T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CEBİRSEL FONKSİYON CİSMİ KULELERİNDE WEIERSTRASS SEMİGRUP

Nihal GÜMÜŞBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CEBİRSEL FONKSİYON CİSMİ KULELERİNDE WEIERSTRASS SEMİGRUP

Nihal GÜMÜŞBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CEBİRSEL FONKSİYON CİSMİ KULELERİNDE WEIERSTRASS SEMİGRUP

Nihal GÜMÜŞBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 24/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ALBAYRAK

ÖZET

CEBİRSEL FONKSİYON CİSMİ KULELERİNDE WEIERSTRASS SEMİGRUP

Nihal GÜMÜŞBAŞ

Yüksek Lısans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ
Haziran 2016, 51 sayfa

Cebirsel fonksiyon cismi kuleleri ve Weierstrass semigrup kavramları üzerine bir çok çalışma yapılmış olmasına rağmen, şimdiye kadar, bir cebirsel fonksiyon cismi kulesinde Weierstrass semigrubun davranışı hakkında çok az bilgi edinilmiştir. Bu konu ile ilgili başlıca çalışmalar Garcia ve Stichtenoth (1996), Pellikaan vd (1998), Beelen vd (2006), Noseda vd (2012), Maharaj (2004) tarafından geliştirilmiştir.

Bu tezde, sonlu bir cisim üzerinden cebirsel fonksiyon cismi kulesi kavramı, özellikleri ve $m \geq 0$ için bir rasyonel P noktasındaki Weierstrass semigrubun fonksiyon cismi kulesindeki davranışları incelenmiştir. Üstelik, sonlu cisimler üzerinden tekrarlı özel eşitliklerle tanımlanan bazı fonksiyon cismi kulesi aileleri için, Weierstrass semigrup $H(P^{(m)})$ yi hesaplamak amacıyla uygun, kullanışlı algoritma ve yöntemler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Cebirsel fonksiyon kulesi, Weierstrass semigrup, boşluk sayıları.

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ (Danışman)
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ALBAYRAK

ABSTRACT

WEIERSTRASS SEMIGROUP IN TOWERS OF ALGEBRAIC FUNCTION FIELDS

Nihal GÜMÜŞBAŞ

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ
June 2016, 51 pages

Althought many mathematicians have studied on the concepts of tower of algebraic function fields and Weierstrass semigroup, but up to now, there are not many paper about the behavior of the Weierstrass semigroup in a tower of function fields. Main papers about this topic are Garcia and Stichtenoth (1996), Pellikaan et al (1998), Beelen et al (2006), Noseda et al (2012) and Maharaj (2004).

In this thesis, the concept of tower of algebraic function fields, their properties over a finite field and the behaviour of Weierstrass semigroup $H(P^{(m)})$ at a rational point P, $m \geq 0$, are investigated. Moreover, for the purpose of calculating $H(P^{(m)})$ suitable and useful algorithms, methods are given for some families of tower of function fields defining special recursive equations.

KEYWORDS: Tower of algebraic function fields, Weierstrass semigroup, gap numbers.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Assoc. Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ (Supervisor)
Asst. Prof. Dr. Mehmet ALBAYRAK

ÖNSÖZ

Bir değişkenli cebirsel fonksiyonlar cismi teorisi matematiğin geometri, sayılar teorisi ve kompleks analiz gibi birçok alanına uygulanabilmektedir. Riemann yüzeyleri, rasyonel sayı cisimleri ve genişlemeleri, Iwasawa teorisi bu teoriyi oldukça yoğun biçimde kullanmaktadır. Bir K cismi üzerinde cebirsel fonksiyon cismi F nin Weierstrass noktası olarak adlandırılan sonlu sayıda özel noktası vardır. Böyle bir P noktasının özelliği, belli bir mertebeden tek kutbu bu nokta olan fonksiyonların bulunması ve bu mertebeler kümesi $H(P)$ nin sadece sonlu sayıda nokta için diğerlerinden farklı olmasıdır. Weierstrass noktaları, cebirsel eğri ailelerinin sınıflandırılması ve cebirsel geometrik kodlar gibi uygulama alanları nedeniyle de bir çok matematikçinin ilgi alanı olmuştur. Weierstrass noktaları cisimlerin değişmezleridir ve fonksiyon cisminin otomorfizmlerinin belirlenmesinde de önemli rol oynar.

Bir cebirsel fonksiyon cisminin bir P noktasındaki Weierstrass semigrup $H(P)$, özellikle son kırk yılda kodlama teorisine olan uygulamaları sebebiyle cazip hale gelmiş, farklı $P_1, P_2, ..., P_n$ rasyonel noktaları için n-li Weierstrass semigrup $H(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ ye genelleştirilmiş, $n \geq 1$, ve daha iyi parametrelere sahip kodlara ulaşılmasını mümkün kılmıştır.

Bu tez esas olarak üç bölümden oluşmaktadır. İlk olarak, cebirsel fonksiyon cisimleri teorisinin temel kavramları, tez boyunca kullanacağımız yapılar ve bunlara ait gösterimler ilk bölüm içinde "Giriş" başlığı altında tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, fonksiyon cismi kulelerinin genel özellikleri ve önemli örnekleri verilmiş, bir cebirsel fonksiyon cisminde tek noktadaki Weierstrass semigrup kavramı, Riemann-Roch uzayları için Hermityen tabanlar incelenmiştir.

Üçüncü bölüm ise "Bulgular" başlığı altında incelenmiştir. q bir asal sayının kuvveti olmak üzere, q elemanlı sonlu cisim $\mathbb{F}_q$ üzerindeki tekrarlı fonksiyon kuleleri ve özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, verilen bir fonksiyon cismi kulesi $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots)$ nin bir rasyonel noktası P için Weierstrass semigrubunun davranışı ve hesaplanış yöntemleri incelenmiştir. Bu bölümde, özellikle iki cebirsel fonksiyon cismi kulesi için Garcia ve Stichtenoth (1996), Pellikaan vd (1998), Noseda vd (2012) ve Maharaj'da (2004) verilen sonuçlar yeniden üretilmiştir.

$\mathbb{F}_{q^2}$ üzerinde $F_n := \mathbb{F}_{q^2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, ..., n-1$ ve $P_\infty^{(n)}$, F_n cisminin derecesi 1 olan bir noktası olmak üzere

$$x_{i+1}^q + x_{i+1} = \frac{x_i^q}{x_i^{q-1} + 1}$$

eşitliği ile verilen fonksiyon cismi kulesi için $H\left(P_\infty^{(n)}\right)$, Garcia ve Stichtenoth'nın (1996) yöntemleri kullanılarak yeniden elde edilmiştir.

p tek asal sayı olmak üzere, $K = \mathbb{F}_{p^2}$ sonlu cismi üzerindeki $\mathcal{T} = (T_j)_{j \geq 0}$ cebirsel fonksiyon cismi kulesi, $T_1 = \mathbb{F}_{p^2}(x_1)$, $j \geq 1$ için $T_{j+1} = T_j(x_{j+1})$ ve $x_{j+1}^2 = \frac{x_j^2+1}{2x_j}$

eşitliği ile verilen tekrarlı tanımlı kulesi için Riemann-Roch uzayı $\mathcal{L}\left(sP_{\infty}^{j}\right)$ nin, $s \in \mathbb{N}$, Hermityen tabanı hesaplanarak $H\left(P_{\infty}^{(j)}\right)$ Weierstrass semigrubu incelenmiş, Noseda vd (2012) yöntemleri ile yeniden elde edilmiştir.

Akademik hayatımın ilk basamaklarında sağlam bir altyapı oluşturmamı sağlayan, bilgi ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ'a her zaman beni aydınlattığı ve ufkumu genişlettiği için gönülden teşekkür ederim.

Bu günlere ulaşmamda büyük emeği olan, her kararımı destekleyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:	**Açıklaması:**
F/K	F, K cismi üzerinden bir değişkenli cebirsel fonksiyon cismi
$\tilde{K}$	F/K nın tüm sabitler cismi
$\mathbb{F}_q$	q elemanlı sonlu cisim
$\mathbb{P}_F$	F/K nın tüm noktaları kümesi
$\mathcal{O}_P$	P noktasının değerlendirme halkası
v_P	P noktasına karşılık gelen değerlendirme
F_P	P noktasının kalan sınıfları cismi
$x(P)$	$x \in \mathcal{O}_P$ nin F_P deki kalan sınıfı
$P_{p(x)}$	$K(x)$ in, $p(x)$ indirgenemez polinomuna karşılık gelen noktası
P_∞	$K(x)$ in sonsuzdaki noktası
$\mathbb{D}_F$	F nin bölenler grubu
$dstD$	D böleninin destek kümesi
$v_Q(D)$	D böleninin Q noktasına göre değerlendirmesi
der P, der D	P noktasının derecesi, D böleninin derecesi
$(x)_0$, $(x)_\infty$, (x)	sırasıyla, x in sıfır, kutup, esas böleni
$Esas(F)$	F nin esas bölenler grubu
$Cl(F)$	F nin bölen sınıfı grubu
$[D]$	D böleninin sınıf böleni
$D \sim D'$	D ve D' denk bölenler
$\mathcal{L}(D)$	D böleninin Riemann-Roch uzayı
boy $\mathcal{L}(D)$	Riemann-Roch uzayının boyutu
g_F	F/K nın cinsi
$i(D)$	D böleninin özellik indeksi
Ω_F	F nin Weil diferensiyeli uzayı
$\Omega_F(D)$	D böleni üzerinde sıfırlanan Weil diferensiyelleri uzayı
(w)	w Weil diferensiyelinin böleni
$v_P(w)$	w Weil diferensiyelininin P noktasına göre değerlendirmesi
w_P	Weil diferensiyelinin yerel bileşeni
$P' \mid P$	P', P noktasının bir genişlemesi
$e(P' \mid P)$	$P' \mid P$ nin dallanma indeksi
$f(P' \mid P)$	$P' \mid P$ nin göreceli derecesi
$Con_{F'/F}(P)$	P noktasının F'/F deki eşnormu
$d(P' \mid P)$	$P' \mid P$ nin different katsayısı
$Diff(F'/F)$	F'/F nin differentı (fark)
$N_q(g)$	Cinsi g olan cebirsel fonksiyon cisminin $\mathbb{F}_q$ üzerinden rasyonel nokta sayısı
$A(q)$	İhara sabiti
$\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, \ldots)$	Cebirsel fonksiyon cismi kulesi
$v(\mathcal{F}/F_1)$	$\mathcal{F}/F_1$ cebirsel fonksiyon cismi kulesinin parçalanış oranı
$\gamma(\mathcal{F}/F_1)$	$\mathcal{F}/F_1$ cebirsel fonksiyon cismi kulesinin cinsi
$\lambda(\mathcal{F})$	$\mathcal{F}$ nin limiti
$(z = \alpha)$	$z - \alpha$ nın $K(z)$ deki sıfırı
$(z = \infty)$	z nin $K(z)$ deki kutbu
$H(P)$	P noktasındaki Weierstrass semigrup

Simgeler:	**Açıklaması:**
A_F	F/K cebirsel fonksiyon cisminin adel uzayı
$kar\,(K)$	K cisminin karakteristiği
$Gal(F/K)$	F/K cebirsel fonksiyon cisminin Galois grubu

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

1.1. Cebirsel Fonksiyon Cisimleri Teorisinde Temel Kavramlar

Bu bölümde, cebirsel fonksiyon cisimleri teorisinin temel kavramları tanımlanacak ve bu konunun temel özellikleri incelenecektir. Aksi belirtilmedikçe, K herhangi bir cisim olarak alınacaktır. Bahsedilen kavramlar hakkında ayrıntılı bilgi için Stichtenoth (2009), Chevalley (1951) ve Salvador (2006) kaynaklarına bakılması önerilir.

Tanım 1.1. *K, F cisminin bir altcismi olsun. K cismi üzerinde aşkın olan uygun bir $x \in F$ için F, $K(x)$ üzerinde sonlu cebirsel genişleme ise F ye K üzerinde bir değişkenli cebirsel fonksiyon cismi denir ve F/K ile gösterilir.*

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} F \\ | \\ | \\ K(x) \end{array}\right\} \textit{Sonlu cebirsel genişleme} \\ | \\ | \\ K \end{array}$$

F/K bir cebirsel fonksiyon cismi olmak üzere, F nin K üzerinden cebirsel olan elemanları kümesi bir cisim oluşturur, bu cisme F/K nın sabitler cismi denir ve $\tilde{K}$ ile gösterilir. Eğer $K = \tilde{K}$ ise K cismine F cisminin tüm sabitler cismi denir.

Bir değişkenli cebirsel fonksiyon cisimlerine, doğal olarak, ilk örnek $K(x)$ verilebilir. $K(x)$ in sıfırdan farklı her elemanı sonlu sayıda indirgenemez polinomun kuvvetlerinin çarpımı olarak sıralanış dışında tek türlü yazılabilir. Bu durumun F de nasıl olacağını görebilmek amacıyla değerlendirme halkası kavramına ihtiyaç duyulmuştur.

Tanım 1.2. *F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $\mathcal{O}$, F nin bir althalkası olmak üzere,*

(a) $K \subsetneqq \mathcal{O} \subsetneqq F$,

(b) Her $z \in F$ için $z \in \mathcal{O}$ veya $z^{-1} \in \mathcal{O}$

koşulları sağlanırsa $\mathcal{O}$ halkasına F/K nın bir değerlendirme halkası denir. Bir $\mathcal{O}$ değerlendirme halkasının maksimal idealine F/K nın bir noktası (place) denir ve F/K nın tüm noktalarından oluşan küme $\mathbb{P}_F$ ile gösterilir.

F/K nın bir $\mathcal{O}$ değerlendirme halkası aslında F/K nın lokal (yerel) halkasıdır. $P := \mathcal{O} \backslash \mathcal{O}^*$, $\mathcal{O}$ halkasının tek maksimal idealidir, tek üreteçlidir ve $\mathcal{O}$, tek üreteçli ideal bölgesidir. Değerlendirme halkasının özelliklerini ayrıntılı incelemek için Hungerford (1989), Stichtenoth (2009), Chevalley (1951) ve Salvador (2006) kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 1.3. *F/K bir cebirsel fonksiyon cismi olmak üzere, $v : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ fonksiyonu*

(a) $v(0) = \infty$,

(b) Her $0 \neq a \in K$ *için* $v(a) = 0$,

(c) Öyle bir $t \in F$ *vardır ki* $v(t) = 1$,

(d) Her $x, y \in F$ *için* $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$,

(e) Her $x, y \in F$ *için* $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$

koşullarını sağlarsa bu fonksiyona, F/K nın bir ayrık değerlendirmesi (discrete valuation) denir.

Özel olarak, $v(x) \neq v(y)$ ise $v(x + y) = \min\{v(x), v(y)\}$ dir. F/K bir cebirsel fonksiyon cisminde $P = t\mathcal{O}$ ise her $z \in F \setminus \{0\}$ için $z = t^n u$ olacak biçimde bir $u \in \mathcal{O}^*$ ve $n \in \mathbb{Z}$ vardır. Dolayısıyla, $v_P : F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $v_P(z) = \begin{cases} \infty, & z = 0 \\ n, & z \neq 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan v_P bir ayrık değerlendirme fonksiyonudur. Belirtilmelidir ki, v_P, sadece P noktasının seçimine bağlıdır. Burada, "∞", her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $\infty + \infty = \infty + n = n + \infty = \infty$ ve $\infty > m$ özelliklerini sağlayan $\mathbb{Z}$ de olmayan bir sembolü temsil etmektedir.

Bundan sonra $P \in \mathbb{P}_F$ noktasına karşılık gelen değerlendirme halkası için $\mathcal{O}$ yerine $\mathcal{O}_P$ gösterimini kullanacağız. P, $\mathcal{O}_P$ ve v_P arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_P &= \{z \in F : v_P(z) \geq 0\}, \\ \mathcal{O}_P^* &= \{z \in F : v_P(z) = 0\}, \\ P &= \{z \in F : v_P(z) > 0\}. \end{aligned}$$

Tanım 1.4. *F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $P \in \mathbb{P}_F$ olsun. Bir $z \in F$ için $v_P(z) = m > 0$ ise P noktasına z elemanının m katlı sıfırı, $v_P(z) = n < 0$ ise P noktasına z elemanının n katlı kutbu denir.*

F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $z \in F$, K üzerinde aşkın bir eleman olmak üzere, z elemanının F de en az bir sıfırı ve kutbu vardır. Böylece, $\mathbb{P}_F$ kümesinin boştan farklı olduğu rahatlıkla görülür. Herhangi bir fonksiyon cismindeki ayrık değerlendirmelerin ve noktaların daha iyi anlaşılması için en basit örnek olan $K(x) = F$ rasyonel fonksiyon cismi incelenebilir.

Örnek 1.5. *Herhangi bir K cismi üzerindeki rasyonel fonksiyonlardan oluşan cisim $K(x) = \left\{\frac{f(x)}{g(x)} : f, g \in K[x], g(x) \neq 0\right\}$ dir. $p(x)$, K üzerinde indirgenemez polinom olmak üzere $K(x)$ cisminin değerlendirme halkaları,*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{p(x)} &:= \left\{\frac{f(x)}{g(x)} : f, g \in K[x],\ p(x) \nmid g(x), g(x) \neq 0\right\}, \\ \mathcal{O}_\infty &:= \left\{\frac{f(x)}{g(x)} : f, g \in K[x],\ g(x) \neq 0, \operatorname{der} f \leq \operatorname{der} g\right\} \end{aligned}$$

dir ve maksimal idealleri, sırasıyla,

$$P_{p(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f, g \in K[x], \ p(x) \mid f(x), \ p(x) \nmid g(x), \ g(x) \neq 0 \right\},$$
$$P_{\infty} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f, g \in K[x], \ g(x) \neq 0, \ \operatorname{der} f < \operatorname{der} g \right\}$$

şeklindedir. Özel olarak, $\alpha \in K$ için $p(x) = x - \alpha$ ya karşılık gelen $K(x)$ in noktası $P_\alpha := P_{x-\alpha}$ ile gösterilir. Bu durumda,

$$\mathbb{P}_{K(x)} = \left\{ P_{p(x)} : p(x), \ K \text{ üzerinde indirgenemez polinom} \right\} \cup \{P_\infty\}$$

olur.

F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{P}_F$ nin birbirinden farklı noktaları ve $x_1, \ldots, x_n \in F$, $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda, öyle bir $x \in F$ vardır ki, her $i = 1, ..., n$ için $v_{P_i}(x - x_i) = r_i$ dir. Bu ifade zayıf yaklaşım teoremi olarak bilinir. Bu bilgi kullanılarak $\mathbb{P}_F$ nin sonsuz bir küme olduğu görülebilir.

Tanım 1.6. *F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, $P \in \mathbb{P}_F$ ve $\mathcal{O}_P$ karşılık gelen değerlendirme halkası olsun.*

(a) $\mathcal{O}_P/P$ cismine P noktasının kalan sınıfları cismi denir ve F_P ile gösterilir, F_P nin K üzerinden vektör uzayı olarak boyutuna P noktasının derecesi denir ve $\operatorname{der} P = [F_P : K]$ *ile gösterilir.*

(b) $\mathbb{P}_F$ nin ürettiği serbest abel grubuna F/K nın bölenler grubu denir ve $\mathbb{D}_F$ ile gösterilir.

(c) $D \in \mathbb{D}_F$ ise $D = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P.P$, sonlu sayıda P hariç her $P \in \mathbb{P}_F$ için $n_P = 0$ dır. $v_P(D) := n_P$ tamsayısına D böleninin P noktasındaki değerlendirmesi (valuation) denir. D_1, $D_2 \in \mathbb{D}_F$ olmak üzere, her $P \in \mathbb{P}_F$ için $v_P(D_1) \leq v_P(D_2)$ ise $D_1 \leq D_2$ denir. Ayrıca, $D_1 \leq D_2$ ve $D_1 \neq D_2$ ise $D_1 < D_2$ şeklinde yazılır. Her $P \in \mathbb{P}_F$ için bir $D \in \mathbb{D}_F$ böleni için $0 \leq v_P(D)$ ise D bölenine pozitif bölen denir.

(d) Bir $D \in \mathbb{D}_F$ için $\sum_{P \in \mathbb{P}_F} v_P(D) . \operatorname{der} P$ tamsayısına D böleninin derecesi denir, $\operatorname{der} D$ *ile gösterilir.*

(e) D_1, $D_2 \in \mathbb{D}_F$ için $D_2 = D_1 + (x)$ olacak şekilde $x \in F \setminus \{0\}$ varsa D_1 ve D_2 ye denk bölenler denir. Bir $D \in \mathbb{D}_F$ böleninin denklik sınıfı $[D]$ ile gösterilir.

(f) Bir $0 \neq z \in F$ için

$$R := \{P \in \mathbb{P}_F : P, \ z \text{ nin bir sıfırı}\}, \ S := \{P \in \mathbb{P}_F : P, \ z \text{ nin bir kutbu}\}$$

olsun. Bu durumda,
z nin sıfır böleni, $(z)_0^F := \sum_{P \in R} v_P(z) P$,
z nin kutup böleni, $(z)_\infty^F := \sum_{P \in S} (-v_P(z)) P$, burada $-v_P(z) > 0$ dır,
$(z)^F := (z)_0^F - (z)_\infty^F$ bölenine z nin esas böleni denir.

(g) Bir $D \in \mathbb{D}_F$ için $\mathcal{L}(D) := \{x \in F : (x) \geq -D\} \cup \{0\}$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}(D)$, K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya Riemann-Roch Uzayı denir.

Kolayca görülebilir ki, $\mathcal{L}(0) = K$ ve $D < 0$ ise $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ dır.

Örnek 1.7. *$F = \mathbb{C}(x)$ olsun. $z = (x-3)^2 . (x-5)$ alalım. Böylece, $P_3 =< x-3 >$ ise $v_{P_3}(z) = 2$, $P_5 =< x-5 >$ ise $v_{P_5}(z) = 1$ ve $P_\infty =< \frac{1}{x} >$ ise $v_{P_\infty}(z) = -3$ tür. z elemanı için, $(z)_0 = 2P_3 + P_5$, $(z)_\infty = 3P_\infty$ olduğundan $(z) = 2P_3 + P_5 - 3P_\infty$ dur.*

Aşağıdaki teoremin ispatı için kaynaklar Stichtenoth (2009), Chevalley (1951) ve Salvador'dur. (2006)

Teorem 1.8. *F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $x \in F \backslash \{0\}$, K üzerinde bir aşkın eleman olsun. Bu durumda $\text{der}\,(x)_0 = \text{der}\,(x)_\infty = [F : K(x)]$ dır, (x) esas böleninin derecesi sıfırdır.*

$D \in \mathbb{D}_F$ için $\text{der}\,(D) < 0$ ise $\text{boy}\,\mathcal{L}(D) = 0$ dır. Her $D \in \mathbb{D}_F$ için $\text{der}\,D - \text{boy}\,D < \gamma$ olacak biçimde bir $\gamma \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durum F/K cebirsel fonksiyon cismi için cins (genus) tanımını anlamlı kılar.

Tanım 1.9. *F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ise*

$$g_F := \max\{\text{der}\,D - \text{boy}\,D + 1 : D \in \mathbb{D}_F\}$$

sayısına F/K nın cinsi (genus) denir ve g_F ile gösterilir.

Kolayca görülebilir ki, $g_F \geq 0$ dır. $D \in \mathbb{D}_F$ için $i(D) = \text{boy}\,D - \text{der}\,D + g_F - 1$ sayısına D böleninin özellik indeksi denir. Özel olarak, Riemann-Roch teoremi bu sayının $i(D) \geq 0$ ve $\text{der}\,D$ yeterince büyükse $i(D) = 0$ olduğunu ifade eder.

Tanım 1.10. *F/K bir cebirsel fonksiyon cismi,*

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \mathbb{P}_F & \rightarrow & F \\ & P & \rightarrow & \alpha(P) \end{array}$$

fonksiyon olmak üzere, sonlu sayıda P noktası hariç her P noktası için $\alpha(P) \in \mathcal{O}_P$ ise α ya F/K nın bir adeli denir. F/K nın adeller kümesi K cismi üzerinden bir vektör uzayıdır, bu uzaya F/K nın adel uzayı denir ve A_F ile gösterilir.

Tanım 1.11. *F/K bir cebirsel fonksiyon cismi ve $w : A_F \rightarrow K$ fonksiyonu K üzerinde bir doğrusal dönüşüm olsun.*

(a) *Uygun bir* $D \in \mathbb{D}_F$ *için* $w(A_F(D) + F) = 0$ *ise* w *ye bir Weil diferensiyeli denir ve* F/K *nın Weil diferensiyelleri kümesi* Ω_F*,* F *cismi üzerinden vektör uzayıdır,* Ω_F *ye* F/K *nın Weil diferensiyelleri uzayı denir.*

(b) $0 \neq w \in \Omega_F$ *için* $w(A_F(B) + F) = 0$*,* $w(A_F(D) + F) = 0$ *ve* $D \leq B$ *koşulları sağlanırsa* B *bölenine* w *Weil diferensiyelinin böleni denir,* $B = (w)$ *ile gösterilir.*

(c) $v_P(w) := v_P((w))$ *ile tanımlanır.* $v_P(w) > 0$ *ise* P *noktasına* w *nun sıfırı,* $v_P(w) < 0$ *ise* P *noktasına* w *nun kutbu denir. Her* $P \in \mathbb{P}_F$ *için* $v_P(w) \geq 0$ *ise* w *ye düzenli denir.*

(d) *Bir Weil diferensiyelinin bölenine* F/K *nın bir kanonik böleni denir.*

Her $D \in \mathbb{D}_F$ için $\Omega_F(D) = \{w \in \Omega_F : w(A_F(D) + F) = 0\}$, K cismi üzerinden Ω_F nin bir altuzayıdır ve boy $\Omega_F(D) = i(D)$ dir, boy $\Omega_F(0) = i(0) = g_F$ dir. $0 \neq x \in F, 0 \neq w \in \Omega_F$ ise $(xw) = (x) + (w)$ dir ve kanonik iki bölen denktir. $D \in \mathbb{D}_F$, $W = (w)$ olsun. Bu durumda, $\mu : \mathcal{L}(W - D) \to \Omega_F(D)$, $\mu(x) = xw$ ile tanımlanan μ dönüşümü bir K cismi üzerinden bir izomorfizmdir. Weil diferensiyelleri hakkında ayrıntılı bilgi Stichtenoth (2009) ve Salvador (2006) kaynaklarında bulunabilir.

