly-Euler, Genelleştirilmiş Poly-Genocchi polynomları

JÜRİ: Prof. Dr. Veli Kurt (Danışman)
Prof. Dr. Yılmaz Şimşek
Prof. Dr. Ahmet Işık

ABSTRACT

GENERALIZED POLY-BERNOULLI POLINOMIALS AND POLY-GENOCCHI POLYNOMIALS

Seçil BİLGİÇ

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Veli Kurt
June 2016, 30 pages

In this work, we define the generalized Poly-Bernoulli numbers and the generalized Poly-Bernoulli Polynomials and the generalized Poly-Genocchi numbers and the generalized Poly-Genocchi polynomials. We give some properties and recurrance relations for these polynomials. Also, we prove simetry properties,closed formulae for the generalized Poly-Bernoulli polynomials.

KEYWORDS: Bernoulli, Euler, Genocchi polynomials, Poly-Bernoulli, Poly-Euler, Poly-Genocchi polynomials, Modified Poly-Genocchi polynomials, Generalized Poly-Bernoulli, Generalized Poly-Euler, Generalized Poly-Genocchi polynomials

COMMITTEE: Prof. Dr. Veli Kurt (Supervisor)
Prof. Dr. Yılmaz Şimşek
Prof. Dr. Ahmet Işık

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak üç bölümden oluşmuştur. İlk bölümde simgeler,kısaltmalar, çalışmanın kapsamı verilmiştir. İkinci bölümde Bernoulli,Euler,Genocchi polinomları verilerek bunların sağladığı başlıca teoremler verilmiştir. Daha sonra bu polinomların genelllemesi olan Poly-Bernoulli polinomları, Poly-Genocchi polinomları, Poly-Bernoulli sayıları, Poly-Genocchi sayıları tanımlanarak genel özellikleri verilmiş ve ispatlanmıştır. Bulgular bölümünde ise Poly-Bernoulli ve Poly-Genocchi polinomlarının genelleştirmesi olarak parametrili genelleştirilmiş Poly-Bernoulli, Poly Genocchi polinomları tanımlanıp bunlarla ilgili yeni özdeşlikler, rekürans bağıntıları ispatlanmıştır.

Bu tez çalışmasının Poly-Bernoulli tipli polinomlarında çalışanlara katkı sağlayacağı inancındayım.

Bu çalışma boyunca bilimsel olarak bana yardımcı olan danışman hocam Prof. Dr. Veli KURT'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	$=\{1,2,3,...\}$
$\mathbb{N}_0$	$=\{0,1,2,3,...\}$
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$B_n(x)$	Bernoulli polinomları
B_n	Bernoulli sayıları
$E_n(x)$	Euler polinomları
E_n	Euler sayıları
$G_n(x)$	Genocchi polinomları
G_n	Genocchi sayıları
$S_2(n,k)$	İkinci tür Stirling sayıları
$L_{i_k}(z)$	Poly-logaritma fonksiyonu
$B_n^{(k)}(x)$	Poly-Bernoulli polinomları
$G_n^{(k)}(x)$	Poly-Genocchi polinomlari

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Bernoulli sayıları ve polinomlarının matematiğin bir çok alanında önemli uygulamaları vardır. Bu alanlar trigonometrik fonksiyon serileri, sonlu farklar analizi, sayısal türev, integral denklemler, sayılar teorisi, kombinatorik, q-Analizi gibi alanlardır. Ayrıca son yıllarda Bernoulli polinomları yaklaşım teorisinde, Hermite, Laguerre polinomlarının da uygulamaları vardır.

Bu tez çalışmalarında Kaneko (1997) tarafından tanımlanan Bernoulli sayılarının farklı bir genişlemesi olan Poly-Bernoulli sayıları ele alınarak gerçeklediği özdeşlikler, simetri özellikleri farklı yöntemlerle ispatlandı.

Klasik Genocchi polinomlarının bir genişlemesi olan Poly-Genocchi polinomları ve sayıları tanımlanıp gerçeklediği bazı rekürens bağıntıları verildi.

Poly-Bernoulli polinomunun ve Poly-Genocchi polinomlarının başka bir genelleşmesi olan Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli (Multi-Poly-Bernoulli) polinomu, Genelleştirilmiş Poly-Genocchi (Multi-Poly-Genocchi)polinomlarına girilerek, bu polinomların sağladığı bazı teoremler ispatlandı.

Son olarak Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli polinomunun ve Genelleştirilmiş Poly-Genocchi polinomlarının parametreli ifadeleri ele alınarak, parametreli genellemeleri verildi. Ayrıca bu polinomların gerçeklediği simetrik özellikleri, ve Duality özellikleri gösterildi.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMASI

2.1. Bernouli Polinomları, Euler Polinomları, Genocchi Polinomlarının Bazı Özellikler

Bernoulli polinomları matematikçiler tarafından farklı şekilde tanımlanmasına rağmen en genel

Bernoulli polinomu aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t-1}e^{xt} \ldots |t| < 2\pi$$

Bu tanımdan daha önce Jacob Bernoulli 1690 da Bernoulli polinomu

$$S_n(m) = \sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(m) - B_{n+1}(0)\right)$$

toplamı ile ifade etmiştir. Üçüncü olarak L. Euler Bernoulli polinomunu

$$F(x,t) = \begin{cases} e^{xt}\frac{t}{e^t-1} & ,t \neq 0 \\ 1 & ,t = 0 \end{cases}$$

doğuray fonksiyonu ile tanımlamıştır.

Burada t karmaşık bir sayıdır. $F(x,t)$ fonksiyonu $|t| < 2\pi$ diskinde analitik bir fonksiyondur. Daha sonra da E. Appell, Appell dizileri ile tanımladı.

Son olarak da A. Hurwitz $B_n(x)$ Bernoulli fonksiyonunun Fourier Serisini tanımladı.

$$B_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{-n}e^{2\pi ikx} \; 0 < x < 1$$

Fourier serisi ifadesinide kullandı. Burada Bernoulli fonksiyonu aşagıdaki şekildede tanımlanır.

$$\bar{B}_n(x) = B_n(x - \{x\})$$

dır. Daha sonra Lucas umbral analizi ve

$$B_n(x) = (B + x)^n$$

özelliği ile Raebe bağıntısını ve Appell dizilerini birlikte ele alarak inceleme yapmıştır.

Tanım 2.1.1. *x bir karmaşık sayı olmak üzere $B_n(x)$ Bernoulli polinomu*

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!},\; |t| < 2\pi \qquad (2.1)$$

ifadesiyle verilir. Bu eşitlik $x = 0$ için $B_n(0)$ n. Bernoulli sayısı olarak adlandırılır ve B_n ile gösterilir. Böylece (2.1) de $x = 0$ alınırsa,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

ifadesi elde edilir (Arakawa vd 2013).

Önerme 2.1.2. *Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları ile ilgili aşağıdaki özellikleri yazılabilir.*

(1) $B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x)$,
(2) $B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$,
(3) $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$, $n \geq 1$,
(4) $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$, $n \geq 0$.

Bu önermenin ispatı (2.1) eşitliğinden yapılabilir.

Bazı Bernoulli sayıları ve polinomları sırasıyla şu şekildedir:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_0(x) = 1,\ B_1(x) = x - \frac{1}{2},\ B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}0,\ B_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Önerme 2.1.3 (Raebe). $m \geq 0$ $n \geq 0$ *olmak üzere*

$$\sum_{r=0}^{m-1} B_n\left(\frac{x}{m} + \frac{r}{m}\right) = m^{1-n} B_n(x)$$

dir (Abramowitz ve Stegun 1964).

Tanım 2.1.4. $n \in \mathbb{C}$, $E_n(x)$ *Euler polinomu*

$$\frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!},\ |t| < \pi \tag{2.2}$$

eşitliği ile tanımlanır. $x = 0$ *alınarak* E_n *Euler sayısını*

$$\frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!},\ |t| < \pi \tag{2.3}$$

ifadesiyle verilir (Abramowitz ve Stegun 1964).

(2.2) ve (2.3)'den bazı Euler sayıları ve Euler polinomları sırasıyla

$$E_0 = 1,\ E_1 = 0,\ E_2 = -1,\ E_3 = 0,\ E_4 = 5, \ldots$$

$$E_0(x) = 1,\ E_1(x) = x - \frac{1}{2}, E_2(x) = x^2 - x, \ldots$$

olarak elde edilir.

