T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI HARDY–BERNDT TOPLAMLARININ KARAKTER BENZERLERİ

Merve ÇELEBİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI HARDY–BERNDT TOPLAMLARININ KARAKTER BENZERLERİ

Merve ÇELEBİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI HARDY–BERNDT TOPLAMLARININ KARAKTER BENZERLERİ

Merve ÇELEBİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul/red edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN

Doç. Dr. Mehmet CENKCİ

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ALBAYRAK

ÖZET

BAZI HARDY–BERNDT TOPLAMLARININ KARAKTER BENZERLERİ

Merve ÇELEBİ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN
Haziran 2016, 36 sayfa

Bu çalışmada, $\log\theta_2(z)$'nin χ ilkel karakteri ile genellemesi olan

$$A_1(z,s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)\chi(n)(-1)^m n^{n-1}e^{\frac{2\pi izmn}{k}}$$

fonksiyonu için dönüşüm formülleri elde edildi. Bu dönüşüm formüllerinde, Hardy–Berndt toplamlarının karakter genellemeleri olan toplamlar görüldü. Bu toplamların sağladığı resiprosite bağıntıları dönüşüm formülleri yardımıyla ispatlandı. Ayrıca, bu toplamların bazı özellikleri incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Dedekind Toplamları, Hardy Toplamları, Bernoulli Polinomları, Euler Polinomları.

JÜRİ: Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN (Danışman)
Doç. Dr. Mehmet CENKCİ
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ALBAYRAK

ABSTRACT

CHARACTER ANALOGUES OF CERTAIN HARDY–BERNDT SUMS

Merve ÇELEBİ

MSc Thesis, in Mathematics
Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mümün CAN
June 2016, 36 pages

In this work, the transformation formulas for the function

$$A_1(z,s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)\,\chi(n)\,(-1)^m\,n^{n-1}e^{\frac{2\pi izmn}{k}},$$

the generalization of $\log\theta_2(z)$ in the sense of primitive character χ, are obtained. Appearing in the transformation formulae are generalizations of the Hardy–Berndt sums. The corresponding reciprocity formulas for these sums are proved with the help of transformation formulas. Furthermore, several properties of these sums are investigated.

KEYWORDS: Dedekind Sums, Hardy Sums, Bernoulli Polynomials, Euler Polynomials.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Mümün CAN (Supervisor)
Assoc. Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Asst. Prof. Dr. Mehmet ALBAYRAK

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Önbilgiler ve Bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Bulgular bölümünde kullanılacak olan Bernoulli polinomları ve fonksiyonları, Euler polinomları ve fonksiyonları, Dirichlet karakteri, Dedekind toplamları, Hardy–Berndt toplamları, Berndt tarafından elde edilen dönüşüm formülleri Önbilgiler bölümünde tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

Bulgular bölümünde ise, $\log\theta_2(z)^{'}$nin genellemesi olan $A_1(z,s,\chi)$ fonksiyonu için dönüşüm formülleri verilmiştir. Bu dönüşüm formüllerinde ortaya çıkan karakter Hardy–Berndt toplamları tanımlanmıştır. Dönüşüm formülleri yardımıyla, bu toplamların resiprosite bağıntısı sağladığı gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasının, bu alandaki çalışmalara önemli katkılar sağlayacağı inancındayız.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN' a ve Arş.Gör. Muhammet Cihat DAĞLI'ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Berndt (1978) ve Goldberg (1981), $c > 0$ ve $ad - bc = 1$ olan a, b, c, d tamsayıları için $Tz = (az + b) / (cz + d)$ kesirsel dönüşümün katsayılarına bağlı olarak

$$\theta_2(z) = e^{\pi iz/4} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{2n\pi iz}\right) \left(1 + e^{2n\pi iz}\right)^2,$$
$$\theta_3(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{\pi iz2n}\right) \left(1 + e^{\pi iz(2n-1)}\right)^2,$$
$$\theta_4(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{2n\pi iz}\right) \left(1 - e^{(2n-1)\pi iz}\right)^2$$

ile tanımlanan *theta* fonksiyonları için aşağıdaki logaritmik dönüşüm formüllerini elde etmişlerdir:

Eğer b çift ise

$$\log\theta_4(Tz) = \log\theta_4(z) + \frac{1}{2}\log(cz + d) - \frac{\pi i}{4} - \frac{\pi i}{4} s_4(d, c), \tag{1.1}$$

eğer a çift ise

$$\log\theta_4(Tz) = \log\theta_2(z) + \frac{1}{2}\log(cz + d) + \frac{\pi id}{4c} - \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{2} s_3(d, c), \tag{1.2}$$

eğer a ve b tek ise

$$\log\theta_4(Tz) = \log\theta_3(z) + \frac{1}{2}\log(cz + d) - \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i}{4} S(d, c), \tag{1.3}$$

eğer d çift ise

$$\log\theta_2(Tz) = \log\theta_4(z) + \frac{1}{2}\log(cz + d) - \frac{\pi ia}{4c} - \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{2} s_1(d, c), \tag{1.4}$$

eğer c çift ise

$$\log\theta_2(Tz) = \log\theta_2(z) + \frac{1}{2}\log(cz + d) + \pi i\frac{a + d}{4c} - \frac{\pi i}{4} - \pi i s_2(d, c), \tag{1.5}$$

eğer c ve d tek ise

$$\log\theta_2(Tz) = \log\theta_3(z) + \frac{1}{2}\log(cz + d) - \frac{\pi ia}{4c} - \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{2} s_5(d, c). \tag{1.6}$$

Bunlardan (1.3) ve (1.6) dönüşümleri Goldberg (1981), diğerleri ise Berndt (1978) tarafından verilmiştir. Bu dönüşüm formüllerinde görülen $S(d, c)$ ve $s_m(d, c)$,

$m = \overline{1,5}$ toplamları (bkz. sayfa 7), Hardy toplamları ya da Berndt'in aritmetik toplamları (Hardy–Berndt toplamları) olarak adlandırılır.

Can (2006) $\log \theta_4(z)$'nin bir genellemesi olan $B(z, s : \chi)$ fonksiyonunu

$$B(z, s : \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \chi(m)\chi(2n+1)(2n+1)^{s-1} e^{\pi i m(2n+1)\frac{z}{k}}$$

şeklinde tanımlayarak dönüşüm formülleri elde etmiştir. Burada χ bir ilkel karakterdir (bkz. Tanım 2.1). Bu dönüşüm formüllerinde $S(d, c)$, $s_3(d, c)$ ve $s_4(d, c)$ toplamlarının genellemeleri olan ve $S_p(d, c, \chi)$, $s_{3,p}(d, c, \chi)$ ve $s_{4,p}(d, c, \chi)$ ile gösterilen karakter Hardy–Berndt toplamları görülmektedir.

Bu tez çalışmasında,

$$\log\left(\frac{\theta_2(z)}{2e^{\pi i z/4}}\right) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m n^{-1} e^{2\pi i z m n}$$

nın bir genellemesi olarak $A_1(z, s, \chi)$ (Tanım 3.1) fonksiyonu

$$A_1(z, s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(m)\chi(n)(-1)^m n^{s-1} e^{2\pi i z m n/k}$$

eşitliği ile tanımlanarak $\dfrac{az+b}{cz+d}$ kesirsel dönüşümünün a, b, c, d katsayılarına bağlı olarak üç farklı dönüşüm elde edilmiştir. Elde edilen dönüşüm formüllerinde $s_1(d, c)$, $s_2(d, c)$ ve $s_5(d, c)$ Hardy–Berndt toplamlarının, sırasıyla,

$$s_{1,p}(d, c, \chi) = \sum_{n=1}^{ck} \chi(n)\, \mathcal{E}_{p-1,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right) \mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{ck}\right),$$

$$s_{2,p}(d, c, \chi) = \sum_{n=1}^{ck} (-1)^n \chi(n)\, \mathfrak{B}_{p,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right) \mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{ck}\right),$$

$$s_{5,p}(d, c, \chi) = \sum_{n=1}^{ck} (-1)^n \chi(n)\, \mathcal{E}_{p-1,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right) \mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{ck}\right)$$

karakter Hardy–Berndt toplamları görülmektedir. Burada $\mathfrak{B}_p(x)$ Bernoulli fonksiyonu (bkz. sayfa 3) ve $\mathfrak{B}_{p,\chi}(x)$, $\mathcal{E}_{p,\chi}(x)$ ise χ ile genelleştirilmiş Bernoulli ve Euler fonksiyonlarıdır (bkz. sayfa 5). Bu toplamların sağladıkları resiprosite bağıntıları dönüşüm formülleri yardımıyla ispatlanmışve bazı özellikleri incelenmiştir.

2. ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, Bernoulli ve Euler fonksiyonları, Dirichlet karakteri, Dedekind toplamları, Hardy–Berndt toplamları tanıtılacak ve bazı özellikleri verilecektir.

2.1. Bernoulli ve Euler Fonksiyonları

$B_n(x)$ Bernoulli polinomu ve $E_n(x)$ Euler polinomu, sırasıyla,

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi$$
$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

üreteç fonksiyonlarıyla tanımlanır. $B_n(x)$'in tanımında $x = 0$ alınırsa $B_n(0) = B_n$, n-inci Bernoulli sayısı elde edilir; $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}, \cdots$ ve her $n \geq 1$ için $B_{2n+1} = B_{2n-1}(1/2) = 0$'dır (Jordan 1965). $B_n(x)$ n-inci Bernoulli polinomunun Bernoulli sayıları cinsinden ifadesi

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j x^{n-j}$$

dir.

n-inci Bernoulli fonksiyonu $\mathfrak{B}_n(x)$,

$$\mathfrak{B}_n(x) = B_n(\{x\}),\ n > 1 \text{ ve } \mathfrak{B}_1(x) = \begin{cases} B_1(\{x\}) & ,\ x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & ,\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada $\{x\}$, x'in kesir kısmıdır. Bernoulli fonksiyonu periyodu 1 olan bir fonksiyondur. Bernoulli polinomlarında olduğu gibi $\mathfrak{B}_n(x)$ Bernoulli fonksiyonu da, herhangi bir x için,

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mathfrak{B}_n\left(x + \frac{j}{m}\right) = m^{1-n}\mathfrak{B}_n(mx) \tag{2.1}$$

Raabe bağıntısını sağlar.

Euler sayıları $E_n = 2^n E_n(1/2)$ ile tanımlanır, $E_0 = 1$, $E_1 = 0$, $E_2 = -1$, $E_3 = 0$, $E_4 = 5, \cdots$ ve her $n \geq 0$ için $E_{2n+1} = 0$'dır (Jordan 1965). n-inci Euler fonksiyonu, $0 \leq x < 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{E}_n(x) = E_n(x) \text{ ve } \mathcal{E}_n(x+m) = (-1)^m \mathcal{E}_n(x)$$

eşitliği ile tanımlanır (Carlitz 1959). Euler fonksiyonlarının Raabe bağıntısı

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\,\mathcal{E}_m\left(x+\frac{j}{n}\right)=n^{-m}\mathcal{E}_m\left(nx\right)$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\mathcal{E}_n\left(1-x\right)=\left(-1\right)^n\mathcal{E}_n\left(x\right)\text{ ve }\mathcal{E}_n\left(-x\right)=\left(-1\right)^{n-1}\mathcal{E}_n\left(x\right) \tag{2.2}$$

ve n çift olmak üzere

$$n^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\,\mathfrak{B}_m\left(x+\frac{j}{n}\right)=-\frac{m}{2}\mathcal{E}_{m-1}\left(nx\right) \tag{2.3}$$

dir.

Tanım 2.1 ***a)*** *$n\in\mathbb{N}$ için $\chi\left(a+n\right)=\chi\left(a\right)$, $a\in\mathbb{Z}$ ve $\chi\left(a\right)=0 \iff (a,n)=$ obeb$\,(a,n)\neq 1$ koşullarını sağlayan $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{C}$'ye tanımlı χ çarpımsal fonksiyona bir n modül Dirichlet karakteri denir.*

b) *χ bir k modül Dirichlet karakteri ve d, k nın pozitif böleni olsun. $(a,k)=1$ ve $a\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,d)$ olduğunda $\chi\left(a\right)=1$ oluyorsa d sayısına χ için indirgenmiş modül denir.*

c) *χ, k modül Dirichlet karakteri $d<k$ olacak şekilde indirgenmiş modüle sahip değilse χ ye ilkel (primitif) karakter denir.*

Bu çalışmaboyunca χ'nin bir k modül ilkel karakter olduğu varsayılacak ve $\overline{\chi}$ ile χ'nin kompleks eşleniği, yani $\overline{\chi}\left(a\right)=\overline{\chi\left(a\right)}$, gösterilecektir.