Teorem 1.12. (Riemann-Roch Teoremi) F/K *bir cebirsel fonksiyon cismi ve* W*,* F/K *nın bir kanonik böleni olmak üzere, her* $D \in \mathbb{D}_F$ *için* boy $\mathcal{L}(D) =$ der $D + 1 - g_F +$ boy $\mathcal{L}(W - D)$ *dir, burada* g_F*,* F/K *nın cinsidir.*

İspat. $\mathcal{L}(W - D) = \Omega_F(D)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \text{boy}\,\mathcal{L}(W - D) &= \text{boy}\,\Omega_F(D) = i(D) \\ &= \text{boy}\,\mathcal{L}(D) - \text{der}\,D + 1 - g_F \end{aligned}$$

dir. Buradan, boy $\mathcal{L}(D) =$ der $D + 1 - g_F +$ boy $\mathcal{L}(W - D)$ eşitliği elde edilir. ∎

Riemann-Roch teoreminde $D = 0$ ve $D = W$ almak suretiyle doğrudan görülebilir ki, W kanonik bölen ise der $W = 2g_F - 2$, boy $\mathcal{L}(W) = g_F$ dir. $D \in \mathbb{D}_F$ için der $D \geq 2g_F - 1$ ise boy $\mathcal{L}(D) =$ der $D + 1 - g_F$ dir. Eğer bir $D \in \mathbb{D}_F$ için $0 \leq$ der $D \leq 2g_F - 2$ ise boy $D \leq 1 + \frac{1}{2}$ der D dir. Bu ifade Clifford teoremi olarak bilinir.

Bir cebirsel fonksiyon cismi F/K nın, rasyonel fonksiyonlar cismi (öyle bir $x \in F$ vardır ki, $[F : K(x)] = 1$) olması için gerek ve yeter koşul $g_F = 0$ ve uygun bir $D \in \mathbb{D}_F$ için der $D = 1$ olmasıdır.

1.2. Weierstrass Semigrup

Önerme 1.13. $n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere* $P \in \mathbb{P}_F$ *için* $n \geq 2g_F$ *ise* $(x)_\infty = nP$ *olacak biçimde bir* $x \in F$ *vardır.*

İspat. $n \geq 2g_F > 2g_F - 1$ olduğundan Riemann-Roch teoreminden $D \in \mathbb{D}_F$ için

boy $\mathcal{L}(D) =$ der $D + 1 - g_F$

dir. $n \geq 2g_F$ için $\mathcal{L}(nP_\infty) = n+1-g_F$ dir. $n-1 \geq 2g_F-1$ olduğundan $\mathcal{L}((n-1)P_\infty) = (n-1)+1-g_F = (n+1-g_F)-1$ dir. Buradan görülebilir ki, $\mathcal{L}((n-1)P_\infty) \subsetneqq \mathcal{L}(nP_\infty)$ dir. O halde, öyle bir $x \in \mathcal{L}(nP_\infty) \backslash \mathcal{L}((n-1)P_\infty)$ vardır ki $(x) \geq -nP_\infty$ ve $(x) \ngeq -(n-1)P_\infty$ dur. $P \neq P_\infty$ için $v_P(x) = 0$ ve $v_{P_\infty}(x) = -n$ dir. Böylece, $(x)_\infty = nP_\infty$ dur. ∎

Tanım 1.14. *$P \in \mathbb{P}_F$ için $n \geq 0$ olsun. $(x)_\infty = nP$ olacak biçimde bir $x \in F$ var ise n sayısına P noktasında bir kutup sayısı, aksi halde bir boşluk sayısı denir.*

$P \in \mathbb{P}_F$ için $\mathcal{L}(0) \subseteq \mathcal{L}(P) \subseteq \mathcal{L}(2P) \subseteq ... \subseteq \mathcal{L}((j-1)P) \subseteq \mathcal{L}(jP) \subseteq ...$ Riemann-Roch uzayları dizisinde $j \in \mathbb{N}$ sayısının P noktasında bir kutup sayısı olması için gerek ve yeter koşul öyle $x \in F$ vardır ki $(x)_\infty = jP$ olmasıdır. Bu durumda, $\mathcal{L}((j-1)P) \subsetneqq \mathcal{L}(jP)$ dir. $j \in \mathbb{N}$ sayısının P noktasında bir boşluk sayısı olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{L}((j-1)P) = \mathcal{L}(jP)$ dir.

Teorem 1.15. (Weierstrass Boşluk Teoremi) *F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, $P \in \mathbb{P}_F$,* der $P = 1$ *ve $g_F > 0$ olsun. Bu durumda, F/K bir cebirsel fonksiyon cisminin P noktasında tam g_F tane boşluk sayısı vardır, bu sayılar $i_1, i_2, ..., i_{g_F}$ ise, $0 < i_1 = 1$ ve $i_g \leq 2g_F - 1$ dir.*

İspat. $P \in \mathbb{P}_F$ ve der $P = 1$ olsun. P noktasının her boşluk sayısı $2g_F - 1$ sayısından küçüktür veya eşittir. 0 sayısı ise P noktasının kutbudur. i sayısının P noktasının bir boşluğu olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{L}((i-1)P) = \mathcal{L}(iP)$ olmasıdır.

$K = \mathcal{L}(0) \subseteq \mathcal{L}(P) \subseteq \mathcal{L}(2P) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{L}((2g_F-1)P)$ vektör uzayı dizisini göz önüne alırsak, boy $\mathcal{L}(0) = 1$ ve boy $\mathcal{L}((2g_F-1)P) = g$ dir. Her i için $\mathcal{L}(iP) \leq \mathcal{L}((i-1)P) + 1$ dir. Böylece, $1 \leq i \leq 2g_F - 1$ için $\mathcal{L}((i-1)P) \subsetneqq \mathcal{L}(iP)$ olacak şekilde tam $g_F - 1$ tane $\mathcal{L}(iP)$ uzayı vardır. Ancak, bu dizide $2g_F$ tane uzay olduğundan P noktasının boşluk sayısı g_F tanedir. O halde son olarak 1 sayısının P noktasının boşluğu olduğu gösterilmelidir. Aksi varsayılsın ve 1sayısı P noktasının kutbu olsun. Kutup sayıları toplama işlemi ile bir semigrup olduğundan 1 sayısı P noktasının kutbu ise her $n \in \mathbb{N}$ de P noktasının kutbudur ve P noktasının hiç boşluğu yoktur, bu durum $g_F > 0$ olması ile çelişir. ∎

F/K bir cebirsel fonksiyon cismi olmak üzere, F/K nın sadece sonlu sayıda P noktası için kutup sayıları kümesi diğerlerinden farklanır, bu noktalara Weierstrass noktaları denir (Stichtenoth (2009) ve Karakaş (1977)). $S \subseteq \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ bir monoid olmak üzere, $\mathbb{N}_0 \backslash S$ sonlu bir küme ise S kümesine nümerik semigrup denir. Özel olarak, $c \in \mathbb{N}_0 \backslash S$ sayılarına S kümesinin boşluk sayıları denir. Ayrıntılı bilgi için Rosales ve Garcia (2009), kaynak olarak verilebilir.

Tanım 1.16. *Bir F/K cebirsel fonksiyon cisminin herhangi bir $P \in \mathbb{P}_F$ noktası için*

$$H(P) = \{i \in \mathbb{N} \mid (x)_\infty = iP \text{ olacak şekilde } x \in F \text{ vardır}\}$$

kümesine, F/K nın P noktasındaki Weierstrass semigrubu denir.

Weierstrass Boşluk teoreminden görülebilir ki, $H(P)$ nümerik semigruptur ve $H(P)$ kümesinin boşluklarının sayısı g_F sayısına eşittir.

Tanım 1.17. *F/K bir cebirsel fonksiyon cismi, $P \in \mathbb{P}_F$ ve $\imath_P : F \hookrightarrow A_F$ yerel gömülüş olsun.*

(a) $x \in F$ için $\imath_P(x)$, $P \in \mathbb{P}_F$ için P bileşeni x, diğer bileşenleri sıfır olan adeldir.

(b) $w \in \Omega_F$ weil diferansiyeli için $w_P : F \to K$, $w_P(x) := w(\imath_P(x))$ ile tanımlanan doğrusal dönüşüme w nin yerel bileşeni denir.

Örnek 1.18. *$F = K(x)$ rasyonel fonksiyon cismi ve P_∞, x elemanının kutbu olsun. Bu durumda,*

(a) $-2P_\infty$ kanonik bölendir.

(b) Öyle tek türlü belirli $(\eta) = -2P_\infty$ ile $\eta \in \Omega_{K(x)}$ Weil diferansiyeli vardır ki, $\eta_{P_\infty}(x^{-1}) = -1$ dir.

(c) η Weil diferansiyelinin η_{P_∞} ve η_{P_a} yerel bileşenleri,

$$\eta_{P_\infty}((x-a)^n) = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ -1, & n = -1 \end{cases}, \eta_{P_a}((x-a)^n) = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 1, & n = -1 \end{cases}$$

dir. Ayrıntılı bilgi için Stichtenoth (2009) ve Salvador (2006) kaynaklarına bakılması önerilebilir.

1.3. Cebirsel Fonksiyon Cismi Genişlemeleri

Bu bölümde, fonksiyon cismi genişlemeleri ve bu genişlemelerde değerlendirme halkaları, noktalar, bölenler gibi temel yapıların davranışları incelenecektir. K bir mükemmel cisim olmak üzere F/K cebirsel fonksiyon cismi ve K, F içinde cebirsel kapalı kabul edilecektir.

Tanım 1.19. *F/K bir cebirsel fonksiyon cismi olmak üzere,*

(a) F/K, F'/K' cebirsel fonksiyon cisimleri, $F \subseteq F'$ cebirsel cisim genişlemesi, $K \subseteq K'$, F' cisminin tüm sabitler cismi K' ve F cisminin tüm sabitler cismi K ise F'/K' ye F/K nın bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi denir.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & F' \arrow[d] \arrow[dl] \\ K' \arrow[d] & F \arrow[dl] \\ K & \end{tikzcd}$$

(b) $F' = FK' = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i k_i' : f_i \in F,\, k_i' \in K',\, n \in \mathbb{N} \right\}$ *ise,* F'/K' *cebirsel fonksiyon cismi genişlemesine* F/K *cebirsel fonksiyon cisminin bir sabitler cismi genişlemesi denir.*

(c) F'/F *sonlu genişleme ise* F'/K' *cebirsel fonksiyon cismi genişlemesine,* F/K *nın bir sonlu cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi denir.*

F'/K', F/K nın bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi ise bu genişlemenin önemli bir kaç özelliğini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz.

(a) K'/K cebirsel genişlemedir ve $F \cap K' = K$ dır.

(b) F'/K', F/K nın bir sonlu genişlemesi olması için gerek ve yeter koşul $\left[K' : K\right]$ nın sonlu olmasıdır.

(c) $F_1 := FK'$, F_1/K', F/K nın sabitler cismi genişlemesi ve F'/K', F_1/K' nün sonlu genişlemesidir.

Bu özellikler, Stichtenoth (2009), Chevalley (1951) ve Salvador (2006) gibi kaynaklarda ayrıntılı olarak incelenmiş ve ispatları verilmiştir.

Tanım 1.20. *F'/K', F/K nın cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi $P \in \mathbb{P}_F$ ve $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ olsun. $P \subseteq P'$ ise $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ noktasına $P \in \mathbb{P}_F$ noktasının bir genişlemesi denir ve $P' \mid P$ ile gösterilir.*

Lemma 1.21. *F'/K', F/K nın bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi, P ve P' sırasıyla $P' \mid P$ olacak şekilde F/K ve F'/K' nün noktaları ve $\mathcal{O}_P$ ve $\mathcal{O}_{P'}$ bu noktalara karşılık gelen değerlendirme halkaları, v_P ve $v_{P'}$ ise bu noktaların ayrık değerlendirmeleri olsun. Bu durumda,*

(a) $\mathcal{O}_P \subseteq \mathcal{O}_{P'}$ *dür.*

(b) Her $z \in F$ *için* $v_{P'}(z) = e \cdot v_P(z)$ *olacak şekilde* $e \in \mathbb{N}$ *vardır.*

İspat. Stichtenoth (2009), Chevalley (1951) ve Salvador (2006). ∎

Yukarıdaki lemmada varlığı söylenen $F_P = \mathcal{O}_P/P$ kalan sınıfları cisminden $F'_{P'} = \mathcal{O}_{P'}/P'$ kalan sınıfları cismine $x \in \mathcal{O}_P$ iken $x(P) \longmapsto x\left(P'\right)$ ile tanımlanan bir kanonik gömme dönüşümü vardır. Böylece, F_P, $F'_{P'}$ nin bir altcismidir. Burada $e := e\left(P' \mid P\right)$ sayısına, P' noktasının P üzerinde dallanma indeksi denir. $e = 1$ ise $P' \mid P$ ye dallanmamış, $e > 1$ ise $P' \mid P$ ye dallanmış nokta denir. $f\left(P' \mid P\right) := \left[F'_{P'} : F_P\right]$ sayısına, P' noktasının P üzerinde göreceli derecesi denir. $f\left(P' \mid P\right)$ sonlu veya sonsuzdur ancak $e\left(P' \mid P\right)$ sayısı her zaman bir doğal sayıdır.

Teorem 1.22. *Her $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ için $P' \mid P$ olacak şekilde tam bir tane $P \in \mathbb{P}_F$ vardır ve bu* *nokta $P = P^{'} \cap F$ formundadır. Diğer taraftan, her $P \in \mathbb{P}_F$ için $P^{'} \mid P$ olacak şekilde en az bir en fazla sonlu sayıda $P^{'} \in \mathbb{P}_{F^{'}}$ vardır.*

İspat. $P^{'} \in \mathbb{P}_{F^{'}}$ olsun. Öncelikle, $v_{P'}(z) \neq 0$ olacak şekilde $z \in F \backslash \{0\}$ varlığı gösterilmelidir. Her $z \in F \backslash \{0\}$ için $v_{P'}(z) = 0$ olduğunu varsayalım. $v_{P'}(t) > 0$ olacak şekilde $t \in P^{'} \subset F^{'}$ seçelim. $F^{'}/F$ cebirsel genişleme olduğundan uygun $c_i \in F$, $0 \leq i \leq n$, $c_0 \neq 0$ ve $c_n \neq 0$ için $c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0 = 0$ yazılabilir. Buradan,

$$v_{P'}\left(c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0\right) = v_{P'}(0) = \infty,$$

varsayımdan her i için $v_{P'}(c_i t^i) = i.v_{P'}(t)$ elde edilir, bu ise eşitliğin sol tarafının sonlu sayı sağ tarafının ise ∞ olması ile çelişir. O halde $v_{P'}(z) \neq 0$ olacak şekilde $z \in F \backslash \{0\}$ vardır. $K \subsetneqq \mathcal{O} = \mathcal{O}_{P'} \cap F \subsetneqq F$ olduğundan $z \in F \backslash K$ dır. $z \notin \mathcal{O}_{P'} \cap F$ olduğundan $z \notin \mathcal{O}_{P'}$ ve $z^{-1} \in \mathcal{O}_{P'}$, $z^{-1} \in P = P^{'} \cap F$ elde edilir. F/K cebirsel fonksiyon cisminin herhangi bir P noktası verilmiş olsun. Öyle bir $x \in F \backslash K$ seçelim ki P, x elemanının tek sıfırı olsun. Şimdi $P^{'} \in \mathbb{P}_{F^{'}}$ noktası için $P^{'} \mid P$ olması için gerek ve yeter koşulun $v_{P'}(x) > 0$ olduğunu gösterelim. Eğer $P^{'} \mid P$ ise $v_{P'}(x) = e\left(P^{'} \mid P\right).v_P(x) > 0$ olduğu açıktır. Diğer yandan, $v_{P'}(x) > 0$ ise $v_{P'}(x) = e\left(P^{'} \mid P\right).v_P(x)$ tir ve buradan $P \subset P^{'}$ dür. Her $P^{'} \in \mathbb{P}_{F^{'}}$ noktası için $P^{'} \mid P$ olacak şekilde tam bir tane $P \in \mathbb{P}_F$ noktası bulunduğunu teoremin ilk kısmından biliniyor, $Q \subset P^{'}$ ve $Q \in \mathbb{P}_F$ olsun. $v_{P'}(x) > 0$ ise $P^{'} \mid Q$ ve x elemanın tek sıfırı olduğundan $Q = P$ dir. x elemanının $F^{'}/K^{'}$ cebirsel fonksiyon cismi genişlemesinde sonlu sayıda sıfırı olacağından P noktasının sonlu sayıda genişlemesi vardır. ∎

Teorem 1.22.'de her $P^{'} \in \mathbb{P}_{F^{'}}$ için $P^{'} \mid P$ olacak şekilde alınan $P \in \mathbb{P}_F$ noktası $P^{'}$ noktasının F/K ya kısıtlanışı olarak adlandırılır.

$F^{'}/K^{'}$, F/K nın cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi, $P \in \mathbb{P}_F$, $1 \leq i \leq t$, $P^{'}, P_i^{'} \in \mathbb{P}_{F^{'}}$, noktalarına karşılık gelen değerlendirme halkaları $\mathcal{O}_P$, $\mathcal{O}_{P'}$ ve $\mathcal{O}_{P_i^{'}}$ olsun. Nokta ve değerlendirme halkalarının bu genişlemedeki davranışlarını aşağıdaki diyagram ile daha açık ifade edebiliriz.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{P'} \arrow[d] & P_1^{'} \; . \; . \; . & P_i^{'} & . \; . \; . \; P_t^{'} & P' \arrow[d] \\
\mathcal{O}_P & & P \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & & P = P' \cap F
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{P'} \cap F$$

Lemma 1.23. *$F^{''}/K^{''}$, $F^{'}/K^{'}$nün ve $F^{'}/K^{'}$, F/K nın bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi, $P^{''} \in \mathbb{P}_{F^{''}}$, $P^{'} \in \mathbb{P}_{F^{'}}$, $P \in \mathbb{P}_F$ ve $P^{''} \mid P^{'}$, $P^{'} \mid P$ olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned}
e\left(P^{''} \mid P\right) &= e\left(P^{''} \mid P^{'}\right) e\left(P^{'} \mid P\right), \\
f\left(P^{''} \mid P\right) &= f\left(P^{''} \mid P^{'}\right) f\left(P^{'} \mid P\right)
\end{aligned}$$

dir.

İspat. Stichtenoth (2009), Chevalley (1951) ve Salvador (2006). ∎

Tanım 1.24. *F'/K', F/K nın bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi olsun. $P \in \mathbb{P}_F$ için $\sum_{P'|P} e\left(P' \mid P\right) P'$ bölenine P nin F'/F deki conormu (eşnorm) denir ve $Con_{F'/F}(P)$ ile gösterilir, buradaki toplam P noktasının her $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ genişlemesini tarar.*

$F'' \supseteq F' \supseteq F$ fonksiyon cisimleri kulesi olsun. Her $D \in \mathbb{D}_F$ böleni için

$$Con_{F''/F}(D) = Con_{F''/F'}\left(Con_{F'/F}(D)\right)$$

dir (Stichtenoth (2009), Chevalley (1951) ve Salvador (2006)).

Önerme 1.25. *F'/K', F/K nın bir cebirsel genişlemesi olsun. Her $x \in F\backslash\{0\}$ için F/K içinde, sırasıyla, $(x)_0^F$, $(x)_\infty^F$, $(x)^F$ bölenleri x elemanının sıfırlarının, kutuplarının böleni ve esas böleni olsun. $\mathbb{D}_{F'}$ grubunda, sırasıyla, x elemanının sıfırlarının, kutuplarının böleni ve esas böleni*

$$\begin{aligned} Con_{F'/F}\left((x)_0^F\right) &= (x)_0^{F'} \\ Con_{F'/F}\left((x)_\infty^F\right) &= (x)_\infty^{F'} \\ Con_{F'/F}\left((x)^F\right) &= (x)^{F'} \end{aligned}$$

dür.

İspat. $x \in F\backslash\{0\}$ için esas bölen tanımından,

$$\begin{aligned} (x)^{F'} &= \sum_{P' \in \mathbb{P}_{F'}} v_{P'}(x) P' = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} \sum_{P'|P} e\left(P' \mid P\right) v_P(x) P' \\ &= \sum_{P \in \mathbb{P}_F} v_P(x) Con_{F'/F}(P) = Con_{F'/F}(P) \left(\sum_{P \in \mathbb{P}_F} v_P(x) P \right) \\ &= Con_{F'/F}\left((x)^F\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Esas bölen tanımından ispatın kalan kısmı görülebilir. ∎

Teorem 1.26. (Temel Eşitlik) *F'/K', F/K nın bir sonlu cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi, $P \in \mathbb{P}_F$, $P_1, P_2, \ldots, P_m \in \mathbb{P}_{F'}$ ve $P_i \mid P$, $1 \le i \le m$, P noktasının genişlemeleri olsun. Bu durumda, $\sum_{i=1}^m e(P_i \mid P) f(P_i \mid P) = \left[F' : F\right]$ dir.*

İspat. F/K cebirsel fonksiyon cisminde tek sıfırı P noktası olan bir $x \in F$ seçelim ve $v_P(x) := r > 0$ olsun. Böylece $P_1, P_2, \ldots, P_m \in \mathbb{P}_{F'}$ noktaları x elemanının F'/K'

genişlemesindeki bütün sıfırlarıdır. $\left[F' : K(x)\right]$ in derecesini iki yolla hesaplayalım: İlk olarak,

$$\begin{aligned}
\left[F' : K(x)\right] &= \left[F' : K'(x)\right].\left[K'(x) : K(x)\right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} v_{P_i}(x) . \operatorname{der} P_i\right)\left[K' : K\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(e_i(P_i \mid P)\, v_P(x)\right)\left[F'_{P_i} : K'\right].\left[K' : K\right] \\
&= r.\sum_{i=1}^{m} e_i(P_i \mid P).\left[F'_{P_i} : F_P\right].\left[F_P : K\right] \\
&= r.\operatorname{der} P.\sum_{i=1}^{m} e_i(P_i \mid P)\, f_i(P_i \mid P)
\end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$\left[F' : K(x)\right] = \left[F' : F\right].\left[F : K(x)\right] = \left[F' : F\right].r \operatorname{der} P$$

elde edilir. Eşitlikler birleştirilirse, $\sum_{i=1}^{m} e_i(P_i \mid P)\, f_i(P_i \mid P) = \left[F' : F\right]$ istenilen gösterilmiş olur. ∎

Temel eşitlikten aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 1.27. *F'/K', F/K nın bir sonlu cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi ve $P \in \mathbb{P}_F$ olsun.*

(a) $\left|\left\{P' \in \mathbb{P}_{F'} : P' \mid P\right\}\right| \leq \left[F' : F\right]$.

(b) *$P' \in \mathbb{P}_{F'}$, $P' \mid P$ ise $e\left(P' \mid P\right) \leq \left[F' : F\right]$ ve $f\left(P' \mid P\right) \leq \left[F' : F\right]$ dir.*

(c) *Her $D \in \mathbb{D}_F$ böleni için* $\operatorname{der}\left(Con_{F'/F}(D)\right) = \frac{\left[F':F\right]}{\left[K':K\right]} \operatorname{der} D$ *dir.*

Tanım 1.28. *F'/K', F/K nın derecesi n olan bir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi ve $P \in \mathbb{P}_F$ olsun.*

(a) *$P \in \mathbb{P}_F$ noktasının F'cisminde tam n tane genişlemesi var ise P noktasına F'/F genişlemesinde tümden parçalanmıştır denir.*

(b) *$P \in \mathbb{P}_F$ noktasının F'cisminde $e\left(P' \mid P\right) = n$ olacak şekilde tek bir genişlemesi var ise P noktasına F'/F genişlemesinde tümden dallanmıştır denir.*

(c) *$P \in \mathbb{P}_F$, $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ ve $P' \mid P$ olmak üzere $e\left(P' \mid P\right) > 1$ ve K nın karakteristiği $e\left(P' \mid P\right)$ sayısını bölmez ise P' ye P nin bir uysal(tame) genişlemesi denir. $e\left(P' \mid P\right) > 1$ ve K nın karakteristiği $e\left(P' \mid P\right)$ sayısını bölüyor ise P' ye P nin bir vahşi(wild) genişlemesi denir.*

Teorem 1.26. ile verilen temel eşitlikten aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(a) $P \in \mathbb{P}_F$ noktasının $F^{'}/F$ genişlemesinde tümden parçalanması için gerek ve yeter koşul $F^{'}$ cisminin her $P^{'} \mid P$ noktası için $e\left(P^{'} \mid P\right) = f\left(P^{'} \mid P\right) = 1$ olmasıdır.