Önerme 2.1.5. *Euler polinomları aşağıdaki eşitlikleri gerçekler.*

$$\begin{aligned} E_n(x+1) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(x) \\ n &\geq 0, icin \qquad E_n(x+1)+E_n(x)=2x^n \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} E_n(x+y) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(x)\,y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(y)\,x^{n-k} \\ n &\geq 1, \textit{için} \qquad \frac{d}{dx}E_k(x)=nE_{n-1}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu önermenin ispatı (2.2)'den elde edilir.

Tanım 2.1.6. *Genocchi polinomu aşağıdaki doğuray fonksiyonu ile tanımlanır.*

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2t}{e^t+1}e^{xt},\ |t|\leq\pi \tag{2.4}$$

$x=0$ *alınarak* G_n *Genocchi sayısı*

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{2t}{e^t+1},\ |t|\leq\pi \tag{2.5}$$

olarak yazılabilir.

Birkaç Genocchi sayıları aşağıda verilmiştir.

$$G_1=1,\ G_2=-1,\ G_3=0,\ G_4=1,\ldots n\in\mathbb{N},\ G_{2n+1}=0$$

dır. (2.4) tanımından aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

(1) $G_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}G_n.x^{n-k}$,

(2) $\frac{d}{dx}G_n(x)=nG_{n-1}(x)$,

(3) $G_{n+1}(x+1)+G_{n+1}(x)=2(n+1)x^n$,

(4) $\int_a^b G_n(x)\,dx=\frac{G_{n+1}(a)-G_{n+1}(b)}{n+1}$.

2.2. Poly-Bernouli Polinomları

Bu bölümde ilk olarak Polylogaritma fonksiyonunu tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. *Polylogaritma fonksiyonu*

$$Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} \tag{2.6}$$

ifadesiyle tanımlanır (Kaneko 1997). Bu seri $|z| < 1$ için yakınsar. k negatif tam sayı ise $k = -r$ alınarak

$$Li_{-k}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{r} \left\langle {r \atop j} \right\rangle x^{r-j}}{(1-x)^{r+1}}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\left\langle {r \atop j} \right\rangle$ Eulerian sayısı,

$$\left\langle {r \atop j} \right\rangle = \sum_{l=0}^{j+1} (-1)^l \binom{r+1}{l} (j-l+1)^r$$

eşitliği ile tanımlanır.

k negatif tam sayı ise polylogaritma fonksiyonu rasyonel bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned}
Li_0(x) &= \frac{x}{1-x} \\
Li_{-1}(x) &= \frac{x}{(1-x)^2} \\
Li_{-2}(x) &= \frac{x^2+x}{(1-x)^3} \\
Li_{-3}(x) &= \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4} \\
Li_{-4}(x) &= \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5} \\
Li_{-5}(x) &= \frac{x^5+26x^4+66x^3+26x^2+x}{(1-x)^6}
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. (2.6) denkleminin z ye göre türevi

$$\frac{d}{dz} Li_k(z) = \begin{cases} c\frac{1}{z} Li_{k-1}(z) & , k > 1 \\ \frac{1}{1-z} & , k = 1 \end{cases}$$

dır. Buradan

$$Li_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z)$$

olduğu görülür.

Tanım 2.2.2. *Poly-Bernoulli polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{Li_1\left(1-e^{-t}\right)}{1-e^{-t}}e^{xt} \tag{2.7}$$

ifadesiyle tanımlanır (Bayad ve Hamahata 2011).

$k = 1$, (2.7)'den

$(-1)^n B_n^{(1)}(-x) = B_n(x)$

Bernoulli sayısını verir.

$x = 0$ için $B_n^{(k)}(0) = B_n^{(k)}$ Poly-Bernoulli sayısı olur.

Teorem 2.2.3. $k \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 0$

$$B_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (x-j)^n \tag{2.8}$$

eşitliği vardır (Bayad ve Hamahata 2011).

Teorem 2.2.4 (Rekürans formulü 1). $k \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 0$ *için*

$$B_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} B_{n-m}^{(k-1)} \sum_{l=0}^{m} \frac{(-1)^l}{n-l+1} \binom{m}{l} B_l(x) \tag{2.9}$$

bağıntısı vardır (Bayad ve Hamahata 2012).

Teorem 2.2.5 (Rekürans formulü 2). $k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ *için*

$$\begin{aligned} B_n^{(k)}(x) &= \\ & \frac{1}{n+1}\left\{B_n^{(k-1)}(x) + xB_0^{(k)}(x) - \sum_{m=1}^{n-1}\left(\binom{n}{m-1} - \binom{n}{m}x\right)B_m^{(k)}(x)\right\} \\ B_0^{(k)}(x) &= 1, \ldots, B_1^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\left(B_1^{(k-1)}(x) + xB_0^{(k)}(x)\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

eşitliği vardır (Bayad ve Hamahata (2012)).

Teorem 2.2.6 (Toplama Formülü). $k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$

$$\begin{aligned} B_n^{(k)}(x+y) &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_m^{(k)}(x)\, y^{n-m} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_m^{(k)}(y)\, x^{n-m} \end{aligned} \tag{2.11}$$

dır.

İspat. (2.7)'den faydalanarak ispatlanabilir. □

Teorem 2.2.7. *n, k pozitif tamsayı için*

$$B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}$$

dır.

İspat. Poly-Bernoulli sayısı tanımından

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(-k)} \frac{x^n}{n!}\frac{y^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left(1-e^{-x}\right)^m (m+1)^k \frac{y^k}{k!} \qquad (2.12)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(1-e^{-x}\right)^m e^{(m+1)y}\\
&= e^y \sum_{m=0}^{\infty} \left(\left(1-e^{-x}\right) e^y\right)^m\\
&= \frac{e^{x+y}}{e^x+e^y-e^{x+y}} = \frac{e^{x+y}}{1-(e^x-1)(e^y-1)}
\end{aligned}$$

dır. $k \geq 0$ için $B_n^{(-k)}$ pozitiftir. □

Teorem 2.2.8 (Kapalı formül)**.** *Negatif olmayan n, k tamsayıları için*

$$B_n^{(-k)} = \sum_{j=0}^{\infty} (j!)^2 S_2(n+1, j+1)\, S_2(k+1, j+1) \qquad (2.13)$$

dır.

İspat. (2.13) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(-k)} \frac{x^n}{n!}\frac{y^k}{k!} &= \frac{e^{x+y}}{e^x+e^y-e^{x+y}}\\
&= e^{x+y} \sum_{j=0}^{\infty} (e^x-1)^j (e^y-1)^j\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} e^x (e^x-1)^j e^y (e^y-1)^j
\end{aligned}$$

dır. □

Diğer taraftan 2. Çeşit Stirling sayısı

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,k) \frac{u^n}{n!} = \frac{(e^u-1)^k}{k!} \qquad (2.14)$$

ifadesiyle tanımlanır (Sánchez-Peregrino 2002).

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_n^{(-k)} \frac{x^n}{n!}\frac{y^k}{k!} &= \sum_{j=0}^{\infty}[j! \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,j)\frac{x^n}{n!}] \left[(j)! \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,j)\frac{y^n}{n!}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(j!)^2 \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n+1,j+1)\frac{x^n}{n!}\sum_{k=j}^{\infty} S_2(k+1,j+1)\frac{y^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left((j!)^2 S_2(n+1,j+1)\right) S_2(n+1,j+1)\frac{x^n}{n!}\frac{y^k}{k!}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{x^n}{n!}\frac{y^k}{k!}$ nin katsayıları karşılaştırılarak (2.13) elde edilir.

$m,n \geq 0$ için

$$C_n^{-m}(x,y) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} B_n^{(-k)}(x)\, y^{m-k} \tag{2.15}$$

eşitliği tanımlandı (Bayad ve Hamahata 2011).

Teorem 2.2.9 (Simetrik formül). *m,n ; $C_n^{-m}(x,y)$ yukarıdaki tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_n^{-m}(x,y)\frac{t^n}{n!}\frac{u^m}{m!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{-n}(y,x)\frac{t^n}{n!}\frac{u^m}{m!} \\
&= \frac{e^{xt+yt}e^{t+u}}{e^t+e^u-e^{t+u}}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

dır.

