T. C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ VE ORLICZ MORREY UZAYLARI ÜZERİNE

Gülsüm KÖKALP

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

T. C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ VE ORLICZ MORREY UZAYLARI ÜZERİNE

Gülsüm KÖKALP

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 10/01/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI

Yrd. Doç. Dr. Ramazan UYHAN

Doç. Dr. Melih ERYİĞİT

ÖZET

ORLICZ VE ORLICZ MORREY UZAYLARI ÜZERİNE

Gülsüm KÖKALP

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI
Ocak 2017, 35 sayfa

Bu tez çalışmasının amacı L_p Lebesque uzaylarının bir genelleştirilmesi olan Orlicz uzaylarının özelliklerini incelemektir.W.Orlicz tarafından tanımlanan bu uzaylar Fourier harmonik analizinin ve uygulamalarının faydalı bir teknik aracıdır.

Bu amaca ulaşmak için öncelikle Orlicz sınıfının, Young fonksiyonunun tanımları verilmiş ve gerekli özellikleri özetlenmiştir. Ardından Orlicz uzaylarındaki bazı önemli teoremler çalışılmıştır.

Son olarak Morrey uzayının genelleştirilmesi Orlicz -Morrey uzayları tanımlanmış ve bazı önemli özellikleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Orlicz uzayı, Young fonksiyonu, Luxemburg Normu, Morrey uzayı, Orlicz-Morrey uzayı vs.

JÜRİ: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI (Danışman)
Yrd. Doç. Dr. Ramazan UYHAN
Doç. Dr. Melih ERYİĞİT

ABSTRACT

ORLICZ AND ORLICZ MORREY SPACES

Gülsüm KÖKALP

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI
January 2017, 35 pages

The aim of this thesis is to investigate the properties of the Orlicz space which are the generalizations of Lebesque spaces L_P. These space is defined by W. Orlicz are useful tools in Fourier harmonic analysis and its applications.

To achieve this, firstly the definition of Orlicz clases and Young function are given and some required properties are summarized. Then some important theorems in Orlicz spaces are studied.

Finally Orlicz-Morrey spaces which are generalizations of Morrey spaces are defined and some important properties are examined.

KEYWORDS: Orlicz spaces, Young function, Luxemburg norm, Morrey spaces, Orlicz-Morrey spaces etc.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI (Supervisor)
Asst. Prof. Dr. Ramazan UYHAN
Assoc. Prof. Dr. Melih ERYİĞİT

ÖNSÖZ

Fourier harmonik analizinin temel çalışma alanlarından biri olan Orlicz uzayları bir genelleşmesidir.

Klasik analizden iyi bilinen L_p uzayları, $X \subset \mathbb{R}^n$ ve $p \geq 1$ için

$$L_p(X) = \left\{ f : f,\ X \text{ de ölçülebilir, } \int\limits_X |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Fourier harmonik analizinin birçok önemli operatörlerinin (Maksimal operatör, Singuler integraller, Potansiyeller gibi) bu uzaylarda sınırlılığı bir çok matematikçi tarafından incelenmektedir.

Bu bağlamda L_p uzaylarının genelleşmesi olarak bilinen Orlicz uzaylarının ve özelliklerinin incelenmesi, benzer şekilde Orlicz-Morrey uzaylarının incelenmesi önemlidir. Bunun için yaptığımız çalışma bundan sonraki akademik çalışmamıza ışık tutacaktır.

Bu tez çalışması esas olarak iki bölümden oluşmuştur. Giriş bölümünde bazı temel kavramlar ve gösterimleri hakkında bilgi verilmiştir. Kuramsal bilgiler ve kaynak taramaları kısmı kendi içinde alt bölümlere ayrılarak Orlicz uzayları ve Orlicz-Morrey uzayları incelenmiştir.

Bu çalışma boyunca bilgisini,zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n = \{x = (x_{1,}x_{2,}x_{3...}x_n) : x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, 3...\}$
Ω	$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık küme
$L_p(\Omega)$	Ω da ölçülebilir Lebesque uzayı
$\Vert f \Vert_{L_p}$	L_p Lebesque uzayında f fonksiyonunun normu
$\widetilde{L_\Phi}(\Omega)$	$\Phi(t)$, $t \geq 0$ fonksiyonu için Ω üzerindeki ölçülebilir küme Orlicz sınıfı
$\Vert f \Vert_\Phi$	Φ Young fonksiyonu olmak üzere f fonksiyonunun Orlicz normu
$\vert\Vert f \Vert\vert_\Phi$	Φ Young fonksiyonu olmak üzere f fonksiyonununLuxemburg normu
$L_{p,\lambda}$	$1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < n$ olmak üzere Morrey uzayı
$B(a, r)$	a merkezli r yarıçaplı yuvar
$\vert B \vert$	B yuvarının Lebesque ölçümü

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu bölümde tez boyunca sıkça kullanılan bazı kavramların tanımı ve gösterimleri verilecektir. Başka özel kavramların tanım ve gösterimleri, tez boyunca konu içerisinde anlatılacaktır.