(b) $P \in \mathbb{P}_F$ noktası $F^{'}/F$ genişlemesinde tümden dallanmış ise $P^{'} \mid P$ olan tam bir tane $P^{'} \in \mathbb{P}_{F^{'}}$ noktası vardır.

$A = \sum_{P \in \mathbb{P}_F} n_P P \in \mathbb{D}_F$ ise, $Con_{F'/F}(A) := \sum_{P \in \mathbb{P}_F} Con_{F'/F}(P)$ dir. F' nün adel uzayını $A_{F'}$ ve F' den F ye iz (trace) dönüşümünü $Tr_{F'/F}$ ile gösterelim. İz dönüşümü ile ilgili ayrıntılı bilgi için Hungerford (1989) kullanılabilir.

$$\mathbf{A}_{F'/F} := \{\alpha \in A_{F'} : \ P', Q' \in \mathbb{P}_{F'}, \ P' \cap F = Q' \cap F \text{ ise } \alpha_{P'} = \alpha_{Q'}\}$$

$A_{F'}$ nün F' üzerinden bir altuzayıdır. $Tr_{F'/F}$, $A_{F'/F}$ den A_F ye F üzerinden, yine $Tr_{F'/F}$ ile göstereceğimiz, bir doğrusal dönüşüme genişletilebilir. Şöyle ki, $P'|P$, $P' \in \mathbb{P}_{F'}$ olmak üzere her $\alpha \in \mathbf{A}_{F'/F}$ için $(Tr_{F'/F}(\alpha))_P := Tr_{F'/F}(\alpha_{P'})$ olur. w, F/K nın bir Weil diferansiyeli olsun. Bu durumda, her $\alpha \in \mathbf{A}_{F'/F}$ için,

$$Tr_{K'/K}(w'(\alpha)) = w(Tr_{F'/F}(\alpha))$$

koşulunu sağlayan F'/K' nün tek türlü belirli bir w' Weil diferansiyeli vardır. w' diferansiyeline w nın F'/F deki eşizi (cotrace) denir, $w^{'} = Cotr_{F^{'}/F}(w)$ ile gösterilir. F'/F sabitler cismi genişlemesi ise, $(w') = Con_{F'/F}(w)$ dir.

Teorem 1.29. (Hurwitz-Cins Formülü) *$F^{'}/K^{'}$, F/K nın bir sonlu ayrılabilir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi, g_F, ve $g_{F^{'}}$, sırasıyla F/K ve $F^{'}/K^{'}$ nün cinsi olsun. Bu durumda,*

$$2g_{F^{'}} - 2 = \frac{[F^{'} : F]}{[K^{'} : K]}(2g_F - 2) + \text{der}\, Diff\left(F^{'}/F\right)$$

dir.

İspat. F/K nın $w \neq 0$ olan bir Weil diferansiyeli için

$$\left(Cotr_{F^{'}/F}(w)\right) = Con_{F^{'}/F}((w)) + Diff\left(F^{'}/F\right)$$

dir ve bir kanonik bölenin derecesi $2g_F - 2$ olduğundan

$$\begin{aligned} 2g_{F^{'}} - 2 &= \text{der}\, Con_{F^{'}/F}((w)) + \text{der}\, Diff\left(F^{'}/F\right) \\ &= \frac{[F^{'} : F]}{[K^{'} : K]}(2g_F - 2) + \text{der}\, Diff\left(F^{'}/F\right) \end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Cebirsel fonksiyon genişlemelerinde Kummer ve Artin-Schreier genişlemeleri önemli rol oynar. Bu tür genişlemelerde noktaların dallanma davranışı aşağıdaki teoremler ile verilir.

Teorem 1.30. (Kummer Genişlemeleri) $n > 1$ *ve* n *ile* K *cisminin karakteristiği aralarında asal olsun.* K*, birimin* $n - inci$ *ilkel kökünü içermek üzere,* F/K *cebirsel fonksiyon cismi olsun.* $d > 1$ *ve* $d \mid n$ *için her* $w \in F$ *için* $u \neq w^d$ *koşullarını sağlayan* $u \in F$ *nin varlığını kabul edelim.* $y^n = u$ *ile* $F^{'} = F(y)$ *olsun. Böyle* $F^{'}/F$ *genişlemesine,* F *cisminin bir Kummer genişlemesi denir. Böylece,*

(a) $\Phi(T) = T^n - u$, y *elemanının* F *üzerinde minimal polinomudur.* $F^{'}/F$*, derecesi* $\left[F^{'} : F\right] = n$ *olan Galois genişlemesidir,* $F^{'}/F$ *nin Galois grubu devirlidir ve* $\zeta \in K$ *birimin* $n - inci$ *kökü olmak üzere,* $F^{'}/F$ *nin otomorfizmleri,* $\sigma(y) = \zeta y$ *ile verilir.*

(b) $P^{'} \in \mathbb{P}_{F^{'}}$*,* $P \in \mathbb{P}_F$ *nin bir genişlemesi olsun.* $r_P := obeb(n, v_P(u))$ *için* $e\left(P^{'} \mid P\right) = \frac{n}{r_P}$ *ve* $d\left(P^{'} \mid P\right) = \frac{n}{r_P} - 1$ *dir.*

(c) $K^{'}$*,* $F^{'}$ *nün tüm sabitler cismi,* g_F*,* F/K *nın ve* $g_{F^{'}}$*,* $F^{'}/K^{'}$*nün cinsi ise*

$$g_{F'} = 1 + \frac{n}{[K' : K]}\left(g_F - 1 + \frac{1}{2}\sum_{P\in\mathbb{P}_F}\left(1 - \frac{r_P}{n}\right).\mathrm{der}\, P\right)$$

dir.

İspat. Stichtenoth (2009), Chevalley (1951) ve Salvador (2006). ∎

Teorem 1.31. (Artin-Schreier Genişlemeleri) $p > 0$ *asal sayısı için* F/K*, karakteristiği* p *olan bir cebirsel fonksiyon cismi olsun. Her* $w \in F$ *için* $u \neq w^p - w$ *koşulunu sağlayan bir* $u \in F$ *elemanının varlığını kabul edelim.* $y^q + y = u$ *ile* $F^{'} = F(y)$ *olsun. Bu koşulları sağlayan* $F^{'}/F$ *genişlemesi* F *nin bir Artin Schreier genişlemesi olarak adlandırılır. Her* $P \in \mathbb{P}_F$ *için*

$$m_p := \begin{cases} m, & \exists z \in F,\ v_p(u - a(z)) = -m < 0,\ m \not\equiv 0 \mod p \\ -1, & \exists z \in F,\ v_p(u - a(z)) \geq 0 \end{cases}$$

olmak üzere,

(a) $F^{'}/F$*, derecesi* p *olan bir devirli Galois genişlemesidir.* $v = 0, 1, \ldots, p-1$ *için* $\sigma(y) = y + v$*,* $F^{'}/F$ *nin bir otomorfizmidir.*

(b) P *noktasının* $F^{'}/F$ *genişlemesinde dallanmamış olması için gerek ve yeter koşul* $m_p = -1$ *olmasıdır.*

(c) P *noktasının* $F^{'}/F$ *genişlemesinde tümden dallanmış olması için gerek ve yeter koşul* $m_p > 0$ *olmasıdır.* P *noktasının tek genişlemesi* $P^{'} \in \mathbb{P}_{F^{'}}$ *olsun. Bu durumda,* $d\left(P^{'} \mid P\right) = (q-1)(m_p+1)$ *dir.*

(d) *En az bir* $Q \in \mathbb{P}_F$ *noktası için* $m_Q > 0$ *ise* K*,* $F^{'}$ *cisminde cebirsel kapalıdır ve*

$$g_{F'} = p.g_F + \frac{p-1}{2}\left(-2 + \sum_{P\in\mathbb{P}_F}(m_P + 1)\,\mathrm{der}\, P\right)$$

dir.

İspat. Stichtenoth (2009), Chevalley (1951) ve Salvador (2006). ∎

Fonksiyon cisimlerinin bileşimi (composite) olan cisim genişlemelerinde dallanmayı anlamak için genellikle Abhyankar lemmadan yardım alırız.

Teorem 1.32. (Abhyankar Lemma) *$F^{'}/F$ bir sonlu ayrılabilir cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi olsun. $F \subseteq F_1, F_2 \subseteq F^{'}$ ara cisimleri ile $F^{'} = F_1F_2$ olduğunu kabul edelim. $P^{'} \in \mathbb{P}_{F'}$, $P \in \mathbb{P}_F$ noktasının bir genişlemesi ve $i = 1,2$ için $P_i := P^{'} \cap F_i$ olsun. $P_1 \mid P$ ve $P_2 \mid P$ genişlemelerinden en az birinin uysal (tame) olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $e\left(P^{'} \mid P\right) = okek\left\{e\left(P_1 \mid P\right), e\left(P_2 \mid P\right)\right\}$ dir.*

İspat. Stichtenoth (2009), Chevalley (1951) ve Salvador (2006). ∎

F/K nın derecesi 1 olan noktasına bir rasyonel nokta denir. Fonksiyon cisimleri ile ilgili olarak en çok ilgi çeken problemlerden birisi de fonksiyon cisminin rasyonel nokta sayısıdır.

(a) (Hasse-Weil Sınırı) $N = N(F)$, $F/\, \mathbb{F}_q$ genişlemesinde derecesi 1 olan noktaların sayısını göstermek üzere, $|N - (q+1)| \leq 2g_F.q^{1/2}$ dir. Verilen en önemli sınırlardan birisi Hasse-Weil sınırıdır. Ancak bu sınır, derecesi 1 olan nokta sayıları için keskindir. Sınırı daraltmak için aşağıdaki sınırlar verilir.

(b) (Serre Sınırı) $F/\, \mathbb{F}_q$, cinsi g_F olan fonksiyon cismi olmak üzere, $|N - (q+1)| \leq g_F\left[2q^{1/2}\right]$ dir, burada [.] tam değeri göstermektedir.

(c) (İhara) $F/\, \mathbb{F}_q$, maksimal fonksiyon cismi olmak üzere, $g \leq \left(q - q^{\frac{1}{2}}\right)/2$ dir.

Burada, bir sonraki teoremde kullanacağımız İhara sabitini tanımlayalım:

Tanım 1.33. *$F/\, \mathbb{F}_q$, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir fonksiyon cismi olsun.*

1. *$g \geq 0$ için $N_q(g) := \max\left\{N(F) \mid F, \mathbb{F}_q \text{ üzerinde cinsi } g \text{ olan fonksiyon cismi}\right\}$ olarak tanımlanır.*

2. *$A(q) := \limsup_{g\to\infty} N_q(g)/g$ reel sayısına ise İhara sabiti denir.*

(Drinfeld-Vladut Sınırı) $A(q)$ İhara sabiti olmak üzere $A(q) \leq q^{1/2} - 1$ dir.

1.4. Türev, Wronski Determinantı ve Hermityen Taban

Tanım 1.34. *F, K cismi üzerinden bir değişkenli cebirsel fonksiyon cismi ve K, F içinde cebirsel kapalı olsun. $D^{(\gamma)} : F \to F$ fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $D = \{D^{(\gamma)} : \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ dizisine F/K nın bir türevi denir.*

(a) Her $x, x^{'} \in F$ ve $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $D^{(\gamma)}(x + x^{'}) = D^{(\gamma)}(x) + D^{(\gamma)}(x^{'})$.

(b) Her $x, x' \in F$ *ve* $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *için* $D^{(\gamma)}(xx') = \sum_{\lambda=0}^{\gamma} D^{(\lambda)}(x)D^{(\gamma-\lambda)}(x')$.

(c) Her $a \in K$ *ve* $\gamma \in \mathbb{N}$ *için* $D^{(\gamma)}(a) = 0$.

(d) Her $x \in F$ *için* $D^{(0)}(x) = x$ *tir.*

Ek olarak, her $x \in F$ *ve* $\gamma, \mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *için*

$$D^{(\gamma)}D^{(\mu)}(x) = \binom{\gamma + \mu}{\mu} D^{(\gamma+\mu)}(x)$$

ise, D *ye* F/K *nın tekrarlı türevi; uygun bir* $x \in F$ *için*

$$D^{(1)}(x) = 1,\ D^{(\gamma)}(x) = 0,\ \gamma > 1$$

ise, D *ye* F/K *nın* x *e göre türevi denir ve her* γ *için* $D^{(\gamma)} = D_x^{(\gamma)}$, $D = D_x$ *ile gösterilir.*

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $D_x^{(\gamma)}(x^n) = \binom{n}{\gamma}x^{n-\gamma}$ dır, $\binom{n}{\gamma}$ binom katsayıları $n \geq \gamma$ için tanımlanmış olmasına rağmen $\gamma > n$ ise $\binom{n}{\gamma} = 0$ kabul edeceğiz. Her $z \in F \setminus \{0\}$ ve $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$D^{(\gamma)}(\frac{1}{z}) = -\frac{1}{z}\sum_{\lambda=0}^{\gamma-1} D^{(\lambda)}(\frac{1}{z})D^{(\gamma-\lambda)}(z)$$

dir. F'/K', F/K nın bir değişkenli cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi ve K, K' sırasıyla F, F' içinde cebirsel kapalı olsun. $D = \{D^{(\gamma)} : \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, F'/K' nün bir türevi ve $\overline{D} = \{\overline{D}^{(\gamma)} : \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, F/K nın bir türevi olsun. Eğer her $\gamma \geq 0$ için $D^{(\gamma)}|_F = \overline{D}^{(\gamma)}$ ise, D ye $\overline{D}$ nin F'/K' ya bir genişlemesi $\overline{D}$ ye de D nin F/K ya bir kısıtlanışı denir. F', F nin bir sabitler cismi genişlemesi ise, F nin her türevinin F' ye tek türlü belirli bir genişlemesi vardır.

Teorem 1.35. *F/K bir değişkenli cebirsel fonksiyonlar cismi ve F, K üzerinden ayrılabilir üretilmiş olsun. F nin her x ayıran elemanı için, K üzerinden x e göre bir tekrarlı türevi vardır.*

İspat. Schmidt (1939). ∎

Her $z \in F$ için $Z(U) = \sum_{r\geq 0} D^{(r)}(z)U^r$ kuvvet serisi z nin D türevine göre Taylor açılımı olarak adlandırılır. $F[[U]]$, F üzerinde kuvvet serileri halkası olmak üzere, F den $F[[U]]$ ya $T : F \to F[[U]]$, $z \to T(z) = Z(U)$ dönüşümü bire-bir halka homomorfizmi olup her $z \in F$ ve $r = 0, 1, ...$ için

$$T(D^{(r)}(z)) = \sum_{s\geq r} \binom{s}{r} D^{(s)}(z)U^{s-r}$$

özelliğini sağlamaktadır. F/K nın bir başka tekrarlı türevi $\tilde{D}$ ve $z \in F$ nin $\tilde{D}$ ya göre Taylor açılımı $\tilde{Z}(V) = \sum_{r\geq 0} \tilde{D}^{(r)}(z)V^r$ olsun. Ayrıca, $y \in F$ ve $Y(U) = \sum_{r\geq 0} D^{(r)}(y)U^r$

olsun. Eğer, her $z \in F$ için

$$\tilde{Z}(Y(U)-y) = \sum_{r\geq 0} \tilde{D}^{(r)}(z)(Y(U)-y)^r = \sum_{r\geq 0} D^{(r)}(z)U^r = Z(U)$$

koşulu sağlanırsa, $\tilde{D}$ dan D ye y yardımı ve zincir kuralı ile geçilebilir denir. Bu durumda, her $z \in F$ ve her $r = 0, 1, ...$ için

$$D^{(r)}(z) = \tilde{D}^{(r)}(z)(D^{(1)}(y))^r + \sum_{s=1}^{r-1} \tilde{D}^{(s)}(z)h_r^{(r-s+1)}$$

olacak biçimde tek türlü belirli $h_r^{(j)} \in F_p[D^{(1)}(y), \ldots, D^{(j)}(y)]$ bulunur. Burada, $j = 1, 2, ..., r$ ve F_p, F nin asal altcismidir. Bu eşitliğe zincir kuralı denir. Ayrıca,

$$h_r^{(r)} = D^{(r)}(y)$$

dir. $x \in F$ bir ayıran eleman ise, F/K nın her bir tekrarlı türevi D den D_x e x yardımı ve zincir kuralı ile geçilebileceği bilinmektedir, Karakaş (1977), Schmidt (1939) ve Salvador (2006).

$\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset F,\ K$ üzerinden doğrusal bağımsız ve $D = \{D^{(\gamma)} : \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, F/K nın bir türevi ise

$$W_D(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} D^{(r_1)}(y_1) & D^{(r_1)}(y_2) & . & . & . & D^{(r_1)}(y_n) \\ D^{(r_2)}(y_1) & D^{(r_2)}(y_2) & . & . & . & D^{(r_2)}(y_n) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ D^{(r_n)}(y_1) & D^{(r_n)}(y_2) & . & . & . & D^{(r_n)}(y_n) \end{vmatrix}$$

determinantı sıfırdan farklı olacak biçimde $0 = r_1 < r_2 < ... < r_n$ sayıları bulunabilir. Bu özelliği sağlayan $0 = r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ tamsayı dizilerinden alfabetik sıralanışa göre en küçüğü $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ olsun. $\epsilon_1 < ... < \epsilon_n$ dizisine $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ nin D türevine göre Wronski mertebeleri,

$$W_D(y_1, y_2, \ldots, y_n) = det(D^{(\epsilon_i)}(y_j)), 1 \leq i, j \leq n$$

determinantına da $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ nin Wronski determinantı denir. $x \in F$, F/K nın bir ayıran elemanı, $\{y_1, ..., y_n\} \subset F$, K üzerinden doğrusal bağımsız ve D_x, F/K nın x e göre tekrarlı türevi olmak üzere herhangi bir D tekrarlı türevi için $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ nin D_x e göre Wronski mertebeleri, D ye göre Wronski mertebeleri ile aynıdır ve

$$W_D(y_1, y_2, \ldots, y_n) = W_{D_x}(y_1, y_2, \ldots, y_n)(D^{(1)}(x))^{\epsilon_1+\ldots+\epsilon_n}$$

olduğu bilinmektedir, Schmidt (1939), Karakaş (1977) ve Salvador (2006). V ile $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ nin K üzerinden gerdiği uzayı gösterelim. F/K nın bir D tekrarlı türevi ve her $z \in F$ için,

$$W_D(zy_1, zy_2, \ldots, zy_n) = z^n W_D(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

olacaktır. V nin bir başka $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ tabanını seçelim. $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ nin D ye göre Wronski mertebeleri ile $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ nin D ye göre Wronski mertebeleri aynıdır. Dolayısıyla, $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$, V nin bir değişmezidir. Eğer V nin $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ tabanından $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ tabanına geçiş matrisi M ise,

$$W_D(y_1, y_2, \ldots, y_n) = W_D(z_1, z_2, \ldots, z_n) det M$$

bağıntısı sağlanır.

Bir D türevinin tekrarlı olması için gerekli ve yeterli koşul $D_U^{(r)}(T(y)) = T(D^{(r)}(y))$ dir. $D_U^{(n)}(\sum_{m\geq 0} a_m U^m) = \sum_{m\geq n} \binom{m}{n} a_m U^{m-n}$ dir. F ve $T(F)$ izomorftur. Böylece, $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset F$ ve $T(y_i) = Y_i, 0 \leq i \leq n$ ise,

$$T(W_D(y_1, y_2, \ldots, y_n)) = W_D(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

elde edilir. Bu nedenle, $W_D(y_1, y_2, ..., y_n) \equiv W_D(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)(\mathrm{mod}\, U)$ dur, K üzerinde doğrusal bağımsız $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ için $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ kümesi de doğrusal bağımsızdır. Dolayısıyla, $W_D(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ve $W_D(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ nin türev mertebeleri aynıdır.

$\{Y_1, ..., Y_n\} \subseteq F$ ile üretilen alt uzay N olmak üzere N nin başka bir tabanı $\{Z_1, ..., Z_n\}$ nin elemanlarını

$$Z_j = U^{h_j} + \sum_{i=h_j+1}^{\infty} a_i^{(j)} U^i, \ \ 1 \leq j \leq n$$

olacak şekilde seçebiliriz, öyle ki $0 \leq h_1 < ... < h_n$ ve $h_{i+1} = \max\{k \in \mathbb{Z} : U^k, N$ nin her elemanını böler$\}$ dir. Bu nedenle, $h_1, ..., h_n$ dizisi N için bir değişmezdir.

Tanım 1.36. *Yukarıdaki şekilde belirlenen U^{h_j}, $1 \leq j \leq n$, elemanlarına N nin Hermityen değişmezleri ve $Z_j = U^{h_j} + \sum_{i=h_j+1}^{\infty} a_i^{(j)} U^i, 0 \leq j < n$ ile verilen tabana ise N nin F üzerinden Hermityen tabanı denir.*

Önerme 1.37. *$\{Z_1, ..., Z_n\}$, N/K nın Hermityen tabanı ve $0 < h_1 < ... < h_n$ ise*

(a) $det(D^{(h_i)}(Z_j)) \equiv 1(\mathrm{mod}\, U)$ *dur.*

(b) $0 \leq v_1 < ... < v_n$ *öyle ki uygun* $1 \leq r \leq n$ *için,* $v_j - h_j = 0$, $1 \leq j \leq r-1$, *ve* $v_r - h_r < 0$ *ise,* $det(D^{(v_i)}(Z_j)) \equiv 0(\mathrm{mod}\, U)$ *dur.*

İspat. (a) $det(D^{(h_i)}(Z_j)) \equiv det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} (\mathrm{mod}\, U) \equiv 1(\mathrm{mod}\, U)$ dur.

(b) Z_j tanımından $D^{(v_j)}(Z_j) \equiv 0(\mathrm{mod}\, U)$ olduğundan

$$det(D^{(v_i)}(Z_j)) \equiv det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 \end{bmatrix} (\mathrm{mod}\, U) \equiv 0(\mathrm{mod}\, U)$$

elde edilir. ∎

Teorem 1.38. *$y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonlarına karşılık gelen kuvvet serileri $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, yani $T(y_i) = Y_i, i = 1, ..., n$ olsun. Wronskian determinant $W_D(y_1, y_2, ..., y_n)$ nin mertebeleri $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ tarafından F üzerinde üretilen uzay, N nin Hermityen değişmezleridir. Üstelik, $\{Z_1, ..., Z_n\}$, N nin Hermityen tabanı ise, $Y_i = W_D(y_1, y_2, ..., y_n)Z_i$, $i = 1, ..., n$ dir.*

İspat için Salvador (2006) dan yararlanılabilir.

2. CEBİRSEL FONKSİYON CİSMİ KULELERİ

Bu bölümde, fonksiyon cismi kuleleri ile ilgili kavramlar ve genel özelliklerinden bahsedeceğiz. q bir asal sayının kuvveti olmak üzere, $\mathbb{F}_q$ sonlu cismi üzerinde F cebirsel fonksiyon cisimlerini alacağız ve $F/\mathbb{F}_q$ genişlemesinin rasyonel nokta sayısını ise $N = N_q(F)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1. *q bir asal sayının kuvveti olmak üzere q elemanlı sonlu cisim $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir fonksiyon cismi dizisi $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, \ldots)$ olsun. Bu durumda,*

(a) $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \ldots$.

(b) Her $n \geq 1$ için F_{n+1}/F_n sonlu, ayrılabilir bir genişlemedir.

(c) $n \to \infty$, $g_{F_n} \to \infty$ dur.

koşulları sağlanıyor ise $\mathcal{F}$ ye $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir cebirsel fonksiyon cismi kulesi denir.

Burada $F_0 = \mathbb{F}_q$, her $i \geq 1$ için F_i nin tüm sabitler cismidir.

Lemma 2.2. *$\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots)$, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir cebirsel fonksiyon cismi kulesi olmak üzere,*

(a) F_i cisminin derecesi 1 olan nokta sayısı $N_q(F_i)$ ise $(N_q(F_i) / [F_i : F_1])_{i \geq 1}$ rasyonel sayılar dizisi monoton azalandır ve bu dizi $\mathbb{R}^{\geq 0}$ da yakınsaktır.

(b) $((g_{F_i} - 1) / [F_i : F_1])_{i \geq 1}$ rasyonel sayılar dizisi monoton artandır ve bu dizi $\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{0\}$ da yakınsaktır. Burada g_{F_i}, $F_i/\mathbb{F}_q$ nun cinsidir.

(c) $j \geq 1$ için $g_{F_j} \geq 2$ olsun. $(N_q(F_i) / (g_{F_i} - 1))_{i \geq j}$ dizisi monoton azalandır ve bu dizi $\mathbb{R}^{\geq 0}$ da yakınsaktır.

İspat. (a) Q, F_{i+1} cisminin bir rasyonel noktası ise $P = Q \cap F_i$ noktası da F_i cisminin bir rasyonel noktasıdır. Aksine, F_{i+1} cisminde en fazla $[F_{i+1} : F_i]$ tane rasyonel nokta F_i cismindeki noktaların genişlemeleridir. $N_q(F_{i+1}) \leq [F_{i+1} : F_i] . N_q(F_i)$ dir ve böylece

$$\frac{N_q(F_{i+1})}{[F_{i+1} : F_1]} \leq \frac{[F_{i+1} : F_i] . N_q(F_i)}{[F_{i+1} : F_1]} = \frac{N_q(F_i)}{[F_i : F_1]}$$

eşitsizliği elde edilir.