İspat. (2.15) ve $C_n^{-m}(x,y)$ nin tanımı kullanarak eşitliğin sol tarafı

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} B_n^{(-k)}(x)\, y^{m-k}\frac{t^n}{n!}\frac{u^m}{(m-k)!k!}$$

olarak yazılabilir. □

$l = m-k$ alınarak

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} B_n^{(-k)}(x)\, y^l \frac{t^n}{n!}\frac{u^k}{k!}\frac{u^l}{l!} \\
&= e^{yu}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_n^{(-k)}(x)\frac{t^n}{n!}\frac{u^k}{k!}
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.11) denklemi de göz önüne alınarak

$$= e^{xt+yu}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(-k)}\frac{t^n}{n!}\frac{u^k}{k!} = \frac{e^{xt+yu}e^{t+u}}{e^t+e^u-e^{t+u}}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.10 (Kapalı Formül). $m, n \geq 0$

$$C_n^{-m}(x,y) = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (j!)^2 \left(\sum_{a=0}^{n} (x+1)^{n-a} \binom{n}{a} S_2(a,j) \right) \left(\sum_{b=0}^{m} (y+1)^{m-b} \binom{m}{b} S_2(b,j) \right) \right\} \tag{2.17}$$

bağıntısı vardır (Bayad ve Hamahata 2011).

2.3. Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli Sayısı ve Polinomları(Multi-Poly-Bernoulli Sayıları ve Polinomları)

Bu kesimde ilk olarak polylogaritma fonksiyonu $Li_k(z)$ nin genelleştirme tanımını vereceğiz. $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere Genelleştirilmiş polylogaritma fonksiyonunu

$$Li_{k_1,k_2,\ldots k_r}(z) = \sum_{\substack{m_1,m_2,\ldots,m_r \in \mathbb{Z} \\ 0<m_1<\cdots<m_r}} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1}\ldots m_r^{k_r}} \tag{2.18}$$

ifadesiyle tanımlanır (Bayad ve Hamahata 2012, Hamahata ve Masubuchi 2007).

Önerme 2.3.1. *(Kim 1996) Genelleştirilmiş polylogaritma fonksiyonu*

$$\frac{d}{dz} Li_{k_1,k_2,\ldots k_r}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} Li_{k_1,k_2,\ldots k_{r-1},k_r-1}(z) & , k_r > 1 \\ \frac{1}{1-z} Li_{k_1,k_2,\ldots k_{r-1}}(z) & , k_r = 1 \end{cases} \tag{2.19}$$

türev bağıntısını gerçekler.

$k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 1$ için

$$\underset{\text{(r tane 1)}}{Li_{1,1,1\ldots 1}}(z) = \frac{1}{r!}(-\ln(1-z))^r$$

dir.

(2.19)'den

$$\frac{d}{dz} Li_{k_1,1}(z) = \frac{1}{1-z} Li_{k_1}(z)$$

yazabiliriz. $k_1 = 1$ alınırsa

$$\frac{d}{dz} Li_{1,1}(z) = \frac{1}{1-z} Li_1(z)$$

elde edilir. $Li_1(z) = -\log(1-z)$

$$\frac{d}{dz} Li_{1,1}(z) = \frac{1}{1-z}(-\log(1-z))$$

$$\begin{aligned} Li_{1,1}(z) &= \int_0^z \frac{d}{dz} Li_{1,1}(z)\,dz = \int_0^z \frac{1}{1-z} Li_1(z)\,dz \\ &= \int_0^z \frac{1}{1-z}\left(-\log(1-z)\right)dz \\ &= \frac{1}{2!}\left(-\log(1-z)\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak tümevarımla

$$Li_{\underset{(\text{r defa 1})}{1,1,1\ldots1}}(z) = \frac{1}{r!}\left(-\log(1-z)\right)^r$$

olduğu görülür.

Tanım 2.3.2. *(Bayad ve Hamahata 2012) Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k_1,\ldots,k_r)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{Li_{k_1,k_2,\ldots,k_r}\left(1-e^{-t}\right)}{\left(1-e^{-t}\right)^r} e^{xt} \tag{2.20}$$

dır.

Burada $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}$. $B_n^{(k_1,\ldots,k_r)} = B_n^{(k_1,\ldots,k_r)}(0)$ Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli sayısıdır.

Teorem 2.3.3 (rekürans formülü 1)**.** *Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli sayısı aşağıdaki ifadeleri gerçekler (Bayad ve Hamahata 2012).*

(1) $k_r > 1$ *ve* $n \geq 2$ *ise*

$$B_n^{(k_1,\ldots k_r)} = \frac{1}{n+r}\left[B_n^{(k_1,\ldots k_r-1)} - \sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m-1}B_m^{(k_1,\ldots k_r)}\right]$$

ve

(2) $k_r = 1$ *,* $n \geq 2$ *ise*

$$B_n^{(k_1,\ldots k_{r-1},1)} = \frac{1}{n+r}\left[B_n^{(k_1,\ldots k_{r-1})} - \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^{n-m}\left\{r\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}\right\}B_m^{(k_1,\ldots k_{r-1},1)}\right]$$

dır.

Teorem 2.3.4. *(Bayad ve Hamahata 2012) Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli polinomu*

$$B_n^{(k_1,k_2,\ldots k_r)}(x) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_r\leq n+r}\frac{1}{m_1^{k_1}\ldots m_r^{k_r}}\sum_{j=0}^{m_r-r}(-1)^j\binom{m_r-r}{j}(x-j)^r$$

bağıntısını sağlar.

Teorem 2.3.5. *(Bayad ve Hamahata 2012) Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli polinomu aşağıdaki rekürans bağıntısını gerçekler.*

(1) $k_r > 1, n \geq 2$ ise

$$B_n^{(k_1,\ldots,k_r)}(x) = \frac{1}{n+r}\left[B_n^{(k_1,\ldots,k_r-1)}(x) + xB_0^{(k_1,\ldots,k_r)}(x) - \sum_{m=1}^{n-1}\left\{\binom{n}{m-1} - x\binom{n}{m}\right\}B_m^{(k_1,\ldots,k_r)}(x)\right]$$

(2) $k_r = 1, n \geq 2$ ise

$$B_n^{(k_1,\ldots,k_{r-1},1)}(x) = \frac{1}{n+r}\left[\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^{n-m}\left\{(n-r)\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}\right\}B_m^{(k_1,\ldots,k_{r-1},1)}(x)\right]$$

2.4. Poly-Euler Polinomları

Bu kesimde Poly-Euler fonksiyonlarının temel özellikleri sağladığı bazı teoremler ve bağıntılar verilecektir.

Tanım 2.4.1. *(Hamahata 2014) Poly-Euler polinomu*

$$\frac{2Li_k\left(1-e^{-t}\right)}{t\left(e^t+1\right)}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{2.21}$$

ifadesiyle tanımlanmıştır.

$E_n^{(k)} := E_n^{(k)}(0)$ Poly-Euler sayısıdır. $Li_1(x) = -\log(1-x)$ olduğu gözönüne alınırsa

$E_n^{(1)}(x) = E(x), E_n^{(1)}(0) = E_n$ elde edilir.

Diğer taraftan Woo ve Kim (1999) de Poly-Euler polinomunu

$$\frac{e^{xt}}{u-e^t}Li_k\left(1-e^{(1-u)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(k)}(u;x)\frac{t^n}{n!}$$

ifadesiyle tanımlanmıştır.

Aynı yazarlar bu tanıma göre Poly-Euler polinomunu sağladığı kesin teoremleri ispatlayıp, p_adik analizdeki özelliklerini vermişlerdir.

$k \geq 1$ için

$$\frac{d}{dt}Li_k\left(1-e^{-t}\right) = \frac{1}{e^t-1}Li_{k-1}\left(1-e^{-t}\right)$$

dan Poly-Euler polinomunun doğuray fonksiyonunu tekrarlı integral yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2e^{xt}}{t\left(e^t+1\right)}\int_0^t\frac{1}{e^t-1}\int_0^t\frac{1}{e^t-1}\cdots\int_0^t\frac{1}{e^t-1}tdt\ldots dt$$

ifade edilebilir.

Teorem 2.4.2. *(Bayad ve Hamahata 2012) Poly-Euler polinomları aşağıdaki eşitlikleri sağlar.*

(1) $E_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} E_m^{(k)} x^{n-m}$,

(2) $E_n^{(k)}(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} E_m^{(k)}(x)\, y^{n-m}$,

(3) $E_n^{(k)}(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} E_m^{(k)}(y)\, x^{n-m}$,

(4) $\frac{d}{dx} E_{n+1}^{(k)}(x) = (n+1)\, E_n^{(k)}(x)$.