(X, M, μ) ve (Y, N, υ) ölçüm uzayları olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $A \subset Y$ ölçülebilir kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ ölçülebilir küme ise o zaman f fonksiyonuna X den Y 'ye ölçülebilir fonksiyon denir.

Ayrıca

$$L_p(X) = \left\{ f : f,\ X \text{ de ölçülebilir ve } \int\limits_X |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Banach uzayı olan L_p Lebesque uzayında norm ise

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanır.

Konveks fonksiyon için Jensen eşitsizliği ve integraller için Jensen eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her $\alpha \in [0, 1]$ için Jensen eşitsizlği

$\Phi(\alpha x \ + \ (1-\alpha) y) \leq \alpha \Phi(x) \ + \ (1-\alpha) \Phi(y)$

biçimindedir. Bundan başka $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı aralık ve f, I da integrallenebilir fonksiyon olmak üzere integraller için Jensen eşitsizliği ise

$$\Phi\left(\frac{1}{|I|} \int\limits_I f(x) \, dx \right) \leq \frac{1}{|I|} \int\limits_I \Phi(f(x) \, dx$$

dir.Burada $|I|$, $I \subset \mathbb{R}$ nin Lebesque ölçümüdür.

Orlicz sınıfı

$$\widetilde{L_\Phi}(\Omega) = \left\{ f : f,\ \Omega \text{ da ölçülebilir, } \int\limits_\Omega \Phi(|f(x)|) dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu bağlamda çalışma boyunca Orlicz sınıfları ardından Orlicz sınıflarını karakterize eden Young fonksiyonları ve özellikleri incelenmiştir.

Orlicz uzayı

$$L_\Phi(\Omega) = \{f; f,\ \Omega \text{ da ölçülebilir ve } \|f\|_\Phi < \infty\}$$

ile tanımlanır. Orlicz uzayının normu

$$\|f\|_\Phi = \sup_{\varrho \in (g,\Psi) \leq 1} \int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx$$

şeklinde verilmektedir.

Φ Young fonksiyonu ve f Ω da tanımlı ölçülebilir fonksiyon olmak üzere

$$\||f\||_\Phi = \inf\left\{k > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right) dx \leq 1\right\}$$

normuna f fonksiyonun Luxemburg normu diyeceğiz ve Orlicz normu ile Luxemburg normunun $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzaylarında denk olduğunu göstereceğiz.

Son olarak

Morrey Uzayı $1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < n$ olmak üzere

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} = \sup_{B=B(a,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_B |f(x)|^p\, dx\right)$$

şeklinde tanımladığımız normdur.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Polonyalı matematikçi Orlicz (1932, 1936) tarafından tanımlanan ve çalışılmaya başlanan Orlicz uzayları, L_P Lebesque uzaylarının genelleştirmesi olarak bilinir. İlerleyen çalışmalarla birlikte Orlicz uzayları, Fourier harmonik analizinin yanısıra fonksiyonel analiz, diferansiyel denklemler, integral denklemler, olasılık teorisi ve matematik istatistik gibi matematiğin birçok dalının temel teknik aracı olmuştur.

Fourier harmonik analizinde çalışılan birçok problem ile Orlicz uzaylarında da çalışılmıştır. Örneğin iyi bilinen Hardy-Littlewood maksimal operatörünün Orlicz uzaylarında sınırlılığı Kita (1997, 1996) ve Cianchi (1999) tarafından gösterilmiştir. Ayrıca yine Fourier harmonik analizinin önemli operatörlerinden I_α-Riesz potansiyelinin Orlicz uzayındaki sınırlılığı, yani Hardy-Littlewood-Sobolev benzeri teorem Trudinger (1967) tarafından kanıtlanmıştır.Orlicz uzaylarında ve kardeş uzaylar diye bilinen Orlicz-Morrey uzaylarında birçok matematikçi, örneğin Adams (1977), Birnbaum ve orlicz (1931), Cianchi (1999), Guliyev (2009), Hasanov (2014), Nakai (2001, 2008), Peetre (1969), Sawano vd (2012), Torchinsky (1976) ve diğerleri çalışmıştır.

Bu bölümde Orlicz sınıfları, Young fonksiyonu, Orlicz Uzayı, Luxemburg normu ve Orlicz Morrey uzayları hakkında tanım, teorem ve ispatları verilmiştir.