(b) Hurwitz-cins formülünden F_{i+1}/F_i cebirsel fonksiyon cismi genişlemesi için $g_{F_{i+1}} - 1 \geq [F_{i+1} : F_i] (g_{F_i} - 1)$ eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafını $[F_{i+1} : F_1]$ sayısına bölünürse,

$$\frac{g_{F_i} - 1}{[F_i : F_1]} \leq \frac{g_{F_{i+1}} - 1}{[F_{i+1} : F_1]}$$

elde edilir.

(c) (a) ve (b) şıkların ispatına benzer şekilde gösterilir. ∎

Tanım 2.3. *$\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots)$, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir fonksiyon cismi kulesi olsun.*

(a) $\lim_{i\to\infty} N_q(F_i) / [F_i : F_1]$ *değerine $\mathcal{F}$ fonksiyon cismi kulesinin F_1 cismi üzerinden parçalanış oranı denir ve $v(\mathcal{F}/F_1)$ ile gösterilir.*

(b) $\lim_{i\to\infty} g_{F_i} / [F_i : F_1]$ *değerine $\mathcal{F}$ fonksiyon cismi kulesinin F_1 cismi üzerinden cinsi denir ve $\gamma(\mathcal{F}/F_1)$ ile gösterilir.*

(c) $\lim_{i\to\infty} N_q(F_i) / g_{F_i}$ *değerine $\mathcal{F}$ fonksiyon cismi kulesinin limiti denir ve $\lambda(\mathcal{F})$ ile gösterilir.*

$\Lambda(q) := \limsup_{g\to\infty} N_q(F) / g_F$ tanımından,

$$\begin{aligned} 0 &\leq v(\mathcal{F}/F_1) < \infty, \\ 0 &< \gamma(\mathcal{F}/F_1) \leq \infty, \\ 0 &\leq \lambda(\mathcal{F}) \leq \Lambda(q) \end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca, $\lambda(\mathcal{F}) = \frac{v(\mathcal{F}/F_1)}{\gamma(\mathcal{F}/F_1)}$ dir, $\gamma(\mathcal{F}/F_1) = \infty$ ise $\lambda(\mathcal{F}) = 0$ dır.

Tanım 2.4. *$\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots)$ ve $\mathcal{E} = (E_1, E_2, \ldots)$, $\mathbb{F}_q$ üzerinde birer fonksiyon cismi kuleleri olsun. Her $i \geq 1$ için öyle bir $j = j(i)$ indeksi varsa ve $\varphi_i : E_i \to F_j$, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir gömme dönüşümü oluyor ise $\mathcal{E}$ ye $\mathcal{F}$ nin bir altkulesi denir.*

$\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ nin bir altkulesi olsun. $\lambda(\mathcal{E}) \geq \lambda(\mathcal{F})$ dir.

Tanım 2.5. *$\mathbb{F}_q$ üzerindeki bir$\mathcal{F}$ fonksiyon cismi kulesine,*

(a) $\lambda(\mathcal{F}) > 0$ *ise asimptotik iyi,*

(b) $\lambda(\mathcal{F}) = 0$ *ise asimptotik kötü,*

(c) $\lambda(\mathcal{F}) = \Lambda(q)$ *ise asimptotik optimal denir.*

$\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ nin bir altkulesi olmak üzere kolayca görülebilir ki,

(a) $\mathcal{F}$, asimptotik iyi ise $\mathcal{E}$ de asimptotik iyidir.

(b) $\mathcal{E}$, asimptotik kötü ise $\mathcal{F}$ de asimptotik kötüdür.

Tanım 2.6. *$f(Y) \in \mathbb{F}_q(Y)$ ve $h(X) \in \mathbb{F}_q(X)$ sabitten farklı rasyonel fonksiyonlar ve $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \ldots)$ fonksiyon cismi dizisi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $i = 1, 2, \ldots$ için $x_i \in F_i$ nin varlığını kabul edelim.*

(a) x_1, *$\mathbb{F}_q$ üzerinde aşkın elemandır ve $F_1 = \mathbb{F}_q(x_1)$ dir.*

(b) Her $i \geq 1$ için $F_i = \mathbb{F}_q(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ dir.

(c) Her $i \geq 1$ için x_{i+1}, x_i elemanları $f(x_{i+1}) = h(x_i)$ eşitliğini sağlar.

(d) $[F_2 : F_1] = \operatorname{der} f(Y)$ dir.

Bu durumda, $\mathcal{F}$ fonksiyon cismi kulesine $\mathbb{F}_q$ üzerinde $f(Y) = h(X)$ eşitliği ile tekrarlı tanımlı fonksiyon cismi kulesi veya kısaca (f, g) −kule denir. $f(y) = g(x)$ eşitliği ile $F := \mathbb{F}_q(x, y)$ ye ise karşılık gelen basit fonksiyon cismi denir.

2.1. Kummer Tipli Kuleler

$\mathcal{F}$, $\mathbb{F}_q$ üzerinde $F = \mathbb{F}_q(x, y)$ basit fonksiyon cismi ile verilen bir (f, g) −kulesi olsun. $(m, q) = 1$, dereceleri m olan $F/\mathbb{F}_q(x)$ ve $F/\mathbb{F}_q(y)$ Galois genişlemelerinin oluşturduğu $\mathcal{F}$ ye Kummer tipli kule denir.

Lemma 2.7. *$\mathbb{F}_q(u) \supseteq \mathbb{F}_q(z)$, $m \mid (q-1)$ iken $[\mathbb{F}_q(u) : \mathbb{F}_q(z)] = m > 1$ dereceli rasyonel fonksiyon cisimlerinin bir genişlemesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ bir Galois genişlemesidir ve $\mathbb{F}_q(z)$ rasyonel fonksiyon cisminin $\mathbb{F}_q(u)$ da tümden dallanan bir rasyonel noktası vardır.

(b) $\mathbb{F}_q(z)$ nin en az iki noktası $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ genişlemesinde tümden dallanmıştır.

(c) Öyle bir $\tilde{u} \in \mathbb{F}_q(u)$ elemanı vardır ki $\mathbb{F}_q(\tilde{u}) = \mathbb{F}_q(u)$ ve $\tilde{u}^m \in \mathbb{F}_q(z)$ dir.

Bu koşullardan biri veya hepsi gerçekleşirse, $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ nin Galois grubu devirlidir, $\mathbb{F}_q(z)$ nin tam iki rasyonel noktası tümden dallanmıştır ve $\mathbb{F}_q(z)$ nin diğer tüm noktaları $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ genişlemesinde dallanmamıştır.

İspat. $(a) \Rightarrow (b)$: P, $\mathbb{F}_q(z)$ nin $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ de tümden dallanmış bir rasyonel noktası olsun. $P_1, \ldots, P_r$, $\mathbb{F}_q(z)$ nin $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ de dallanan diğer noktaları ve $j = 1, \ldots, r$ için e_j, P_j noktasının $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ de dallanma indeksi olsun. $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ uysal (tame) genişleme olduğundan Hurwitz-cins formülünden

$$-2 = -2m + (m-1) + \sum_{j=1}^{r} \frac{m}{e_j}(e_j - 1) \operatorname{der} P_j$$

ve buradan

$$\sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{e_j}\right) \operatorname{der} P_j = 1 - \frac{1}{m}$$

elde edilir. $1/e_j \leq 1/2$ olduğundan

$$1 > 1 - \frac{1}{m} \geq \sum_{j=1}^{r} \frac{\operatorname{der} P_j}{2}$$

dir. Böylece, $r = \operatorname{der} P_1 = 1$ ve $e_1 = m$ olduğu görülür. Bu ise $\mathbb{F}_q(z)$ nin en az iki noktasının $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ genişlemesinde tümden dallanmış olduğunu gösterir.

$(b) \Rightarrow (c)$: P_1, Q_1 $\mathbb{F}_q(z)$ nin $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ nin tümden dallanmış noktaları ve $P, Q \in \mathbb{F}_q(u)$ için $P \mid P_1$, $Q \mid Q_1$ olsun. Hurwitz-cins formülünden P_1 ve Q_1 noktaları rasyonel noktalardır, rasyonel fonksiyon cisminde derecesi sıfır olan bir bölen esas bölen olduğundan $(\tilde{u})_{\mathbb{F}_q(u)} = P - Q$ ve $(\tilde{z})_{\mathbb{F}_q(z)} = P_1 - Q_1$ olacak şekilde $\tilde{u} \in \mathbb{F}_q(u)$ ve $\tilde{z} \in \mathbb{F}_q(z)$ vardır. $(\tilde{u}^m)_{\mathbb{F}_q(u)} = mP - mQ = (\tilde{z})_{\mathbb{F}_q(u)}$ ve $0 \neq c \in \mathbb{F}_q$ için $\tilde{u}^m = c.\tilde{z}$ dir. $\tilde{u}$ elemanının kutup böleninin derecesi bir olduğundan $\tilde{u}$ elemanı $\mathbb{F}_q(u)$ fonksiyon cismini üretir. Bu ise $\mathbb{F}_q(\tilde{u}) = \mathbb{F}_q(u)$ ve $\tilde{u}^m \in \mathbb{F}_q(z)$ özelliklerini sağlayan $\tilde{u} \in \mathbb{F}_q(u)$ nun varlığını gösterir.

$(c) \Rightarrow (a)$: $\mathbb{F}_q$ cisminin birimin $m-$inci kökünü içerdiğini kabul edelim. Bu durumda, $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ nin otomorfizmleri $\zeta^m = 1$ için $\sigma(\tilde{u}) = \zeta.\tilde{u}$ ile verilir. $\tilde{u}$ nın sıfırı olan nokta $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ de tümden dallanmıştır. ∎

Teorem 2.8. *$\mathcal{F}$, $\mathbb{F}_q$ üzerinde $F = \mathbb{F}_q(x,y)$ basit fonksiyon cismi ile verilen bir (f_1, g_1) kule olsun. Eğer*

(a) der $f_1(T) =$ der $g_1(T) = m$ *ve* m, $q-1$ *sayısını böler.*

(b) $\mathbb{F}_q(x)/\mathbb{F}_q(g_1(x))$ *ve* $\mathbb{F}_q(x)/\mathbb{F}_q(f_1(x))$ *genişlemelerinin her ikisi de Lemma 2.7.'yi sağlar.*

koşulları sağlanırsa, $\mathcal{F}$, $f(T) = T^m$ ile bir $f-$kuledir. Özel olarak, $a, b, c, d, \gamma \in \mathbb{F}_q$, $\gamma \neq 1$ ve $ad \neq bc$ olmak üzere $Y^m = \frac{a(X+1)^m + b(X+\gamma)^m}{c(X+1)^m + d(X+\gamma)^m}$ eşitliği ile tekrarlı tanımlanabilir.

İspat. Beelen vd (2006). ∎

2.2. Artin-Schreier Tipli Kuleler

Bu bölümde, $p = kar(\mathbb{F}_q)$ ve ℓ, p nin bir kuvveti olmak üzere, $0 \neq a \in \mathbb{F}_q$ ve $g(X) \in \mathbb{F}_q(X)$ ile $Y^\ell + aY = g(X)$ formunda tekrarlı tanımlı kuleler ile ilgileneceğiz. $a_i \in \mathbb{F}_q$ ve $a_r = 1$ ile $\wp(T) = \sum_{i=0}^{r} a_i T^{p^i}$ formundaki $\wp(T) \in \mathbb{F}_q[T]$ monik polinomuna $\mathbb{F}_q$ üzerinde toplamsal polinom denir. Bu polinomun çarpanlarına ayrılabilmesi için gerek ve yeter koşul $a_0 \neq 0$ olmasıdır. Bu şekilde oluşturulan kulelere Artin-Schreier tipli kuleler denir.

Lemma 2.9. *$\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ derecesi p^r olan bir rasyonel fonksiyon cismi genişlemesi, $p = kar(\mathbb{F}_q)$ ve $r \geq 1$ olsun. Bu durumda,*

(a) $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ *bir Galois genişlemesidir.*

(b) Öyle bir $\tilde{u} \in \mathbb{F}_q(u)$ ve $\wp(T) \in \mathbb{F}_q[T]$ ayrılabilir polinomu vardır ki, $\mathbb{F}_q(u) = \mathbb{F}_q(\tilde{u})$, der $\wp(T) = p^r$ *olmak üzere $\wp(\tilde{u}) \in \mathbb{F}_q(z)$, $\wp(T)$ nin tüm kökleri $\mathbb{F}_q$ içindedir.*

Bu koşullardan biri gerçekleşirse, $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ nin Galois grubu, tipi $(p, \ldots, p)$ olan elemanter abelyen gruptur. $\mathbb{F}_q(z)$ nin tam bir noktası $\mathbb{F}_q(u)/\mathbb{F}_q(z)$ de tümden dallan-

mıştır ve $\mathbb{F}_q(z)$ nin diğer tüm noktaları $\mathbb{F}_q(u)$ da dallanmamıştır. Üstelik, $\mathbb{F}_q(z)$ deki (b) koşulunu sağlayan $\tilde{u}$ elemanının indirgenemez polinomu, $w \in \mathbb{F}_q(z)$ ve $\mathbb{F}_q(z) = \mathbb{F}_q(w)$ iken $h(T) := \wp(T) - w$ dur.

İspat. Beelen vd (2006). ∎

Teorem 2.10. *$p = kar(\mathbb{F}_q)$, $\deg f(T) = \deg g(T) = p$ olmak üzere $\mathcal{F}$, $\mathbb{F}_q$ üzerinde $f(Y) = g(X)$ ile verilen tekrarlı tanımlı kule, $F = \mathbb{F}_q(x, y)$ basit fonksiyon cismi olsun. $F/\mathbb{F}_q(x)$ ve $F/\mathbb{F}_q(y)$, Galois genişlemeleri olmak üzere, $0 \neq e \in \mathbb{F}_q$ ve $\wp(T) = T^p - e^{p-1}T \in \mathbb{F}_q[T]$ olsun. Böylece, $\mathcal{F}$ bir $\wp-$kuledir ve a, b, c, $\alpha \in \mathbb{F}_q$, $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$ için $\mathcal{F}$ kulesi,*

$$\wp(Y) = \begin{cases} \frac{a}{\wp(\alpha X)+b} + c & 1.\ Durum \\ a.\wp\left(\frac{\alpha}{X}\right) + b & 2.\ Durum \\ \frac{a}{\wp(\alpha/X)+b} + c & 3.\ Durum \end{cases}$$

tekrarlı tanımlı durumlarından birini sağlar.

İspat. Beelen vd (2006). ∎

Şimdi Teorem 2.10.'un uygulaması olarak $\mathbb{F}_2$ üzerinde $\deg f = \deg g = 2$ olan bütün $(f, g)-$kulelerini yazalım:

$b, c \in \mathbb{F}_2$ iken $Y^2 + Y = \frac{1}{\left(\frac{1}{X}\right)^2 + \left(\frac{1}{X}\right) + b} + c$ tekrarlı tanımlı kuledir. Burada $b = c = 0$ ise $Y^2 + Y = \frac{1}{\left(\frac{1}{X}\right)^2 + \left(\frac{1}{X}\right)} = \frac{X^2}{X+1}$ elde edilir. Bu ise, $\mathcal{F}_5$ kule örneğinde $q = 2$ durumudur ve $\mathbb{F}_4$ üzerinde Drinfeld-Vladut sınırını sağlar.

$b = 0$, $c = 1$ durumunda eşitlik $Y^2 + Y = (X^2 + X + 1)/(X + 1)$ e dönüşür. $\tilde{X} = X + 1$ ve $\tilde{Y} = Y + 1$ dönüşümü ile $\tilde{Y}^2 + \tilde{Y} = \tilde{X} + 1 + \frac{1}{\tilde{X}}$ elde edilir. Bu eşitlik ile elde edilen kule $\mathbb{F}_8$ üzerinde asimptotik iyidir.

Benzer şekilde, $b = 1$, $c = 0$ için $Y^2 + Y = \frac{X^2}{X^2+X+1}$ elde edilir. Bu kule ise bir önceki kulenin dual kulesidir ve $\mathbb{F}_8$ üzerinde asimptotik iyidir.

Son olarak, $b = c = 1$ için $Y^2 + Y = \frac{X+1}{X^2+X+1}$ eşitliği $\tilde{X} = X + 1$ ve $\tilde{Y} = Y + 1$ dönüşümü ile $\tilde{Y}^2 + \tilde{Y} = \frac{\tilde{X}}{\tilde{X}^2+\tilde{X}+1}$ e dönüşür. Bu eşitlik literatürde daha incelenmemiştir.

2.3. Tekrarlı Tanımlı Fonksiyon Cismi Kule Örnekleri

Bu bölümde tekrarlı tanımlı kule örnekleri vereceğiz. Bu örnekler ile ilgili ayrıntılı bilgi için referans olarak Garcia ve Stichtenoth (1996), Pellikaan vd (1998), Beelen vd (2006), Garcia ve Stichtenoth (1995), Noseda vd (2012), Bassa vd (2008) ve Maharaj (2004) kaynakları önerilebilir.

Örnek 2.11. (Garcia ve Stichtenoth 2009) *$q = l^2$ olsun. $Y^l - Y = X^l / \left(1 - X^{l-1}\right)$ eşitliği, $\mathbb{F}_q$ üzerinde tekrarlı tanımlı $\mathcal{G} = (G_1, G_2, G_3, \ldots)$ kulesini tanımlar ve $\mathcal{G}$ kulesinin limiti $\lambda(\mathcal{G}) = l - 1 = q^{1/2} - 1$ dir. Böylece $\mathcal{G}$, asimptotik optimal kule örneğidir.*

Örnek 2.12. (Garcia ve Stichtenoth 2003) *$m \geq 2$, $(m, q) = 1$ ve $a, b, c \in \mathbb{F}_q \backslash \{0\}$ olsun.*

$$Y^m = a(X + b)^m + c$$

eşitliği $\mathbb{F}_q$ üzerinde tekrarlı tanımlı $\mathcal{F}_1 = (F_1, F_2, F_3, \ldots)$ fonksiyon cismi kulesini tanımlar. Bu fonksiyon cismi kulesine Fermat tipli kule denir. Her $i \geq 1$ için $\mathbb{F}_q$ sonlu cismi F_i de cebirsel kapalıdır ve $[F_{i+1} : F_i] = m$ dir.

$r \geq 2$ için $q = l^r$ olsun. $a, c \in \mathbb{F}_l^*$ ve $b \in \mathbb{F}_q^*$ iken $y^{(q-1)/(l-1)} = a(x + b)^{(q-1)(l-1)} + c$ eşitliği, $\mathbb{F}_q$ üzerinde Fermat tipli asimptotik iyi $\mathcal{F}$ kulesini verir ve bu kulenin limiti, $\lambda(\mathcal{F}) \geq \frac{2}{q-2}$ dir.

$r \geq 1$ için $q = l^r$ olsun. $r \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ veya $l \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ olduğunu kabul edelim. $b \in \mathbb{F}_l^*$ iken $y^{l-1} = -(x + b)^{l-1} + 1$ eşitliği de $\mathbb{F}_q$ üzerinde Fermat tipli $\mathcal{F}$ kulesini verir ve bu kulenin limiti, $\lambda(\mathcal{F}) \geq \frac{2}{l-2}$ dir.

p asal sayısı için $p \equiv 3{,}5$ veya $6 (\operatorname{mod} 7)$ ve $r \geq 1$ iken $q = p^r$ olmak üzere, $y^{p+1} = (x + 1)^{p+1} - 2$ eşitliği $\mathbb{F}_q$ üzerinde Fermat tipli $\mathcal{F}$ kulesini verir. $r \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ ise $\mathcal{F}$ kulesi, $\mathbb{F}_q$ üzerinde asimptotik iyidir.

q, m, a, b ve c nin seçimine bağlı olarak farklı özelliklere sahip asimptotik iyi ve asimptotik kötü tekrarlı tanımlı kule örnekleri elde edilir. $\mathbb{F}_4$ üzerindeki $Y^3 = (X + 1)^3 + 1$ ve $\mathbb{F}_9$ üzerindeki $Y^2 = -(X + 1)^2 + 1$ Fermat tipli kule örnekleri asimptotik iyidir ve $\lambda(\mathcal{F}) = q^{1/2} - 1$ Drinfeld-Vladut sınırını sağlar.

Örnek 2.13. *$\varphi(x) \in \mathbb{F}_q(x)$ için $y^2 = \varphi(x)$, $\mathbb{F}_q$ üzerinde tekrarlı tanımlı $\mathcal{T} = (T_1, \ldots)$ fonksiyon cismi kulesini tanımlar. Bu fonksiyon cismi kulesine kuadratik genişleme kulesi denir. Herhangi bir $q = p^2 \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$ asal kuvveti için $\mathbb{F}_q$ üzerinde*

$$Y^2 = \frac{X^2 + 1}{2X}$$

eşitliği ile tanımlanan $\mathcal{F}_2$, asimptotik iyi bir kuledir. p tek asal sayı olmak üzere $\mathbb{F}_{p^2}$ sonlu cismi üzerindeki $\mathcal{F}_2$ kulesi Drinfeld-Vladut sınırı olan $\lambda(\mathcal{F}_2) = p - 1$ eşitliğini sağlar. $\mathcal{F}_2$ kuadratik kulesini ve Weierstrass semigrubunu "Bulgular" bölümünde daha ayrıntılı biçimde inceleyeceğiz.

Örnek 2.14. (Elkies 1997 ve Wulftange 2003) *$(m, q) = 1$ olan q ve m değerleri için*

$$Y^m = 1 - \left(\frac{X}{X - 1}\right)^m$$

eşitliği $\mathbb{F}_q$ sonlu cismi üzerinde $\mathcal{F}_3 = (F_1, F_2, F_3, \ldots)$, asimptotik iyi bir kuledir. $\mathcal{F}_3$, kuledeki üçüncü cisim olan F_3 üzerinde dallanmamıştır.

Örnek 2.15. (Elkies 1997) *$p \neq 5$ bir asal sayı ve $f(T) = T^5 + 5T^3 - 5T - 11 \in \mathbb{F}_p[T]$ olsun.*

$$f(Y) = \frac{125}{f\left(\frac{X+4}{X-1}\right)}$$

eşitliği, $\mathbb{F}_{p^2}$ üzerinde $\lambda(\mathcal{F}_4) = p - 1$ Drinfeld-Vladut sınır eşitliğini sağlayan $\mathcal{F}_4$ kulesini tanımlar.

Örnek 2.16. (Garcia ve Stichtenoth 1996) *Herhangi bir q asal kuvveti için*

$$Y^q + Y = \frac{X^q}{X^{q-1} + 1}$$

eşitliği, $\mathbb{F}_{q^2}$ üzerinde asimptotik iyi $\mathcal{F}_5$ kulesini tanımlar ve bu kulenin limiti Drinfeld-Vladut sınır eşitliğini sağlar.

Örnek 2.17. (van der Geer ve van der Vlugt 2002) *$Y^2 + Y = X + 1 + \frac{1}{X}$ eşitliği, $\mathbb{F}_8$ üzerinde asimptotik iyi olan $\mathcal{F}_6$ kulesini tanımlar ve bu kulenin limiti $\lambda(\mathcal{F}_6) = 3/2$ dir.*

Örnek 2.18. (Bezerra ve Garcia 2004) *$\frac{Y-1}{Y^q} = \frac{X^q-1}{X}$ eşitliği, $\mathbb{F}_{q^2}$ üzerinde Drinfeld-Vladut sınır eşitliğini sağlayan $\mathcal{F}_7$ kulesi olarak tanımlanır. $q > 2$ için $F = \mathbb{F}_{q^2}(x, y)$ basit fonksiyon cismi, $F/\mathbb{F}_{q^2}(x)$ ve $F/\mathbb{F}_{q^2}(y)$, Galois olmayan genişlemelerdir.*

Örnek 2.19. (Bezerra vd 2003) *$\frac{1-Y}{Y^q} = \frac{X^q+X-1}{X}$ eşitliği, $\mathbb{F}_{q^3}$ üzerinde limiti $\lambda(\mathcal{F}_8) \geq \frac{2(q^2-1)}{q+2}$ olan Zink sınır eşitliğini sağlayan asimptotik iyi $\mathcal{F}_8$ kulesi olarak tanımlanır. $q > 2$ için $F = \mathbb{F}_{q^3}(x, y)$ basit fonksiyon cismi, $F/\mathbb{F}_{q^3}(x)$ ve $F/\mathbb{F}_{q^3}(y)$, Galois olmayan genişlemelerdir.*

Tanım 2.20. *$\mathbb{F}_q$ üzerinde (f, g) eşitliği ile verilen bir $\mathcal{F}$ kulesi için tekrarlamalı $g(Y) = f(X)$ eşitliği ile verilen $\mathcal{G}$ kulesine, $\mathcal{F}$ kulesinin duali denir.*

Örnek 2.21. *$\mathbb{F}_8$ üzerinde $Y^2 + Y = X + 1 + \frac{1}{X}$ eşitliği ile verilen $\mathcal{F}_6$ kulesinin duali $Y + 1 + \frac{1}{Y} = X^2 + X$ ile verilen $\mathcal{F}_6^*$ kulesidir.*

$\mathcal{F}$ kulesinin ve dualinin $\lambda(\mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{G})$ limitleri aynı olduğu açıktır.

3. BULGULAR

Bu bölümde özellikle iki tip tekrarlı tanımlı fonksiyon cismi kulesi ve bir P noktasındaki Weierstrass semigrubu inceleyeceğiz.