Teorem 2.4.3. *(Bayad ve Hamahata 2012) Poly-Euler polinomu, $k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ için*

$$E_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} E_m(x-j)$$

eşitliğini gerçekler.

Poly-Euler polinomlarında da negatif olmayan k indisi için $E_n^{(-k)}(x)$ ve $E_k^{(-n)}(x)$ arasında bağıntı bulmak istiyoruz.

Tanım 2.4.4. *(Bayad ve Hamahata 2012) m, n için iki değişkenli fonksiyon $F_n^{(-m)}(x, y)$;*

$$F_n^{(-m)}(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} E_m^{(-k)}(x) \frac{E_{m-k+1}(y) - E_{m-k+1}(y-1)}{2(m-k+1)} \tag{2.22}$$

olarak tanımlandı. (2.22)'den $F_n^{(-m)} := F_n^{(-m)}(0, 0)$ yazılabilir.

Teorem 2.4.5. *(Bayad ve Hamahata 2012) $F_n^{(-m)}(x, y)$ iki değişkenli polinom*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_n^{(-m)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \frac{u^m}{m!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_m^{(-n)}(y, x) \frac{t^n}{n!} \frac{u^m}{m!} \\ &= \frac{2e^{xt+yu} e^{t+u} (1-e^{-t})(1-e^{-u})}{tu\, (e^t+1)(e^u+1)(e^t+e^u-e^{t+u})} \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar. Bu teorem yardımıyla Poly-Euler polinomlarında

$$F_n^{(-m)}(x, y) = F_m^{(-n)}(y, x)\, ; \ldots ; F_n^{(-m)} = F_m^{(-n)}$$

bağıntıları elde edilir.

Teorem 2.4.6. *(Bayad ve Hamahata 2012) Poly-Euler polinomlarında kapalı formül $m, n \geq 0$ için*

$$\begin{aligned} F_n^{(-m)}(x, y) &= \Bigg\{ \frac{1}{2(n+1)(m+1)} \sum_{j=1}^{\min(n+1, m+1)} (j!)^2 \left(\sum_{k=0}^{n+1} E_{n+1-k}(x) \binom{n+1}{k} S_2(k, j) \right) \\ &\quad \left(\sum_{l=0}^{m+1} E_{m+1-l}(x) \binom{m+1}{l} S_2(l, j) \right) \Bigg\} \end{aligned}$$

eşitliği ile verilir. Burada

$$S_2(n,m) = \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}l^n$$

İkinci Tip Stirling sayısıdır.

Teorem 2.4.7. *(Bayad ve Hamahata 2012) Poly-Bernoulli polinomları ile Poly-Euler polinomları arasında*

$$nE_{n-1}^{(k)}(x) + nE_{n-1}^{(k)}(x+1) = 2B_n^{(k)}(x) - 2B_n^{(k)}(x-1)$$

eşitliği vardır.

2.5. Poly-Genocchi Polinomları

Bu bölümde Poly-Genocchi sayılarını ve Poly-Genocchi polinomlarını tanımlayarak bazı sağladığı bağıntılar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.5.1. *(Kim vd 2014) Poly-Genocchipolinomu*

$$\frac{2Li_k(1-e^{-t})e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}, \ldots k \in \mathbb{Z} \tag{2.23}$$

doğuray polinomu ile tanımlanır.

$x = 0$ da $G_n^{(k)} = G_n(0)$ Poly-Genocchi sayısı denir. $k = 1$ için

$$\frac{2Li_1(1-e^{-t})e^{xt}}{e^t+1} = \frac{2t}{e^t+1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan $G_n^{(1)}(x) = G_n(x)$, $n \geq 0$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2Li_k(1-e^{-t})}{e^t+1}e^{xt} \\ &= \frac{2}{e^t+1}\int_0^t \frac{1}{e^y-1}\int_0^t \frac{1}{e^y-1}\cdots\int_0^t \frac{y}{e^y-1}dy\ldots dye^{xt}\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. $k = 2$ için

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(2)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2}{e^t+1}\int_0^t \frac{y}{e^y-1}dye^{xt} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m t^m}{(m+1)!}\sum_{l=0}^{\infty}G_l(x)\frac{t^l}{l!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{B_l}{l+1}G_{n-l}(x)\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir.

Teorem 2.5.2. *(Kim vd 2014) Poly Genocchi polinomu*

$$G_n^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{l=1}^{p+1} \frac{(-1)^{l+p+1} l! S_2(p+1,l)}{l^k (p+1)} \binom{n}{p} G_{n-p}(x)$$

eşitliğini gerçekler.

Teorem 2.5.3. *(Kim vd 2014) Poly-Genocchi polinomu ile İkinci Tip Stirling sayısı arasında diğer bir eşitlik*

$n \geq 1$ *için*

$$G_n^{(k)}(x+1) + G_n^{(k)}(x) = 2\sum_{p=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} \frac{(-1)^{l+p}}{l^k} l! S_2(p,l) \binom{n}{p} x^{n-p}$$

dir.

Diğer bir eşitlikte $d \in \mathbb{N}$, $d \equiv 1 \pmod 2$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{2Li_k(1-e^{-t})}{e^t+1} e^{xt} \\
&= \left(\frac{Li_k(1-e^{-t})}{t}\right)\left(\frac{2t}{e^{dt}+1}\sum_{a=0}^{d-1}(-1)^a e^{(a+x)t}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{p+1}\frac{(-1)^{l+p+1}}{l^k}\frac{S_2(p+1,l)}{p+1}\frac{t^p}{p!}\sum_{m=0}^{\infty} d^{m-1}\sum_{a=0}^{d-1}(-1)^a G_m\left(\frac{a+x}{d}\right)\frac{t^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{p=0}^{n}\sum_{l=0}^{p+1}\sum_{a=0}^{d-1}\frac{(-1)^{l+p+1} S_2(p+1,l)}{l^k} d^{n-p-1}(-1)^a G\left(\frac{a+x}{d}\right)\binom{n}{p}\right\}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ katsayılarını karşılaştırırsak

$$G_n^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} d^{n-p-1}\sum_{l=0}^{p+1}\sum_{a=0}^{d-1}\frac{(-1)^{l+p+1} S_2(p+1,l)}{l^k}(-1)^a G\left(\frac{a+x}{d}\right)$$

elde edilir.

Kim vd (2014) modifiye edilmiş Poly-Genocchi polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_{n,2}^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2Li_k(1-e^{-2t})}{e^t+1}e^{xt} \tag{2.24}$$

ifadesiyle tanımlanmıştır. $x=0$, $G_{n,2}^{(k)} = G_{n,2}^{(k)}(0)$ modifiye edilmiş Genocchi sayısı denir.

(2.24)'den

$$\frac{Li_k(1-e^{-2t})e^{xt}}{e^t+1} = \frac{2Li_k(1-e^{-2t})}{(e^t+1)(e^t-1)}(e^t-1)e^{xt}$$

$$= \frac{2Li_k\left(1-e^{-2t}\right)}{e^{2t}-1}\left\{e^{\left(\frac{x+1}{2}\right)2t}-e^{\left(\frac{x}{2}\right)2t}\right\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2\left\{B_n^{(k)}\left(\frac{x+1}{2}\right)-B_n^{(k)}\left(\frac{x}{2}\right)\right\}\frac{2^n t^n}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırırsak

$$G_{n,2}^{(k)}(x) = 2^{n+1}\left\{B_n^{(k)}\left(\frac{x+1}{2}\right)-B_n^{(k)}\left(\frac{x}{2}\right)\right\} \tag{2.25}$$

elde edilir.

3. BULGULAR

Bu bölümde Parametreli Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli polinomları ve Parametreli Genelleştirilmiş Poly-genocchi polinomlarını tanımlayarak, bazı özdeşlikler, rekürans bağıntıları, simetriklik özelliği, dualite özelliği verilecektir. Parametrilerin özel durumunda ikinci bölümde verilen değerlere eşit olduğu gösterilecektir.

İlk bölümde parametrili genelleştirilmiş Poly-Bernoulli polinomları incelenecektir. İkinci bölümde parametrili genelleştirilmiş Poly-Genocchi polinomları incelenecektir.