χ ile genelleştirilmiş $B_{n,\chi}$ Bernoulli sayısı ve $B_{n,\chi}\left(x\right)$ polinomu, sırasıyla

$$\sum_{a=0}^{k-1}\frac{\overline{\chi}\left(a\right)te^{at}}{e^{kt}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,\chi}\frac{t^n}{n!},\quad |t|<2\pi/k$$

$$\sum_{a=0}^{k-1}\frac{\overline{\chi}\left(a\right)te^{(a+x)t}}{e^{kt}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,\chi}\left(x\right)\frac{t^n}{n!},\quad |t|<2\pi/k$$

üreteç fonksiyonlarıyla tanımlanır. $k=1$ ise

$$B_{n,1}=B_n\text{ ve }B_{n,1}\left(x\right)=B_n\left(x\right)$$

olur.

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, χ ile genelleştirilmiş $\mathfrak{B}_{n,\chi}(x)$ Bernoulli fonksiyonu (Berndt 1975a)

$$\mathfrak{B}_{n,\chi}(x) = k^{n-1} \sum_{a=0}^{k-1} \overline{\chi}(a) \mathfrak{B}_n \left(\frac{a+x}{k} \right) \tag{2.4}$$

ve $\mathcal{E}_{n,\chi}(x)$ Euler fonksiyonu

$$\mathcal{E}_{n,\chi}(x) = k^{n} \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^a \overline{\chi}(a) \mathcal{E}_n \left(\frac{a+x}{k} \right) \tag{2.5}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\mathfrak{B}_{n,\chi}(x+mk) = \mathfrak{B}_{n,\chi}(x) \text{ ve } \mathfrak{B}_{n,\chi}(-x) = (-1)^n \chi(-1) \mathfrak{B}_{n,\chi}(x), \tag{2.6}$$

$$\mathcal{E}_{n,\chi}(x+mk) = (-1)^m \mathcal{E}_{n,\chi}(x) \text{ ve } \mathcal{E}_{n,\chi}(-x) = (-1)^{n-1} \chi(-1) \mathcal{E}_{n,\chi}(x) \tag{2.7}$$

özellikleri sağlanır.

2.2. Dedekind Toplamları

$d, c \in \mathbb{Z}$, $c > 1$ olmak üzere, $s(d,c)$ ile gösterilen Dedekind toplamı

$$s(d,c) = \sum_{n=1}^{c-1} \left(\left(\frac{n}{c} \right) \right) \left(\left(\frac{dn}{c} \right) \right)$$

eşitliği ile tanımlanır ve $z \in \mathbb{H} = \{x+iy : y > 0 \text{ ve } x, y \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere

$$\eta(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i n z}\right)$$

fonksiyonunun dönüşüm formülünde görülmektedir. Burada

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & , \ x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & , \ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ve $[x]$, x'in tam değeridir. Dedekind toplamlarının en önemli özelliği

$$s(d,c) + s(c,d) = \frac{1}{12} \left(\frac{d}{c} + \frac{c}{d} + \frac{1}{dc} \right) - \frac{1}{4} \tag{2.8}$$

resiprosite bağıntısıdır (Rademacher ve Grosswald 1972).

Bu toplamlar, birçok matematikçi tarafından genelleştirilmiş ve bunlara karşılık gelen resiprosite bağıntıları farklı yollardan ispatlanmıştır (Rademacher ve Whitheman 1941, Apostol 1950, Carlitz 1954, 1964, Rademacher ve Grosswald 1972, Berndt 1973a, 1973b, 1975b, Takàcs 1979, Kurt 1990, 1991, 1997, Nagasaka vd 2003, Ota 2003, Sekine 2005, Cenkci vd 2007, Dağlı ve Can 2014, Kim ve Son 2014, Cenkci 2015, Dağlı ve Can 2015, 2016 ve Hu vd 2016).

p, d ve c pozitif tamsayılar olmak üzere, Apostol (1950) $s(d,c)$ toplamını

$$s_p(d,c) = \sum_{n=1}^{c-1} \frac{n}{c} \mathfrak{B}_p\left(\frac{dn}{c}\right)$$

eşitliği ile genelleştirerek, $(d,c) = 1$ ve tek p'ler için

$$\begin{aligned} & dc^p s_p(d,c) + cd^p s_p(c,d) \\ &= \frac{1}{(p+1)} \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} (-1)^j B_j d^j B_{p+1-j} c^{p+1-j} + \frac{pB_{p+1}}{(p+1)} \end{aligned} \tag{2.9}$$

resiprosite bağıntısını ispatlamıştır. $p = 1$ olması durumunda $\mathfrak{B}_1(x) = ((x))$ olduğundan $s_1(d,c) = s(d,c)$ olur ve (2.9) eşitliği (2.8) formülüne indirgenir.

Berndt (1973b), $s(d,c)$'nin χ ile genelleştirmesi olan $s(d,c,\chi)$ karakter Dedekind toplamını $d, c > 0$ ve $(d,c) = 1$ olmak üzere,

$$s(d,c,\chi) = \sum_{n=0}^{ck-1} \chi(n) \mathfrak{B}_{1,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right) \mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{ck}\right)$$

eşitliği ile tanımlayarak c ya da $d \equiv 0 \pmod{k}$ koşulu altında

$$s(c,d,\chi) + s(d,c,\bar{\chi}) = B_{1,\chi} B_{1,\bar{\chi}}$$

bağıntısını vermiştir. $s(d,c;\chi)$ toplamının Apostol anlamındaki genellemesi Cenkci vd (2007) tarafından

$$s_p(d,c,\chi) = \sum_{n=0}^{ck-1} \chi(n) \mathfrak{B}_{p,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right) \mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{ck}\right)$$

ifadesiyle verilerek $d, c > 0$ ve $(d,c) = 1$ olmak üzere, $(dc,k) = 1$ iken k asal, $(dc,k) > 1$ iken k herhangi bir tamsayı koşulu altında karşılık gelen resiprosite bağıntısı aritmetik yoldan ispatlanmıştır.

2.3. Hardy–Berndt Toplamları

(1.1)–(1.6) dönüşüm formüllerinde görülen $S(d,c)$ ve $s_m(d,c)$, $m = \overline{1,5}$

Hardy–Berndt toplamları, $d, c \in \mathbb{Z}$, $c > 1$ olmak üzere,

$$S(d,c) = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{j+1+\left[\frac{dj}{c}\right]}, \qquad s_1(d,c) = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{\left[\frac{dj}{c}\right]} \left(\left(\frac{j}{c}\right)\right),$$

$$s_2(d,c) = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{j} \left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right), \qquad s_3(d,c) = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{j} \left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right),$$

$$s_4(d,c) = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{\left[\frac{dj}{c}\right]}, \qquad s_5(d,c) = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{j+\left[\frac{dj}{c}\right]} \left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)$$

ile tanımlanır. Bu toplamların temel özelliği olan resiprosite bağıntılarının farklı ispatları Berndt (1978), Goldberg (1981), Apostol ve Vu (1982), Berndt ve Goldberg (1984), Sitaramachandrarao (1987) ve Şimşek (2003) tarafından verilmiştir. Aritmetik özellikleri ve genellemeleri Berndt (1978), Goldberg (1981), Berndt ve Goldberg (1984), Sitaramachandrarao (1987), Meyer (1997a, 1997b), Can (2000, 2004, 2006), Can vd (2006), Dağlı (2010), Guo ve Zhang (2011), Dağlı ve Can (2013, 2014), Zhang ve Zhang (2014), Can ve Kurt (2014), Peng ve Zhang (2016) tarafından verilmiştir.

Bu toplamların sağladıkları resiprosite bağıntıları aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2 *$c, d > 1$ ve $(c,d) = 1$ olmak üzere, eğer $(c+d)$ tek ise*

$$S(d,c) + S(c,d) = 1,$$

d çift ise

$$s_1(d,c) - s_2(c,d) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{dc} + \frac{c}{d}\right),$$

c tek ise

$$2s_3(d,c) - s_4(c,d) = 1 - \frac{d}{c},$$

$(d+c)$ çift ise

$$s_5(d,c) + s_5(c,d) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2dc}$$

dır.

Bu bağıntıların sonuncusu Goldberg'e (1981), diğerleri ise Berndt'e (1978) aittir. Hardy-Berndt toplamları trigonometrik serilerle aşağıdaki gibi ifade edilir.

Teorem 2.3 *(Berndt ve Goldberg 1984) $c, d \in \mathbb{Z}$, $c > 0$ ve $(c, d) = 1$ olsun. Eğer $(c + d)$ tek ise,*

$$\begin{aligned} S(d,c) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \tan \frac{\pi d\,(2n-1)}{2c} \\ &= \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{c} \tan\left(\frac{\pi d\,(2j-1)}{2c}\right) \cot\left(\frac{\pi\,(2j-1)}{2c}\right), \end{aligned}$$

eğer d çift ise

$$\begin{aligned} s_1(d,c) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ 2n-1 \not\equiv 0 (\operatorname{mod} k)}}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cot \frac{\pi d\,(2n-1)}{2c} \\ &= -\frac{1}{2c} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (k+1)/2}}^{c} \cot\left(\frac{\pi d\,(2j-1)}{2c}\right) \cot\left(\frac{\pi\,(2j-1)}{2c}\right), \end{aligned}$$

eğer c çift ise

$$\begin{aligned} s_2(d,c) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ 2n \not\equiv 0 (\operatorname{mod} k)}}^{\infty} \frac{1}{n} \tan \frac{\pi d n}{c} \\ &= -\frac{1}{4c} \sum_{j=1}^{c-1} \tan\left(\frac{\pi d j}{c}\right) \cot\left(\frac{\pi j}{c}\right), \end{aligned}$$

eğer c tek ise

$$\begin{aligned} s_3(d,c) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan \frac{\pi d n}{c} \\ &= \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^{c-1} \tan\left(\frac{\pi d j}{c}\right) \cot\left(\frac{\pi j}{c}\right), \end{aligned}$$

eğer d tek ise

$$\begin{aligned} s_4(d,c) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cot \frac{\pi d\,(2n-1)}{2c} \\ &= \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{c-1} \cot\left(\frac{\pi d\,(2j-1)}{2c}\right) \cot\left(\frac{\pi\,(2j-1)}{2c}\right), \end{aligned}$$

eğer d ve c tek

$$s_5\left(d,c\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ 2n-1\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\,k)}}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\tan\frac{\pi d\left(2n-1\right)}{2c}$$
$$=\frac{1}{2c}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq(k+1)/2}}^{c}\tan\left(\frac{\pi d\left(2j-1\right)}{2c}\right)\cot\left(\frac{\pi\left(2j-1\right)}{2c}\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

Sitaramachandrarao (1987) bu toplamları Dedekind toplamı cinsinden aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Teorem 2.4 *(Sitaramachandrarao 1987) $c,d\in\mathbb{Z}$, $c>0$ ve $(c,d)=1$ olsun. Eğer $(c+d)$ tek ise,*

$$S(d,c)=-20s(d,c)+8s(d,2c)+8s(2d,c),$$

eğer d çift ise,

$$s_1(d,c)=2s(d,c)-4s(d,2c),$$

eğer c çift ise,

$$s_2(d,c)=-s(d,c)+2s(2d,c),$$

eğer c tek ise,

$$s_3(d,c)=2s(d,c)-4s(2d,c),$$

eğer d tek ise,

$$s_4(d,c)=-4s(d,c)+8s(d,2c),$$

eğer $d+c$ çift ise,

$$s_5(d,c)=-10s(d,c)+4s(d,2c)+4s(2d,c)$$

dir. Ayrıca, $(c+d)$ çift ise $S(d,c)=0$, d tek ise $s_1(d,c)=0$, c tek ise $s_2(d,c)=0$, c çift ise $s_3(d,c)=0$, d çift ise $s_4(d,c)=0$ ve $d+c$ tek ise $s_5(d,c)=0$'dır.

2.4. Berndt'in Dönüşüm Formülü

Bu çalışmanın bundan sonraki kısmında, $\{z=x+iy\in\mathbb{C}:y>0\}$ üst yarı-düzlemi $\mathbb{H}$ ile ve $\{x+iy:x>-d/c \text{ ve } y>0\}$ kümesi $\mathbb{K}$ ile gösterilecektir. Ayrıca a,b,c,d birer tamsayı ve $c>0$ olmak üzere, $\dfrac{az+b}{cz+d}$ ile $ad-bc=1$ koşulunu sağlayan kesirsel dönüşümler ele alınacaktır ve Tz veya $T\left(z\right)$ şeklinde gösterilecektir.