3.1. Garcia-Stichtenoth Kulesi ve Weierstrass Semigrup $H(P_\infty)$

$\mathcal{F}_5 = (F_1, F_2, \ldots)$, q bir asal sayının kuvveti olmak üzere $\mathbb{F}_{q^2}$ üzerinde $F_n := \mathbb{F}_{q^2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $i = 1, ..., n-1$ için

$$x_{i+1}^q + x_{i+1} = \frac{x_i^q}{x_i^{q-1} + 1}$$

eşitliği ile verilen tekrarlı tanımlı fonksiyon cismi kulesi olmak üzere,

$$G := \{\alpha \in \mathbb{F}_{q^2} \mid \alpha^q + \alpha = 0\} \text{ ve } G^* := G \backslash \{0\} = \left\{\alpha \in \mathbb{F}_{q^2} \mid \alpha^{q-1} = -1\right\}$$

olarak tanımlansın. Söz konusu kule Garcia-Stichtenoth kulesi olarak bilinir.

Lemma 3.1. $\mathcal{F}_5 = (F_1, F_2, \ldots)$ *kulesinde,*

(a) $i = 1, ..., n$ *için* $[F_n : \mathbb{F}_{q^2}(x_i)] = q^{n-1}$ *dir.*

(b) $P \in \mathbb{P}_{F_n}$, x_1 *in kutbu veya* $\alpha \in G^*$, $x_1 - \alpha$ *nın sıfırı ise* P *noktası* $x_2, ..., x_n$ *nin de kutbudur.* P, F_n/F_{n-1} *genişlemesinde tümden dallanmıştır ve* $F_n/\mathbb{F}_{q^2}(x_n)$ *genişlemesinde ise dallanmamıştır.* P *noktasının* F_n/F_{n-1} *genişlemesindeki different katsayısı,* $d(P) = 2(q-1)$ *dir.*

(c) $R \in \mathbb{P}_{F_n}$, x_1 *in kutbu ve* $\alpha \in G$, $x_1 - \alpha$ *nın sıfırlarından farklı bir noktası ise* R, F_n/F_1 *genişlemesinde dallanmamıştır.*

İspat. $P \in \mathbb{P}_{F_n}$, x_1 in kutbu veya $\alpha \in G^*$, $x_1 - \alpha$ nın sıfırı olsun. P nin F_1 deki kısıtlanışı P_1 ve $P_2 \in \mathbb{P}_{F_2}$, P_1 noktasının genişlemesi ise

$$\begin{aligned} v_{P_2}(x_2^q + x_2) &= v_{P_2}\left(\frac{x_1^q}{x_1^{q-1} + 1}\right) \\ &= e(P_2 \mid P_1)\, v_{P_1}\left(\frac{x_1^q}{x_1^{q-1} + 1}\right) \\ &= e(P_2 \mid P_1)(-1) \end{aligned}$$

dolayısıyla, $v_{P_2}(x_2) = -1$ ve $e(P_2 \mid P_1) = q$ elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse P noktası $x_2, ..., x_n$ nin de kutbu olur. Teorem 1.31.'de

$$\left(\frac{1}{x_1}\right)^q + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2^q + x_2}$$

eşitliği için $z = \frac{1}{x_2}$ alınırsa, $m_P = -1$ bulunur. Bu ise P noktasının $F_2/\mathbb{F}_{q^2}(x_2)$ de dallanmadığını gösterir. Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(a) $P \in \mathbb{P}_{F_n}$ noktasının F_n/F_1 deki dallanma indeksi q^{n-1} dir.

(b) $i = 1, ..., n$ için $[F_n : \mathbb{F}_{q^2}(x_i)] = q^{n-1}$ dir.

(c) $P \in \mathbb{P}_{F_n}$ noktası $\mathbb{F}_{q^2}(x_n)$ de dallanmamıştır.

F_n/F_{n-1} genişlemesinde P noktasının different katsayısı hesaplanırsa ispat tamamlanır.

$n = 2$ durumunda Genelleşmiş Artin-Schreier teoreminde (Stichtenoth (2009)) $z = \frac{1}{x_1}$ alındığında $m_P = 1$ ve $d(P) = 2(q-1)$ elde edilir. Tümevarım yöntemi uygulanarak P noktasının F_n/F_{n-1} genişlemesindeki different katsayısının $d(P) = 2(q-1)$ olduğu görülür.

$R \in \mathbb{P}_{F_n}$, x_1 elemanının kutbu ve $\alpha \in G$, $x_1 - \alpha$ nın sıfırlarından farklı bir nokta olsun. Aynı zamanda $i = 1, ..., n$ ve $\alpha \in G$ için R, x_i nin kutbundan ve $x_i - \alpha$ nın sıfırlarından da farklıdır. R noktasının $\mathbb{F}_{q^2}(x_i, x_{i+1})/\mathbb{F}_{q^2}(x_i)$ ve $\mathbb{F}_{q^2}(x_i, x_{i+1})/\mathbb{F}_{q^2}(x_{i+1})$ genişlemelerine kısıtlanışları da dallanmamıştır. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Her $n \geq 0$ için $Q \in \mathbb{P}_{F_n}$ noktası için yukarıdaki lemmada bahsedilenlerden başka durumlarda vardır. Tüm olası durumlar $Diff(F_n/F_{n-1})$ böleninin derecesini hesaplamak için dikkate alınmalıdır. Olası durumlar aşağıdaki gibidir.

(a) $Q, x_1, \ldots, x_n$ nin ortak sıfırıdır.

(b) $1 \leq t < n$ olacak şekilde t vardır ve Q, $x_1, \ldots, x_t$ nin ortak sıfırı, $\alpha \in G^*$, için $x_{t+1} - \alpha$ nın sıfırı ve $x_{t+2}, \ldots, x_n$ nin ortak kutbudur.

(a) durumunda Q noktası F_n/F_{n-1} de dallanmamıştır. (b) durumunda ise Q noktasının $t-1 \leq i \leq t+2$ için $\mathbb{F}_{q^2}(x_i, x_{i+1})/\mathbb{F}_{q^2}(x_i)$ ve $\mathbb{F}_{q^2}(x_i, x_{i+1})/\mathbb{F}_{q^2}(x_{i+1})$ de dallanma indeksleri aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.2. *$1 \leq k < t$ için, $E_k := \mathbb{F}_{q^2}(x_{t+1-k}, \ldots, x_{t+k})$, $H_k := E_k(x_{t+1+k})$ ve $Q \in \mathbb{P}_{H_k}$ noktasının uygun bir $\alpha \in G^*$ için $x_{t+1} - \alpha$ nın sıfırı olsun. Bu durumda, Q noktası H_k/E_k genişlemesinde dallanmamıştır.*

İspat. Bu lemmanın ispatının uzun olması nedeniyle ispat için Garcia ve Stichtenoth (1996) incelenmesi önerilir. ∎

Lemma 3.3. *$1 \leq t < n$ ve $Q \in \mathbb{P}_{F_n}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir nokta olsun.*

(i) Q, $x_1, x_2, \ldots, x_t$ elemanlarının ortak sıfırı,

(ii) Uygun bir $\alpha \in G^*$ için Q, $x_{t+1} - \alpha$ elemanının sıfırı,

(iii) Q, $x_{t+2}, \ldots, x_n$ elemanlarının ortak kutbudur.

Bu durumda,

(a) $n \leq 2t+1$ *ise* Q, F_n/F_{n-1} *genişlemesinde dallanmamıştır.*

(b) $2t+1 < n$ *ise* Q, F_n/F_{2t+1} *genişlemesinde tümden dallanmıştır.*

(c) $2t+1 < n$ *ise* Q *noktasının* F_n/F_{n-1} *deki different katsayısı* $d(Q) = 2(q-1)$ *dir.*

İspat. Lemma 3.1. ve Lemma 3.2.'nin sonucudur. ∎

Lemma 3.4. $1 \leq t < \frac{n-1}{2}$ *ve* $\alpha \in G^*$ *için* $X_{t,\alpha} := \{Q \in \mathbb{P}_{F_n} : Q,\ x_{t+1} - \alpha$ *nın sıfırı*$\}$ *ve* $A_{t,\alpha} := \sum_{Q \in X_{t,\alpha}} Q$ *olsun. Bu durumda,*

(a) der $A_{t,\alpha} = q^t$ *dir.*

(b) $n \geq 2$ *için* der $Diff\left(F_n/F_{n-1}\right) = 2(q-1)\,q^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ *dir.*

İspat. (a) $A_{t,\alpha}$ ve bir bölenin derecesi tanımından doğrudan elde edilir.

(b)

$$\begin{aligned}
\text{der}\, Diff\left(F_n/F_{n-1}\right) &= \sum_{P_{n-1} \in \mathbb{P}_{F_{n-1}}} \sum_{P_n | P_{n-1}} d\left(P_n \mid P_{n-1}\right) \text{der}\, P_n \\
&= 2q(q-1) + \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \sum_{\alpha \in \Omega^*} q^t 2(q-1) \\
&= 2q(q-1) + 2(q-1) \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} q^t \\
&= 2q(q-1)\left(1 + \left(q^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} - 1\right)\right) \\
&= 2(q-1)\,q^{\left[\frac{n}{2}\right]}
\end{aligned}$$

∎

Teorem 3.5. $g_{F_n} = \begin{cases} \left(q^{\frac{n}{2}} - 1\right)^2, & n \equiv 0 (\text{mod}\, 2), \\ \left(q^{\frac{n+1}{2}} - 1\right)\left(q^{\frac{n-1}{2}} - 1\right), & n \equiv 1 (\text{mod}\, 2). \end{cases}$

İspat. n üzerinden tümevarım yöntemini uygulayalım. F_1, rasyonel fonksiyon cismi olduğundan $g_{F_1} = 0$ dır. $n = 2$ için

$$g_{F_2} = [F_2 : F_1]\left(g_{F_1} - 1\right) + q(q-1) + 1 = (q-1)^2$$

Şimdi $n \equiv 0(\text{mod}\, 2)$ ve $n \equiv 1(\text{mod}\, 2)$ durumlarını inceleyelim.

(i) $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)$ için $g_{F_n} = \left(q^{\frac{n}{2}} - 1\right)^2$ eşitliği doğru olsun. Bu durumda, $n+1 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$ dir.

$$\begin{aligned}
g_{F_{n+1}} &= [F_{n+1} : F_n]\,(g_{F_n} - 1) + q^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(q-1) + 1 \\
&= q\left(\left(q^{\frac{n}{2}} - 1\right)^2 - 1\right) + q^{\frac{n}{2}}(q-1) + 1 \\
&= q^{n+1} - q^{\frac{n+2}{2}} - q^{\frac{n}{2}} + 1 \\
&= \left(q^{\frac{n+2}{2}} - 1\right)\left(q^{\frac{n}{2}} - 1\right)
\end{aligned}$$

(ii) $n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$ için $g_{F_n} = \left(q^{\frac{n+1}{2}} - 1\right)\left(q^{\frac{n-1}{2}} - 1\right)$ eşitliği doğru olsun.

$$\begin{aligned}
g_{F_{n+1}} &= [F_{n+1} : F_n]\,(g_{F_n} - 1) + q^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(q-1) + 1 \\
&= q\left(\left(q^{\frac{n+1}{2}} - 1\right)\left(q^{\frac{n-1}{2}} - 1\right) - 1\right) + q^{\frac{n+1}{2}}(q-1) + 1 \\
&= q^{n+1} - 2q^{\frac{n+1}{2}} + 1 \\
&= \left(q^{\frac{n+1}{2}} - 1\right)^2
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ∎

Önerme 3.6. *$\mathcal{F}_5 = (F_1, F_2, \ldots)$ ile verilen tekrarlı tanımlı cebirsel fonksiyon cismi kulesinde*

(a) Her $n \geq 2$ için F_n/F_{n-1}, derecesi q olan Galois genişlemesidir.

(b) x_1 in F_1 cismindeki kutbu F_n/F_1 cebirsel fonksiyon cismi genişlemesinde tümden dallanmıştır. Yani, P_∞^n, F_n cisminin derecesi 1 olan bir noktası iken $(x_1)_\infty^n = q^{n-1}P_\infty^n$ dir.

İspat. Lemma 3.1. kullanılarak doğrudan elde edilir. ∎

Tanım 3.7. *(a)* $n \geq 1$, $c_n = \begin{cases} q^n - q^{\frac{n}{2}}, & n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2) \\ q^n - q^{\frac{n+1}{2}}, & n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2) \end{cases}$ *olmak üzere, (c_n) tamsayı dizisi tanımlanır.*

(b) $S_1 = \mathbb{N}_0$, $n \geq 1$ için $S_{n+1} = q.S_n \cup \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \geq c_{n+1}\}$ semigrup dizisi tanımlanır.

Önerme 3.8. *S_n semigrubunun boşluklarının sayısı g_{F_n} sayısına eşittir.*

İspat. $\tilde{g}_n$, S_n semigrubunun boşluklarının sayısı olsun. $S \subseteq \mathbb{N}_0$ ve $c \in \mathbb{N}_0$ için $S(c) = \{x \in S \mid x \leq c\}$ kümesini tanımlayalım. $c_n - 1$, $n \geq 2$ için S_n semigrubunun en büyük boşluğudur. $c \geq c_n$ ise $\tilde{g}_n = \#(\mathbb{N}_0 \backslash S_n) = \#(\{0, 1, ..., c\} \backslash S_n(c))$ ve böylece, $\#S_n(c) = c + 1 - \tilde{g}_n$ dır. $n > 1$ ise $S_n = q.S_{n-1} \cup \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \geq c_n\}$ dir. n çift sayı ise $c_n = q^n - q^{\frac{n}{2}}$ ve $c_{n-1} = q^{n-1} - q^{\frac{n}{2}}$ dir. n tek sayı ise $c_n = q^n - q^{\frac{n+1}{2}}$ ve $c_{n-1} = q^{n-1} - q^{\frac{n-1}{2}}$ dir. Açıkça görülür ki, $c_{n-1} \leq \frac{c_n}{q}$ dir. $c_n \in q.S_{n-1}$ olduğundan $\#S_n(c_n) = \#S_{n-1}\left(\frac{c_n}{q}\right)$ dir.

$$c_n + 1 - \tilde{g}_n = \#S_n(c_n) = \#S_{n-1}\left(\frac{c_n}{q}\right) = \frac{c_n}{q} + 1 - \tilde{g}_{n-1}$$

dir. Böylece, $\tilde{g}_n = \frac{q-1}{q}c_n + \tilde{g}_{n-1}$ dir. Şimdi n üzerinden tümevarım uygulayalım.

$n = 1$ ise $S_1 = \mathbb{N}_0.\tilde{g}_1 = \frac{q-1}{q}(q-q) + \tilde{g}_0 = 0 = g_{F_1}$ dir. $n > 1$ için $\tilde{g}_{n-1} = g_{F_{n-1}}$ olsun. $\tilde{g}_n = \frac{q-1}{q}c_n + \tilde{g}_{n-1}$ olduğundan $\tilde{g}_n = \frac{q-1}{q}c_n + g_{F_{n-1}}$ dir. $n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ ise

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_n &= \frac{q-1}{q}\left(q^n - q^{\frac{n}{2}}\right) + \left(q^{\frac{n}{2}} - 1\right)\left(q^{\frac{n-2}{2}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{q}\left(q^{n+1} - q^{\frac{n+2}{2}} - q^n + q^{\frac{n}{2}} + q\left(q^{n-1} - q^{\frac{n}{2}} - q^{\frac{n-2}{2}} + 1\right)\right) \\
&= \frac{1}{q}\left(q^{n+1} - 2q^{\frac{n+2}{2}} + q\right) \\
&= q^n - 2q^{\frac{n}{2}} + 1 \\
&= \left(q^{\frac{n}{2}} - 1\right)^2 = g_{F_n}
\end{aligned}$$

$n \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$ ise

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_n &= \frac{q-1}{q}\left(q^n - q^{\frac{n+1}{2}}\right) + \left(q^{\frac{n-1}{2}} - 1\right)^2 \\
&= (q-1)\left(q^{n-1} - q^{\frac{n-1}{2}}\right) + \left(q^{\frac{n-1}{2}} - 1\right)^2 \\
&= q^n - q^{\frac{n+1}{2}} - q^{\frac{n-1}{2}} + 1 \\
&= \left(q^{\frac{n+1}{2}} - 1\right)\left(q^{\frac{n-1}{2}} - 1\right) = g_{F_n}
\end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Önerme 3.9. *Her $n \geq 1$ için F_n cebirsel fonksiyon cisminin*

(a) $A^n \geq 0$ *ve* der $A^n = c_n - g_{F_n}$.

(b) boy $\mathcal{L}\left(c_n.P_\infty^n - A^n\right) = 1$.

koşullarını sağlayan bir A^n böleni varsa, $H\left(P_\infty^n\right) = S_n$ dir.

İspat. n üzerinden tümevarım yapalım. $n = 1$ ise $A^1 \geq 0$, der $A^1 = c_1 - g_{F_1} = 0$,

$$\text{boy}\,\mathcal{L}\left(0.P_\infty^1 - A^1\right) = \text{boy}\,\mathcal{L}\left(-A^1\right) = 1 \Rightarrow A^1 = 0$$

dır. $H\left(P_\infty^1\right) = \left\{i \in \mathbb{N}_0 \mid (x)_\infty^1 = i.P_\infty^1\right\} = \mathbb{N}_0 = S_1$ dir. O halde, $n = 1$ için iddia doğrudur. $n > 1$ için $H\left(P_\infty^{n-1}\right) = S_{n-1}$ olsun. Kabülümüzden dolayı n için $A^n \geq 0$ ve der $A^n = c_n - g_{F_n}$, boy $\mathcal{L}(c_n P_\infty^n - A^n) = 1$ dir. $A \in \mathbb{D}_{F_n}$ için

$$\begin{aligned} i(c_n P_\infty^n - A^n) &= \text{boy}\,\mathcal{L}(c_n P_\infty^n - A^n) - \text{der}\,(c_n P_\infty^n - A^n) + g_{F_n} - 1 \\ &= 1 - g_{F_n} + g_{F_n} - 1 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $c_n P_\infty^n - A^n$, F_n cebirsel fonksiyon cisminin bir özel olmayan bölenidir. Herhangi bir $B \geq c_n P_\infty^n - A^n$ böleni için boy $\mathcal{L}(B) =$ der $B + 1 - g_{F_n}$ dir. Burada B de özel olmayan bir bölendir. Özel olarak, $c \geq c_n + 1$ ve B böleni yerine $(c-1) P_\infty^n$ alırsak,

$$\text{boy}\,\mathcal{L}((c-1) P_\infty^n) = c - g_{F_n} \text{ ve boy}\,\mathcal{L}(c P_\infty^n) = c + 1 - g_{F_n}$$

olur. Böylece, her $c > c_n$ için c, P_∞^n noktasının boşluk sayısı olamaz. Ayrıca, P_∞^n noktası, F_n/F_{n-1} cebirsel fonksiyon cismi genişlemesinde tümden dallanmış olduğundan $qS_{n-1} = qH(P_\infty^{n-1}) \subseteq H(P_\infty^n)$dir. $c_{n-1} \leq \frac{c_n}{q}$ ve $c_n \in qS_{n-1}$ olduğundan

$$S_n = qS_{n-1} \cup \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \geq c_n\} \subseteq H(P_\infty^n)$$

dir. Weierstrass boşluk teoreminden S_n nin ve $H(P_\infty^n)$ nin boşluk sayıları aynıdır ve g_{F_n} ye eşittir, $H(P_\infty^n) = S_n$ dir. ∎

Bundan sonraki bölümde Önerme 3.9.'daki A^n böleninin varlığı ispatlanacaktır. $1 \leq j \leq n$ için $\pi_j = \prod_{i=1}^{j} \left(x_i^{q-1} + 1\right)$ ve

$$\mathcal{Z}_j^n = \left\{P \in \mathbb{P}_{F_n} \mid P, \text{ uygun } i \in \{1, ..., j\} \text{ için } x_i^{q-1} + 1 \text{ in sıfırı}\right\}$$

kümesini tanımlayalım.

Lemma 3.10. *(a) F_n cebirsel fonksiyon cisminde π_j nin böleni,*

$$(\pi_j)^n = B_j^n - \left(q^n - q^{n-j}\right) P_\infty^n$$

dir, $1 \leq j \leq n$. Burada B_j^n, F_n içinde bir pozitif bölen ve $dst\left(B_j^n\right) = \mathcal{Z}_j^n$ dir.

(b) F_n cebirsel fonksiyon cisminde

$$\left(\pi_j x_{j+1}^e\right)^n = C_{j,e}^n - \left(q^n - q^{n-j} + e.q^{n-j-1}\right) P_\infty^n$$

dir, $1 \leq j \leq n-1$ ve $0 < e < q-1$. Burada, $C_{j,e}^n$, F_n içinde bir pozitif bölen ve $dst\left(C_{j,e}^n\right) \supseteq \mathcal{Z}_j^n$ dir.

İspat. Sadece (a) şıkkının ispatını yapalım. (b) şıkkı ise benzer şekilde yapılır. n üzerinden tümevarım uygulayalım. $n = 1$ için $\pi_1 = \left(x_1^{q-1} + 1\right)$ ve

$$\mathcal{Z}_1^1 = \left\{P \in \mathbb{P}_{F_1} \mid P, x_1^{q-1} + 1 \text{ in sıfırı}\right\}$$

dır.

$$(\pi_1)^1 = (q-1) P - (q-1) P_\infty^1$$

dir. $n \geq 2$ ve her $j = 1, .., n-1$ için iddia doğru olsun. $j \leq n-1$ ise $\pi_j \in F_{n-1} \subseteq F_n$ dir ve tümevarım hipotezinden

$$(\pi_j)^{n-1} = B_j^{n-1} - \left(q^{n-1} - q^{n-1-j}\right) P_\infty^{n-1}$$

dir. P_∞^{n-1}, F_n/F_{n-1} cebirsel fonksiyon cismi genişlemesinde tümden dallanmış bir nokta olduğundan,

$$\begin{aligned}(\pi_j)^n &= B_j^n - \left(q^{n-1} - q^{n-1-j}\right) qP_\infty^n \\ &= B_j^n - \left(q^n - q^{n-j}\right) P_\infty^n\end{aligned}$$

dir. Burada, B_j^n, B_j^{n-1} in F_n/F_{n-1} cebirsel fonksiyon cismi genişlemesindeki conormudur. $\mathcal{Z}_j^n$ nin noktaları, $\mathcal{Z}_j^{n-1}$ in üzerindeki noktalardır. $j = n$ olsun. $H_n = \mathbb{F}_{q^2}(x_2, \ldots, x_n)$, F_{n-1} e izomorftur.

$$\pi_j = \left(x_1^{q-1} + 1\right) \rho, \rho = \prod_{i=2}^{n} \left(x_i^{q-1} + 1\right) \in H_{n-1}$$

dir. Tümevarım hipotezinden ρ nun H_{n-1} deki esas böleni,

$$(\rho)^{n-1} = C - \left(q^{n-1} - 1\right) Q_\infty^{n-1}$$

dir. Burada $Q_\infty^{n-1} \in \mathbb{P}_{H_{n-1}}$, x_2 nin H_{n-1} deki tek kutbu ve $C \geq 0$, H_{n-1} in bir bölenidir ve H_{n-1} in destek kümesi $x_2^{q-1} + 1, x_3^{q-1} + 1, \ldots, x_n^{q-1} + 1$ in tüm sıfırlarını içerir. Q_∞^{n-1}, F_n/H_{n-1} genişlemesinde

$$Con_{F_n/H_{n-1}}\left(Q_\infty^{n-1}\right) = P_\infty^n + \sum_{Q^n \in \mathcal{Z}_1^n} Q^n$$

olarak parçalanır. Böylece,

$$\begin{aligned}(\pi_n)^n &= \left(x_1^{q-1} + 1\right)^n + Con_{F_n/H_{n-1}}\left(C - \left(q^{n-1} - 1\right) Q_\infty^{n-1}\right) \\ &= q^{n-1} \sum_{Q^n \in \mathcal{Z}_1^n} Q^n - (q-1)\, q^{n-1} P_\infty^n \\ &\quad + Con_{F_n/H_{n-1}} C - \left(q^{n-1} - 1\right) \left(P_\infty^n + \sum_{Q^n \in \mathcal{Z}_1^n} Q^n\right) \\ &= Con_{F_n/H_{n-1}} C + \sum_{Q^n \in \mathcal{Z}_1^n} Q^n - (q^n - 1) P_\infty^n\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. $B_n^n = Con_{F_n/H_{n-1}} C + \sum_{Q^n \in \mathcal{Z}_1^n} Q^n$ böleninin destek kümesi iddia edildiği gibi $\mathcal{Z}_n^n$ dedir. ∎

Önerme 3.11. *$1 \leq j \leq n$ için, $A_j^n = \sum_{P \in \mathcal{Z}_j^n} P$ olmak üzere,*

$$\mathcal{L}\left(\left(q^n - q^{n-j}\right) P_\infty^n - A_j^n\right) = <\pi_j>$$

dir.