3.1. Parametrili Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli Polinomları

Tanım 3.1.1 (Jolany ve R. Carcino 2015). *a, b, c pozitif reel parametreler olmak üzere Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!} = \frac{Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{b^t - a^{-t}}c^{xt} \tag{3.1}$$

ifadesiyle tanımlanır.

Burada $a = c = e$, $b = 1$ alınırsa (2.7) bağıntısı elde edilir. $a = c = e$, $b = k = 1$ alınırsa (2.1) elde edilir.

Teorem 3.1.2. *k Poly-Bernoulli polinomu ve 2. çeşit stirling sayıları arasında*

$$B_n^k(a,b) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(p+1)^k}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}p!S_2(k,p)(-\ln p)^{n-k}$$

bağıntısı vardır.

İspat. $x = 0$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(0;a,b,c)\frac{t^n}{n!} = \frac{Li_k(1-(ab)^{-t})}{b^t(1-(ab)^{-t})}$$

yazılabilir. k Polylogaritma tanımından

$$Li_k(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{x^p}{p^k}$$

yazılabilir. Bu iki ifadeyi birleştirerek

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(a,b)\frac{t^n}{n!} &= \frac{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(1-(ab)^{-t})^p}{p^k}}{b^t(1-(ab)^{-t})} = \frac{1}{b^t}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(1-(ab)^{-t})^p}{p^k}\frac{1}{(1-(ab)^{-t})} \\ &= \frac{1}{b^t}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(1-e^{-t\ln(ab)})^{p-1}}{p^k} = \frac{1}{b^t}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(e^{-t\ln(ab)}-1)^p}{(p+1)^k}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{b^t}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(p+1)^k}\sum_{n=0}^{\infty}p!S(n,p)\frac{t^n}{n!}\,, \qquad \left(b^{-t}=e^{-t\ln b}\right)\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(p+1)^k}\sum_{n=0}^{\infty}p!S(n,p)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}(-\ln b)^n\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(p+1)^k}p!S(k,p)(-\ln b)^{n-k}\right\}\frac{t^n}{n!}\\
&(k+l=n)\,,\,(\,l=n-k)
\end{aligned}
$$

iki tarafın $\frac{t^n}{n!}$ katsayılarını karşılaştırarak

$$
B_n^{(k)}(0;a,b,c)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(p+1)^k}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}p!S_2(k,p)(-\ln b)^{n-k}
$$

bulunmuş olur. □

Teorem 3.1.3. *Parametrili genelleştirilmiş Poly-Bernoulli polinomu*

$$
B_n^{(k)}(x;a,b,c)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}(-1)^m\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(x\ln c-\ln b\,(j+1)-j\ln a\right)^n \tag{3.2}
$$

bağıntısını sağlar.

İspat. (3.1) ve(2.6)'dan

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}\\
&= \frac{b^{-t}Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{\left(1-(ab)^{-t}\right)}e^{xt\ln c}\\
&= e^{-t\ln b}\frac{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(1-(ab)^{-t}\right)^m}{m^k}}{\left(1-(ab)^{-t}\right)}e^{xt\ln c}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(1-(ab)^{-t}\right)^{m-1}}{m^k}e^{t(x\ln c-\ln b)}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(1-e^{-t\ln ab}\right)^m}{(m+1)^k}e^{t(x\ln c-\ln b)}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}(-1)^m\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}e^{-tj\ln(ab)}e^{t(x\ln c-\ln b)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}(-1)^m\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(x\ln c-\ln b-j\ln b\right)^n\right\}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

$\frac{t^n}{n!}$ çarpanının katsayıları eşitlenerek (3.2) eşitliği elde edilir. □

Sonuç 3.1.4. *(3.2)'de $a = c = e$, $b = 1$ alırsak, Bayad ve Hamahata'nın (2011) ispatladığı (2.8) elde edilir.*

Teorem 3.1.5. *Parametrili genelleştirilmiş Poly-Bernoulli polinomu $\forall k > 1$, $n \geq 0$ için*

$$B_n^{(k+1)}\left(\frac{x}{\ln(ab)}; a, b\right)(\ln(ab))^n = \left\{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}B_{n-r}\left(\frac{x}{\ln(ab)}\right)(\ln(ab))^{n-r}\right. \quad (3.3)$$
$$\left.\sum_{n=0}^{r}\binom{r}{m}(-\ln a)^{r-m}\frac{B_r^{(k)}(a,b)}{r+1}\right\}$$

İspat.

$$\begin{aligned} Li_{k+1}(t) &= \int_0^t \frac{Li_k(s)}{s}ds \\ Li_{k+1}\left(1-(ab)^{-t}\right) &= \int_0^t \frac{Li_k\left(1-(ab)^{-s}\right)}{1-(ab)^{-s}}(\ln ab)\,e^{-s\ln ab}ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{Li_{k+1}\left(1-(ab)^{-t}\right)}{b^t\left(1-(ab)^{-t}\right)}e^{xt} \\ = {} & \ln(ab)\frac{1}{b^t-a^{-t}}e^{xt}\int_0^t \frac{Li_k\left(1-(ab)^{-s}\right)}{1-(ab)^{-s}}e^{-s\ln a}e^{-s\ln b}ds \\ = {} & \ln(ab)\frac{1}{b^t-a^{-t}}e^{xt}\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s\ln a)^n}{n!}\frac{Li_k\left(1-(ab)^{-s}\right)}{1-(ab)^{-s}}b^{-s}ds \\ = {} & \ln(ab)\frac{e^{xt}}{b^t-a^{-t}}\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s\ln a)^n}{n!}\frac{Li_k\left(1-(ab)^{-s}\right)}{b^s-a^{-s}}ds \\ = {} & \ln(ab)\frac{1}{b^t-a^{-t}}e^{xt}\int_0^t\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\ln a)^n\frac{s^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{(k)}(a,b)\frac{s^m}{m!}\right)ds \\ = {} & \ln(ab)\frac{1}{b^t-a^{-t}}e^{xt}\int_0^t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-\ln a)^{n-m}B_m^{(k)}(a,b)\frac{s^n}{n!}\right)ds \\ = {} & \ln(ab)\frac{1}{b^t-a^{-t}}e^{xt}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-\ln a)^{n-m}B_m^{(k)}(a,b)\frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_0^t \\ = {} & \ln(ab)\frac{b^{-t}e^{xt}}{\left(1-e^{-t\ln ab}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-\ln a)^{n-m}B_m^{(k)}(a,b)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\ = {} & \ln(ab)\frac{e^{t(x-\ln b)}}{\left(1-e^{-t\ln ab}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-\ln a)^{n-m}B_m^{(k)}(a,b)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{Li_{k+1}\left(1-e^{-t(\ln ab)}\right)}{\left(1-e^{-t\ln ab}\right)}e^{\frac{xt\ln(ab)}{\ln(ab)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k+1)}\left(\frac{x}{\ln(ab)}, a, b\right)(\ln ab)^n \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{t\ln(ab)}{(1-e^{-t\ln ab})} e^{\frac{x}{\ln ab} t\ln(ab)} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-\ln a)^{n-m}\frac{B_m^{(k)}(a,b)}{n+1}\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{x}{\ln(ab)}\right)(\ln ab)^n \frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-\ln a)^{n-m}\frac{B_m^{(k)}(a,b)}{n+1}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur.Yukarıdaki eşitlikte Cauchy çarpımı yaparak , $\frac{t^n}{n!}$ nin katsayılarını eşitleyerek

$$\begin{aligned}
B_n^{(k+1)}\left(\frac{x}{\ln(ab)}, a, b\right)(\ln ab)^n &= \left\{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}B_{n-r}\left(\frac{x}{\ln(ab)}\right)(\ln ab)^{n-r}\right. \\
&\quad \left.\sum_{m=0}^{r}\binom{r}{m}(-\ln a)^{r-m}\frac{B^{(k)}(a,b)}{r+1}\right\}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. □

Tanım 3.1.6. *İkideğişkenli a, b parametri fonksiyonu*

$$C_n^{(-m)}(x,y;a,b) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_n^{-k}\left(x-1+\frac{\ln a}{\ln(ab)}; a, b\right)\left(y-1+\frac{\ln b}{\ln(ab)}\right)^{m-k} \tag{3.4}$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 3.1.7. $C_n^{(-m)}(x,y;a,b)$ *fonksiyonu aşağıdaki eşitliği gerçekler.*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_n^{(-m)}(x,y;a,b)\frac{t^n}{n!}\frac{u^m}{m!} = \frac{e^{\left(y+\frac{\ln b}{\ln a+\ln b}\right)u} e^{\left(x+\frac{\ln a}{\ln a+\ln b}\right)t}}{e^t+e^u-e^{t+u}} \tag{3.5}$$