Berndt (1973b), $z\in\mathbb{H}$ olmak üzere

$$G\left(z,s,\chi\right)=\sum_{\substack{m,n=-\infty\\(m,n)\neq 0}}^{\infty}\frac{\chi(m)\overline{\chi}(n)}{\left(mz+n\right)^{s}},\quad Re(s)>2 \tag{2.10}$$

ve

$$A\left(z,s,\chi\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(m)\chi(n)n^{s-1}e^{2\pi imn\frac{z}{k}}$$

fonksiyonlarını tanımlayarak

$$\Gamma\left(s\right)G\left(z,s,\chi\right)=G(\overline{\chi})\left(-\frac{2\pi i}{k}\right)^{s}H\left(z,s,\chi\right) \tag{2.11}$$

olduğunu göstermiştir. Burada, $H\left(z,s,\chi\right)=\left(1+e^{\pi is}\right)A\left(z,s,\chi\right)$, $\Gamma\left(s\right)$ Euler gamma fonksiyonu ve $G(\chi)=G(1,\chi)$ olmak üzere

$$G(z,\chi)=\sum_{m=0}^{k-1}\chi(m)e^{2\pi im\frac{z}{k}}$$

Gauss toplamıdır. Eğer n bir tamsayı ise

$$G(n,\chi)=\overline{\chi}(n)G(\chi)$$

sağlanır (Apostol 1976).

Berndt $G\left(z,s,\chi\right)$ fonksiyonu için aşağıdaki dönüşüm formüllerini vermiştir.

Teorem 2.5 *(Berndt 1973b)* $Tz=\dfrac{az+b}{cz+d}$ *olsun. Eğer* $a\equiv d\equiv 0$ *(mod* k*) ise,* $z\in\mathbb{K}$ *ve her* $s\in\mathbb{C}$ *için*

$$\begin{aligned}&\left(cz+d\right)^{-s}\Gamma\left(s\right)G\left(Tz,s,\chi\right)=\overline{\chi}(b)\chi(c)\Gamma\left(s\right)G\left(z,s:\overline{\chi}\right)\\&+\overline{\chi}(b)\chi(c)e^{-\pi is}\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\overline{\chi}\left(\mu c+j\right)\chi\left(\left[\frac{dj}{c}\right]-\nu\right)f(z,s:c,d)\end{aligned} \tag{2.12}$$

dir. Eğer $b\equiv c\equiv 0$ *(mod* k*) ise,* $z\in\mathbb{K}$ *ve her* $s\in\mathbb{C}$ *için*

$$\begin{aligned}&\left(cz+d\right)^{-s}\Gamma\left(s\right)G\left(Tz,s,\chi\right)=\overline{\chi}(a)\chi(d)\Gamma\left(s\right)G\left(z,s,\chi\right)\\&+\overline{\chi}(a)\chi(d)e^{-\pi is}\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\chi\left(j\right)\overline{\chi}\left(\left[\frac{dj}{c}\right]+d\mu-\nu\right)f(z,s:c,d)\end{aligned} \tag{2.13}$$

dir. Burada $f(z,s:c,d)=f(z,s:c,d,j,\mu,\nu)$

$$=\int_{C}\frac{e^{-\frac{(\mu c+j)}{ck}(cz+d)ku}}{e^{-(cz+d)ku}-1}\frac{e^{\left(\left(\nu+\left\{\frac{dj}{c}\right\}\right)/k\right)ku}}{e^{ku}-1}u^{s-1}du \tag{2.14}$$

ve C*, üst yarı-düzlemde* $+\infty$*'dan başlayan, orjini pozitif yönde çevreleyip alt yarı-düzlemden tekrar* $+\infty$*'a giden kapalı yoldur. Ayrıca,* u^{s}*'nin dalı* $0<\arg u<2\pi$ *olarak seçilmiştir.*

3. BULGULAR

Bu bölümde $A_1(z,s,\chi)$ fonksiyonunun kesirsel dönüşümler altındaki görüntüleri incelenecektir. Bu dönüşüm formüllerinde görülen toplamların sağladıkları resiprosite bağıntıları ve bazı özellikleri araştırılacaktır.

Bu çalışmanın bundan sonraki kısmında, χ bir k modül, $k>1$ tek tamsayı, ilkel karakter olduğu varsayılacaktır.

3.1. Dönüşüm Formülleri

Tanım 3.1 *$z\in\mathbb{H}$ ve $s\in\mathbb{C}$ olmak üzere $A_1(z,s,\chi)$ fonksiyonu*

$$A_1(z,s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)\chi(n)(-1)^m n^{s-1}e^{\frac{2\pi izmn}{k}}$$

olarak tanımlansın ve $H_1(z,s,\chi)=(1+e^{\pi is})A_1(z,s,\chi)$ olsun.

$A_1(z,s,\chi)$ fonksiyonu $A(z,s,\chi)$ cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}A_1(z,s,\chi)&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)\chi(n)(-1)^m n^{s-1}e^{2\pi i\frac{mnz}{k}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{s-1}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\chi(2m)e^{2\pi i\frac{nm2z}{k}}-\sum_{m=0}^{\infty}\chi(2m+1)e^{2\pi inz\frac{(2m+1)}{k}}\right\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{s-1}\left\{2\chi(2)\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)e^{2\pi i\frac{mn2z}{k}}-\sum_{m=0}^{\infty}\chi(m)e^{2\pi i\frac{nmz}{k}}\right\}\\&=2\chi(2)A(2z,s,\chi)-A(z,s,\chi).\end{aligned}$$

Böylece $H_1(z,s,\chi)$ fonksiyonu için, Teorem 2.5 yardımıyla, dönüşüm formülleri elde edilebilir.

Teorem 3.2 *$Tz=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ve d çift olsun. Eğer $a\equiv d\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,k)$ ise, $z\in\mathbb{K}$ ve her $s\in\mathbb{C}$ için*

$$\begin{aligned}G(\bar\chi)(cz+d)^{-s}H_1(Tz,s,\chi)&=\bar\chi(b)\chi(c)G(\chi)2^{1-s}\chi(2)B_1(z,s:\bar\chi)\qquad(3.1)\\&+\bar\chi(b)\chi(c)\left(-\frac{k}{2\pi i}\right)^s e^{-\pi is}\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\bar\chi(\mu c+j)\\&\times\left(2^{1-s}\chi(2)\chi([2dj/c]-\nu)f\left(\frac{z}{2},s,c,\frac{d}{2}\right)-\chi\left(\left[\frac{dj}{2}\right]-\nu\right)f(z,s,c,d)\right)\end{aligned}$$

dir. Burada

$$B_1\left(z,s:\chi\right)=\left(1+e^{\pi is}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\chi(m)\chi(2n+1)\left(2n+1\right)^{s-1}e^{\pi im(2n+1)z/k} \tag{3.2}$$

dır. Eğer $b\equiv c\equiv 0 \pmod k$ ise, $z\in\mathbb{K}$ ve her $s\in\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}G\left(\bar{\chi}\right)\left(cz+d\right)^{-s}H_1\left(Tz,s,\chi\right)&=\bar{\chi}\left(a\right)\chi\left(d\right)G\left(\bar{\chi}\right)2^{1-s}\bar{\chi}\left(2\right)B_1\left(z,s:\chi\right)\\&+\bar{\chi}\left(a\right)\chi\left(d\right)\left(-\frac{k}{2\pi i}\right)^{s}e^{-\pi is}\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\chi\left(j\right)\\&\times\left(2^{1-s}\bar{\chi}\left(\left[\frac{dj}{2c}\right]+\frac{d}{2}\mu-\nu\right)f\left(\frac{z}{2},s,c,\frac{d}{2}\right)-\bar{\chi}\left(\left[\frac{dj}{c}\right]+d\mu-\nu\right)f\left(z,s,c,d\right)\right)\end{aligned} \tag{3.3}$$

dır.

İspat. d çift olmak üzere $S\left(z\right)=\dfrac{2az+b}{cz+d/2}$ olsun. $S\left(\dfrac{z}{2}\right)=\dfrac{az+b}{cz/2+d/2}=2Tz$ olduğundan

$$H_1\left(Tz,s,\chi\right)=2\chi\left(2\right)H\left(S\left(\frac{z}{2}\right),s,\chi\right)-H\left(Tz,s,\chi\right) \tag{3.4}$$

elde edilir. Böylece

$$2^{1-s}\chi\left(2\right)H\left(\frac{z}{2},s,\bar{\chi}\right)-H\left(z,s,\bar{\chi}\right)=2^{1-s}\bar{\chi}\left(2\right)B_1\left(z,s:\bar{\chi}\right), \tag{3.5}$$

(3.4) ve Teorem 2.5'ten istenen elde edilir. ■

Teorem 3.3 *$Tz=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ve c çift olsun. Eğer $a\equiv d\equiv 0 \pmod k$ ise, $z\in\mathbb{K}$ ve her $s\in\mathbb{C}$ için*

$$\begin{aligned}G\left(\bar{\chi}\right)\left(cz+d\right)^{-s}H_1\left(Tz,s,\chi\right)&=\bar{\chi}\left(b\right)\chi\left(c\right)G\left(\chi\right)H_1\left(z,s,\bar{\chi}\right)\\&-\bar{\chi}\left(b\right)\chi\left(c\right)\left(-\frac{k}{2\pi i}\right)^{s}e^{-\pi is}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\\&\times\left(\sum_{j=1}^{c}\bar{\chi}\left(\mu c+j\right)\chi\left(\left[\frac{dc}{j}\right]-\nu\right)f\left(z,s,c,d\right)\right.\\&\left.-\sum_{j=1}^{c/2}2\bar{\chi}\left(2\right)\bar{\chi}\left(\frac{\mu c}{2}+j\right)\chi\left(\left[\frac{2dc}{j}\right]-\nu\right)f\left(2z,s,\frac{c}{2},d\right)\right)\end{aligned} \tag{3.6}$$

dır. Eğer $b \equiv c \equiv 0 \pmod{k}$ ise, $z \in \mathbb{K}$ ve her $s \in \mathbb{C}$ için

$$
\begin{aligned}
(cz+d)^{-s} G(\bar{\chi}) H_1(Tz,s,\chi) &= \bar{\chi}(a)\chi(d) G(\bar{\chi}) H_1(z,s,\chi) \\
&- \bar{\chi}(a)\chi(d)\left(-\frac{k}{2\pi i}\right)^{s} e^{-\pi i s} \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1} \\
&\times \left(\sum_{j=1}^{c} \chi(j)\bar{\chi}\left(\left[\frac{dj}{c}\right] + d\mu - \nu\right) f(z,s,c,d) \right. \\
&\left. - \sum_{j=1}^{\frac{c}{2}} 2\chi(2)\chi(j)\bar{\chi}\left(\left[\frac{2dj}{c}\right] + d\mu - \nu\right) f\left(2z,s,\frac{c}{2},d\right) \right)
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

dir.

İspat. c çift olmak üzere $V(z) = \dfrac{az+2b}{\frac{c}{2}z+d}$ olsun. $V(2z) = 2Tz$ olduğundan

$$
H_1(Tz,s,\chi) = 2\chi(2) H(V(2z),s,\chi) - H(Tz,s,\chi) \tag{3.8}
$$

elde edilir. Böylece (3.8) ve Teorem 2.5'ten istenen elde edilir. ■

Teorem 3.2 ve Teorem 3.3'ün ifadeleri s'nin tamsayı değerleri için sadeleşir. p tamsayı olmak üzere, $s = 1-p$ için $f(z,1-p,c,d)$ fonksiyonu Rezidü Teoremi yardımıyla hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
&f(z,1-p,c,d) \\
&= \frac{2\pi i k^{p-1}}{(p+1)!} \sum_{m=0}^{p+1} \binom{p+1}{m} \left(-(cz+d)\right)^{m-1} B_{p+1-m}\left(\frac{\nu + \left\{\frac{dj}{c}\right\}}{k}\right) B_m\left(\frac{\mu c + j}{ck}\right)
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

olarak bulunur.