2.1. Orlicz Sınıfları, Young Fonksiyonu, Young Eşitsizliği

Tanım 2.1.1. *(Kufner vd 1977). $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $\Phi(t), t \geq 0$ fonksiyonu verilsin.*

$$\widetilde{L_\Phi}(\Omega) = \left\{ f : f,\ \Omega \text{ da ölçülebilir; } \int\limits_\Omega \Phi(|f(x)|)dx < \infty \right\} \tag{2.1.1}$$

kümesine Orlicz sınıfı denir.

$L_p(\Omega)$, $p \geq 1$ Lebesque uzayları özel bir Orlicz sınıfıdır. Şöyle ki $\Phi(t) = t^p$, $p \geq 1$ olmak üzere $\widetilde{L_\Phi}(\Omega) = L_p(\Omega)$ olur.

Bundan başka $\Phi(t) = |\sin t|$, $t \geq 0$ alınırsa $\mu(\Omega) < \infty$ olmak üzere Ω da tanımlı her ölçülebilir fonksiyon $\widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ Orlicz sınıfına ait olur. Yani

$$\int\limits_\Omega \Phi(|f(x)|)\,dx = \int\limits_\Omega |\sin(|f(x)|)|\,dx \leq \mu(\Omega) < \infty$$

Ayrıca $\Omega = (0,1)$ ve $\Phi(t) = e^t$, $t \geq 0$ alındığında $f(x) = \frac{1}{2}\ln x$ için

$$\int\limits_0^1 \Phi(|f(x)|)dx = \int\limits_0^1 e^{\left|\frac{1}{2}\ln x\right|}dx = \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \infty$$

iken

$$\int_0^1 \Phi(|2f(x)|)dx = \int_0^1 e^{|\ln x|}dx = \int_0^1 e^{-\ln x} = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \infty$$

olduğundan $\widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ Orlicz sınıfı her zaman vektör uzayı olmayabilir.

İşte Orlicz sınıflarını daha kullanışlı hale getirmek için biraz daha daraltmak gerekir, bu ise $\Phi(t)$, $t \geq 0$ fonksiyonu üzerinden yapılmaktadır. Bunun için aşağıda özel bir $\Phi(t)$ fonksiyonu tanımlanacaktır.

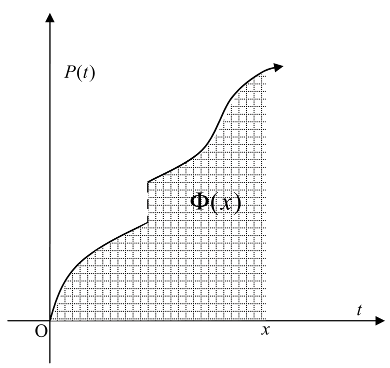
Tanım 2.1.2. *(Kufner vd 1977). $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu verilsin.*

(a) $\varphi(0) = 0$ *ve* $s > 0$ *için* $\varphi(s) > 0$ *(pozitiflik),*
(b) $s > 0$ *için* $\varphi(s)$ *sağdan sürekli,*
(c) $\varphi(\infty) = \infty, \left(\lim\limits_{s\to\infty} \varphi(s)\right) = \infty$

koşulları sağlıyorsa

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$$

fonksiyonuna Young fonksiyonu denir.



Şekil 2.1. Young fonksiyonu

Örnek 2.1.1. *(a)* $\varphi(s) = s^{p-1}$, $p > 1$ *olmak üzere* $\Phi(t) = \int_0^t s^{p-1}ds = \frac{t^p}{p}$, $t \geq 0$ *Young fonksiyonudur.*

(b) $\varphi(s) = e^s - 1$ *için* $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds = e^t - t - 1$, $t \geq 0$ *Young fonksiyonudur.*

Buradaki $\varphi(s)$ fonksiyonlarının Tanım 2.1.2 'deki koşulları sağladığı açıktır.

Aşağıdaki lemma ile Young fonksiyonunun özelliklerini göreceğiz.

Lemma 2.1.3. $\Phi(t), t \geq 0$ *Young fonksiyonu olsun. Bu durumda*

(a) $\Phi(t)$, $[0,\infty)$ *aralığında süreklidir.*
(b) $\Phi(0) = 0$ *ve* $t > 0$ *için* $\Phi(t) > 0$ *dır.*
(c) $\Phi(t)$, *monoton azalmayan fonksiyondur.*
(d) $\Phi(t)$, $[0,\infty)$ *aralığında konveks fonksiyondur.*
(e)

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \textit{ ve } \lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$$

(f)

$$\begin{cases} \Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t), & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \Phi(\beta t) \geq \beta\Phi(t), & \beta \geq 1 \end{cases}$$

İspat.