İspat. (3.5)'den

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_n^{(-m)}(x,y;a,b)\frac{t^n}{n!}\frac{u^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_n^{-k}\left(x-1+\frac{\ln a}{\ln(ab)}; a, b\right)\left(y-1+\frac{\ln b}{\ln(ab)}\right)^{l}\frac{t^n}{n!}\frac{u^k}{k!}\frac{u^l}{l!}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $m-k=l$ değişimi yapıldı.

ifadenin sağ tarafı

$$= e^{(y-1+\frac{\ln b}{\ln(ab)})u}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_n^{-k}\left(x-1+\frac{\ln a}{\ln(ab)}\right)\frac{t^n}{n!}\frac{u^k}{k!}$$

$$= e^{(y-1+\frac{\ln b}{\ln(ab)})u} e^{\left(x-1+\frac{\ln a}{\ln(ab)}\right)t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{-k} \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!}$$

elde edilir. Kaneko (1997) tarafından ispatlanan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(-k)} \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!} = \frac{e^{t+u}}{e^t + e^u - e^{t+u}}$$

eşitliği yukarıda yerine yazılırsa istenen(3.5) elde edilir. □

Sonuç 3.1.8 (Duality Özelliği). $m \geq 0$, $a = b$ *için*

$$C_n^{(-m)}(x, y; a, a) = C_m^{(-n)}(y, x; a, a) \tag{3.6}$$

dir.

Teorem 3.1.9. $C_n^{(-m)}(x, y; a, b)$ *fonksiyonu kapalı formül olarak adlandırılan*

$$\begin{aligned} C_n^{(-m)}(x, y; a, b) &= \sum_{m=0}^{\infty} (j!)^2 \left\{ \left(\sum_{m=0}^{l} \left(x + \frac{\ln a}{\ln(ab)} \right)^{l-m} \binom{n}{m} S_2(m, j) \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{r=0}^{p} \left(y + \frac{\ln b}{\ln(ab)} \right)^{p-r} \binom{p}{r} S_2(r, j) \right) \right\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

kapalı formülünü sağlar.

İspat. (3.5)'den

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n^{(-m)}(x, y; a, b) \frac{t^n}{n!} \frac{u^m}{m!} \\ &= \frac{e^{\left(x+\frac{\ln a}{\ln a+\ln b}\right)t} e^{\left(y+\frac{\ln b}{\ln a+\ln b}\right)u}}{e^t + e^u - e^{t+u}} \\ &= e^{\left(x+\frac{\ln a}{\ln a+\ln b}\right)t} e^{\left(y+\frac{\ln b}{\ln a+\ln b}\right)u} \frac{1}{1 - (e^t - 1)(e^u - 1)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{\left(x+\frac{\ln a}{\ln a+\ln b}\right)t} (e^t - 1)^j e^{\left(y+\frac{\ln b}{\ln a+\ln b}\right)u} (e^u - 1)^j \end{aligned}$$

yazılabilir. İkinci çeşit stirling sayısı tanımından (2.14) ifadesi yukarıdaki son satırda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} = &\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(j! \sum_{j=0}^{\infty} \left(x + \frac{\ln a}{\ln a + \ln b} \right)^n \frac{t^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ {m \atop j} \right\} \frac{t^m}{m!} \right) \right. \\ &\left. \left(j! \sum_{n=0}^{\infty} \left(y + \frac{\ln b}{\ln a + \ln b} \right)^n \frac{u^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ {m \atop j} \right\} \frac{u^m}{m!} \right) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede Cauchy çarpımı yapılırsa

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(j!)^2\left(\sum_{m=0}^{l}\left(x+\frac{\ln a}{\ln a+\ln b}\right)^{l-m}\binom{l}{m}\left\{\begin{matrix} m \\ j \end{matrix}\right\}\right)\right.$$
$$\left.\left(\sum_{r=0}^{p}\left(y+\frac{\ln b}{\ln a+\ln b}\right)^{p-r}\binom{p}{r}\left\{\begin{matrix} r \\ j \end{matrix}\right\}\right)\frac{t^l}{l!}\frac{u^p}{p!}\right\}$$

elde edilir. Katsayıları eşitlenerek (3.7) bulunur. □

3.2. Parametrili Genelleştirilmiş Poly-Genocchi Polinomları

Poly-Genocchi polinomlarını 2. 5 bölümünde tanım 2. 1. 6 ile tanımlamıştık. Poly-Genocchi sayıları ve Poly-Genocchi polinomlarının bazı özelliklerini aynı kesimde vermiştik. Şimdi Parametrili Genelleştirilmiş Poly-Genocchi sayılarını ve polinomlarını tanımlayıp gerçeklediği bağıntılar ve teoremleri verilecektir.

Tanım 3.2.1. *a, b, c Parametrili Genelleştirilmiş Poly-Genocchi polinomunu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}=\frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}+b^t}c^{xt} \tag{3.8}$$

ifadesiyle tanımlayacağız.

$a=1, b=c=e$ için (3.8) ifadesi

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}=\frac{2Li_k\left(1-e^{-t}\right)}{1+e^t}e^{xt}$$

olup(2.23) denklemine indirgenir (Kim vd 2014).

$a=1=k, b=c=e$ için (3.8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(1)}(x;1,e,e)\frac{t^n}{n!}=\frac{2te^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

den $G_n^{(1)}(x;1,e,e)=G_n(x)$ elde edilir. $x=0$ için Parametrili Genelleştirilmiş Poly-Genocchi sayısı

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}(a,b)\frac{t^n}{n!}=\frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}+b^t} \tag{3.9}$$

ifadesiyle verilir.

(3.9)'da $k=a=1, b=e$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(1)}(1,e)\frac{t^n}{n!}=\frac{2t}{1+e^t}=\sum_{n=0}^{\infty} G_n\frac{t^n}{n!}$$

den $G_n^{(1)}(1,e)=G_n$ Klasik Genocchi sayısı elde edilir.

Önerme 3.2.2. *Parametrili Poly-Genocchi polinomu*

$$G_n^{(k)}\left(x+1;a,b,c\right)=G_n^{(k)}\left(x;ac,\frac{b}{c},c\right) \tag{3.10}$$

ifadesini gerçekler.

İspat. (3.8)'den

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}\left(x+1;a,b,c\right)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}+b^t}c^{xt}c^t\\ &= \frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{(ac)^{-t}+\left(\frac{b}{c}\right)^t}c^{xt}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}\left(x;ac,\frac{b}{c},c\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Katsayıları karşılaştırarak (3.10) elde edilir. □

Önerme 3.2.3. *Aşağıdaki eşitlik doğrudur.*

$$G_n^{(k)}\left(x;a,b,c\right)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}G_m^{(k)}\left(0;a,b\right)\left(x\ln c+\ln a\right)^{n-m} \tag{3.11}$$

İspat. (3.8) ve(3.9)'dan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}\left(x;a,b,c\right)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}+b^t}c^{xt}\\ &= \frac{2Li_k\left(1-e^{-t(\ln(ab))}\right)}{1+e^{t\ln(ab)}}e^{xt\ln c+t\ln a}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}G_m^{(k)}\left(0;a,b\right)\frac{t^m}{m!}\sum_{m=0}^{\infty}\left(x\ln c+\ln a\right)^m\frac{t^m}{m!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}G_m^{(k)}\left(0;a,b\right)\left(x\ln c+\ln a\right)^{n-m}\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

Katsayıları karşılaştırarak (3.11) elde edilir. □

Önerme 3.2.4. *Parametrili Poly-Genocchi polinomu*

$$G_n^{(k)}\left(x;a,b,c\right)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}G_l^{(k)}\left(a,b\right)x^{n-l}$$

bağıntısını sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2Li\left(1-(ab)^{-t}\right)}{b^t+a^{-t}}c^{xt}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}(a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}(x\ln c)^n\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(\ln c)^{n-l}x^{n-l}G_l^{(k)}(a,b)\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

Her iki tarafta aynı katsayıları eşitleyerek istenilen elde edilir. □

Önerme 3.2.5. *Parametrili Poly-Genocchi polinomu*

$$G_n^{(k)}(x;a,b,c) = G_n^{(k)}\left(\frac{x\ln c+\ln a}{\ln a+\ln b}\right)(\ln a+\ln b)^n \tag{3.12}$$

bağıntısını sağlar.