Teorem 3.4 *$p \geq 1$ tek ve d çift olsun. Eğer $a \equiv d \equiv 0 \pmod{k}$ ise, $z \in \mathbb{H}$ için*

$$
\begin{aligned}
&G(\bar{\chi})(cz+d)^{p-1} H_1(Tz,1-p,\chi) \\
&= \bar{\chi}(b)\chi(c) 2^{p}\chi(2) G(\chi) B_1(z,1-p,\bar{\chi}) - \bar{\chi}(b)\chi(-c)\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^{p}}{p!} g_1(c,d,z,p,\bar{\chi})
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

dir. Burada

$$
\begin{aligned}
&g_1(c,d,z,p,\chi) \\
&= \sum_{m=1}^{p} \binom{p}{m} k^{m-p} \left(-(cz+d)\right)^{m-1} \sum_{n=1}^{ck} \chi(n) \mathcal{E}_{p-m,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right) \mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

dır. Eğer $b \equiv c \equiv 0 \pmod{k}$ *ise,* $z \in \mathbb{H}$ *için*

$$G(\bar{\chi})(cz+d)^{p-1} H_1(Tz, 1-p, \chi) \tag{3.12}$$
$$= \bar{\chi}(a)\chi(d) 2^p \bar{\chi}(2) G(\bar{\chi}) B_1(z, 1-p, \chi) - \bar{\chi}(a)\chi(-d)\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^p}{p!} g_1(c, d, z, p, \chi)$$

dır.

İspat. $a \equiv d \equiv 0 \pmod{k}$ olsun. (3.9) yardımıyla (3.1) eşitliği

$$G(\bar{\chi})(cz+d)^{p-1} H_1(Tz, 1-p, \chi)$$
$$= \bar{\chi}(b)\chi(c) G(\chi) 2^p \chi(2) B_1(z, 1-p, \bar{\chi})$$
$$+ \bar{\chi}(b)\chi(c)\left(-\frac{k}{2\pi i}\right)^{1-p} \frac{2\pi i k^{p-1}}{(p+1)!} e^{-2\pi i s} \sum_{m=0}^{p+1} \binom{p+1}{m} (-(cz+d))^{m-1}$$
$$\times \left(\sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{p+1-m} \chi(2) \bar{\chi}(\mu c + j) \chi\left(\left[\frac{dj}{2c}\right] - \nu\right)\right.$$
$$\times B_{p+1-m}\left(\frac{\nu + \left\{\frac{dj}{2c}\right\}}{k}\right) B_m\left(\frac{\mu c + j}{ck}\right) \tag{3.13}$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \bar{\chi}(\mu c + j) \chi\left(\left[\frac{dj}{c}\right] - \nu\right) B_{p+1-m}\left(\frac{\nu + \left\{\frac{dj}{c}\right\}}{k}\right) B_m\left(\frac{\mu c + j}{ck}\right)\right) \tag{3.14}$$

şeklini alır. (3.13)'te $B_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\{dj/2c\}}{k}\right)$ yerine $\mathfrak{B}_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\{dj/2c\}}{k}\right)$ yazılırsa toplam değişmez. Gerçekten, $0 < \frac{\nu+\{dj/2c\}}{k} < 1$ olması durumunda

$$B_{p+1-m}\left(\frac{\nu + \{dj/2c\}}{k}\right) = \mathfrak{B}_{p+1-m}\left(\frac{\nu + \{dj/2c\}}{k}\right) \tag{3.15}$$

dır. $\nu = 0$ ve $\{dj/2c\} = 0$ $(j = c)$ olması durumunda ise $\chi(d/2) = 0$ ($d \equiv 0 \pmod{k}$ ve k tek) olduğundan toplam değişmez. Benzer nedenlerle $B_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)$ ile $\mathfrak{B}_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)$ değiştirilirse toplam değişmez. Dolayısıyla, $B_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\left\{\frac{dj}{2c}\right\}}{k}\right)$ yerine $\mathfrak{B}_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\left\{\frac{dj}{2c}\right\}}{k}\right)$ ve $B_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)$ yerine $\mathfrak{B}_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)$ yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa, (3.13)'teki toplam

$$\sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{p+1-m} \chi(2) \bar{\chi}(\mu c + j) \chi\left(\left[\frac{dj}{2c}\right] - \nu\right) B_{p+1-m}\left(\frac{\nu + \left\{\frac{dj}{2c}\right\}}{k}\right) B_m\left(\frac{\mu c + j}{ck}\right)$$
$$= 2^{p+1-m} \chi(-2) k^{m-p} \sum_{n=1}^{ck} \bar{\chi}(n) \mathfrak{B}_{p+1-m, \bar{\chi}}\left(\frac{dn}{2c}\right) \mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right) \tag{3.16}$$

şeklini alır. Benzer şekilde, (3.14)'teki katlı toplam

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\bar{\chi}\left(\mu c+j\right)\chi\left(\left[\frac{dj}{c}\right]-\nu\right)B_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\left\{\frac{dj}{c}\right\}}{k}\right)B_{m}\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)\\&=k^{m-p}\chi\left(-1\right)\sum_{n=1}^{ck}\bar{\chi}\left(n\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_{m}\left(\frac{n}{ck}\right)\end{aligned}\tag{3.17}$$

olur. Toparlanırsa,

$$\begin{aligned}&G\left(\bar{\chi}\right)\left(cz+d\right)^{p-1}H_{1}\left(Tz,1-p,\chi\right)\\&=\bar{\chi}\left(b\right)\chi\left(c\right)G\left(\chi\right)2^{p}\chi\left(2\right)B_{1}\left(z,1-p,\bar{\chi}\right)\\&\quad+\bar{\chi}\left(b\right)\chi\left(c\right)\chi\left(-1\right)\frac{\left(2\pi i\right)^{p}}{\left(p+1\right)!}\sum_{m=1}^{p}\binom{p+1}{m}k^{m-p}\left(-\left(cz+d\right)\right)^{m-1}\\&\quad\times\sum_{n=1}^{ck}\bar{\chi}\left(n\right)\mathfrak{B}_{m}\left(\frac{n}{ck}\right)\left(2^{p+1-m}\chi\left(2\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{2c}\right)-\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\right)\end{aligned}\tag{3.18}$$

elde edilir. Şimdi

$$2^{p+1-m}\chi\left(2\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{2c}\right)-\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\tag{3.19}$$

farkını ele alalım.

$r\in\mathbb{N}$ ve $(r,k)=1$ olmak üzere, herhangi bir x için

$$\sum_{j=0}^{r-1}\mathfrak{B}_{m,\chi}\left(x+\frac{jk}{r}\right)=\chi(r)r^{1-m}\mathfrak{B}_{m,\chi}\left(rx\right)\tag{3.20}$$

(Can 2006) özelliğinde $r=2$ ve $x=\dfrac{dn}{2c}$ alınırsa

$$\begin{aligned}&2^{p+1-m}\chi\left(2\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{2c}\right)-\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\\&=2^{p-m}\chi\left(2\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{2c}\right)-2^{p-m}\chi\left(2\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{2c}+\frac{k}{2}\right)\\&=k^{p-m}2^{p-m}\chi\left(2\right)\sum_{\nu=0}^{k-1}\chi\left(\nu\right)\left(\mathfrak{B}_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\frac{dn}{2c}}{k}\right)-\mathfrak{B}_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\frac{dn}{2c}}{k}+\frac{1}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

bulunur. (2.3)'ten

$$\mathfrak{B}_{p+1-m}\left(X\right)-\mathfrak{B}_{p+1-m}\left(X+\frac{1}{2}\right)=-\frac{p+1-m}{2^{p+1-m}}\mathcal{E}_{p-m}\left(2X\right)$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} &2^{p+1-m}\chi(2)\,\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{2c}\right)-\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right) \\ &=-\frac{p+1-m}{2}k^{p-m}\sum_{\nu=0}^{k-1}\chi(2)\,\chi(\nu)\,\mathcal{E}_{p-m}\left(\frac{2\nu+\frac{dn}{c}}{k}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{k-1}\chi(2)\,\chi(\mu)\,\mathcal{E}_m\left(\frac{2\mu+x}{k}\right) \\ &=\sum_{\mu=0}^{\frac{k-1}{2}}\chi(2\mu)\,\mathcal{E}_m\left(\frac{2\mu+x}{k}\right)+\sum_{\mu=\frac{k+1}{2}}^{k-1}\chi(2\mu)\,\mathcal{E}_m\left(\frac{2\mu+x}{k}\right) \end{aligned}$$

ikinci toplamda μ yerine $\mu+\dfrac{k+1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} &=\sum_{\mu=0}^{\frac{k-1}{2}}\chi(2\mu)\,\mathcal{E}_m\left(\frac{2\mu+x}{k}\right)+\sum_{\mu=0}^{\frac{k-3}{2}}\chi(2\mu+1)\,\mathcal{E}_m\left(\frac{2\mu+1+x}{k}+1\right) \\ &=\sum_{\mu=0}^{\frac{k-1}{2}}\chi(2\mu)\,\mathcal{E}_m\left(\frac{2\mu+x}{k}\right)-\sum_{\mu=0}^{\frac{k-3}{2}}\chi(2\mu+1)\,\mathcal{E}_m\left(\frac{2\mu+1+x}{k}\right) \\ &=\sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^{\mu}\chi(\mu)\,\mathcal{E}_m\left(\frac{\mu+x}{k}\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. Buradan ve (3.21)'den

$$\begin{aligned} &2^{p+1-m}\chi(2)\,\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{x}{2}\right)-\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}(x) \\ &=-\frac{p+1-m}{2}k^{p-m}\sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^{\mu}\chi(\mu)\,\mathcal{E}_{p-m}\left(\frac{\mu+x}{k}\right) \\ &=-\frac{p+1-m}{2}\mathcal{E}_{p-m,\bar{\chi}}(x) \end{aligned} \tag{3.23}$$

olduğu görülür. Buna göre, $x=dn/c$ için

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{ck}\bar{\chi}(n)\,\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)\left(2^{p+1-m}\chi(2)\,\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{2c}\right)-\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\right) \\ &=\sum_{n=1}^{ck}\bar{\chi}(n)\,\mathcal{E}_{p-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
&G(\bar{\chi})(cz+d)^{p-1}H_1(Tz,1-p,\chi)\\
&=\bar{\chi}(b)\chi(c)2^p\chi(2)G(\chi)B_1(z,1-p,\bar{\chi})\\
&-\bar{\chi}(b)\chi(-c)\frac{(2\pi i)^p}{(p+1)!}\sum_{m=1}^{p}\frac{p+1-m}{2}\binom{p+1}{m}k^{m-p}(-(cz+d))^{m-1}\\
&\quad\times\sum_{n=1}^{ck}\bar{\chi}(n)\mathcal{E}_{p-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

$b\equiv c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,k)$ olsun. (3.9) yardımıyla (3.3) eşitliği

$$\begin{aligned}
&G(\bar{\chi})(cz+d)^{p-1}H_1(Tz,1-p,\chi)\\
&=\bar{\chi}(a)\chi(d)G(\bar{\chi})\left(2^p\bar{\chi}(2)H\left(\frac{z}{2},1-p,\chi\right)-H(z,1-p,\chi)\right)\\
&+\bar{\chi}(a)\chi(d)\left(-\frac{k}{2\pi i}\right)^{1-p}\frac{2\pi i k^{p-1}}{(p+1)!}\sum_{m=0}^{p+1}\binom{p+1}{m}(-(cz+d))^{m-1}\\
&\times\left(\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\chi(j)\bar{\chi}(2)2^{p+1-m}\bar{\chi}\left(\left[\frac{dj}{2c}\right]+\frac{d\mu}{2}-\nu\right)\right.\\
&\quad\times B_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\left\{\frac{dj}{2c}\right\}}{k}\right)B_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right) \qquad (3.24)\\
&-\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\chi(j)\bar{\chi}\left(\left[\frac{dj}{c}\right]-d\mu-\nu\right)\\
&\quad\left.\times B_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\left\{\frac{dj}{c}\right\}}{k}\right)B_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)\right) \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

olur. (3.24)'te $\left\{\frac{dj}{2c}\right\}=\frac{dj}{2c}-\left[\frac{dj}{2c}\right]$ olduğundan $\nu-\left[\frac{dj}{2c}\right]$ yerine ν yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\chi(j)\bar{\chi}\left(-\nu+\frac{d\mu}{2}\right)\mathfrak{B}_{p+1-m}\left(\frac{\frac{dj}{2c}+\nu}{k}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)\\
&=\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\chi(j)\bar{\chi}\left(-\nu+\frac{d\mu}{2}\right)\mathfrak{B}_{p+1-m}\left(\frac{\frac{d(\mu c+j)}{2c}-\frac{d\mu}{2}+\nu}{k}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)\\
&=\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu'=0}^{k-1}\chi(\mu c+j)\bar{\chi}(-\nu')\mathfrak{B}_{p+1-m}\left(\frac{\nu'+\frac{d(\mu c+j)}{2c}}{k}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)
\end{aligned}$$