(a) Herhangi $t_0 > 0$ alalım. $\varphi(s), s > 0$ için sağdan sürekli olduğundan integraller için ortalama değer teoremi gereğince $t > 0$ olmak üzere,

$$0 \leq |\Phi(t) - \Phi(t_0)| = \left| \int_0^t \varphi(s)ds - \int_0^{t_0} \varphi(s)ds \right|$$
$$= \left| \int_t^{t_0} \varphi(s)ds \right| = |\varphi(\xi| \,.\, |t - t_0|$$

$t < \xi < t_0$ ve $t < \xi < t_0$ eşitsizliğinden $\lim\limits_{t\to t_0} \Phi(t) = \Phi(t_0)$ elde edilir. Ayrıca $\Phi(0) = 0$ olduğundan $\lim\limits_{t\to 0^+} \Phi(t) = 0$ 'dır.

(b) $\Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(s)ds$ olduğundan $\varphi(s) \geq 0$ ise $\Phi(t) \geq 0$ 'dır.

(c) Herhangi $t_1 \leq t_2$ için $\Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(s)ds \geq 0$ olduğundan $\Phi(t)$ fonksiyonu monoton azalmayandır.

(d) $\Phi(t)$ fonksiyonunun konveksliği için $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere aşağıdaki Jensen eşitsizliğini

$$\Phi(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda\Phi(s) + (1-\lambda)\Phi(t) \tag{2.1.2}$$

kontrol edelim.

$$\Phi\left(\lambda s+(1-\lambda)t\right)=\int\limits_{0}^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)dr$$

$$=\int\limits_{0}^{s}\varphi(r)dr+\int\limits_{s}^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)dr$$

$$=\lambda\int\limits_{0}^{s}\varphi\left(r\right)dr+(1-\lambda)\int\limits_{0}^{s}\varphi\left(r\right)dr+\int\limits_{s}^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)dr \tag{2.1.3}$$

dır. Ayrıca φ, monoton azalmayan ve sağdan sürekli olduğundan

$$\int\limits_{s}^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)dr\leq(1-\lambda)\left(t-s\right)\varphi\left(\lambda s+(1-\lambda)t\right)$$

ve

$$\int\limits_{\lambda s+(1-\lambda)t}^{t}\varphi\left(r\right)dr\geq\lambda\left(t-s\right)\varphi\left(\lambda s+(1-\lambda)t\right)$$

olur. Bu iki eşitsizliği birleştirdiğimizde

$$\lambda\int\limits_{s}^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)dr\ \leq(1-\lambda)\int\limits_{\lambda s+(1-\lambda)t}^{t}\varphi(r)dr$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}\int\limits_{s}^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)dr&=\lambda\int\limits_{s}^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)dr\ +(1-\lambda)\int\limits_{s}^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)dr\\&\leq(1-\lambda)\int\limits_{\lambda s+(1-\lambda)t}^{t}\varphi(r)dr+(1-\lambda)\int\limits_{s}^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)dr\\&=\int\limits_{s}^{t}(1-\lambda)\varphi(r)dr\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitsizliği (2.1.3) de kullanırsak

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda s+(1-\lambda)t) &\le \lambda\int_0^s \varphi(r)dr+(1-\lambda)\int_0^s \varphi(r)dr+(1-\lambda)\int_s^t \varphi(r)dr\\ &= \lambda\int_0^s \varphi(r)dr+(1-\lambda)\int_0^t \varphi(r)dr\\ &= \lambda\Phi(s)+(1-\lambda)\Phi(t)\end{aligned}$$

Jensen eşitsizliğini elde ederiz.

(e) $\varphi(s)$, $s\ge 0$ fonksiyonu sürekli olduğundan, integral için ortalama değer teoremine göre

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{\Phi(t)}{t} &= \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)ds\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\varphi(\xi_t)t,\ 0<\xi_t<t\\ &= \lim_{t\to 0^+}\varphi(\xi_t)=0\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{\Phi(t)}{t}=\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)ds\ge\frac{1}{t}\int_{\frac{t}{2}}^t \varphi(s)ds\ge\frac{1}{2}\varphi(\frac{t}{2})$$

eşitsizliğinden

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t}\ge\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\varphi(\frac{t}{2})=\infty$$

elde edilir.

(f) $0\le\lambda\le 1$ olmak üzere (2.1.2) Jensen eşitsizliğinde $t=0$ alalım ve $\Phi(0)=0$ olduğundan $\Phi(\lambda s)\le\lambda\Phi(s)$ olur. Ayrıca elde ettiğimiz bu son eşitsizlikte $\beta\ge 1$ olmak üzere $\lambda=\frac{1}{\beta}$ ve $s=\beta t$ alırsak, yani $\Phi(t)\le\frac{1}{\beta}\Phi(\beta t)$, $\Phi(\beta t)\ge\beta\Phi(t)$ elde ederiz. $\square$

$\Phi(t)$, $t\ge 0$ Young fonksiyonu olmak üzere ve $\widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ Orlicz sınıfları iyi özelliklere sahip olur. Aşağıdaki teoremler bununla ilgili olacaktır. Yine bu konu ile detaylı bilgiler Kufner vd (1977) ve Kokilashvili ve krbec'de (1991) vardır.