İspat. $\pi_j \in \mathcal{L}\left(\left(q^n - q^{n-j}\right) P_\infty^n - A_j^n\right)$ olduğu açıktır. Şimdi n üzerinden tümevarım uygulayalım. $n = 1$ ise der $\left((q-1) P_\infty^1 - A_1^1\right) = 0$ dır.

$$\text{boy}\left((q-1) P_\infty^1 - A_1^1\right) = \text{der}\left((q-1) P_\infty^1 - A_1^1\right) + 1 - g_{F_1} = 1,$$

$\pi_1 \in \mathcal{L}\left((q-1) P_\infty^1 - A_1^1\right)$ olduğundan $\mathcal{L}\left((q-1) P_\infty^1 - A_1^1\right) =< \pi_1 >$ dir. $n \geq 2$ ve $n-1$ için iddia doğru olsun. Her $z \in \mathcal{L}\left(\left(q^n - q^{n-j}\right) P_\infty^n - A_j^n\right)$ nin, $\alpha \in K$, $z = \alpha.\pi_j$ formunda yazıldığını göstermeliyiz. $1 \leq j \leq n-1$ olsun. A_j^n tanımı ve P_∞^n noktası F_n/F_{n-1} cebirsel fonksiyon cismi genişlemesinde tümden dallanmış olduğundan

$\mathcal{L}\left(\left(q^n - q^{n-j}\right) P_\infty^n - A_j^n\right) \cap F_{n-1} = \mathcal{L}\left(\left(q^{n-1} - q^{n-1-j}\right) P_\infty^{n-1} - A_j^{n-1}\right)$ dir. Tümevarım hipotezinden $\mathcal{L}\left(\left(q^n - q^{n-j}\right) P_\infty^n - A_j^n\right) \cap F_{n-1} =< \pi_j >$ olur.

$$\mathcal{L}\left(\left(q^n - q^{n-j}\right) P_\infty^n - A_j^n\right) \neq < \pi_j >$$

ise

$$\mathcal{L}\left(\left(q^n - q^{n-j}\right) P_\infty^n - A_j^n\right) \backslash F_{n-1}$$

uzayından öyle bir z elemanı seçilebilir ki, bu elemanın F_n de $P_\infty^{(n)}$ noktasında minimal kutup mertebesi $v_{P_\infty^n}(z) = -r$ dir ve $\sigma \in Gal\left(F_n/F_{n-1}\right)$ için $\sigma P_\infty^n = P_\infty^n$, $\sigma A_j^n = A_j^n$ dir, böylece

$$\sigma z \in \mathcal{L}\left(\left(q^n - q^{n-j}\right) P_\infty^n - A_j^n\right)$$

ve $v_{P_\infty^n}(\sigma z) = -r$ dir. P_∞^n noktasının derecesi 1 dir. Öyle bir $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}^*$ vardır ki, $v_{P_\infty^n}(\sigma z - \alpha z) > -r$ ve r minimal seçildiğinden, $\sigma z - \alpha z \in F_{n-1}$ dir. Böylece, $\beta \in \mathbb{F}_{q^2}$ vardır ki, $\sigma z - \alpha z = \beta \pi_j$ dir. Ancak,

$$v_{P_\infty^n}(\sigma z - \alpha z) > -r \geq -\left(q^n - q^{n-j}\right) = v_{P_\infty^n}(\pi_j)$$

dir. Buradan, $\beta = 0$ dır ve $\sigma z = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}^*$ dır. $Gal\left(F_n/F_{n-1}\right)$ in mertebesi q dur, yani σ^q birimdir ve her $\sigma \in Gal\left(F_n/F_{n-1}\right)$ için $z = \sigma^q z = \alpha^q z$ dir. $\alpha^q = 1$ ise $\alpha = 1$ olduğundan $\sigma z = z$ dir, böylece $z \in F_{n-1}$ dir ve buradan çelişki elde edilir.

$j = n$ olsun. boy $\mathcal{L}\left(\left(q^n - q\right) P_\infty^n - A_{n-1}^n\right) = 1$ ve

boy $\mathcal{L}\left(\left(q^n - 1\right) P_\infty^n - A_{n-1}^n\right) \leq q$

dur, $\pi_{n-1}.x_n^e \in \mathcal{L}\left(\left(q^n - 1\right).P_\infty^n - A_{n-1}^n\right)$, $0 \leq e \leq q-1$, bu elemanlar doğrusal bağımsızdır. Herhangi bir $y \in \mathcal{L}\left(\left(q^n - 1\right) P_\infty^n - A_{n-1}^n\right)$ için $y = \pi_{n-1} h\left(x_n\right)$ formunda yazılabilir, burada $h\left(x_n\right) \in K\left[x_n\right]$, der $h\left(x_n\right) < q - 1$dir. A_n^n böleni $x_n^{q-1} + 1$ in F_n cismindeki bütün sıfırlarını içerir ve bu noktalar π_{n-1} in sıfırları değildir. Böylece, $\gamma \in K$ için $h\left(x_n\right) = \gamma\left(x_n^{q-1} + 1\right)$dir ve

$$y = \pi_{n-1}.\gamma\left(x_n^{q-1} + 1\right) = \gamma.\pi_n \in < \pi_n >$$

dir. ∎

Lemma 3.12. $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ *olmak üzere* der $A_j^n = q^j - 1$ *dir.*

İspat. $\mathcal{A}_i^n = \left\{P \in \mathbb{P}_{F_n} \mid P, x_i^{q-1}+1 \text{ in sıfırı}\right\}$ olsun. $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ için

$$\operatorname{der}\left(\sum_{P\in\mathcal{A}_i^n} P\right) = (q-1)\,q^{i-1}$$

dir. $A_j^n = \sum_{i=1}^{j}\sum_{P\in\mathcal{A}_i^{(n)}} P$ olduğundan

$$\operatorname{der} A_j^n = \sum_{i=1}^{j}\sum_{P\in\mathcal{A}_i^n} \operatorname{der} P = \sum_{i=1}^{j} (q-1)\,q^{i-1} = q^j - 1$$

dir. ∎

Tanım 3.13. *F_n cisminin bir A^n böleni, $A^1 = 0$ ve $j = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \\ \frac{n-1}{2}, & n \equiv 1 (\operatorname{mod} 2) \end{cases}$ için, $n \geq 2$, $A^n = A_j^n$ olarak tanımlanır.*

Lemma 3.14. *(a)* $\operatorname{der} A^n = c_n - g_{F_n}$,
(b) $\operatorname{boy} \mathcal{L}\left(c_n P_\infty^n - A^n\right) = 1$ *dir.*

İspat. $n = 1$ için $A^1 = 0 = c_1 - g_{F_1}$, $\operatorname{boy} \mathcal{L}(0) = 1$ dir. $n \geq 2$ olsun. $n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ ise $c_n = q^n - q^{\frac{n}{2}}$ ve $g_{F_n} = \left(q^{\frac{n}{2}} - 1\right)^2$ dir. $c_n - g_{F_n} = q^{\frac{n}{2}} - 1$ ve $\operatorname{der} A_j^n = \operatorname{der} A^n = q^{\frac{n}{2}} - 1$ olduğundan $\operatorname{der} A^n = c_n - g_{F_n}$ dir.

$$\mathcal{L}\left(c_n P_\infty^n - A^n\right) = \mathcal{L}\left(\left(q^n - q^{\frac{n}{2}}\right) P_\infty^n - A_{\frac{n}{2}}^n\right) =< \pi_{\frac{n}{2}} >$$

olduğundan $\operatorname{boy} \mathcal{L}\left(c_n P_\infty^n - A^n\right) = 1$ dir.

$n \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$ ise $c_n = q^n - q^{\frac{n+1}{2}}$ ve $g_{F_n} = \left(q^{\frac{n+1}{2}} - 1\right)\left(q^{\frac{n-1}{2}} - 1\right)$ dir. $c_n - g_{F_n} = q^{\frac{n-1}{2}} - 1$ ve $\operatorname{der} A_j^n = \operatorname{der} A^n = q^{\frac{n-1}{2}} - 1$ olduğundan $\operatorname{der} A^n = c_n - g_{F_n}$ dir.

$$\mathcal{L}\left(c_n P_\infty^n - A^n\right) = \mathcal{L}\left(\left(q^n - q^{\frac{n+1}{2}}\right) P_\infty^n - A_{\frac{n-1}{2}}^n\right) =< \pi_{\frac{n-1}{2}} >$$

olduğundan $\operatorname{boy} \mathcal{L}\left(c_n P_\infty^n - A^n\right) = 1$ dir. ∎

3.2. $\mathcal{F}_2$ Fonksiyon Cismi Kulesi

p tek asal sayı olmak üzere, $K = \mathbb{F}_{p^2}$ sonlu cismi üzerindeki $\mathcal{F}_2 = (T_j)_{j\geq 0}$ cebirsel fonksiyon cismi kulesini alalım. Bu kule, $T_0 = \mathbb{F}_{p^2}(x_0)$, $j \geq 0$ için $T_{j+1} = T_j(x_{j+1})$ olan ve $x_{j+1}^2 = \frac{x_j^2+1}{2x_j}$ eşitliği ile verilen tekrarlı tanımlı kuledir.

K cismi, her $j \geq 0$ için T_j/K cebirsel fonksiyon cisminin tüm sabitler cismidir. T_{j+1}/T_j, derecesi 2 olan bir Kummer genişlemesidir. Ayrıca, verilen $\mathcal{F}_2 = (T_j)_{j\geq 0}$ cebirsel fonksiyon cismi kulesi asimptotik optimaldir.

$\alpha \in K \cup \{\infty\}$ için $P_\alpha^0 \in \mathbb{P}_{T_0}$, $x_0(P_\alpha^0) = \alpha$ olacak şekilde tek noktadır. Öncelikle, T_0/K nın dallanma yapısını anlamak için, $i^2 = -1$ ve $\alpha \in \{\infty, 0, \pm i, \pm 1\}$, P_α^0 noktasının genişlemelerini inceleyelim.

Lemma 3.15. *Her $j \geq 0$ için $P \in \mathbb{P}_{T_j}$, $Q \in \mathbb{P}_{T_{j+1}}$ ve $Q \mid P$ olsun. Bu durumda,*

(a) $e(Q \mid P) = \begin{cases} 2, & v_P\left(\frac{x_j^2+1}{2x_j}\right) \text{ tek tamsayı,} \\ 1, & v_P\left(\frac{x_j^2+1}{2x_j}\right) \text{ çift tamsayı.} \end{cases}$

(b) $x_{j+1}(Q) = \infty \iff x_j(P) \in \{\infty,0\}$,
$x_{j+1}(Q) \in \{1,-1\} \iff x_j(P) = 1$,
$x_{j+1}(Q) = 0 \iff x_j(P) \in \{i,-i\}$,
$x_{j+1}(Q) \in \{i,-i\} \iff x_j(P) = -1$ *dir.*

(c) $x_j(P) \in \{1,-1\}$ *ise* $e(Q \mid P) = f(Q \mid P) = 1$ *dir. Her iki durumda da* T_{j+1}/K *cebirsel fonksiyon cisminin* P *noktası üzerinde tam iki tane noktası vardır.* x_{j+1}, (b) *deki değerlerden birini alırken diğer nokta diğer değeri alır.*

İspat. Teorem 1.30.'un özelliklerinden elde edilir. ∎

Lemma 3.16. $\mathcal{R} := \left\{P_\infty^0, P_0^0, P_i^0, P_{-i}^0, P_1^0, P_{-1}^0\right\}$ *olsun. Her* $j \geq 0$ *için aşağıdakiler sağlanır.*

(a) $\alpha \in \{\infty,0,\pm i\}$ *için* P_α^0 *noktasının* T_j/K *cebirsel fonksiyon cisminde tek genişlemesi* P_α^j *dir.* $j \geq 1$ *ise* $e(P_\alpha^j \mid P_\alpha^{j-1}) = 2$ *dir. Ayrıca,* $v_{P_\infty^j}(x_j) = -1$ *ve*

$$v_{P_0^j}(x_j) = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ -1, & j \geq 1 \end{cases}, \quad v_{P_{\pm i}^j}(x_j) = \begin{cases} 0, & j = 0 \\ 1, & j = 1 \\ -1, & j \geq 2 \end{cases}$$

dir.

(b) $\beta \in \{\pm 1\}$ *için* T_j/K *cebirsel fonksiyon cisminde* $x_j\left(P_\beta^j\right) = \beta$ *olacak şekilde tek nokta* P_β^j *dır ve* $j \geq 1$ *ise* $P_{\pm 1}^j \mid P_1^{j-1}$ *ve* $e\left(P_{\pm 1}^j \mid P_1^{j-1}\right) = 1$ *dir.*

(c) $j \geq 3$, $r < j-1$, $0 \leq r \leq \lfloor (j-3)/2 \rfloor$ *olsun.* $Q = Q_r^j$, T_j/K *cebirsel fonksiyon cisminin* P_{-1}^r *üzerindeki noktası olsun. Bu özelliği sağlayan noktaların derecelerinin toplamı* 2^{r+2} *dir. Ayrıca,* $e(Q_r^j \mid Q_r^{j-1}) = 2$ *ve* $v_Q(x_j) = -1$ *dir.*

(d) $\lfloor (j-1)/2 \rfloor \leq r \leq j-2$ *olsun.* $j \geq 2$, $r \geq 0$ *dır.* $Q = Q_r^j$, T_j/K *cebirsel fonksiyon cisminin* P_{-1}^r *üzerindeki noktası olsun. Bu özelliği sağlayan noktaların derecelerinin toplamı* 2^{j-r} *dir. Ayrıca,* $e(Q_r^j \mid Q_r^{j-1}) = 1$ *ve*

$$v_Q(x_j) = \begin{cases} -2^{2r-j+2}, & r \leq j-3 \\ 2^{j-2}, & r = j-2 \end{cases}$$

dir.

(e) $\beta \in \{\pm i\}$ *için* $x_j\left(Q_\beta^j\right) = \beta$ *olacak şekilde* T_j/K *cebirsel fonksiyon cismindeki tek nokta* Q_β^j *dır.* $j \geq 1$ *ise* $Q_{\pm i}^j \mid P_{-1}^{j-1}$ *ve* $e\left(Q_{\pm i}^j \mid P_{-1}^{j-1}\right) = 1$ *dir. Ayrıca,* $Q_{\pm i}^j$, T_j/K *cebirsel fonksiyon cisminde* P_{-1}^{j-1} *noktasının üzerindeki tek noktadır.*

(f) T_j/K *nın* (a) *şıkkından* (e) *şıkkına kadar tanımlanan her noktası* $\mathcal{R}$ *kümesinin üzerinde olan tek noktalardır.* $Q_{\pm i}^0 = P_{\pm i}^0$ *hariç diğer noktalar birbirinden farklıdır.*

(g) *x_j fonksiyonunun T_j cebirsel fonksiyon cisminde $\mathcal{R}$ kümesindeki noktalar dışında sıfır ve kutup noktası yoktur.*

(h) *(e) şıkkında tanımlanan $Q^j_{\pm i}$ noktaları için $v_{Q^j_{\pm i}}\left(x_j^2+1\right)=2^j$ dir.*

İspat. j üzerinden tümevarım ile ispatı yapacağız. $j=0$ için $T_0=K(x_0)$, rasyonel fonksiyon cismidir ve istenilen bütün özellikleri sağlar. Herhangi $j\geq 0$ için lemmadaki özellikler sağlansın.

(a) Lemma 3.15. kullanılarak $j\geq 0$ için $v_{P^{j+1}_{\infty,0}}(x_{j+1})=-1$ ve $e\left(P^{j+1}_{\infty,0}\mid P^j_{\infty,0}\right)=2$ ve $j\geq 1$ ise $v_{P^{j+1}_{\pm i}}(x_{j+1})=-1$ ve $e\left(P^{j+1}_{\pm i}\mid P^j_{\pm i}\right)=2$ olduğu görülür. $j=0$ için $v_{P^0_{\pm i}}(x_0^2+1)=1$ olduğundan $v_{P^1_{\pm i}}(x_1)=1$, $e\left(P^1_{\pm i}\mid P^0_{\pm i}\right)=2$ elde edilir.

(b) Lemma 3.15. aracılığıyla doğrudan görülür.

(c) $0\leq r\leq\lfloor(j-2)/2\rfloor$ olsun.$j\geq 2$ ve $r<j$ olmasını gerektirir. Q, T_{j+1}/K cebirsel fonksiyon cisminin $Q\mid P^r_{-1}$ olsun. P, Q nun T_j/K cebirsel fonksiyon cismindeki kısıtlanışı ise P^r_{-1} nin de genişlemesidir. $v_P(x_j)=-1$ ve böyle P noktaların derecelerinin toplamının 2^{r+2} olduğunu gösterirsek, Lemma 3.15.'ten iddia ispatlanmış olur.
İlk olarak, $r\leq\lfloor(j-3)/2\rfloor$ ise tümevarım hipotezinden ve (c)'den istenilen görülür.
Diğer taraftan, $r>\lfloor(j-3)/2\rfloor$ ise j çift sayıdır ve $r=(j-2)/2$ dir. $r=\lfloor(j-1)/2\rfloor\leq j-2$ ve istenen sonuç (d) de tümevarım hipotezi ile görülür.

(d) $\lfloor j/2\rfloor\leq r\leq j-1$ olsun. $j\geq 1$ ve $r\geq 0$ olmasını gerektirir. Q, T_{j+1}/K cebirsel fonksiyon cisminin P^r_{-1} üzerindeki noktası olarak kabul edilsin. Q noktasının T_j/K cebirsel fonksiyon cismine kısıtlanışı olan P noktası P^r_{-1} nin genişlemesidir.
$r\leq j-3$ durumunda, $\lfloor(j-1)/2\rfloor\leq r\leq j-2$ dir. Tümevarım hipotezi ile $v_P(x_j)=-2^{2r-j+2}$ ve bu şekildeki P noktalarının derecelerinin toplamının 2^{j-r} olduğu görülür. $(j-1)/2\leq r$ olduğu için $2r-j+2\geq 1$ ve $v_P(x_j)$ çift sayıdır. Lemma 3.15.'ten $e(Q\mid P)=1$ ve $v_Q(x_{j+1})=-2^{2r-(j+1)+2}$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece iddia ispatlanmış olur.
$r=j-2$ durumunda, $\lfloor(j-1)/2\rfloor\leq r\leq j-2$ dir. Tümevarım hipotezi ile $v_P(x_j)=2^{j-2}$ ve bu şekildeki P noktalarının derecelerinin toplamının 2^{j-r} olduğu görülür. $\lfloor j/2\rfloor\leq j-2$ olduğu için $j\geq 3$ ve $v_P(x_j)$ çift sayıdır. Lemma 3.15.'ten $e(Q\mid P)=1$ ve $v_Q(x_{j+1})=-2^{j-3}=-2^{2r-(j+1)+2}$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece iddia ispatlanmış olur.
$r=j-1$ durumunda, (e) ve (h) şıkları üzerinde tümevarım yapılırsa, $Q^j_{\pm i}$ lerden birisi P ise $v_Q\left(x_j^2+1\right)=2^j$ ve $v_Q(x_j)=0$ dır. Lemma 3.15.'ten $e(Q\mid P)=1$ ve $v_Q(x_{j+1})=2^{j-1}=2^{(j+1)-2}$ dir, derece ile ilgili sonuçlar elde edilir.

(e) Lemma 3.15.'ten ve (b) şıkkı üzerinde tümevarım ile hesaplanır.

(f) Q, T_{j+1}/K nın herhangi bir noktası ve $\mathcal{R}$ den bir noktanın genişlemesi ise $\mathcal{R}$ den bir noktanın genişlemesi olan T_j/K nın bir P noktasının genişlemesidir. Tümevarımla gösterilebilir ki, böyle bir P noktası, T_j/K nın (a)-(e) koşullarında tanımlanan noktalardan biridir. T_{j+1}/K nın bir noktası T_j/K nın (a)-(e) ile tanımlı noktalarından birinin genişlemesi ise kendisi de (a)-(e) koşullarıyla tanımlanır. İddia buradan elde edilir.

(g) T_{j+1}/K nın bir Q noktası $\mathcal{R}$ kümesindeki noktalardan birinin genişlemesi değilse $v_Q(x_{j+1}) = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. P, Q noktasının T_j genişlemesine kısıtlanışı olsun. P noktası $\mathcal{R}$ kümesindeki noktalardan birinin genişlemesi olmadığı için (g) şıkkı üzerinde tümevarım ile $v_P(x_j) = 0$ bulunur. x_{j+1} ile x_j arasındaki ilişkiden dolayı $v_P\left(x_j^2+1\right) = 0$ dır. $v_P\left(x_j^2+1\right) \geq 0$ olmasını gerektirir. Bu $v_P\left(x_j^2+1\right) > 0$ ise $x_j(P) = \pm i$ dir ve (e) şıkkı üzerinde tümevarım ile P noktası $\mathcal{R}$ den bir noktanın genişlemesi olmak zorundadır.

(h) x_{j+1}^2+1 in T_{j+1}/K genişlemesindeki kutup ve sıfır noktalarını analiz edelim. Bu elemanın tek sıfırları $Q_{\pm i}^{j+1}$ noktalarıdır ve bu (e) şıkkında kanıtlanmıştır. $Q_{\pm i}^{j+1}$ noktalarının T_{j+1}/T_j nin birimden farklı bir otomorfizmi altında permute ettiklerinden, x_{j+1}^2+1 in bu noktalardaki değerlendirmeleri (valuation) aynıdır, diyelim ki, $v := v_{Q_{\pm i}^{j+1}}\left(x_{j+1}^2+1\right)$ olsun. $v = 2^{j+1}$ olduğunu göstermeliyiz. (g) ve (a)-(e) şıklarından, x_{j+1} in kutup noktaları aşağıdaki gibidir.

P_∞^{j+1} ve P_0^{j+1} (derecesi 1), $P_{\pm i}^{j+1}$, $j \geq 1$ (derecesi 1), Q_r^{j+1}, $0 \leq r \leq j-2$ ($r < \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor$ için derece 1) böyle noktaların dereceleri toplamı 2^{r-2} dir. $r > \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor$ için böyle noktaların dereceleri toplamı 2^{j+1-r} dir. Bu durumda, $\operatorname{der}(x_{j+1})_\infty = 1 + \sum_{n=0}^{j} 2^n = 2^{j+1}$ ve $0 = \operatorname{der}\left(x_{j+1}^2+1\right) = 2v - 2\operatorname{der}(x_{j+1})_\infty$ dir. Buradan $v = 2^{j+1}$ elde edilir. ∎

Tanım 3.17. *Her $j \geq 0$ ve $0 \leq r \leq j$ eşitsizliğini sağlayan her r için T_j cebirsel fonksiyon cisminde $D_r^j := \sum_{Q^j | P_{-1}^r} Q^j$ böleni tanımlanır.*

$D_j^j = P_{-1}^j$ olduğu açıktır. Tanımı genişleterek, $r = -2, -1$ için $D_{-2}^j := P_0^j$ ve $D_{-1}^j := P_i^j + P_{-i}^j$ şeklinde yazalım. Verilen tanım ve Lemma 3.16.'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.18. *Her $j \geq 0$ ve $-2 \leq r \leq j$ için*

$$\operatorname{der}\left(D_r^j\right) = \begin{cases} 2^{j-r}, & j \leq 2r+2 \\ 2^{r+2}, & j \geq 2r+2 \end{cases}$$

dir. Üstelik, $j \geq 1$ ise her r, $-2 \leq r \leq j$ için D_r^j böleninin T_j/T_{j-1} cebirsel fonksiyon cismi genişlemesinde dallanması için gerek ve yeter koşul $j \geq 2r+3$ olmasıdır.

Önerme 3.19. *x_j ve $1 + x_j$ fonksiyonlarının T_j/K cebirsel fonksiyon cismindeki bölenleri, $(x_0) = -P_\infty^0 + P_0^0$, $(x_1) = -P_\infty^1 - P_0^1 + D_{-1}^1$ ve*

$$(x_j) = -P_\infty^j - \sum_{r=-2}^{\left\lfloor \frac{j-3}{2} \right\rfloor} D_r^j - \sum_{r=\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor}^{j-3} 2^{2r-j+2} D_r^j + 2^{j-2} D_{j-2}^j,\ j \geq 2$$

dir. $(1+x_0) = -P_\infty^0 + P_{-1}^0$, $(1+x_1) = -P_\infty^1 - P_0^1 + 2P_{-1}^1$ *ve*

$$(1+x_j) = -P_\infty^j - \sum_{r=-2}^{\left\lfloor \frac{j-3}{2} \right\rfloor} D_r^j - \sum_{r=\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor}^{j-3} 2^{2r-j+2} D_r^j + 2^j P_{-1}^j,\ j \geq 2$$

dir.

İspat. Cebirsel fonksiyon cismini tanımlayan tekrarlı eşitlik ve tümevarım kullanılarak kolayca görülebilir. ∎

Önerme 3.20. *Her $j \geq 0$ için T_j/K cebirsel fonksiyon cisminin cinsi g_{T_j},*

$$g_{T_j} = \begin{cases} \left(2^{\frac{j+2}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{j}{2}} - 1\right), & j \text{ çift tamsayı} \\ \left(2^{\frac{j+1}{2}} - 1\right)^2, & j \text{ tek tamsayı} \end{cases}$$

dir.

İspat. Hurwitz-cins formülünden, $v_P\left(\left(x_j^2+1\right)/2x_j\right)$ yi tek sayı yapan T_j/K genişlemesindeki P noktaları için cins $g_{j+1} = 2g_j - 1 + \frac{1}{2}\sum_P \deg P$ dir. $R_j := \sum_P \deg P$ olsun.