İspat. (3.8)'den

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2Li_k\left(1-e^{-t(\ln(ab))}\right)}{1+e^{t\ln(ab)}}e^{t\ln(ab)\left[\frac{x\ln c+\ln a}{\ln(ab)}\right]}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}\left(\frac{x\ln c+\ln a}{\ln a+\ln b}\right)(\ln a+\ln b)^n\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

den

$$G_n^{(k)}(x;a,b,c) = G_n^{(k)}\left(\frac{x\ln c+\ln a}{\ln a+\ln b}\right)(\ln a+\ln b)^n$$

elde edilir. □

Önerme 3.2.6. *Genocchi polinomları aşağıdaki eşitliği sağlar.*

$$\frac{d}{dx}G_n^{(k)}(x;a,b,c) = n\ln c\, G_{n-1}^{(k)}(x;a,b,c) \tag{3.13}$$

İspat. (3.8)'de x 'e göre türev alalım

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}+b^t}c^{xt}t\ln c\\ &= \ln c\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^{n+1}}{n!}\\ &= \ln c\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= \ln c\sum_{n=0}^{\infty} nG_{n-1}^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

Katsayıları karşılaştırılarak (3.13) elde edilir. □

Tanım 3.2.7. *Parametrili modifiye edilmiş Poly-Genocchi polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_{n,2}^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!} = \frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-2t}\right)}{a^{-t}+b^t}c^{xt} \tag{3.14}$$

ifadesiyle tanımlayacağız.

$a=1, b=c=e$ için (3.14) ifadesinden Kim vd'deki, (2014) (2.24) tanımı elde edilir.

Teorem 3.2.8. *Parametrili Poly-Genocchi polinomu ile Parametrili Poly-Bernoulli polinomu arasında*

$$\begin{aligned} G_{n,2}^{(k)}(x;a,b,c) &= 2^{n+1}(\ln a+\ln b)^n\left\{B_n^{(k)}\left(\frac{x\ln c-\ln b}{2(\ln a+\ln b)}\right)\right. \\ &\left. -B_n^{(k)}\left(\frac{x\ln c-2\ln b-\ln a}{2(\ln a+\ln b)}\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

bağıntısı vardır.

İspat. (3.14)'den

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} G_{n,2}^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-2t}\right)}{a^{-t}+b^t}c^{xt} \\ &= \frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-2t}\right)}{a^{-t}+b^t}\frac{a^{-t}-b^t}{a^{-t}-b^t}c^{xt} \\ &= \frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-2t}\right)}{-b^{2t}\left[1-(ab)^{-2t}\right]}\left(a^{-t}-b^t\right)c^{xt} \\ &= -\frac{2Li_k\left(1-e^{-2t\ln(ab)}\right)}{\left(1-e^{-2t\ln(ab)}\right)}\left(e^{-t\ln a}-e^{t\ln b}\right)e^{xt\ln c}e^{-2t\ln b} \\ &= -\frac{2Li_k\left(1-e^{-2t\ln(ab)}\right)}{\left(1-e^{-2t\ln(ab)}\right)}e^{t[-\ln a+x\ln c-2\ln b]} \\ &\quad +\frac{2Li_k\left(1-e^{-2t\ln(ab)}\right)}{\left[1-e^{-2t\ln(ab)}\right]}e^{t(\ln b+x\ln c-2\ln b)} \\ &= \left\{-\frac{2Li_k\left(1-e^{-2t(\ln a+\ln b)}\right)}{\left(1-e^{-2t(\ln a+\ln b)}\right)}e^{2t[\ln a+\ln b]\left(\frac{x\ln c-2\ln b-\ln c}{2\ln a+\ln b}\right)}+\right. \\ &\quad \left.+\frac{2Li_k\left(1-e^{-2t(\ln a+\ln b)}\right)}{\left(1-e^{-2t(\ln a+\ln b)}\right)}e^{2t[\ln a+\ln b]\left(\frac{x\ln c-\ln b}{2\ln a+\ln b}\right)}\right\} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}2B_n^{(k)}\left(\frac{x\ln c-2\ln b-\ln a}{2(\ln a+\ln b)}\right)\frac{2^n t^n(\ln a+\ln b)^n}{n!} \end{aligned}$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}\left(\frac{x\ln c-\ln b}{2\left(\ln a+\ln b\right)}\right)\frac{2^n t^n\left(\ln a+\ln b\right)^n}{n!}$$

$\frac{t^n}{n!}$ nin katsayıları karşılaştırılarak (3.15) elde edilir. (3.15) de $a=1, b=c=e$ alınırsa

$$G_{n,2}^{(k)}\left(x;1,e,e\right)=2^{n+1}\left(B_n^{(k)}\left(\frac{x-1}{2}\right)-B_n^{(k)}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right) \tag{3.16}$$

elde edilir. Buradan da Kim vd'deki, (2014) (2.25) bağıntısına benzer bağıntı elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.9. *Parametrili Poly-Genocchi sayısı ile Parametrili Euler sayısı arasında*

$$\begin{aligned} G_n^{(k)}\left(a,b\right) &= \left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(m+1\right)^k}\sum_{j=0}^{m+1}\left(-1\right)^j\binom{m+1}{j}\right. \\ &\qquad \left.\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}E_p\left(a,b\right)\left(\ln a+\ln b\right)^p\left[\left(1-j\right)\ln a-j\ln b\right]^{n-p}\right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

eşitliği vardır.

□

İspat. (3.9) ve (2.6)'den

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}\left(a,b\right)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}+b^t}=\frac{2e^{t\ln a}}{e^{t\ln(ab)}+1}Li_k\left(1-e^{-t\ln(ab)}\right) \\ &= \frac{2e^{t\ln a}}{e^{t\ln(ab)}+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(m+1\right)^k}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}e^{-tj\ln(ab)}\left(-1\right)^j \\ &= \frac{2}{e^{t\ln(ab)}+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(m+1\right)^k}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}\left(-1\right)^j e^{t[\ln a-j\ln a-j\ln b]} \\ &= \left\{\sum_{n=0}^{\infty}E_n\left(a,b\right)\left(\ln\left(a,b\right)\right)^n\frac{t^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(m+1\right)^k}\right. \\ &\qquad \left.\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}\left(-1\right)^j\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(1-j\right)\ln a-j\ln b\right)^n\frac{t^n}{n!}\right\} \end{aligned}$$

Cauchy çarpımı yapılarak katsayıları eşitlenirse (3.17) elde edilir. □

Teorem 3.2.10. *Parmetrili Poly-Genocchi polinomu*

$$\begin{aligned} G_n^{(k+1)}\left(\frac{x}{\ln a+\ln b};a,b\right) &= \left\{\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}G_{n-r}\left(\frac{x}{\ln a+\ln b}\right)\left(\ln a+\ln b\right)^{-r}\right. \\ &\qquad \left.\sum_{m=0}^{r}\binom{r}{m}\left(-\ln b\right)^{r-m}\frac{B_r^{(k)}\left(a,b\right)}{r+1}\right\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$Li_{k+1}(s) = \int_0^t \frac{Li_k(s)}{s} ds$$

$$\begin{aligned}
\frac{Li_{k+1}\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}+b^{t}} e^{xt} &= \ln(ab) \frac{e^{xt}}{a^{-t}+b^{t}} \int_0^t \frac{Li_k\left(1-(ab)^{-s}\right)}{1-(ab)^{-s}} e^{-s\ln a} e^{-s\ln b} ds \\
&= \ln(ab) \frac{e^{xt}}{a^{-t}+b^{t}} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s\ln b)^n}{n!} \frac{Li_k\left(1-(ab)^{-s}\right)}{1-(ab)^{-s}} a^{-s} ds \\
&= \frac{\ln(ab)\, e^{xt}}{a^{-t}+b^{t}} \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-\ln b)^n \frac{s^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(k)}(a,b) \frac{s^m}{m!} \right) ds \\
&= \frac{\ln(ab)\, e^{xt}}{a^{-t}+b^{t}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-\ln b)^{n-m} B_m^{(k)}(a,b) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\frac{Li_{k+1}\left(1-(ab)^{-t}\right)}{1+(ab)^{t}} e^{xt} = \frac{\ln(ab)\, e^{xt}}{1+(ab)^{t}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-\ln b)^{n-m} B_m^{(k)}(a,b) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{Li_{k+1}\left(1-e^{-t\ln(ab)}\right)}{1+e^{t\ln(ab)}} e^{\frac{x}{\ln ab} t \ln(ab)} \\
&\quad = \frac{t\ln(ab)\, e^{\frac{x}{\ln(ab)} t\ln(ab)}}{1+e^{t\ln(ab)}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{(-\ln b)^{n-m} B_m^{(k)}(a,b)}{n+1} \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k+1)}\left(\frac{x}{\ln(ab)}; a, b\right) (\ln a + \ln b)^n \frac{t^n}{n!} &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k+1)}\left(\frac{x}{\ln(ab)}\right) \right. \\
&\left. \cdot (\ln a + \ln b)^n \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-\ln b)^{n-m} \frac{B_n^{(k)}(a,b)}{n+1} \frac{t^n}{n!} \right\}
\end{aligned}$$

sağ tarafa Cauchy çarpımı uygulayıp $\frac{t^n}{n!}$ nin katsayılarını eşitleyerek (3.18) elde edilir. □