Teorem 2.1.4. *Φ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda $\widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ Orlicz sınıfı, konveks kümedir. Ayrıca $\mu(\Omega)<\infty$ olmak üzere $\widetilde{L_\Phi}(\Omega)\subset L_1(\Omega)$ dir.*

İspat. $\widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ Orlicz sınıfının konveks küme olduğunu göstermek istiyoruz.

Bu durumda konveks küme tanımı gereğince herhangi $f, g \in \widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda f + (1-\lambda)\, g \in \widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ olmalıdır.

Bunun için Φ Young fonksiyonu, konveks olduğundan (2.1.2) Jensen eşitsizliğini $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere

$$\Phi\left(\lambda\,|f(x)| + (1-\lambda)\,|g(x)|\right) \leq \lambda\Phi\left(|f(x)|\right) + (1-\lambda)\,\Phi(|g(x)|)$$

biçiminde yazabiliriz. Bu eşitsizliğin her iki yanından, Ω üzerinden integral alırsak

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(\lambda\,|f(x)| + (1-\lambda)\,|g(x)|\right) dx \leq \lambda \int\limits_{\Omega} \Phi\left(|f(x)|\right) dx + (1-\lambda) \int\limits_{\Omega} \Phi(|g(x)|) dx$$

elde ederiz. $f, g \in \widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ olduğundan

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(\lambda\,|f(x)| + (1-\lambda)\,|g(x)|\right) dx < \infty$$

olur. Bu ise $\lambda f + (1-\lambda)\, g \in \widetilde{L}_{\Phi(\Omega)}$ dir.

Şimdi ise $\mu(\Omega) < \infty$ olmak üzere $\widetilde{L_\Phi}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ olduğunu görelim. $f \in \widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ olsun. Φ Young fonksiyonu olmak üzere Lemma 2.1.3(e) de $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$ olduğundan öyle bir $K > 0$ vardır ki $|f(x)| > K$ eşitsizliği sağlandığında

$$\frac{\Phi\,|f(x)|}{|f(x)|} > 1$$

dir. $\Omega_K = \{x : |f(x)| > K\} \subset \Omega$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |f(x)|\, dx &= \int\limits_{\Omega_K} |f(x)|\, dx + \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_K} |f(x)|\, dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega_K} \Phi\left(|f(x)|\right) dx + K\mu\left(\Omega \setminus \Omega_K\right) \\
&< \int\limits_{\Omega} \Phi\left(|f(x)|\right) dx + K\mu\left(\Omega\right) < \infty
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $f \in L_1(\Omega)$ elde edilir. □

Uyarı 2.1.5. $\widetilde{L_\Phi}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ *kapsaması kesindir.Yani öyle fonksiyon kurmak mümkündür ki* $L_1(\Omega)$ *uzayındadır fakat* $\widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ *Orlicz uzayına ait değildir. Bu fonksiyonu şöyle* *kurabiliriz*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t}=\infty$$

olduğundan öyle $n\in\mathbb{N}$ *için* $t_n>1$ *sayıları vardır ki* $\frac{\Phi(t_n)}{t_n}\geq 2^n$ *dir. Ayrıca* $\Omega_n, n\in\mathbb{N}$ *ayrık alt kümeler dizisini de öyle secebiliriz ki*

$$\Omega_n\subset\Omega,\ \mu\left(\Omega_n\right)=\frac{\mu\left(\Omega\right)}{2^n t_n}$$

dir. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\Omega_n\right)=\mu\left(\Omega\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n t_n}<\mu\left(\Omega\right)$$

olur.Böylece $f(x)$ *fonksiyonu*

$$f=\begin{cases}t;\ x\in\Omega_n\\0;\ x\notin\Omega_n\end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa

$$\int_{\Omega}\left(|f(x)|\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}t_n\mu\left(\Omega_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n\frac{\mu\left(\Omega\right)}{2^n t_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu\left(\Omega\right)}{2^n}=\mu\left(\Omega\right)<\infty$$

iken

$$\int_{\Omega}\Phi\left(|f(x)|\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi\left(t_n\right)\mu\left(\Omega_n\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n t_n\mu\left(\Omega\right)}{2^n t_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\Omega\right)=\infty$$

elde edilir.