$$= \chi(-1) k^{m-p} \sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} \chi(\mu c + j) \mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(\frac{d(\mu c + j)}{2c}\right) \mathfrak{B}_m\left(\frac{\mu c + j}{ck}\right)$$

$$= \chi(-1) k^{m-p} \sum_{n=1}^{ck} \chi(n) \mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(\frac{dn}{2c}\right) \mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.25)'teki katlı toplamın

$$\sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \chi(j) \bar{\chi}\left(\left[\frac{dj}{c}\right] - d\mu - \nu\right) B_{p+1-m}\left(\frac{\nu + \left\{\frac{dj}{c}\right\}}{k}\right) B_m\left(\frac{\mu c + j}{ck}\right)$$

$$= k^{m-p} \chi(-1) \sum_{n=1}^{ck} \chi(n) \mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right) \mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)$$

olduğu görülür. Böylece, (3.23) yardımıyla

(3.24) − (3.25)

$$= k^{m-p} \sum_{n=1}^{ck} \chi(-n) \mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right) \left(\bar{\chi}(2) 2^{p+1-m} \mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(\frac{dn}{2c}\right) - \mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\right)$$

$$= -\frac{p+1-m}{2} k^{m-p} \chi(-1) \sum_{n=1}^{ck} \chi(n) \mathcal{E}_{p-m,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right) \mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)$$

elde edilir. ∎

$(d+c)$ çift olmak üzere, Teorem 3.4'te $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ yerine $R(z) = \dfrac{az+b+ak}{cz+d+ck}$ alınırsa, (2.7) yardımıyla, $g_1(c, d+ck, z, p, \chi)$ fonksiyonu

$$g_1(c, d+ck, z, p, \chi)$$
$$= \sum_{m=1}^{p} \binom{p}{m} k^{m-p} (-(cz+d+ck))^{m-1} \sum_{n=1}^{ck} \chi(n) \mathcal{E}_{p-m,\chi}\left(\frac{dn}{c} + kn\right) \mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)$$
$$= \sum_{m=1}^{p} \binom{p}{m} k^{m-p} (-(cz+d+ck))^{m-1} \sum_{n=1}^{ck} (-1)^n \chi(n) \mathcal{E}_{p-m,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right) \mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right) \quad (3.26)$$

şeklini alır. Burada farklı bir toplam görüldüğünden aşağıdaki teoremi vermek uygun olacaktır.

Teorem 3.5 *$p \geq 1$ tek, $R(z) = \dfrac{az+b+ak}{cz+d+ck}$ ve $(d+c)$ çift olsun. Eğer $a \equiv d \equiv 0 \pmod{k}$ ise, $z \in \mathbb{H}$ için*

$$G(\bar{\chi})(cz+d+ck)^{p-1} H_1(R(z), 1-p, \chi)$$
$$= \bar{\chi}(b) \chi(c) G(\chi) 2^p \chi(2) B_1(z, 1-p, \bar{\chi}) - \bar{\chi}(b) \chi(-c) \frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^p}{p!} g_1(c, d+ck, z, p, \bar{\chi})$$

dır. Eğer $b \equiv c \equiv 0 \pmod{k}$ *ise,* $z \in \mathbb{H}$ *için*

$$G(\bar{\chi})(cz+d+ck)^{p-1} H_1(R(z), 1-p, \chi)$$
$$= \bar{\chi}(a)\chi(d)G(\bar{\chi})2^p\bar{\chi}(2)B_1(z,1-p,\chi) - \bar{\chi}(a)\chi(-d)\frac{1}{2}\frac{(2\pi i)^p}{p!}g_1(c,d+ck,z,p,\chi)$$

dır.

Teorem 3.3'ün ifadesi $s = 1-p$ için aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.6 *$p \geq 1$ tek ve c çift olsun. Eğer* $a \equiv d \equiv 0 \pmod{k}$ *ise,* $z \in \mathbb{H}$ *için*

$$G(\bar{\chi})(cz+d)^{p-1} H_1(Tz, 1-p, \chi) \tag{3.27}$$
$$= \bar{\chi}(b)\chi(c)G(\chi)H_1(z,1-p,\bar{\chi}) + \bar{\chi}(-b)\chi(c)\frac{(2\pi i)^p}{(p+1)!}g_2(c,d,z,p,\bar{\chi})$$

dır. Burada

$$g_2(c,d,z,p,\chi) \tag{3.28}$$
$$= \sum_{m=1}^{p}\binom{p+1}{m}(-(cz+d))^{m-1}k^{m-p}\sum_{n=1}^{ck}(-1)^n\chi(n)\mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)$$

dır. Eğer $b \equiv c \equiv 0 \pmod{k}$ *ise,* $z \in \mathbb{H}$ *için*

$$G(\bar{\chi})(cz+d)^{p-1} H_1(Tz, 1-p, \chi) \tag{3.29}$$
$$= \bar{\chi}(a)\chi(d)G(\bar{\chi})H_1(z,s,\chi) + \bar{\chi}(a)\chi(-d)\frac{(2\pi i)^p}{(p+1)!}g_2(c,d,z,p,\chi)$$

dır.

İspat. $p \geq 1$ tek tamsayı, c çift ve $a \equiv d \equiv 0 \pmod{k}$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{c}\bar{\chi}(\mu c+j)\chi\left(\left[\frac{dc}{j}\right]-\nu\right)f(z,1-p,c,d)$$

ve

$$\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{c/2}\bar{\chi}\left(\mu\frac{c}{2}+j\right)\chi\left(\left[\frac{2dc}{j}\right]-\nu\right)f\left(2z,1-p,\frac{c}{2},d\right)$$

ifadelerinde $m=0$ için μ üzerinden olan toplamlar ve $m=p+1$ için ν üzerinden olan toplamlar sıfır olur $\left(\sum_{\mu=0}^{k-1}\bar{\chi}(\mu c+j) = \sum_{\mu=0}^{k-1}\bar{\chi}(\mu) = 0\right)$. (3.9) yardımıyla (3.6) düzenlenirse

$$G(\bar{\chi})(cz+d)^{p-1}H_1(Tz,1-p,\chi)=\bar{\chi}(b)\chi(c)G(\chi)H_1(z,1-p,\bar{\chi})$$
$$-\bar{\chi}(b)\chi(c)\frac{2\pi i k^{p-1}}{(p+1)!}\left(-\frac{k}{2\pi i}\right)^{1-p}\sum_{m=1}^{p}\binom{p+1}{m}(-(cz+d))^{m-1}$$
$$\times\left(\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{c}\bar{\chi}(\mu c+j)\chi\left(\left[\frac{dj}{c}\right]-\nu\right)B_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\left\{\frac{dj}{c}\right\}}{k}\right)B_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)\right. \tag{3.30}$$
$$-2\bar{\chi}(2)\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{c/2}\bar{\chi}\left(\frac{\mu c}{2}+j\right)\chi\left(\left[\frac{2dj}{c}\right]-\nu\right)$$
$$\left.\times B_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\left\{\frac{2dj}{c}\right\}}{k}\right)B_m\left(\frac{\mu c+2j}{ck}\right)\right) \tag{3.31}$$

olarak yazılabilir. Burada, (3.30) ve (3.31)'deki toplamları hesaplanacak olursa:

(3.30)'da $B_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\{dj/c\}}{k}\right)$ yerine $\mathfrak{B}_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\{dj/c\}}{k}\right)$ yazılırsa toplam değişmez. Gerçekten, $0<\frac{\nu+\{dj/c\}}{k}<1$ olması durumunda

$$B_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\{dj/c\}}{k}\right)=\mathfrak{B}_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\{dj/c\}}{k}\right) \tag{3.32}$$

dır. $\nu=0$ ve $\{dj/c\}=0$ $(j=c)$ olması durumunda ise $\chi(d)=0$, $(d\equiv 0(\mathrm{mod}\,k))$, olduğundan toplam değişmez. Benzer nedenlerle $B_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)$ ile $\mathfrak{B}_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)$ değiştirilirse toplam değişmez. Ayrıca ν $(\mathrm{mod}\,k)$'yı tararken $\left(\nu-\left[\frac{dj}{c}\right]\right)$'de $(\mathrm{mod}\,k)$'yı tarar. Böylece (3.30)'daki toplam

$$\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{c}\bar{\chi}(\mu c+j)\chi\left(\left[\frac{dj}{c}\right]-\nu\right)B_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\left\{\frac{dj}{c}\right\}}{k}\right)B_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)$$
$$=\chi(-1)k^{m-p}\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\bar{\chi}(\mu c+j)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{d(\mu c+j)-d\mu c}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{\mu c+j}{ck}\right)$$

(burada $\mu c+j=n, 1\leq n\leq ck,$ denirse)

$$=\chi(-1)k^{m-p}\sum_{n=1}^{ck}\bar{\chi}(n)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right) \tag{3.33}$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde, (3.31)'deki toplam

$$2\bar{\chi}(2)\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{c/2}\bar{\chi}\left(\frac{\mu c}{2}+j\right)\chi\left(\left[\frac{2dj}{c}\right]-\nu\right)B_{p+1-m}\left(\frac{\nu+\left\{\frac{2dj}{c}\right\}}{k}\right)B_m\left(\frac{\mu c+2j}{ck}\right)$$
$$=2\chi(-1)k^{m-p}\sum_{j=1}^{ck/2}\bar{\chi}(2n)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{2dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{2n}{ck}\right) \tag{3.34}$$

olarak hesaplanır. Böylece,

$$\begin{aligned}(3.31)-(3.30) &= 2\sum_{n=1}^{ck/2}\bar{\chi}(2n)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{2dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{2n}{ck}\right)\\ &\quad-\sum_{n=1}^{ck}\bar{\chi}(n)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)\\ &=\sum_{n=1}^{ck}(-1)^n\bar{\chi}(n)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)\end{aligned}$$

olarak düzenlenebilir. Toparlanırsa,

$$\begin{aligned}&G(\bar{\chi})(cz+d)^{p-1}H_1(Tz,1-p,\chi)=\bar{\chi}(b)\chi(c)G(\chi)H_1(z,1-p,\bar{\chi})\\ &+\bar{\chi}(-b)\chi(c)\frac{(2\pi i)^p}{(p+1)!}\sum_{m=1}^{p}\binom{p+1}{m}(-(cz+d))^{m-1}k^{m-p}\\ &\times\sum_{n=1}^{ck}(-1)^n\bar{\chi}(n)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

$b\equiv c\equiv 0 \pmod k$ durumu da benzer şekilde elde edilir. ■

3.2. Resiprosite Bağıntıları

Bu bölümde, $g_1(d,c+dk;z,p;\chi)$, $g_1(d,c;z,p;\chi)$ ve $g_2(d,c;z,p;\chi)$ fonksiyonlarının sağladığı resiprosite bağıntıları ispatlanacaktır. İlk olarak, bu resiprosite bağıntılarının kanıtında kullanılacak olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.7 *(Can 2006) $p\geq 1$ tek tamsayı olmak üzere $Tz=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $a\equiv d\equiv 0$*

(mod k) *olsun. Eğer a çift ise, $z \in \mathbb{H}$ için*

$$\begin{aligned}
&2^p \bar{\chi}(2) (cz+d)^{p-1} G(\bar{\chi}) B_1(T(z), 1-p:\chi) \\
&= \bar{\chi}(b)\chi(c)G(\chi)H_1(z,1-p:\bar{\chi}) \\
&\quad + \bar{\chi}(b)\chi(c)(2\pi i)^p \frac{\chi(-1)}{(p+1)!} \sum_{m=1}^{p+1} \binom{p+1}{m} (-(cz+d))^{m-1} k^{m-p} \\
&\quad \times \left(-\frac{m}{2} \sum_{n=1}^{ck} (-1)^n \bar{\chi}(n) \mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right) \mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{n}{ck}\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

dır. Eğer b çift ise, $z \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned}
&(cz+d)^{p-1} G(\bar{\chi}) B_1(Tz, 1-p, \chi) \\
&= \bar{\chi}\left(\frac{b}{2}\right) \chi(2c) G(\chi) B_1(z, 1-p, \bar{\chi}) \\
&\quad - \bar{\chi}\left(\frac{b}{2}\right) \chi(-2c) \frac{(2\pi i)^p}{(p+1)!} \sum_{m=1}^{p} \binom{p+1}{m} k^{m-p} (-(cz+d))^{m-1} \\
&\quad \times \frac{m}{2^m} \sum_{n=1}^{ck} \chi(n) \mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(\frac{dn}{2c}\right) \mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{n}{ck}\right)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

dır.