$v_P\left(\left(x_j^2+1\right)/2x_j\right)$ nin tek sayı olması için iki durum söz konusudur: $v_P(x_j) = 0$ ve $v_P\left(x_j^2+1\right)$ tek sayı veya $v_P(x_j)$ tek sayıdır. $j=0$ ise ilk durumu sağlayan noktalar, $P_{\pm i}^0$ ve ikinci durumu sağlayan noktalar ise P_0^0 ve P_∞^0 dur. $j \geq 1$ ise ikinci durumu sağlayan noktalar, $P_{\pm i}^j$, P_0^j ve P_∞^j dur.

$0 \leq r \leq \lfloor (j-3)/2 \rfloor$ ise P_{-1}^r noktasının genişlemesi olan Q_r^j noktaları ikinci durumu sağlar ve bu noktaların derecelerinin toplamı 2^{r+2} dir.

$\lfloor (j-1)/2 \rfloor \leq r \leq j-2$ ise Q_r^j noktaları için iki durum vardır: (a) $r = j-2$ ve $j-2 = 0$ veya (b) $r \leq j-3$ ve $2r - j + 2 = 0$ dır. Bu durumlardaki noktaların derecelerinin toplamı 2^{j-r} dir.

j tek sayı ise (a) ve (b) eşitsizliklerini sağlayan noktaların cinse herhangi bir katkısı yoktur ve $R_j = 1 + \sum_{n=0}^{(j+1)/2} 2^n = 2^{\frac{j+3}{2}}$ dir.

j çift sayı ise (a) durumu sadece $j=2$ ve $r=0$ iken cinse katkı sağlar. Bu noktaların derecelerinin toplamı $2^2 = 4$ tür. (b) durumu ise $j \geq 4$ ve $r = (j-2)/2$ için cinse katkı sağlar ve bu katkı sağlayan noktaların derecelerinin toplamı 2^{r+2} dir. Böylece, $R_j = 1 + \sum_{n=0}^{(j+2)/2} 2^n = 2^{\frac{j+4}{2}}$ dir.

Tümevarım hipotezi ve bütün bu hesaplamalardan sonra cins için aşağıdaki tekrarlı bağıntı elde edilir:

$$g_{T_{j+2}} = \begin{cases} 4g_{T_j} + 3.2^{\frac{j+2}{2}} - 3, & j \text{ çift tamsayı} \\ 4g_{T_j} + 2^{\frac{j+5}{2}} - 3, & j \text{ tek tamsayı} \end{cases}$$

T_0, rasyonel fonksiyon cismi olduğundan $g_{T_0} = 0$ ve $g_{T_1} = 1$ dir. Şimdi tümevarım hipotezi ile cinsi hesaplayalım:

$j \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$ için $g_{T_j} = \left(2^{\frac{j+2}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{j}{2}} - 1\right)$ eşitliği doğru olsun.

$$\begin{aligned} g_{T_{j+1}} &= 2g_{T_j} - 1 + \frac{1}{2}R_j \\ &= 2\left(2^{\frac{j+2}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{j}{2}} - 1\right) - 1 + 2^{\frac{j+2}{2}} \\ &= \left(2^{\frac{j+2}{2}} - 1\right)^2 \end{aligned}$$

dir. $j \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ için $g_{T_j} = \left(2^{\frac{j+1}{2}} - 1\right)^2$ eşitliği doğru olsun.

$$\begin{aligned} g_{T_{j+1}} &= 2g_{T_j} - 1 + \frac{1}{2}R_j \\ &= 2\left(2^{\frac{j+1}{2}} - 1\right)^2 - 1 + 2^{\frac{j+3}{2}} \\ &= \left(2^{\frac{j+3}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{j+1}{2}} - 1\right) \end{aligned}$$

dir. ∎

Teorem 3.21. *$j \geq 1$ ve $D = \sum_Q a_Q Q$, T_j/T_{j-1} genişlemesinde bir bölen olsun. P, T_{j-1}/K genişlemesindeki noktalar olmak üzere D böleninin T_{j-1}/K da kısıtlanışı*

$$D_{|T_{j-1}} = \sum_{P \in T_{j-1}} \min\left\{ \left\lfloor \frac{a_Q}{e(Q \mid P)} \right\rfloor : Q \mid P \right\} P$$

ile tanımlanır. D böleni T_j/T_{j-1} in Galois grubu etkisi altında değişmez ise

$$\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}\left(D_{|T_{j-1}}\right) \oplus \mathcal{L}\left([D + (x_j)]_{|T_{j-1}}\right) x_j$$

dir.

İspat. Noseda vd (2012) ve Maharaj (2004). ∎

Şimdi, α_∞, α_r ve α_j tamsayı olmak üzere T_j/K nın $D = \alpha_\infty P_\infty^j + \sum_{r=-2}^{j-1} \alpha_r D_r^j + \alpha_j P_{-1}^j$ formundaki bölenleri ile ilgileneceğiz. $j \geq 1$ ise bu şekildeki bölenlerin T_j/T_{j-1} in Galois grubu etkisi altında değişmez kalması için gerek ve yeter koşul $\alpha_j = 0$ olmasıdır. Aslında, T_j/T_{j-1} de birimden farklı tek otomorfizm vardır ve x_j elemanını $-x_j$ elemanına götürür. $-2 \leq r \leq j-1$ için P_{∞}^{j} ve D_r^j değişmeden kalırken P_{-1}^{j} noktası P_1^j noktasına gider.

$D = \alpha_\infty P_\infty^j + \sum_{r=-2}^{j-1} \alpha_r D_r^j + \alpha_j P_{-1}^j \in \mathbb{D}_{T_j}$ böleninin T_{j-1}/K ya kısıtlanışı ise

$$D_{|T_{j-1}} = \left\lfloor \frac{\alpha_\infty}{2} \right\rfloor P_\infty^{j-1} + \sum_{r=-2}^{\left\lfloor \frac{j-3}{2} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{\alpha_r}{2} \right\rfloor D_r^{j-1} + \sum_{r=\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor}^{j-1} \alpha_r D_r^{j-1}$$

dir.

3.2.1. $\mathcal{L}\left(sP_\infty^j\right)$ Riemann-Roch uzayının Hermityen tabanı

Bundan sonra, s ve j değişken olmak üzere $\mathcal{L}\left(sP_\infty^j\right)$ uzayının tabanını hesaplayarak ve bunun sonucu olarak $0 \leq j \leq 8$ için $H\left(P_\infty^j\right)$ Weierstrass semigrubunu inceleyeceğiz.

İlk olarak, $k \leq j-1$ için $A_n^k(s)$ ve $B_n^k(s)$ bölenlerini elde edip daha sonra bu bölenler için $\mathcal{L}\left(A_n^k(s)\right)$ ve $\mathcal{L}\left(B_n^k(s)\right)$ Reimann-Roch uzaylarının tabanlarını hesaplayacağız.

Önerme 3.22. $0 \leq k \leq j-1$, $1 \leq n \leq 2^{j-k-1}$, *k ile indislenmiş a_n^k, b_n^k, α_n^k, γ_n^k ve δ_n^k tamsayılarını ve $s \in \mathbb{Z}$, $A_n^k(s)$, $B_n^k(s)$ bölenlerini aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde oluşturan bir algoritma vardır.*

(a) $A_1^{j-1}(s) = \left[sP_\infty^j + (x_j)\right]_{|T_{j-1}}$ *dir.*

(b) $A_n^k(s)$ *ve* $B_n^k(s)$ *bölenleri,*

$$A_n^k(s) = \left\lfloor \frac{s+a_n^k}{2^{j-k}} \right\rfloor P_\infty^k + \sum_{m=-2}^{k-1} \alpha_{n,m}^k D_m^k + \alpha_n^k P_{-1}^k$$

$$B_n^k(s) = \left\lfloor \frac{s+b_n^k}{2^{j-k}} \right\rfloor P_\infty^k + \sum_{m=-2}^{k-1} \beta_{n,m}^k D_m^k$$

formundadır.

(c) $B_n^k(s) = A_n^k(s) + \gamma_n^k(1+x_k) + \delta_n^k P_{-1}^k$ *dir.*

(d) $k < j-1$ *ise* $A_n^k(s) = \begin{cases} \left[B_{\lceil n/2 \rceil}^{k+1}(s)\right]_{|T_k}, & n \text{ tek tamsayı} \\ \left[B_{\lceil n/2 \rceil}^{k+1}(s) + (x_{k+1})\right]_{|T_k}, & n \text{ çift tamsayı} \end{cases}$

dir.

(e) $-\alpha_n^k = \gamma_n^k 2^k + \delta_n^k$ *ve* $0 \leq \delta_n^k \leq 2^k$ *dır.*

(f) *n değişken olmak üzere, sabit bir k için (a) şıkkında bahsedilen a_n^k katsayıları, (b) şıkkında bahsedilen b_n^k katsayıları $(\mathrm{mod}\, 2^{j-k})$ ya göre tüm tek sayıları tam bir kez alır.*

İspat. İspat, k üzerinden azalan tümevarım kullanarak üç adımda yapılabilir. İlk adımda, A^{j-1} bölenlerini, ikinci adımda, her k için A^k böleni verildiğinde B^k böleni tanımlanır. Üçüncü adımda ise B^{k+1} böleni verildiğinde A^k böleni tanımlanır.

1. $Adım$: $k = j-1$ ve her $s \in \mathbb{Z}$ için $A_1^{j-1}(s) := [sP_\infty^j + (x_j)]_{|T_{j-1}}$ böleni tanımlanırsa, (a) şıkkı sağlanmış olur. $a_1^{j-1} = -1$ ve $\alpha_1^{j-1} = 0$ dır. $j-$inci aşamada (x_j) nin P_∞^j noktasındaki katsayısı -1 olduğundan Önerme 3.19.'dan (b) ve (f) şıklarının ispatı tamamlanmış olur.

2. $Adım$: $0 \leq k \leq j-1$ aralığında sabitlenmiş bir k için (b) ve (f) şıklarında tanımlanan $A_n^k(s)$ bölenini ve a_n^k ve α_n^k sayıları tanımlanmış olsun. $-\alpha_n^k$ yı 2^k ya göre bölme algoritması uygularsak γ_n^k ve δ_n^k elde ederiz. Öyle ki, (e) koşulu verilen k için tanımdan sağlanmış olur. $B_n^k(s)$ yi verilen k için (c) de olduğu gibi tanımlayalım. b_n^k katsayılarını (b) şıkkı ve (f) koşulunu sağlayacak şekilde tanımlayacağız. $1 + x_k$ nın böleni dikkate alınırsa $B_n^k(s)$ nin P_∞^k ve P_{-1}^k daki katsayıları (b) koşulunda olduğu gibi elde edilir. $(1 + x_k)$ böleninin P_{-1}^k daki katsayısı 2^k olduğundan (e) şıkkından $B_n^k(s)$ nin P_{-1}^k daki katsayısı istenildiği gibi sıfırdır. $(1 + x_k)$ böleninin P_∞^k daki katsayısı -1 olduğundan $B_n^k(s)$ nin P_∞^k daki katsayısı $\left\lfloor \frac{s+a_n^k-2^{j-k}\gamma_n^k}{2^{j-k}} \right\rfloor$ dir. $b_n^k := s + a_n^k - 2^{j-k}\gamma_n^k$ şeklinde tanımlanırsa verilen k için (b) ve (f) şıkları elde edilir, $b_n^k \equiv a_n^k \pmod{2^{j-k}}$ dır.

3. $Adım$: $0 \leq k < j-1$ olacak şekilde k yı sabitleyelim. Kabul edelim ki, $B_n^{k+1}(s)$ böleni ve b_n^{k+1} tamsayıları (b) ve (f) şıkları sağlanacak biçimde $k+1$ için tanımlamış olsun. Şimdi $A_n^k(s)$ bölenini ve a_n^k, α_n^k tamsayılarını (b) ve (f) şıkları sağlanacak şekilde tanımlayacağız. $A_n^k(s)$ böleni (d) şıkkında olduğu gibi tanımlansın.

$$a_n^k = \begin{cases} b_{\lceil n/2 \rceil}^{k+1}, & n \text{ tek tamsayı} \\ b_{\lceil n/2 \rceil}^{k+1} - 2^{j-k-1}, & n \text{ çift tamsayı} \end{cases}$$

olsun. Önerme 3.19.'dan (x_{k+1}) böleninin P_∞^{k+1} deki katsayısı -1 dir ve bu durumda, k için (b) koşulu sağlanır. Şimdi (f) yi ispat edelim. $n = 1, \ldots, 2^{j-k-1}$ ve n tek sayısı için $\lceil n/2 \rceil$ sayısı bütün $1, \ldots, 2^{j-k-2}$ değerlerini tam bir kez alır. n nin çift değerleri için de aynı şey doğrudur. Görülebilir ki,

$$\left\{a_n^k : n = 1, \ldots, 2^{j-k}\right\} = \left\{b_n^{k+1}, b_n^{k+1} - 2^{j-k-1} : n = 1, \ldots, 2^{j-k-2}\right\}$$

dir. (f) şıkkı k yerine $k+1$ için sağlandığından b_n^{k+1} ler $\left(\mathrm{mod}\, 2^{j-(k+1)}\right)$ e göre bütün tek kalanları tam bir kez alır. Verilen k için (f) şıkkı elde edilir. ∎

Sonuç 3.23. $0 \leq k < j-1$ *ve* $1 \leq n \leq 2^{j-k-2}$ *olacak şekilde her* k*,* n*,* s *tamsayıları için*

$$\mathcal{L}\left(B_n^{k+1}(s)\right) = \mathcal{L}\left(A_{2n-1}^k(s)\right) \oplus \mathcal{L}\left(A_{2n}^k(s)\right) x_{k+1}$$

dir.

İspat. Önerme 3.22. (b) şıkkında k yerine $k+1$ alınırsa, $B_n^{k+1}(s)$ böleni T_{k+1}/T_k de değişmezdir. Önerme 3.22. ve Teorem 3.21.'den ispatın kalanı açıktır. ∎

Önerme 3.24. *$0 \leq k \leq j-1$, $1 \leq m \leq 2^{j-1}$ olmak üzere k ve m ile indislenmiş b_m^k, c_m^k, d_m^k tamsayı dizisilerini ve w_m^k ve $z_m^k \in T_k$ fonksiyon dizilerini kuran bir algoritma vardır öyle ki,*

(a) Her m için, $0 \leq b_m < 2^j$ dir. Üstelik, m değişken olmak üzere b_m katsayıları 2^j moduna göre bütün tek değerleri sadece bir kez alır.

(b) Her k, $s \in \mathbb{Z}$, $1 \leq n \leq 2^{j-k-1}$ koşulunu sağlayan n için m, l ile parametrelenen

$$\left\{x_0^l w_m^k : (n-1)\,2^k + 1 \leq m \leq n2^k,\ 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s-b_m}{2^j} \right\rfloor - c_m^k \right\}$$

ailesi $\mathcal{L}\left(A_n^k\,(s)\right)$ uzayının bir tabanıdır.

(c) Her k, $s \in \mathbb{Z}$, $1 \leq n \leq 2^{j-k-1}$ koşulunu sağlayan n için m, l ile parametrelenen

$$\left\{x_0^l z_m^k : (n-1)\,2^k + 1 \leq m \leq n2^k,\ 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s-b_m}{2^j} \right\rfloor - d_m^k \right\}$$

ailesi $\mathcal{L}\left(B_n^k\,(s)\right)$ uzayının bir tabanıdır.

İspat. İspat k üzerinden tümevarım kullanarak üç adımda yapılabilir. İlk adımda, $\mathcal{L}\,(B^0)$ uzayının tabanı, ikinci adımda, her k için $\mathcal{L}\left(B^k\right)$ uzayının tabanı verildiğinde $\mathcal{L}\left(A^k\right)$ uzayının tabanı, üçüncü adımda ise her $k < j-1$ için $\mathcal{L}\left(B^{k+1}\right)$ uzayının tabanı verildiğinde $\mathcal{L}\left(A^k\right)$ uzayının tabanı belirlenmelidir.

1. *Adım* : $k = 0$, $n = 1, \ldots, 2^{j-1}$, $s \in \mathbb{Z}$, Önerme 3.22.'deki $B_n^k\,(s)$ tanımından $k = 0$ durumunda

$$B_n^0\,(s) = \left\lfloor \frac{s+b_n^0}{2^j} \right\rfloor P_\infty^0 + \beta_{n,-2}^0 D_0^0 + \beta_{n,-1}^0 D_{-1}^0$$

elde edilir. $m = 1, 2, \ldots, 2^{j-1}$ için $z_m^0 := x_0^{-\beta_{m,-2}^0}\,(1+x_0^2)^{-\beta_{m,-1}^0}$ olsun. b_m yi 2^j ye bölme algoritması uygulayarak $-b_m^0 := q_m 2^j + b_m$, $0 \leq b_m < 2^j$ şeklinde ve $d_m^0 := q^m - \beta_{m,-2}^0 - 2\beta_{m,-1}^0$ olarak tanımlayalım. Bu durumda, Önerme 3.22. (f)'den (a) sağlanır. T_0 rasyonel fonksiyon cismi olduğu için $0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s-b_m^0}{2^j} \right\rfloor + \beta_{m,-2}^0 + 2\beta_{m,-1}^0 = \left\lfloor \frac{s-b_m}{2^j} \right\rfloor - d_m^0$, l ile parametrelenen

$$x_0^l z_m^0 = x_0^l \left(x_0^{-\beta_{m,-2}^0}\left(1+x_0^2\right)^{-\beta_{m,-1}^0}\right) = x_0^{l-\beta_{m,-2}^0}\left(1+x_0^2\right)^{-\beta_{m,-1}^0}$$

ailesi $\mathcal{L}\,(B_n^0\,(s))$ nin tabanı olur. Böylece $k = 0$ için (c) sağlanır.

2. *Adım* : $0 \leq k \leq j-1$ olacak şekilde bir k alalım. $m = 1, \ldots, 2^{j-1}$ için z_m^k ve d_m^k elemanları verilen k için (c) de olduğu gibi tanımlanmış olsun. $m = 1, \ldots, 2^{j-1}$ için c_m^k ve w_m^k yı (b) şıkkındaki koşulları sağlayacak şekilde tanımlayacağız. n yi $1 \leq n \leq 2^{j-k-1}$ olacak biçimde sabitleyelim. Her $s \in \mathbb{Z}$ için $C_n^k\,(s) := A_n^k\,(s) + \gamma_n^k\,(1+x_k)$ olsun. $c_m^k := d_{m,\delta}$, $\tilde{w}_m^k := z_{m,\delta}$, $m = (n-1)\,2^k + 1, \ldots, n2^k$, Lemma 3.25.'deki gibi

oluşturulsun. Bu durumda, her $s \in \mathbb{Z}$ için m, l ile parametrelenmiş $d_{m,\delta}$, $z_{m,\delta}$

$$\left\{x_0^l \tilde{w}_m^k \ : (n-1)\,2^k + 1 \leq m \leq n2^k, 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s-b_m}{2^j} \right\rfloor - c_m^k \right\}$$

ailesi $\mathcal{L}\left(C_n^k(s)\right)$ uzayının bir tabanı olur. Bu durumda, $w_m^k := \tilde{w}_m^k\,(1+x_k)^{\gamma_n^k}$ tanımlanırsa m, l ile parametrelenen

$$\left\{x_0^l w_m^k : (n-1)\,2^k + 1 \leq m \leq n2^k, 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s-b_m}{2^j} \right\rfloor - c_m^k \right\}$$

ailesi $\mathcal{L}\left(A_n^k(s)\right)$ uzayının bir tabanı olur.

$3.\ Adım$: $0 \leq k < j-1$ sayısını sabitleyelim. $m = 1, \ldots, 2^{j-1}$ için c_m^k ve w_m^k elemanları verilen k için (b) şıkkında olduğu gibi tanımlansın. $m = 1, \ldots, 2^{j-1}$ için d_m^{k+1} ve z_m^{k+1} yı (c) şıkkındaki koşulları sağlayacak şekilde tanımlayacağız. $d_m^{k+1} := c_m^k$ olsun. $n = 1, \ldots, 2^{j-k-2}$, $m = (n-1)\,2^{k+1} + 1, \ldots, n2^{k+1}$ için

$$z_m^{k+1} := \begin{cases} w_m^k, & m \leq (2n-1)\,2^k \\ w_m^k x_{k+1}, & m > (2n-1)\,2^k \end{cases}$$

şeklinde alınır ve Sonuç 3.23.'de k yerine $k+1$ yazılırsa(c) sağlanır. ∎

Lemma 3.25. *Önerme 3.24.'ün ispatının 2. adımındaki gösterimler kullanılmak üzere $0 \leq k \leq j-1$, $1 \leq n \leq 2^{j-k-1}$ ve k,n ile sabitlenmiş tamsayılar olsun. $\delta = \delta_n^k$, $P := P_{-1}^k$ ve $C(s) = B(s) - \delta P$ olsun. Her $s \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \varepsilon \leq \delta$ ve $(n-1)\,2^k + 1 \leq m \leq n2^k$ için $z_{m,\varepsilon} \in T_k$ fonksiyonları, $d_{m,\varepsilon}$ tamsayı dizilerini kuran öyle bir algoritma vardır ki, m, l ile parametrelenen*

$$\left\{x_0^l z_{m,\varepsilon} : (n-1)\,2^k + 1 \leq m \leq n2^k, 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s-b_m}{2^j} \right\rfloor - d_{m,\varepsilon} \right\}$$

ailesi $\mathcal{L}(B(s) - \varepsilon P)$ için bir tabandır.

İspat. ε üzerinden tümevarım yapalım. $\varepsilon = 0$ ise $d_{m,0} := d_m^k$, $z_{m,0} := z_m^k$, d_m^k ve z_m^k elemanları Önerme 3.24. 2. adımının ispatındaki gibi olsun. $0 \leq \varepsilon < \delta$ yi sabitleyelim. $d_{m,\delta}$ ve $z_{m,\delta}$ elemanları her $s \in \mathbb{Z}$ için $\mathcal{L}(B(s) - \varepsilon P)$ nin tabanını verecek şekilde tanımlayacağız. Her m ve s için $l_m(s) := \left\lfloor \frac{s-b_m}{2^j} \right\rfloor - d_{m,\varepsilon}$ olsun. Görülebilir ki, $l_{\sigma(1)}(s) \leq l_{\sigma(2)}(s) \leq \ldots \leq l_{\sigma(2^k)}(s)$ koşulunu sağlayan tek türlü belirli

$$\sigma : \left\{i : 1 \leq i \leq 2^k\right\} \to \left\{m : (n-1)\,2^k + 1 \leq m \leq n2^k\right\}$$

homomorfizmi vardır. Şimdi gerekli olan iki gerçeği ispatlayacağız.

(i) Her $m = (n-1)\,2^k + 1, \ldots, n2^k$ için $v_P(z_{m,\varepsilon}) \geq \varepsilon$ dur.

(ii) $v_P(z_{m,\varepsilon}) = \varepsilon$ olacak şekilde m sayısı vardır.

Aslında, $\left\{x_0^l z_{m,\varepsilon} : (n-1)\,2^k + 1 \leq m \leq n2^k, 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s-b_m}{2^j} \right\rfloor - d_{m,\varepsilon}\right\}$ nin her $s \in \mathbb{Z}$ ve verilen ε için gerçerli olduğunu kullanacağız. Özel olarak, yeterli büyük s için $l_m(s) \geq 0$ dır. Buradan, her m için $l = 0$ alınırsa, $z_{m,\varepsilon} \in \mathcal{L}(B(s) - \varepsilon P)$, böylece $v_P(z_{m,\varepsilon}) \geq \varepsilon$ ve (i) ispatlanmış olur. Önerme 3.22. (b) şıkkından $s \to \infty$ ise $\operatorname{der}(B(s)) \to \infty$ dur. Riemann-Roch teoremi uygulanırsa yeterli büyük s için $\mathcal{L}((B(s) - \varepsilon P) - P) \neq \mathcal{L}(B(s) - \varepsilon P)$ elde edilir ve (ii) ispatlanmış olur.

$t := 1 - x_0$ fonksiyonu P noktasında yerel parametre olsun. δ kesin pozitif olduğu için $k > 0$ dır.

$z \in T_k, v_P(z) \geq \varepsilon$ için $z(P) \in K$ ile z nin P civarında $t : z = z(P)\,t^\varepsilon + O(t^{\varepsilon+1})$ e göre açılımının $\varepsilon-$inci mertebeden katsayısı olsun, burada $O(t^{\varepsilon+1})$, kuvvet serisinde $t^{\varepsilon+1}$ veya daha büyük kuvvetli terimlerin bulunduğunu ifade eder. $z(P) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $v_P(z) > \varepsilon$ olmasıdır. $I = \max\left\{i : 1 \leq i \leq 2^k, v_P\left(z_{\sigma(i),\varepsilon}\right) = \varepsilon\right\}$ şeklinde tanımlansın. $z_{\sigma(I),\varepsilon}(P) \neq 0$ dır. $z_{m,\varepsilon}(P)$ nin kuruluşu, $z_{m,\varepsilon}$ fonksiyonlarının x_i üreteçlerine bağlı ifadesinden elde edilebilir. Aslında, bunlar Önerme 3.24. 1. adımın ispatında z_m^0 fonksiyonlarından başlayarak kurulabilir. Her m, $(n-1)\,2^k + 1 \leq m \leq n2^k$ için

$$z_{m,\varepsilon+1} := \begin{cases} z_{m,\varepsilon} - \frac{z_{m,\varepsilon}(P)}{z_{\sigma(I),\varepsilon}(P)} z_{\sigma(I),\varepsilon}, & m \neq \sigma(I), \\ z_{\sigma(I),\varepsilon}(1 - x_0), & m = \sigma(I), \end{cases}$$

ve

$$d_{m,\varepsilon+1} := \begin{cases} d_{m,\varepsilon}, & m \neq \sigma(I), \\ d_{\sigma(I),\varepsilon} + 1, & m = \sigma(I), \end{cases}$$

tanımlayalım. Her $s \in \mathbb{Z}$ için $z_{m,\varepsilon+1}$, $d_{m,\varepsilon+1}$ ler $\mathcal{L}(B(s) - (\varepsilon + 1))$ uzayının tabanıdır. ∎

Daha önceki notasyonlar ile birlikte, herhangi bir $s \in \mathbb{Z}$ ve $z \in \mathcal{L}(B(s) - \varepsilon P)$ için $v_P(z) \geq \varepsilon$ ve

$$z \in \mathcal{L}(B(s) - (\varepsilon + 1)\,P) \Leftrightarrow v_P(z) > \varepsilon \Leftrightarrow z(P) = 0$$

dir.