Tanım 2.1.6. *(Krasnosel'skii ve rutickii 1961).*$\Phi\left(t\right)$*,* $t\geq 0$ *Young fonksiyonu olmak üzere* $\psi\left(s\right)=\sup\limits_{\varphi(t)\leq s}t$*,* $s\geq 0$ *için*

$$\Psi\left(t\right)=\int_0^t\psi\left(s\right)ds$$

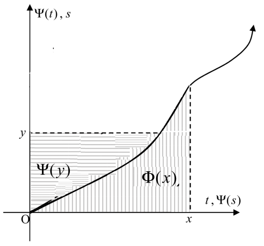
fonksiyonuna Φ *'nin eşlenik Young fonksiyonu denir. Eğer* φ *sürekli ve* $[0,\infty)$ *da kesin artan fonksiyon ise,* ψ *bildiğimiz* φ *fonsiyonunun tersidir.*

Teorem 2.1.7 (Young Eşitsizliği)**.** Φ *ve* Ψ *eşlenik Young fonksiyonları olsun. Her* $s,t\geq 0$

için

$$s.t \leq \Phi(s) + \Psi(g) \tag{2.1.4}$$

dır.



Şekil 2.2. Eşlenik Young fonksiyonları

İspat. Şekil 1.1.4 den açıkça görülen bu eşitsizliğin analitik ispatı Cooper ve zaanen (1955) tarafından verilmiştir. □

Örnek 2.1.2.

(a) *Örnek 2.1.1(a) da verilen* $\Phi(t) = \frac{t^p}{p}$, $p \geq 1$, $t \geq 0$ *Young fonksiyonunun eşleniği*

$$\psi(t) = \sup_{\varphi(s) \leq t} s = t^{\frac{1}{p-1}}$$

den $\Psi(s) = \int\limits_0^s t^{\frac{1}{p-1}} dt = \frac{t^q}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *dir. Böylece Young eşitsizliği, klasik halde bildiğimiz*

$$st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

biçimindedir.

(b) $\Phi(t) = e^t - t - 1$ *ile* $\Psi(t) = (1+t)\ln(1+t) - t$ *eşlenik Young fonksiyonlarıdır. Şöyle ki* $\Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(s)\, ds$ *olmak üzere* $\varphi(s) = e^s - 1$ *dir. Buradan*

$$\psi(s) = \sup_{\varphi(t) \leq s} t = \ln(s+1)$$

den

$$\Psi(t) = \int\limits_0^t \ln(s+1)\, ds = (t+1)\ln(t+1) - t$$

dir.

(c) Φ, Ψ *eşlenik Young fonksiyonu ve* $a, b > 0$ *olmak üzere*

$$\Phi_1 = a\Phi(bt) \textit{ ile } \Psi_1(t) = a\Psi\left(\frac{t}{ab}\right)$$

fonksiyonları eşlenik Young fonksiyonlarıdır. Bunun için

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds \textit{ ve } \Psi(t) = \int_0^t \psi(s)\, ds$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= a\Phi(bt) = a\int_0^{bt} \varphi(s)\, ds \\ &= ab\int_0^t \varphi(by)\, dy\end{aligned}$$

dir. Buradan $\varphi_1(s) = ab\varphi(bs)$ *olur. Eşleniği* $\psi_1(s)$ *ise*

$$\begin{aligned}\psi_1(s) &= \sup_{\varphi_1(t)\le s} t = \sup_{ab\varphi(bt)\le s} t \\ &= \sup_{\varphi(t)\le \frac{s}{ab}} \left(\frac{t}{b}\right) = \frac{1}{b}\psi\left(\frac{s}{ab}\right)\end{aligned}$$

dir. Böylece $\Phi_1(t)$ 'nin eşleniği $\Psi_1(t)$ ise

$$\begin{aligned}\Psi_1(t) &= \int_0^t \psi_1(s)\, ds \\ &= \frac{1}{b}\int_0^t \psi_1\left(\frac{s}{ab}\right) ds \\ \ldots s &= aby, \quad ds = abdy \ldots \\ &= \frac{ab}{b}\int_0^{\frac{t}{ab}} \psi_1(y)dy \\ &= \frac{ab}{b}\int_0^{\frac{t}{ab}} \psi_1(y)dy\end{aligned}$$

biçiminde olur.

Teorem 2.1.8. ***(Hölder Eşitsizliği)*** *Φ veΨ eşlenik Young fonksiyonları ve $f \in \widetilde{L_\Phi}(\Omega)\,, g \in \widetilde{L_\Psi}(\Omega)$ olmak üzere*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \le \int_\Omega \Phi\left(|f(x)|\right)dx + \int_\Omega \Psi(|g(x)|)dx \tag{2.1.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $|f(x)| = \psi\left(|g(x)|\right)$ veya $|g(x)| = \varphi\left(|f(x)|\right)$ alınırsa (2.1.5) eşitsizliği, eşitliğe dönüşür.