Aşağıdaki sonuç, (3.26) ile verilen $g_1(d, c+dk; z, p; \chi)$ fonksiyonun resiprosite formülü olarak görülebilir.

Teorem 3.8 *$p \geq 1$ tek, d ve c aralarında asal tek tamsayılar olmak üzere, eğer c veya $d \equiv 0 \pmod{k}$ ise*

$$\begin{aligned}
&g_1(d, -c-dk, z, p, \chi) - \chi(-1)(z-k)^{p-1} g_1(c, d+ck, V_1(z), p, \bar{\chi}) \\
&= \bar{\chi}(4) \frac{p}{2k^{p-1}} \sum_{m=0}^{p-1} \binom{p-1}{m} (z-k)^m \mathcal{E}_{p-1-m,\bar{\chi}}(0) \mathcal{E}_{m,\chi}(0)
\end{aligned}$$

dır. Burada $V_1(z) = \dfrac{-kz+k^2-1}{z-k}$ dır.

İspat. $d \equiv 0 \pmod{k}$ olsun. $(c+d)$ çift olmak üzere $R(z) = \dfrac{az+b+ak}{cz+d+ck}$, $R^*(z) = \dfrac{bz-a-bk}{dz-c-dk}$ ve $V_1(z) = \dfrac{-kz+k^2-1}{z-k}$ dönüşümlerini ele alınsın. Teorem 3.5'in

$a \equiv d \equiv 0 \pmod{k}$ kısmında z, $V_1(z)$ ile değiştirilirse

$$\begin{aligned} & G(\bar{\chi}) \left(\frac{dz-c-dk}{z-k} \right)^{p-1} H_1 \left(R(V_1(z)), 1-p, \chi \right) \\ & = \bar{\chi}(b) \chi(c) G(\chi) 2^p \chi(2) B_1 \left(V_1(z), 1-p, \bar{\chi} \right) \\ & - \bar{\chi}(b) \chi(-c) \frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^p}{p!} g_1 \left(c, d+ck, V_1(z), p, \bar{\chi} \right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, $R^*(z)$ dönüşümü Teorem 3.5'in $b \equiv c \equiv 0 \pmod{k}$ kısmına uygulanırsa

$$\begin{aligned} & G(\bar{\chi}) (dz-c-dk)^{p-1} H_1 \left(R^*(z), 1-p, \chi \right) \\ & = \bar{\chi}(b) \chi(-c) G(\bar{\chi}) 2^p \bar{\chi}(2) B_1(z, 1-p, \chi) - \bar{\chi}(b) \chi(c) \frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^p}{p!} g_1(d, -c-dk, z, p, \chi) \end{aligned} \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.36)'da $a = -k, b = k^2 - 1, c = 1$ ve $d = -k$ alınır ve χ yerine $\bar{\chi}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} & (z-k)^{p-1} 2^p \chi(2) G(\chi) B_1 \left(V_1(z), 1-p, \bar{\chi} \right) \\ & = \chi \left(\frac{k^2-1}{2} \right) \bar{\chi}(2) 2^p \chi(2) G(\bar{\chi}) B_1(z, 1-p, \chi) \\ & \quad - \chi \left(\frac{k^2-1}{2} \right) \chi(2) \bar{\chi}(-2) 2^p \frac{(2\pi i)^p}{(p+1)!} \sum_{m=1}^{p} \binom{p+1}{m} k^{m-p} (-(z-k))^{m-1} \\ & \quad \times \frac{m}{2^m} \sum_{n=1}^{k} \bar{\chi}(n) \mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}} \left(\frac{-kn}{2} \right) \mathcal{E}_{m-1} \left(\frac{n}{k} \right) \end{aligned} \tag{3.39}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, (3.37) bağıntısı $(z-k)^{p-1}$ ile çarpılıp (3.38) ve (3.39) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & 2^p \bar{\chi}(-2) G(\bar{\chi}) B_1(z, 1-p, \chi) \\ & \quad - 2^p \bar{\chi}(-2) \frac{(2\pi i)^p}{(p+1)!} \sum_{m=1}^{p} \binom{p+1}{m} k^{m-p} (-(z-k))^{m-1} \\ & \quad \times \frac{m}{2^m} \sum_{n=1}^{k} \bar{\chi}(n) \mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}} \left(\frac{-kn}{2} \right) \mathcal{E}_{m-1} \left(\frac{n}{k} \right) \\ & \quad - \chi(-1) \frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^p}{p!} (z-k)^{p-1} g_1 \left(c, d+ck, V_1(z), p, \bar{\chi} \right) \\ & = 2^p \bar{\chi}(-2) G(\bar{\chi}) B_1(z, 1-p, \chi) - \frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^p}{p!} g_1(d, -c-dk, z, p, \chi) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & g_1\left(d,-c-dk,z,p,\chi\right)-\chi\left(-1\right)\left(z-k\right)^{p-1}g_1\left(c,d+ck,V_1\left(z\right),p,\bar{\chi}\right) \\ & \quad=\bar{\chi}\left(-2\right)\frac{2^{p+1}}{p+1}\sum_{m=1}^{p}\binom{p+1}{m}k^{m-p}\left(-\left(z-k\right)\right)^{m-1} \\ & \quad\quad\times\frac{m}{2^m}\sum_{n=1}^{k}\bar{\chi}\left(n\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{-kn}{2}\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{n}{k}\right) \end{aligned} \tag{3.40}$$

olduğu görülür. Şimdi (3.40)'ta n üzerinden olan toplamı sadeleştirmeye çalışalım. (3.20)'nin $r=2$ hali

$$\mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(\frac{k}{2}\right)+\mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(0\right)=2^{m-p}\bar{\chi}\left(2\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(0\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{k}\bar{\chi}\left(n\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{-kn}{2}\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{n}{k}\right) \\ & =\sum_{n}\bar{\chi}\left(2n\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(0\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2n}{k}\right)+\sum_{n}\bar{\chi}\left(2n+1\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{k}{2}\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2n+1}{k}\right) \\ & =\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(0\right)\sum_{n}\bar{\chi}\left(2n\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2n}{k}\right)+\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{k}{2}\right)\sum_{n}\bar{\chi}\left(2n\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2n}{k}\right) \\ & \quad-\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{k}{2}\right)\sum_{n}\bar{\chi}\left(2n\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2n}{k}\right) \\ & \quad\quad+\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{k}{2}\right)\sum_{n}\bar{\chi}\left(2n+1\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2n+1}{k}\right) \\ & =2^{m-p}\chi\left(2\right)\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(0\right)\sum_{n=0}^{(k-1)/2}\bar{\chi}\left(2n\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2n}{k}\right) \\ & \quad-\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{k}{2}\right)\sum_{n=0}^{k-1}\left(-1\right)^{n}\bar{\chi}\left(n\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{n}{k}\right) \end{aligned}$$

yazılır. (2.2)'den

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=0}^{k-1}\chi\left(2\mu\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2\mu}{k}\right) \\ & \quad=\sum_{\mu=0}^{(k-1)/2}\chi\left(2\mu\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2\mu}{k}\right)+\sum_{\mu=\frac{k+1}{2}}^{k-1}\chi\left(2\mu\right)\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2\mu}{k}\right) \end{aligned}$$

ikinci toplamda μ yerine $k-\mu$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=0}^{(k-1)/2} \chi(2\mu)\,\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2\mu}{k}\right) + \sum_{\mu=1}^{(k-1)/2} \chi(-2\mu)\,\mathcal{E}_{m-1}\left(-\frac{2\mu}{k}\right) \\
&= \sum_{\mu=0}^{(k-1)/2} \chi(2\mu)\,\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2\mu}{k}\right) + (-1)^m \chi(-1) \sum_{\mu=1}^{(k-1)/2} \chi(2\mu)\,\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2\mu}{k}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan ve (2.6)'dan

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}(0) \sum_{n=0}^{k-1} \bar{\chi}(2n)\,\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2n}{k}\right) \\
&= \left(\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}(0) + (-1)^m \chi(-1)\,\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}(0)\right) \sum_{n=1}^{(k-1)/2} \bar{\chi}(2n)\,\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2n}{k}\right) \\
&= 2\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}(0) \sum_{n=1}^{(k-1)/2} \bar{\chi}(2n)\,\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2n}{k}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Burada

$$
\sum_{n=0}^{k-1} \bar{\chi}(2n)\,\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{2n}{k}\right) = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \bar{\chi}(n)\,\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{n}{k}\right)
$$

olduğu göz önüne alınır (bkz. (3.22)) ve (3.23)'te $x=k$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{k} \bar{\chi}(n)\,\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{-kn}{2}\right) \mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{n}{k}\right) \\
&= \frac{\bar{\chi}(2)}{2^{p+1-m}} \left(\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}(0) - 2^{p+1-m}\chi(2)\,\mathfrak{B}_{p+1-m,\bar{\chi}}\left(\frac{k}{2}\right)\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \bar{\chi}(n)\,\mathcal{E}_{m-1}\left(\frac{n}{k}\right) \\
&= k^{1-m} 2^{m-p-2} \bar{\chi}(2)\,(p+1-m)\,\mathcal{E}_{p-m,\bar{\chi}}(k)\,\mathcal{E}_{m-1,\chi}(0) \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (3.40), (3.41) ve (2.7)'den

$$
\begin{aligned}
&g_1(d, -c-dk, z, p, \chi) - \chi(-1)(z-k)^{p-1} g_1(c, d+ck, V_1(z), p, \bar{\chi}) \\
&= p\bar{\chi}(2)\,\bar{\chi}(2)\,2^{-1}k^{1-p} \sum_{m=0}^{p-1} \binom{p-1}{m} (z-k)^m\,\mathcal{E}_{p-1-m,\bar{\chi}}(0)\,(-1)^{m-1}\chi(-1)\,\mathcal{E}_{m,\chi}(0) \\
&= \bar{\chi}(4)\,\frac{p}{2k^{p-1}} \sum_{m=0}^{p-1} \binom{p-1}{m} (z-k)^m\,\mathcal{E}_{p-1-m,\bar{\chi}}(0)\,\mathcal{E}_{m,\chi}(0)
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Teorem 3.4'te d nin çift olma koşulu $g_1(d,c;z,p;\chi)$ fonksiyonu için, Teorem 3.8 anlamında, bir resiprosite bağıntısı elde etme imkanı vermez. Benzer kısıtlamadan dolayı Teorem 3.6, $g_2(d,c;z,p;\chi)$ fonksiyonu için resiprosite bağıntısı vermez. Ancak, $g_1$ve g_2 fonksiyonlarını içeren aşağıdaki bağıntı geçerlidir.

Teorem 3.9 *d çift olsun. Eğer d veya $c \equiv 0 \pmod{k}$ ise*

$$\frac{p+1}{2} z^{p-1} g_1\left(c,d,-\frac{1}{z},p,\bar{\chi}\right) + g_2\left(d,-c,z,p,\chi\right)$$
$$= -\chi\left(-1\right) k^{1-p} \sum_{m=1}^{p} \binom{p+1}{m} \frac{m}{2} \left(-z\right)^{m-1} \mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(0\right) \mathcal{E}_{m-1,\bar{\chi}}\left(0\right) \tag{3.42}$$

dır. Burada $g_1\left(c,d,-\frac{1}{z},p,\bar{\chi}\right)$ ve $g_2\left(d,-c,z,p,\bar{\chi}\right)$, (3.11) ve (3.28) ile verilen fonksiyonlardır.