Lemma 3.26. *Lemma 3.25.'deki notasyonlar ile birlikte, her $s \in \mathbb{Z}$ için m ve l ile parametrelenen*

$$\left\{x_0^l z_{m,\varepsilon+1} \;:\, (n-1)\,2^k + 1 \leq m \leq n2^k,\, 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s - b_m}{2^j} \right\rfloor - d_{m,\varepsilon+1}\right\}$$

ailesi $\mathcal{L}(B(s) - (\varepsilon + 1)\,P)$ uzayının bir tabanıdır.

İspat. $s \in \mathbb{Z}$ tamsayısını sabitleyelim. Her $1 \leq i \leq 2^k$ için

$$z_i := z_{\sigma(i),\varepsilon},\, d_i := d_{\sigma(i),\varepsilon},\, \bar{z}_i := z_{\sigma(i),\varepsilon+1},\, \bar{d}_i := d_{\sigma(i),\varepsilon+1}$$

ile sadeleştirelim ve

$$l_i := l_{\sigma(i)}(s), \bar{l}_i := \bar{l}_{\sigma(i)}\ (s), D := B(s) - \varepsilon P$$

olsun. Yeni gösterimlerle, $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_{2^k}$ dır ve

$$\bar{z}_i = \begin{cases} z_i - \frac{z_i(P)}{z_I(P)} z_I(P), & i \neq I \\ z_I(1 - x_0), & i = I \end{cases}, \bar{l}_i = \begin{cases} l_i, & i \neq I \\ l_I - 1, & i = I \end{cases}$$

dir. Her i için $v_P(z_i) \geq \varepsilon$ olduğunu ve I, $v_P(z_I) = \varepsilon$ olan en büyük indis olduğunu hatırlayalım. İspatı tamamlamak için i ve l ile parametrelenmiş $\{x_0^l z_i : 0 \leq i < 2^k, 0 \leq l \leq l_i\}$ ailesi $\mathcal{L}(D)$ nin bir tabanı ise, $\{x_0^l \bar{z}_i : 0 \leq i < 2^k, 0 \leq l \leq \bar{l}_i\}$ ailesinin $\mathcal{L}(D - P)$ nin tabanı olduğunu görmek gereklidir.

$\mathcal{L}(D - P) = \mathcal{L}(D)$ ise, $l_i \geq 0$ ise $v_P(z_i) > \varepsilon$ ve $z_i(P) = 0$ dır. $z_i \in \mathcal{L}(D)$ dir. Böyle i değerlerinden tam biri $\mathcal{L}(D)$ nin tabanına katkı yapar ve özel olarak $v_P(z_i) = \varepsilon$ olduğundan $l_I < 0$ dır. Buradan, i için $l_i \geq 0$ ise $\bar{z}_i = z_i$,ve $\bar{l}_i = l_i$ elde ederiz. $x_0^l \bar{z}_i$ ve $x_0^l z_i$ ailesi aynıdır. $\mathcal{L}(D - P) \subseteq \mathcal{L}(D)$ ise boyut farkının 1 olması ile başlıyalım. Öyle bir i vardır ki, $l_i \geq 0$ ve $v_P(z_i) = \varepsilon$ dur. Aslında her i, $l_i \geq 0$, için $v_P(z_i) > \varepsilon$ ise $x_0^l z_i$ elemanı $\mathcal{L}(D)$ nin tabanına katkı yaparsa $\mathcal{L}(D - P)$ye ait olacaktır ve $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D - P)$ olmasını gerektirir. Bu ise kabulle çelişir. I nın maksimalliğinden $l_I \geq 0$ dır.Özel olarak, $x_0^l \bar{z}_i$ ailesi ve $x_0^l z_i$ ailesinden 1 az elemana sahiptir. $x_0^l z_i$ elemanları $\mathcal{L}(D - P)$ uzayındadır ve $x_0^l z_i$ ailesinin doğrusal bağımsız olduğunu göstermek gereklidir. Her i ve l, $0 \leq l \leq \bar{l}_i$ ise $x_0^l \bar{z}_i \in \mathcal{L}(D - P)$ olduğu ispatlanmalıdır. İlk olarak, $i = I$ durumunu alalım. Bu durumda, $x_0^l \bar{z}_I = x_0^l z_I - x_0^{l+1} z_I$ dir. $\bar{l}_I = l_I - 1$, $0 \leq l \leq \bar{l}_I$, olduğu için $x_0^l \bar{z}_I$ ve $x_0^l z_I$, $\mathcal{L}(D)$ ye aittir.

$v_P(x_0^l \bar{z}_I) = \varepsilon + 1 > \varepsilon$ olduğundan $x_0^l \bar{z}_I \in \mathcal{L}(D - P)$ elde ederiz. İkinci olarak, $i \neq I$ ve $v_P(z_i) > \varepsilon$ olsun. Bu durumda, $z_i(P) = 0$ ve $x_0^l \bar{z}_i = x_0^l z_i$ elde edilir. O halde, $x_0^l \bar{z}_i \in \mathcal{L}(D - P)$, $0 \leq l \leq \bar{l}_i$ olduğundan $x_0^l \bar{z}_i \in \mathcal{L}(D - P)$ dir. Üçüncü olarak, $i \neq I$ ve $v_P(z_i) = \varepsilon$ olsun. Bu durumda, $i < I$ ve $\bar{l}_i = l_i \leq \bar{l}_I$ dır. $0 \leq l \leq l_i$ için $x_0^l z_i$, $x_0^l z_I \in \mathcal{L}(D)$ olduğundan $x_0^l \bar{z}_i \in \mathcal{L}(D)$ dir. Üstelik, $\bar{z}_i(P) = 0$ ve $v_P(x_0^l \bar{z}_i) = v_P(\bar{z}_I) > \varepsilon$ dur. Dolayısıyla, $x_0^l \bar{z}_i \in \mathcal{L}(D - P)$ elde edilir.

Şimdi,$\alpha_{i,l} \in K$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^k} \sum_{l=0}^{\bar{l}_i} \alpha_{i,l} x_0^l \bar{z}_i = 0$ olsun. $\mathcal{I} := \{i : 1 \leq i < 2^k\}$ tanımlayalım ve $\mathcal{I}_0 := \{i \in \mathcal{I} : i \neq I, v_P(z_i) = \varepsilon\}$, $\mathcal{I}_1 := \{i \in \mathcal{I} : i \neq I, v_P(z_i) > \varepsilon\}$ olmak üzere $\mathcal{I} = \{I\} \cup \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_1$ şeklinde ayrık kümelerin birleşimi olarak yazılabilir. Bu durumda toplam, $\bar{z}_i$ ve $\bar{l}_i$ nin tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^k} \sum_{l=0}^{\bar{l}_i} \alpha_{i,l} x_0^l \bar{z}_i &= \sum_{i \in I_0} \sum_{l=0}^{l_i} \alpha_{i,l} x_0^l \left(z_i - \frac{z_i(P)}{z_I(P)} z_I \right) + \sum_{i \in I_1} \sum_{l=0}^{l_i} \alpha_{i,l} x_0^l z_i \\ &+ \sum_{l=0}^{l_I - 1} \alpha_{I,l} \left(x_0^l z_I - x_0^{l+1} z_I \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Her $i \in I$ için toplamda görünen $x_0^l z_i$ ler $0 \leq l \leq l_i$ içindir. Böyle $x_0^l z_i$

elemanları doğrusal bağımsız olduğundan, $i \neq I$ için $\alpha_{i,l} = 0$ elde edilir.

$$\sum_{l=0}^{l_I} (\alpha_{I,l} - \alpha_{I,l-1})\, x_0^l z_I = 0$$

dır, burada, $l_I \geq 0$, $\alpha_{I,l-1} := \alpha_{I,l} := 0$ dır. $x_0^l z_I$ ların doğrusal bağımsızlığından, her l için $\alpha_{I,l-1} = \alpha_{I,l}$ dir. l üzerinden tümevarım ile $\alpha_{I,l} = 0$ bulunur ve bu ise $x_0^l z_I$ ların doğrusal bağımsız olduğunu gösterir. ∎

Teorem 3.27. *Her $s \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$ ve her $0 \leq m < 2^j$ için $c_m^{(j)}$ tamsayılarını ve $w_m^{(j)} \in T_j$ fonksiyonlarını veren bir algoritma vardır. Öyle ki, her $s \in \mathbb{Z}$ için m, l ile parametrelenen*

$$\left\{ x_0^l w_m^{(j)} : 0 \leq m < 2^j,\ 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s-m}{2^j} \right\rfloor - c_m^{(j)} := l_m(s) \right\}$$

ailesi $\mathcal{L}(sP_\infty^j)$ uzayının bir Hermityen tabanıdır.

İspat. Teorem 3.21. ve Teorem 3.28. uygulanarak j üzerinden tümevarım ile ispat yapılabilir. $j = 0$ için $c_0^{(0)} := 0$ ve $w_0^{(0)} := 1$ olsun. $j \geq 1$ olsun. Her $s \in \mathbb{Z}$ için

$$\mathcal{L}(sP_\infty^j) = \mathcal{L}\left([sP_\infty^j]_{|T_{j-1}} \right) \oplus \mathcal{L}\left([sP_\infty^j + (x_j)]_{|T_{j-1}} \right) x_j$$

$[sP_\infty^j]_{|T_{j-1}} = \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor P_\infty^{j-1}$ dir, tümevarım hipotezine göre $x_0^l w_m^{(j-1)}$, $0 \leq m < 2^{j-1}$, $0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s-2m}{2^j} \right\rfloor - c_m^{(j-1)}$, $\mathcal{L}\left([sP_\infty^j]_{|T_{j-1}} \right)$ in bir tabanı olsun, burada $\left\lfloor \left(\left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor - m \right) / 2^{j-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{s-2m}{2^j} \right\rfloor$ dir. $\mathcal{L}\left([sP_\infty^j + (x_j)]_{|T_{j-1}} \right)$ için bir taban Teorem 3.28. kullanılarak elde edilir. $\mathcal{L}(sP_\infty^j)$ nin istenen tabanı $0 \leq m < 2^j$ için

$$c_m^{(j)} := \begin{cases} c_{m/2}^{(j-1)}, & m \text{ çift tamsayı} \\ \tilde{c}_m^{(j-1)}, & m \text{ tek tamsayı} \end{cases}, \quad w_m^{(j)} := \begin{cases} w_{m/2}^{(j-1)}, & m \text{ çift tamsayı} \\ \tilde{w}_m^{(j-1)} x_j, & m \text{ tek tamsayı} \end{cases}$$

tanımlanarak oluşturulabilir, bu tabanın Hermityen taban olması Sonuç 3.30.'dan görülür. ∎

Teorem 3.28. *Her $j \geq 1$, $0 < m < 2^j$ ve m tek sayısı için $\tilde{c}_m^{(j-1)}$ tamsayılarını ve $\tilde{w}_m^{(j-1)} \in T_{j-1}$ fonksiyonlarını oluşturan bir algoritma vardır, öyle ki her $s \in \mathbb{Z}$ için m, l ile parametrelenen*

$$\left\{ x_0^l \tilde{w}_m^{(j-1)} : m \text{ tek tamsayı } 0 < m < 2^j,\ 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s-m}{2^j} \right\rfloor - \tilde{c}_m^{(j-1)} \right\}$$

ailesi $\mathcal{L}\left([sP_\infty^j + (x_j)]_{|T_{j-1}} \right)$ uzayının bir tabanıdır.

İspat. Önerme 3.24.'in sonucu olarak elde edilebilir. ∎

3.2.2. $\mathcal{F}_2$ fonksiyon cismi kulesi için Weierstrass semigrup $H\left(P_\infty^j\right)$

j tamsayısı sabitlendiğinde ve s değişkeni için $\mathcal{L}\left(sP_\infty^j\right)$ uzayının boyutu bilindiği için $H\left(P_\infty^j\right)$ Weierstrass semigrubu hesaplanabilir.

Teorem 3.29. *Her $j \geq 0$ için $H\left(P_\infty^j\right)$ Weierstrass semigrubu Teorem 3.27.'de verilen $c_m^{(j)}$ katsayıları ile ilişkilendirilebilir. Yani, her $s \in \mathbb{Z}$ için $s = q\left(s\right)2^j + m\left(s\right), 0 \leq m\left(s\right) < 2^j, q\left(s\right), m\left(s\right) \in \mathbb{Z}$, olsun. Bu durumda, $s \in H\left(P_\infty^j\right)$ olması için gerek ve yeter koşul $q\left(s\right) \geq c_{m(s)}^{(j)}$ olmasıdır.*

İspat. $j \geq 0$ sayısını sabitleyelim. $\# : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \#\left(L\right) = \begin{cases} k+1, & L \geq -1 \\ 0, & L \leq -1 \end{cases}$ fonksiyonunu tanımlayalım. $s \in \mathbb{Z}$ için $\mathcal{L}\left(sP_\infty^j\right)$ uzayının Teorem 3.27.'de verilen tabanındaki elemanları sayarak,

$$\text{boy}\,\mathcal{L}\left(sP_\infty^j\right) = \sum_{m=0}^{2^j-1} \#\left(l_m\left(s\right)\right)$$

olduğu görülür.

$$\Delta\left(s\right) := \text{boy}\,\mathcal{L}\left(sP_\infty^j\right) - \text{boy}\,\mathcal{L}\left(\left(s-1\right)P_\infty^j\right) = \sum_{m=0}^{2^j-1} \left[\#\left(l_m\left(s\right)\right) - \#\left(l_m\left(s-1\right)\right)\right].$$

$s - m = 2^j q + r$, $0 \leq r < 2^j$ yazılırsa her m ve s için

$$l_m\left(s\right) - l_m\left(s-1\right) = \left\lfloor \frac{s-m}{2^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s-1-m}{2^j} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & m \equiv s \left(\text{mod}\, 2^j\right) \\ 0, & m \not\equiv s \left(\text{mod}\, 2^j\right) \end{cases}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\Delta\left(s\right) = \sum_{m=0}^{2^j-1} \left[\#\left(l_m\left(s\right)\right) - \#\left(l_m\left(s-1\right)\right)\right] = \#\left(l_m\left(s\right)\right) - \#\left(l_m\left(s-1\right)\right)$$

dir. Her $s \in \mathbb{Z}$ için

$$s \in H\left(P_\infty^j\right) \Leftrightarrow \Delta\left(s\right) = 1 \Leftrightarrow l_{m(s)}\left(s\right) \geq 0 \Leftrightarrow q\left(s\right) - c_{m(s)}^{(j)} \geq 0$$

dır. ∎

Sonuç 3.30. *Daha önceki notasyonlar ile birlikte, $w_m^{(j)}$ fonksiyonunun kutup böleni,*

$$\left(w_m^{(j)}\right) = \left(2^j c_m^{(j)} + m\right) P_\infty^j$$

dir. Ayrıca, $\{2^j\} \cup \left\{2^j c_m^{(j)} + m \mid 0 < m < 2^j\right\}$ kümesi, $H\left(P_\infty^j\right)$ semigrubunu üretir.

İspat. m yi sabitleyelim ve $s := 2^j c_m^{(j)} + m$ şeklinde tanımlayalım. $l_m(s-1) = -1$, $l_m(s) = 0$ olduğu için $w_m^{(j)} \in \mathcal{L}(sP_\infty^j) \backslash \mathcal{L}((s-1)P_\infty^j)$ dır. x_o, P_∞^j de 2^j mertebeli tek kutba sahiptir. Teorem 3.29.'dan ispat tamamlanmış olur. ∎

Bütün bu uygulamalar ile birlikte, P_∞^j noktasında $H^j := H(P_\infty^j)$ Weierstrass semigrubu $0 \leq j \leq 8$ aşamalarında hesaplayabiliriz.

Boş olmayan $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, a_{n+1} - \infty$ aralıkları ile birlikte $H(P_\infty^j)$ semigrubunun elemanlarını aşağıdaki şekilde listeleyeceğiz: $H^j = \cup_{k=1}^n [a_k, b_k] \cup (a_{n+1}, \infty)$, $a_k = b_k$ durumunda ise $a_k - b_k$ yerine a_k yazacağız.

Çizelge 3.1. $j = 1, ..., 7$ için T_j/K nin cins g_{T_j} ve semigrup H^j çizelgesi

j	g_{T_j}	H^j
0	0	0-∞
1	1	0; 2-∞
2	3	0; 3-4; 6-∞
3	9	0; 6; 8; 11-12; 14-∞
4	21	0; 12; 15-16; 22-24; 27-32; 34-∞
5	49	0; 24; 30-32; 44; 46-48; 53-56; 58-64; 68-72; 74-∞
6	105	0; 48; 60; 62-64; 88; 92; 94-96; 103; 106-112; 115-128; 135-136; 138-144; 147-∞
7	225	0; 96; 120; 124; 126-128; 176; 184; 188; 190-192; 206; 212-216; 218; 220-224; 230-232; 234-240; 242-256; 263; 269-272; 276-280; 282-288; 293-∞

Çizelge 3.2. $j = 8$ için $g_8 = 465$ ve semigrup H^8 in çizelgesi

0	192	240	248	252
254-256	352	368	376	380
382-384	412	423-424	426	428
430	432	436	439-440	442
444-448	459-464	467-472	474-480	483-484
486-512	519	526-527	533	535
538-540	542-544	547	549	551-552
554-561	563-576	579	581-583	585-∞

4. SONUÇ

Bu çalışmada, cebirsel fonksiyonlar cismi kulelerinde tek noktalı semigrup $H(P)$ nin davranışının incelenmesi hedeflemiştir. Özel olarak, iki eğri ailesi için Beelen vd (2006), Garcia ve Stichtenoth (1996), Noseda vd (2012) ve Pellikaan vd (1998) makaleleri incelenerek söz konusu semigrup için formüller yeniden üretilmiştir.

$\mathbb{F}_{q^2}$ üzerinde $F_n := \mathbb{F}_{q^2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, ..., n-1$ ve $P_\infty^{(n)}$, F_n cisminin derecesi 1 olan bir noktası olmak üzere

$$x_{i+1}^q + x_{i+1} = \frac{x_i^q}{x_i^{q-1}+1}$$

eşitliği ile verilen fonksiyon cismi kulesi olsun. Her $n \geq 0$ için (c_n) tamsayı dizisi

$$c_n = \begin{cases} q^n - q^{\frac{n}{2}}, & n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2) \\ q^n - q^{\frac{n+1}{2}}, & n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2) \end{cases}$$

olmak üzere, $S_0 = \mathbb{N}_0$ ve $n \geq 0$, $S_{n+1} = q.S_n \cup \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \geq c_{n+1}\}$ semigrup dizisi tanımlanabilir. Her $m \geq 1$ için F_m cebirsel fonksiyon cisminde $A^{(m)} \geq 0$ için der $A^{(m)} = c_m - g_{F_m}$ ve boy $\mathcal{L}\left(c_m.P_\infty^{(m)} - A^{(m)}\right) = 1$ koşullarını sağlayan bir $A^{(m)}$ böleninin var olduğu gösterilebilir. Bu durumda, S_m nin ve $H\left(P_\infty^{(m)}\right)$ nin boşluk sayıları aynıdır ve g_{F_m} ye eşittir, yani $H\left(P_\infty^{(m)}\right) = S_m$ dir.

Diğer yandan, p tek asal sayı olmak üzere, $K = \mathbb{F}_{p^2}$ sonlu cismi üzerinde $T_0 = \mathbb{F}_{p^2}(x_0)$, $j \geq 0$ için $T_{j+1} = T_j(x_{j+1})$ ve $x_{j+1}^2 = \frac{x_j^2+1}{2x_j}$ eşitliği ile verilen tekrarlı tanımlı $\mathcal{F}_2 = (T_j)_{j\geq 0}$ cebirsel fonksiyon cismi kulesini dikkate alalım. Her $s \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$ ve $0 \leq m < 2^j$ için $c_m^{(j)} \in \mathbb{Z}$ ve $w_m^{(j)} \in T_j$ fonksiyonlarını veren bir algoritma vardır ki m, l ile parametrelenen

$$\{x_0^l w_m^{(j)} : 0 \leq m < 2^j, 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s-m}{2^j} \right\rfloor - c_m^{(j)} := l_m(s)\}$$

ailesi Riemann-Roch uzayı $\mathcal{L}(sP_\infty^j)$ uzayının bir Hermityen tabanıdır. Her $j \geq 0$ için $H(P_\infty^j)$ Weierstrass semigrubu daha önce verilen $c_m^{(j)}$ katsayıları ile ilişkilendirilebilir. Her $s \in \mathbb{Z}$ için $s = q(s)\, 2^j + m(s)$, $0 \leq m(s) < 2^j$, $q(s)$,$m(s) \in \mathbb{Z}$, olmak üzere $s \in H(P_\infty^j)$ olması için gerek ve yeter koşul $q(s) \geq c_{m(s)}^{(j)}$ olmasıdır. Ayrıca, $w_m^{(j)}$ fonksiyonunun kutup böleni,

$$\left(w_m^{(j)}\right) = \left(2^j c_m^{(j)} + m\right) P_\infty^j$$

dur ve $\{2^j\} \cup \left\{2^j c_m^{(j)} + m \mid 0 < m < 2^j\right\}$ kümesi, $H(P_\infty^j)$ semigrubunu üretir.

5. KAYNAKLAR

BASSA, A., GARCIA, A. and STICHTENOTH, H. 2008. A new tower over cubic finite fields. *Moscow Mathematical Journal*, 8(3): 401-408.

BEELEN, P., GARCIA, A. and STICHTENOTH, H. 2006. Towards a classification of recursive towers of function fields over finite fields. *Finite Fields and Their Applications*, 12(1): 56-77.

BEZERRA, J., GARCİA, A. and STICHTENOTH, H. 2003. An explicit tower of function fields over cubic finite fields and Zink's lower bound. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2005(589): 159-199.

BEZERRA, J., GARCİA, A. 2004. A tower with non-Galois steps which attains the Drinfeld–Vladut bound. *Journal of Number Theory*, 106(1): 142-154.

CHEVALLEY, C. 1951. Introduction to the theory of algebraic functions of one variable. American Mathematical Society Publishing, New York, 186p.

GARCIA, A. and STICHTENOTH, H. 1995. A tower of Artin-Schreier extensions of function fields attaining the Drinfeld-Vladut bound. *Inventiones Mathematicae*, 121(1): 211-222.

GARCIA, A. and STICHTENOTH, H. 1996. On the asymptotic behaviour of some towers of function fields over finite fields. *Journal of Number Theory*, 61(2): 248-273.

GARCIA, A., STICHTENOTH, H. and RUCK, H. G. 2003. On tame towers over finite fields. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 53-80.

HUNGERFORD, T. W. 1989. Algebra. Springer-Verlag, New York.

KARAKAŞ, H. 1977. Application of generalized Weierstrass points: divisibility of divisor classes. *Journal fur die Riene und Angewandte Mathematik*, 299/300: 388-395.

MAHARAJ, H. 2004. Code construction on fiber products of Kummer covers. *IEEE Transactions on Information Theory*, 50(9): 2169-2173.

NOSEDA, F., OLIVEIRA, G. and QUOOS, L. 2012. Bases for Riemann-Roch spaces of one point divisors on an optimal tower of function fields. *IEEE Transactions on Information Theory*, 58(5): 2589-2598.

PELLIKAAN, R., STICHTENOTH, H. and TORRES, F. 1998. Weierstrass semigroups in an asymptotically good tower of function fields. *Finite Fields and Their Applications*, 4(4): 381-392.

ROSALES, J. C. and GARCIA-SÁNCHEZ, P. A. 2009. Numerical Semigroups. Springer, New York.

SALVADOR, G. D. V. 2006. Topics in Theory of Algebraic Function Fields. Birkhäuser, Berlin.

SCHMIDT, F. K. 1939. Die wronskische determinante in beliebigen differenzierbaren funktionenkörpern. *Mathematische Zeitschrift*, 45(1): 62-74.

STICHTENOTH, H. 2009. Algebraic Function Fields and Codes. Springer-Verlag, Berlin.

VAN DER GEER, G., and VAN DER VLUGT, M. 2002. An asymptotically good tower of curves over the field with eight elements. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 34(03): 291-300.

WULFTANGE, J. 2003. Zahme Türme algebraischer Funktionenkörper. Ph.D. Thesis, University of Essen.

ÖZGEÇMİŞ

Nihal GÜMÜŞBAŞ 1988 yılında Kırıkkale'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2007 yılında girdiği Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2011 yılında mezun oldu. Eylül 2013'te Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Ekim 2013'te Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalına Araştırma Görevlisi olarak atandı. Araştırma Görevlisi olarak halen aynı bölümde çalışmalarına devam etmektedir.