İspat. (2.1.4) Young eşitsizliğinde $s = |f(x)|\,, t = |g(x)|$ alırsak

$$|f(x)g(x)| \le \Phi\,|f(x)| + \Psi\,|g(x)|$$

eşitsizliğini elde ederiz.Bu eşitsizliğin her iki yanından Ω üzerinden integral alırsak (2.1.5) Hölder eşitsizliği bulunur. □

Uyarı 2.1.9. *Klasik Hölder eşitsizliği, $L_p(\Omega)$ Lebesque uzaylarında $p \ge 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklindedir ve $fg \in L_1(\Omega)$ dir. Yukarıdaki Hölder eşitsizliği de genel Orlicz sınıflarında, klasik Hölder eşitsiziliğinin benzeridir ve burada da $fg \in L_1(\Omega)$ dir.

Aşağıdaki tanım ile ilerde önemli olacak özel bir Young fonksiyonundan bahsedeceğiz.

Tanım 2.1.10. *($\triangle_2$ **kosulu**) Φ Young fonksiyonu olsun. Öyle bir $k > 0$ ve $T \ge 0$ sayıları vardır ki $\forall\ t \ge T$ için $\Phi(2t) \le k\Phi(t)$ eşitsizliği sağlanıyor ise Φ fonksiyonuna $\triangle_2$ koşulunu sağlıyor denir. $\Phi \in \triangle_2$ şeklinde ifade edilir.*

Örnek 2.1.3. *$\Phi(t) = ct^p$, $p \ge 1$Young fonksiyonunun $\triangle_2$ koşulunu sağladığı açıktır.*

Teorem 2.1.11. *Φ Young fonksiyonu olsun.$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$ olmak üzere, Φ 'nin $\triangle_2$ koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} < \infty$ olmasıdır.*

İspat. $\Longrightarrow$: $\Phi \in \triangle_2$ olsun. Bu durumda $k > 0$, $T \ge 0$ sayıları vardır ki her $t \ge T$ için $\Phi(2t) \le k\Phi(t)$ dir. Buradan

$$\Phi(2t) = \int_0^{2t} \varphi(s)ds > \int_t^{2t} \varphi(s)ds > t\varphi(t)$$

ve $\triangle_2$koşulundan

$$t\varphi(t) < \Phi(2t) \leq k\Phi(t)$$

olur.Böylece

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} < \infty$$

dir.

$\Longleftarrow$: $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} < \infty$ olduğundan $T > 0$ ve $c > 0$ sayıları vardır ki $\forall t \geq T$ için

$$\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} \leq c$$

olur. Şimdi bu eşitsizliğin her iki yanından integral alırsak

$$\int_t^{2t} (\ln \Phi(z))dz \leq \int_t^{2t} \frac{c}{z} dz$$

$$\ln \Phi(2t) - \ln \Phi(t) \leq c \ln 2$$

$$\ln \frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)} \leq c \ln 2$$

den $\Phi(2t) \leq 2^c \Phi(t)$, $k = 2^c$, $t \geq T$ elde edilir. □

$\triangle_2$koşulu ile birlikte Orlicz sınıflarını nitelendiren önemli bir özelliğe ulaşmış oluruz.

Teorem 2.1.12. *Φ Young fonksiyonu $\triangle_2$ koşulunu sağlıyor ise $\widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ Orlicz sınıfi lineer kümedir.*

İspat. $\Phi \in \triangle_2$ olduğundan öyle $k > 0$ ve $T > 0$ sayıları öyle ki $\forall t > T$ için $\Phi(2t) \leq k\Phi(t)$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca herhangi $\alpha \geq 0$ için $\alpha \leq 2^n$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ sayısı da vardır. Φ Young fonksiyonu artan olduğundan

$$\Phi(\alpha t) \leq \Phi\left(2^n t\right) \leq k^n \Phi(t), \; t \geq T \tag{2.1.6}$$

eşitsizliği sağlanır. (Bu son eşitszliği n-üzerinden tümevarımla görebiliriz.)

Şimdi herhangi $f, g \in \widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ ve c-skalerini alalım. (2.1.6) eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(c\,|f(x)|)dx &\leq \int_\Omega \Phi(2^n\,|f(x)|)dx \\ &\leq k^n \int_\Omega \Phi(|f(x)|)dx\end{aligned}$$

elde edilir ki bu $cf \in \widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ demektir.