Teorem 3.2.11. *Parametrili Poly-Genocchi polinomu ile Parametrili poly-Bernoulli polinomları arasında*

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left\{ (\ln b)^{n-m} + (-\ln a)^{n-m} G_m^{(k)}(x; a, b, c) \right\} \qquad (3.19) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-\ln a - \ln b)^{n-p} B_p^{(k)}(x; a, b, c) + B_n^{(k)}(x; a, b, c)
\end{aligned}$$

bağıntısı vardır.

İspat.

$$\frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}+b^{t}} \left(a^{-t}+b^{t}\right) c^{xt} = \frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}-b^{t}} \left(a^{-t}-b^{t}\right) c^{xt}$$

$$
\begin{aligned}
& a^{-t}\frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}+b^t}c^{xt}+b^t\frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}+b^t}c^{xt} \\
= \; & a^{-t}\frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}-b^t}c^{xt}-b^t\frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}-b^t}c^{xt}
\end{aligned}
$$

eşitliğin sol tarafı

$$
\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\left((\ln b)^k+(-\ln a)^k\right)\frac{t^k}{k!}
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left\{(\ln b)^{n-m}-(-\ln a)^{n-m}\right\}G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}
$$

dir. Sağ tarafı

$$
\begin{aligned}
& \frac{a^{-t}2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{b^t\left(-1+(ab)^{-t}\right)}c^{xt}-\frac{b^t 2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{b^t\left(-1+(ab)^{-t}\right)}c^{xt} \\
= \; & \frac{-e^{t\ln(ab)}2Li_k\left(1-e^{-t\ln(ab)}\right)}{\left(1-e^{-t\ln(ab)}\right)}c^{xt}-\frac{2Li_k\left(1-e^{-t\ln(ab)}\right)}{\left(1-e^{-t\ln(ab)}\right)}c^{xt} \\
= \; & \sum_{n=0}^{\infty}(-\ln(a,b))^n\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!} \\
= \; & \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-\ln a-\ln b)^{n-p}B_p^{(k)}(x;a,b,c)+\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}(x;a,b,c)\right)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Her iki tarafta $\frac{t^n}{n!}$ katsayılarını eşitleyerek (3.19) elde edilir. □

Teorem 3.2.12. *Paremetreli Poly-Genocchi polinomu aşağıdaki eşitliği gerçekler.*

$$
\begin{aligned}
& \left\{\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-\ln a-x\ln c)^{n-p}G_p^{(k)}(x;a,b,c)+\right. \\
& \left.\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}(\ln b-x\ln c)^{n-q}G_k^{(k)}(x;a,b,c)\right\} \\
= \; & 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}(-1)^j(-j\ln a-j\ln b)^n
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

İspat.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2Li_k\left(1-(ab)^{-t}\right)}{a^{-t}+b^t}c^{xt} \\
\left(a^{-t}c^{-xt}+b^tc^{-xt}\right)\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!} &= 2Li_k\left(1-e^{-t\ln(ab)}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \quad 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}\left(1-e^{-t\ln(ab)}\right)^{m+1}$$

Sol tarafı

$$\begin{aligned}
&= \quad e^{(-\ln a - x\ln c)t}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}+e^{t(\ln b - x\ln c)}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}\\
&= \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-\ln a - x\ln c)^n\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}\\
&\quad +\sum_{n=0}^{\infty}(\ln b - x\ln c)^n\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

Cauchy çarpımı yapılıp düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-\ln a - x\ln c)^{n-p}G_n^{(k)}(x;a,b,c)\right.\\
&\left.+\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}(\ln b - x\ln c)^{n-q}G_q^{(k)}(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}\right\}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

istenilen sonuç elde edilir.

Sağ tarafı

$$= \quad 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}(-1)^j e^{-tj\ln(ab)} \tag{3.22}$$

$$= \quad 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}(-1)^j(-j\ln a - j\ln b)^n\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. (3.21) ve (3.22) karşılaştırarak bulunur. □

4. KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ M; and STEGUN I. A.(1964), Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. Courier Corporation.

ARAKAWA, T and M. KANEKO (1999) On poly-bernoulli numbers, *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli*, 48(2):159-168.

ARAKAWA, T., IBUKIYAMA and T, KANEKO, M. (2013) Bernoulli numbers and zeta functions, Springer.

BAYAD. A and HAMAHATA, Y (2011) Polylogarithms and poly-bernoulli polynomials, *Kyushu Journal of Mathematics*, 65(1):15-24.

BAYAD, A and HAMAHATO, Y (2012) Multiple polylogarithms and multi-poly-bernoulli polynomials, *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, 46(1):45-61.

CHANG, C. IT. and HA. C. W. (2001) On recurrence relations for bernoulli and euler numbers, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 64(03):469-474.

CHEON, G. S. (2003). A note on the bernoulli and euler polynomials, *Applied Mathematics Letters*, 16(3):365-368.

EL-DESOUKY, B. S., and GOMAA, R. S. (2015). Multiparameter Poly-Cauchy and Poly-Bernoulli Numbers and Polynomials. *International Journal of Mathematical Analysis*, 9(53):2619-2633.

HAMAHATA, Y. (2014) Poly-euler polynomials and arakawa-kaneko type zeta functions, *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, 51(1):7-22.

HAMAHATA. Y and MASUBUCHI. H (2007) Special multi-poly-bernoulli numbers, *Journal of Integer sequences*, 10(2):3.

HAMAHATA. Y and MASUBUCHI. H (2007) Hamahata, Y., & Masubuchi, H. (2007). Recurrence formulae for multi-poly-Bernoulli numbers. *Integers*, 7(1).

JOLANY. H and R. B. CORCINO (2015) Explicit Formula For Generalization of Poly-Bernoulli numbers and Polynomials with a, b, c parameters; *J. of Classical Analysis* 6(2):119-135.

JOLANY. H. and R. B. CORCINO, T. KOMATSU(2015) More properties on multi-poly-euler polynomials, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 21(2):149-162.

KANEKO, K. (2013) A formula for multi-poly-bernoulli numbers of negative index, *Kyushu Journal of Mathematics*, 67(1):29-37.

KANEKO, M. (1997) Poly-bernoulli numbers, *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 9(1):221-228.

KIM. T. JANG. S. Y;SEO. J (2014) A note on poly-genocchi numbers and polynomials, *Applied Mathematical Sciences*, 8(96):4775-4781.

KIM. T(1996) Multiple zeta values, di-zeta values and their applications, *Lecture Notes in Number Theory (Kyungnam University)*.Guduk. Publ. Comp. 31- 95.

SÁNCHEZ-PEREGRINO, R(2002) Closed formula for poly-bernoulli numbers, *Fibonacci Quarterly*, 40(4):362-364.

SON J. W., KIM M.S.(1999) On poly-eulerian numbers, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 36(1):47-61.

SRIVASTAVA H. M., KURT B., and ŞİMŞEK Y. (2012). Some families of Genocchi type polynomials and their interpolation functions. *Integral Transforms and Special Functions*, 23(12):919-938.

ÖZGEÇMİŞ

Seçil Bilgiç, 1990 yılında Antalya'da doğdu. İlk,Orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı.2012 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Eylül 2014'de Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.