İspat. $Tz = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $T^*\left(z\right) = \dfrac{bz-a}{dz-c} = T\left(-\dfrac{1}{z}\right)$ dönüşümleri ele alınsın ve $a \equiv d \equiv 0 \pmod{k}$ olsun. Teorem 3.6 da (3.29)'a $T^*\left(z\right)$ uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\left(dz-c\right)^{p-1} G\left(\bar{\chi}\right) H_1\left(T^*\left(z\right),1-p,\chi\right) \\ &= \bar{\chi}\left(b\right)\chi\left(-c\right) G\left(\bar{\chi}\right) H_1\left(z,s,\chi\right) \\ &+ \bar{\chi}\left(b\right)\chi\left(-c\right) \frac{\left(2\pi i\right)^p}{\left(p+1\right)!} \sum_{m=1}^{p} \binom{p+1}{m} k^{m-p} \left(-\left(cz+d\right)\right)^{m-1} s_{2,p+1-m,m}\left(-c,d,\chi\right) \end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir. Teorem 3.4'ün (3.10) kısmında z, $-\frac{1}{z}$ ile değiştirilirse

$$\begin{aligned} &G\left(\bar{\chi}\right)\left(\frac{dz-c}{z}\right)^{p-1} H_1\left(T\left(-\frac{1}{z}\right),1-p,\chi\right) \\ &= \bar{\chi}\left(b\right)\chi\left(c\right) G\left(\chi\right) 2^p \chi\left(2\right) B_1\left(-\frac{1}{z},1-p:\bar{\chi}\right) \\ &- \bar{\chi}\left(b\right)\chi\left(-c\right) \frac{1}{2}\frac{\left(2\pi i\right)^p}{p!} \sum_{m=1}^{p} \binom{p}{m} k^{m-p} \left(-\left(\frac{dz-c}{z}\right)\right)^{m-1} s_{1,p+1-m,m}\left(d,c,\bar{\chi}\right) \end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir. (3.35)'ten

$$\begin{aligned} &2^p\chi(2) z^{p-1} G\left(\chi\right) B_1\left(-\frac{1}{z},1-p:\bar{\chi}\right) \\ &= \chi(-1) G(\bar{\chi}) H_1\left(z,1-p:\chi\right) \\ &- \frac{\left(2\pi i\right)^p}{\left(p+1\right)!} \sum_{m=1}^{p+1} \binom{p+1}{m} \frac{m}{2} \left(-z\right)^{m-1} k^{m-p} \mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(0\right) \mathcal{E}_{m-1,\bar{\chi}}\left(0\right) k^{1-m} \end{aligned} \tag{3.45}$$

olduğu göz önüne alınırsa, (3.43), (3.44) ve (3.45)'ten

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\chi}(b)\chi(-c)}{(p+1)!}\left(\frac{p+1}{2}z^{p-1}g_1\left(c,d,-\frac{1}{z},p,\bar{\chi}\right)+g_2(d,-c,z,p,\bar{\chi})\right)\\&=-\frac{\bar{\chi}(b)\chi(c)}{(p+1)!}k^{1-p}\sum_{m=1}^{p+1}\binom{p+1}{m}\frac{m}{2}(-z)^{m-1}\mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}(0)\,\mathcal{E}_{m-1,\bar{\chi}}(0)\end{aligned}$$

elde edilir. $\bar{\chi}(b)\neq 0$ ve $\chi(c)\neq 0$ olduğundan istenen elde edilir.

$c\equiv 0 \pmod{k}$ durumu benzer şekilde kanıtlanır. ■

3.3. Karakter Hardy–Berndt Toplamları

Teorem 3.8 ve Teorem 3.9'un ifadeleri z nin değerlerine bağlı olarak sadeleşir.

• İlk olarak Teorem 3.8'de $z=\dfrac{c+dk}{d}$ alınsın. Bu durumda

$$g_1\left(d,-c-dk,\frac{c+dk}{d},p,\chi\right)=pk^{1-p}\sum_{n=1}^{dk}(-1)^n\chi(n)\,\mathcal{E}_{p-1,\chi}\left(\frac{-cn}{d}\right)\mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{dk}\right)$$

ve

$$\begin{aligned}&(z-k)^{p-1}g_1\left(c,d+ck,V_1\left(\frac{c+dk}{d}\right),p,\bar{\chi}\right)\\&=\left(\frac{c}{d}\right)^{p-1}k^{1-p}p\sum_{n=1}^{ck}(-1)^n\bar{\chi}(n)\,\mathcal{E}_{p-1,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{ck}\right)\end{aligned}$$

şeklini alır.

Tanım 3.10 *$d,c\in\mathbb{Z}$ ve $c>0$ olmak üzere, $s_{5,p}(d,c,\chi)$, χ ile genelleştirilmiş Hardy–Berndt toplamı*

$$s_{5,p}(d,c,\chi)=\sum_{n=1}^{ck}(-1)^n\chi(n)\,\mathcal{E}_{p-1,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{ck}\right)$$

ile tanımlansın.

Böylece, Teorem 3.8'in ifadesi

$$\begin{aligned}&\frac{p}{k^{p-1}}s_{5,p}(-c,d,\chi)-\chi(-1)\left(\frac{c}{d}\right)^{p-1}\frac{p}{k^{p-1}}s_{5,p}(d,c,\bar{\chi})\\&=\bar{\chi}(4)\frac{p}{2k^{p-1}}\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p-1}{m}\left(\frac{c}{d}\right)^m\mathcal{E}_{p-1-m,\bar{\chi}}(0)\,\mathcal{E}_{m,\chi}(0)\end{aligned}$$

olur. (2.7)'den

$$s_{5,p}(-c,d,\chi)=-\chi(-1)\,s_{5,p}(c,d,\chi)$$

olduğu görülür. Böylece aşağıdaki resiprosite bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.11 *$p\geq 1$ tek, d ve c aralarında asal tek tamsayılar olmak üzere, eğer c veya $d\equiv 0 \pmod{k}$ ise*

$$\begin{aligned}&cd^{p}s_{5,p}(c,d,\chi)+dc^{p}s_{5,p}(d,c,\bar{\chi})\\&=-\bar{\chi}(-4)\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p-1}{m}c^{m+1}d^{p-m}\mathcal{E}_{p-1-m,\bar{\chi}}(0)\,\mathcal{E}_{m,\chi}(0)\end{aligned}$$

dır.

- Teorem 3.8'de $z=k$ alınırsa

$$\begin{aligned}&g_1(d,-c-dk,z,p,\chi)\,|_{z=k}\\&=\sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m}k^{m-p}\left(-(dk-c-dk)\right)^{m-1}\sum_{n=1}^{dk}(-1)^{n}\chi(n)\,\mathcal{E}_{p-m,\chi}\left(\frac{-cn}{d}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{dk}\right)\\&=\sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m}k^{m-p}c^{m-1}\sum_{n=1}^{dk}(-1)^{n}\chi(n)\,\mathcal{E}_{p-m,\chi}\left(\frac{-cn}{d}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{dk}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&(z-k)^{p-1}g_1(c,d+ck,V_1(z),p,\bar{\chi})\,|_{z=k}\\&=(z-k)^{p-1}\sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m}k^{m-p}\left(-\left(c\frac{-kz+k^2-1}{z-k}+d+ck\right)\right)^{m-1}\\&\quad\times\sum_{n=1}^{ck}(-1)^{n}\bar{\chi}(n)\,\mathcal{E}_{p-m,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)\\&=c^{p-1}\sum_{n=1}^{ck}(-1)^{n}\chi(n)\,\mathcal{E}_{0,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_p\left(\frac{n}{ck}\right)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}&g_1(d,-c-dk,k,p,\chi)-\chi(-1)(z-k)^{p-1}g_1(c,d+ck,V_1(\,z),p,\bar{\chi})\,|_{z=k}\\&=\sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m}k^{m-p}c^{m-1}\sum_{n=1}^{dk}(-1)^{n}\chi(n)\,\mathcal{E}_{p-m,\chi}\left(\frac{-cn}{d}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{dk}\right)\\&\quad-\chi(-1)\,c^{p-1}\sum_{n=1}^{ck}(-1)^{n}\chi(n)\,\mathcal{E}_{0,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_p\left(\frac{n}{ck}\right)\\&=\bar{\chi}(4)\,\frac{p}{2k^{p-1}}\mathcal{E}_{p-1,\bar{\chi}}(0)\,\mathcal{E}_{0,\chi}(0)\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer

$$s_{5,p-m,m}(c,d,\chi)=\sum_{n=1}^{dk}(-1)^n\chi(n)\,\mathcal{E}_{p-m,\chi}\left(\frac{cn}{d}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{dk}\right)$$

olarak tanımlanır ve (2.7) göz önüne alınırsa

$$\sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m}(-kc)^{m-1}s_{5,p-m,m}(c,d,\chi)$$
$$=-(kc)^{p-1}s_{5,0,p}(d,c,\chi)-\bar{\chi}(-4)\frac{p}{2}\mathcal{E}_{p-1,\bar{\chi}}(0)\,\mathcal{E}_{0,\chi}(0)$$

elde edilir.

- Şimdi Teorem 3.9'un özel durumları ele alınsın. $z=\frac{c}{d}$ için

$$g_1\left(c,d,-\frac{d}{c},p,\bar{\chi}\right)=pk^{1-p}\sum_{n=1}^{ck}\bar{\chi}(n)\,\mathcal{E}_{p-1,\bar{\chi}}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{ck}\right)$$

ve

$$g_2\left(d,-c,\frac{c}{d},p,\bar{\chi}\right)=(p+1)\,k^{1-p}\sum_{n=1}^{dk}(-1)^n\chi(n)\,\mathfrak{B}_{p,\chi}\left(\frac{-cn}{d}\right)\mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{dk}\right)$$

olur.

Tanım 3.12 *$d,c\in\mathbb{Z}$ ve $c>0$ olmak üzere, $s_{1,p}(d,c,\chi)$ ve $s_{2,p}(d,c,\chi)$, χ ile genelleştirilmiş Hardy–Berndt toplamları*

$$s_{1,p}(d,c,\chi)=\sum_{n=1}^{ck}\chi(n)\,\mathcal{E}_{p-1,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{ck}\right)$$
$$s_{2,p}(d,c,\chi)=\sum_{n=1}^{ck}(-1)^n\chi(n)\,\mathfrak{B}_{p,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{ck}\right)$$

ile tanımlansın.

Bu durumda,

$$g_1\left(c,d,-\frac{d}{c},p,\bar{\chi}\right)=pk^{1-p}s_{1,p}(d,c,\bar{\chi})$$

ve

$$g_2\left(d,-c,\frac{c}{d},p,\bar{\chi}\right)=(p+1)\,k^{1-p}s_{2,p}\,(-c,d,\chi)$$
$$=-\chi\,(-1)\,(p+1)\,k^{1-p}s_{2,p}\,(c,d,\chi)$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{p+1}{2}\left(\frac{c}{d}\right)^{p-1}pk^{1-p}s_{1,p}\,(d,c,\bar{\chi})-\chi\,(-1)\,(p+1)\,k^{1-p}s_{2,p}\,(c,d,\chi)$$
$$=-\chi\,(-1)\,k^{1-p}\sum_{m=1}^{p+1}\binom{p+1}{m}\frac{m}{2}\left(-\frac{c}{d}\right)^{m-1}\mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\,(0)\,\mathcal{E}_{m-1,\bar{\chi}}\,(0)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki resiprosite bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.13 *$p\geq 1$ tek, $(d,c)=1$ ve d çift olsun. Eğer d veya $c\equiv 0\pmod k$ ise,*

$$pdc^p s_{1,p}\,(d,c,\bar{\chi})-\chi\,(-1)\,2cd^p s_{2,p}\,(c,d,\chi)$$
$$=\chi\,(-1)\sum_{m=1}^{p+1}(-1)^m\binom{p}{m-1}c^m d^{p+1-m}\mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\,(0)\,\mathcal{E}_{m-1,\bar{\chi}}\,(0) \tag{3.46}$$

dır.

- Teorem 3.9'da $z=0$ alınırsa

$$\frac{p+1}{2}z^{p-1}g_1\left(c,d,-\frac{1}{z},p,\chi\right)\Bigg|_{z=0}$$
$$=\frac{p+1}{2}\sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m}k^{m-p}\left(-\left(dz-c\right)\right)^{m-1}z^{p-m}s_{1,p-m,m}\,(d,c,\chi)\Bigg|_{z=0}$$
$$=\frac{p+1}{2}c^{p-1}s_{1,0,p}\,(d,c,\chi) \tag{3.47}$$

ve

$$g_2\,(d,-c,0,p,\bar{\chi})=\sum_{m=1}^{p}\binom{p+1}{m}k^{m-p}c^{m-1}s_{2,p+1-m,m}\,(-c,d,\bar{\chi}) \tag{3.48}$$

olur. Burada

$$s_{1,p-m,m}\,(d,c,\chi)=\sum_{n=1}^{ck}\chi\,(n)\,\mathcal{E}_{p-m,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right),$$
$$s_{2,p+1-m,m}\,(d,c,\chi)=\sum_{n=1}^{ck}(-1)^n\,\chi\,(n)\,\mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_m\left(\frac{n}{ck}\right)$$

dır. Dolayısıyla

$$\sum_{m=1}^{p}\binom{p+1}{m}k^{m-p}c^{m-1}s_{2,p+1-m,m}\left(-c,d,\bar{\chi}\right)$$
$$=-\frac{p+1}{2}c^{p-1}s_{1,0,p}\left(d,c,\chi\right)-\frac{\chi\left(-1\right)}{2k^{p-1}}\left(p+1\right)\mathfrak{B}_{p,\chi}\left(0\right)\mathcal{E}_{0,\bar{\chi}}\left(0\right) \tag{3.49}$$

elde edilir.

c ile d aralarında asal olmasalar bile Teorem 3.11 ve Teorem 3.13'te ifade edilen resiprosite bağıntıları sağlanır. Ancak, bunu kanıtlayabilmek için aşağıdaki önteoreme ihtiyaç vardır.

Önteorem 3.14 *$q\in\mathbb{N}$, $p\geq 1$, $(d,c)=1$ ve $c>0$ olsun. Eğer p tek ve d çift ise,*

$$s_{1,p}\left(qd,qc,\chi\right)=s_{1,p}\left(d,c,\chi\right),$$

eğer p tek ve c çift ise,

$$s_{2,p}\left(qd,qc,\chi\right)=s_{2,p}\left(d,c,\chi\right),$$

eğer p tek ve $(d+c)$ çift ise

$$s_{5,p}\left(qd,qc,\chi\right)=s_{5,p}\left(d,c,\chi\right)$$

sağlanır. Bundan başka, eğer $d+p$ çift ise $s_{1,p}\left(d,c,\chi\right)=0$, eğer $c+p$ çift ise $s_{2,p}\left(d,c,\chi\right)=0$, ve eğer $(d+c)+p$ çift ise $s_{5,p}\left(d,c,\chi\right)=0$'dır.

İspat. p tek ve d çift olsun.

$$s_{1,p}\left(qd,qc,\chi\right)=\sum_{\mu=1}^{qck}\chi\left(\mu\right)\mathcal{E}_{p-1,\chi}\left(\frac{d\mu}{c}\right)\mathfrak{B}_{1}\left(\frac{\mu}{qck}\right)$$

de $\mu=n+ckm$, $1\leq n\leq ck$, $0\leq m\leq m-1$ yazılırsa ve (2.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
s_{1,p}\left(qd,qc,\chi\right)&=\sum_{n=1}^{ck}\sum_{m=0}^{q-1}\chi\left(n\right)\mathcal{E}_{p-r,\chi}\left(\frac{dn}{c}+dkm\right)\mathfrak{B}_{1}\left(\frac{n}{qck}+\frac{m}{q}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{ck}\bar{\chi}\left(n\right)\mathcal{E}_{p-r,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\sum_{m=0}^{q-1}\left(-1\right)^{dm}\mathfrak{B}_{1}\left(\frac{n}{qck}+\frac{m}{q}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{ck}\bar{\chi}\left(n\right)\mathcal{E}_{p-r,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_{1}\left(\frac{n}{ck}\right)\\
&=s_{1,p}\left(d,c,\chi\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $d+p$ çift iken $s_{1,p}(d,c,\chi)=0$ olduğu ise

$$\begin{aligned}
s_{1,p}(d,c,\chi) &= \sum_{n=1}^{ck}\chi(n)\,\mathcal{E}_{p-1,\chi}\left(\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_1\left(\frac{n}{qck}\right),\ n\rightarrow ck-n\\
&= \sum_{n=1}^{ck}\chi(-n)\,\mathcal{E}_{p-1,\chi}\left(dk-\frac{dn}{c}\right)\mathfrak{B}_1\left(1-\frac{n}{ck}\right)\\
&\overset{(2.7)}{=} (-1)^{d+p-1}\,s_{1,p}(d,c,\chi)
\end{aligned}$$

den açıktır.

Benzer şekilde diğer ifadeler elde edilir. ■

Sonuç 3.15 *$p\geq 1$ tek, $(d+c)$ çift ve $(d,c)=q$ olmak üzere, eğer c veya $d\equiv 0 \pmod k$ ise*

$$\begin{aligned}
&cd^p s_{5,p}(c,d,\chi)+dc^p s_{5,p}(d,c,\bar{\chi})\\
&= -\bar{\chi}(-4)\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p-1}{m}c^{m+1}d^{p-m}\mathcal{E}_{p-1-m,\bar{\chi}}(0)\,\mathcal{E}_{m,\chi}(0)
\end{aligned}$$

dır.

Sonuç 3.16 *$p\geq 1$ tek, $(d,c)=q$ ve d çift olsun. Eğer d veya $c\equiv 0 \pmod k$ ise,*

$$\begin{aligned}
&pc^p d s_{1,p}(d,c,\bar{\chi})-\chi(-1)\,2cd^p s_{2,p}(c,d,\chi)\\
&= \chi(-1)\sum_{m=1}^{p+1}(-1)^m\binom{p}{m-1}c^m d^{p+1-m}\mathfrak{B}_{p+1-m,\chi}(0)\,\mathcal{E}_{m-1,\bar{\chi}}(0)
\end{aligned}$$

dır.

4. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, $\log\theta_2(z)$'nin χ ilkel karakteri ile genellemesi olan $A_1(z,s,\chi)$ fonksiyonu tanımlanmıştır. $Tz=(az+b)/(cz+d)$ kesirsel dönüşümünün a,b,c,d katsayılarına bağlı olarak $A_1(Tz,s,\chi)$ için üç farklı dönüşüm ve bu dönüşüm formüllerinde Hardy–Berndt toplamlarının karakter genellemeleri olan toplamlar elde edilmiştir. Dönüşüm formülleri yardımıyla, bu toplamların resiprosite bağıntısı sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca, bu toplamların bazı özellikleri incelenmiştir.

4. KAYNAKLAR

APOSTOL, T.M. 1950. Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series. *Duke Math. J.,* 17: 147-157.

APOSTOL, T.M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.

APOSTOL, T.M. and VU, T.H. 1982. Elementary proofs of Berndt's reciprocity laws. *Pacific J. Math.*, 98: 17-23.

BERNDT, B.C. 1973a. Generalized Dedekind Eta-function and generalized Dedekind sums. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 178: 495-508.

BERNDT, B.C. 1973b. Character transformation formulae similar to those for the Dedekind Eta-function. Proc. Sym. Pure Math. No. 24, *Amer. Math. Soc., Providence*, R. I., 9-30.

BERNDT, B.C. 1975a. Character analogues of Poisson and Euler - MacLaurin summation formulas with applications. *J. Number Theory,* 7: 413-445.

BERNDT, B.C. 1975b. Generalized Eisenstein series and modified Dedekind sums. *J. Reine Angew. Math.,* 272: 182-193.

BERNDT, B.C. 1978. Analytic Eisenstein series, theta functions and series relations in the spirit of Ramanujan. *J. Reine Angew. Math.,* 303/304: 332-365.

BERNDT, B.C. and GOLDBERG, L.A. 1984. Analytic properties of arithmetic sums arising in the theory of the classical theta functions. *Siam J. Math. Anal.*, 15 (1): 143–150.

CAN, M. 2000. Hardy Toplamları Üzerine. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, 35 s.

CAN, M. 2004. Some arithmetic on the Hardy sums $s_2(h,k)$ and $s_3(h,k)$. *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 20 (2): 193-200.

CAN, M., CENKCİ, M. and KURT, V. 2006. Generalized Hardy–Berndt sums. *Proc. Jangjeon Math.,* Soc, 9(1): 19-38.

CAN, M. 2006. Genelleştirilmiş Hardy Toplamları. Doktora Tezi, Akdeniz Üniversitesi, 54 s.

CAN, M. and KURT, V. 2014. Character analogues of certain Hardy–Berndt sums. *Int. J. Number Theory,* 10: 737–762.

CARLITZ, L. 1954. Dedekind sums and Lambert series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (4): 580-584.

CARLITZ, L. 1959. Eulerian numbers and polynomials. *Math. Mag.*, 32 (5): 247-260.

CARLITZ, L. 1964. Generalized Dedekind sums. *Math. Zeithschr.,* 85: 83-90.

CENKCİ, M., CAN, M. and KURT, V. 2007. Degenerate and character Dedekind sums. *J. Number Theory,* 124: 346–363.

CENKCİ, M. 2015. On p-adic character Dedekind sums. *Palest. J. Math.,* 4: 502–507.

DAĞLI, M.C. 2010. Dejenere Hardy Toplamları. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, 39 s.

DAĞLI, M.C. and CAN, M. 2013. A new generalization of Hardy–Berndt sums. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.),* 123 (2): 177–192.

DAĞLI, M.C. and CAN, M. 2014. On reciprocity formulas for Apostol's Dedekind sums and their analogues. *J. Integer Seq.,* 17: Article 14.5.4.

DAĞLI, M.C. and CAN, M. 2015. On reciprocity formula of character Dedekind sums and the integral of products of Bernoulli polynomials. *J. Number Theory,* 156: 105–124.

DAĞLI, M.C. and CAN, M. 2016. Periodic analogues of Dedekind sums and transformation formulas of Eisenstein series. *Ramanujan J.,*, DOI: 10.1007/s11139-016-9808.

GOLDBERG, L.A. 1981. Transformations of theta-functions and analogues of Dedekind sums. Ph.D. thesis, University of Ulinious, Urbana.

GUO, X. and ZHANG, W. 2011. A hybrid mean value related to certain Hardy sums and Kloosterman sums. *Czechoslovak Math. J.,* 61 (136): 759–769.

HU, S., KIM, D. and KIM, M.-S. 2016. On reciprocity formula of Apostol-Dedekind sum with quasi-periodic Euler functions. *J. Number Theory,* 162: 54–67.

JORDAN, C. 1965. Calculus of Finite Differences. Chelsea, New York.

KIM, M.-S. and SON, J.-W. 2014. On generalized Dedekind sums involving quasi-periodic Euler functions. *J. Number Theory,* 144: 267–280.

KURT, V. 1990. On Dedekind sums. *Indian J. Pure Appl. Math.,* 21 (10): 893-896.

KURT, V. 1991. Remarks on Dedekind sums. *Bull. Calcutta Math. Soc.,* 83 (6): 581-586.

KURT, V. 1997. Remarks on Higher Dimensional Dedekind sums. *Math. Japonica,* 45 (2): 297-301.

MEYER, J.L. 1997a. Properties of certain integer-valued analogues of Dedekind sums. *Acta Arith.,* LXXXII (3): 229-242.

MEYER, J.L. 1997b. Analogues of Dedekind sums. Ph.D. thesis, University of Illinois, Urbana.

NAGASAKA, Y., OTA, K. and SEKINE, C. 2003. Generalizations of Dedekind sums and their reciprocity laws. *Acta Arith.,* 106 (4): 355-378.

OTA, K. 2003. Derivatives of Dedekind sums and their reciprocity laws. *J. Number Theory,* 98: 280-309.

PENG, W. and ZHANG, T. 2016. Some identities involving certain Hardy sum and Kloosterman sum. *J. Number Theory,* 165: 355–362.

RADEMACHER, H. and WHITHEMAN, A. 1941. Theorems on Dedekind sums. *Amer. J. Math.,* 63: 377-407.

RADEMACHER, H. and GROSSWALD, E. 1972. Dedekind sums, Math. Assoc. of America, Washington, D.C.

SEKINE, C. 2005. On Eisenstein series with characters and Dedekind sums. *Acta Arith.,* 116 (1): 1-11.

ŞİMŞEK, Y. 2003. Relations between theta functions, Hardy sums, Eisenstein and Lambert series in the transformation formulae of $\log \eta_{g,h}(z)$. *J. Number Theory,* 99: 338-360.

SITARAMACHANDRARAO, R. 1987. Dedekind and Hardy sums. *Acta Arith.,* XLIII, 325-340.

TAKÁCS, L. 1979. On generalized Dedekind sums. *J. Number Theory,* 11: 264–272.

ZHANG, H. and ZHANG, W. 2014. On the identity involving certain Hardy sums and Kloosterman sums. *J. Inequal. Appl.,* 2014:52.

ÖZGEÇMİŞ

Merve Çelebi, 1989 yılında Antalya'da doğdu. İlköğretim ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2007 yılında başladığı Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden, 2008 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne yatay geçiş yaparak lisans öğrenimini 2012 yılında tamamladı. 2014 yılı Eylül ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimini 2016 yılında tamamladı.