Bundan başka Φ Young fonksiyonu, konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}\Phi(|f(x)+g(x)|) &= \Phi\left(\frac{1}{2}\,|2f(x)| + \frac{1}{2}\,|2g(x)|\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\Phi\left(|2f(x)|\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(|2g(x)|\right)\end{aligned}$$

ve

$$\int_\Omega \Phi\left(|f(x)+g(x)|\right)dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi\left(|2f(x)|\right)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi\,|2g(x)|\,dx$$

eşitsizliğinden ise $f + g \in \widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ elde edilir. $\square$

2.2. Orlicz Uzayı

Tanım 2.2.1. *(Kufner vd 1977). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık küme, Φ ve Ψ eşlenik Young fonksiyonları olsun.*

$$\begin{aligned}L_\Phi(\Omega) &= \{f; f,\ \Omega \textit{ da ölçülebilir ve } \|f\|_\Phi < \infty\} \\ \|f\|_\Phi &= \sup_{\varrho\in(g,\Psi)\leq 1} \int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \qquad (2.2.1) \\ \varrho(g,\Psi) &= \int_\Omega \psi(|g(x)|) \leq 1\end{aligned}$$

normlu uzayına Orlicz uzayı denir.

(2.3.1) ile tanımlanan fonksiyonun norm belirlediği kolayca görülebilir.

Orlicz uzayları, Birnbaum ve orlicz (1931) ve Orlicz (1932) tarafından tanıtılmış ve çalışılmaya başlanmıştır.O zamanlardan itibaren Fourier harmonik analizini; matematik ve fiziğin bir çok dalının önemli çalışma aracı olmuştur.

(2.1.5) Hölder eşitsizliğinin her iki yanından tüm $\varrho\,(g, \Psi) \leq 1$ koşulunu sağlayan

g ler üzerinden supremum alırsak

$$\sup_{\varrho(g,\Psi)\leq 1}\int_{\Omega}|f(x)g(x)|\,dx \leq \sup_{\varrho(g,\Psi)\leq 1}\int_{\Omega}\Phi\,|f(x)|\,dx + \sup_{\varrho(g,\Psi)\leq 1}\int_{\Omega}\Psi\,|g(x)|\,dx$$

$$\|f\|_{\Phi} \leq \int_{\Omega}\Phi\left(|f(x)|\right)dx + 1$$

elde ederiz. Bu ise $f \in \widetilde{L_{\Phi}}(\Omega)$ için $f \in L_{\Phi}(\Omega)$ demektir. Yani, Orlicz uzayı, Orlicz sınıfını içerir.

Örnek 2.2.1. *Φ ve eşleniği Ψ Young fonksiyonlarını*

$$\Phi(t) = \frac{t^p}{p},\ p \geq 1 \text{ ve } \Psi(t) = \frac{t^q}{q},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

şekilinde alırsak $L_{\Phi}(\Omega)$ uzayı $L_p(\Omega)$ olur. Dolayısıyla, $L_p(\Omega)$ Lebesque uzayları özel bir Orlicz uzayıdır. Normları denktir ve normları arasındaki ilişki ise

$$\|f\|_{\Phi} = q^{\frac{1}{q}}\,\|f\|_{L_p} \tag{2.2.2}$$

şeklindedir. (2.2.2) eşitsizliğini şöyle görebiliriz.

$f_1 \in L_{\Phi}(\Omega) = L_p(\Omega)$ alalım ve $\|f_1\|_{L_p} = 1$ olsun. Ayrıca $g \in L_{\Psi}(\Omega) = L_q(q)$ fonksiyonunu da $\varrho(g,\Psi) \leq 1$ olacak şekilde alalım. Buradan $L_p(\Omega)$ uzayındaki klasik Hölder eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|f_1(x)g(x)|\,dx &\leq \left(\int_{\Omega}|f_1(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega}|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= q^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\Omega}\Psi\left(|g(x)|\right)dx\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

elde edilir.Bu eşitsizliğin her iki yandan $\varrho(g,\Psi) \leq 1$ koşulunu sağlayan g ler üzerinden supremum alınırsa $\|f_1\|_{\Phi} \leq q^{\frac{1}{q}}$ bulunur.

Şimdi $g_1(x) = q^{\frac{1}{q}}\,|f_1(x)|^{p-1}$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\Psi\left(|g_1(x)|\right)dx &= \frac{1}{q}\int_{\Omega}|g(x)|^q\,dx\\ &= \frac{1}{q}q\int_{\Omega}|f_1(x)|^{q(p-1)}\,dx\\ &= \|f_1\|_{L_p}^p\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\int_{\Omega} |f_1(x)g_1(x)|\, dx = q^{\frac{1}{q}} \int_{\Omega} |f_1(x)|\, |f_1(x)|^{p-1}\, dx = q^{\frac{1}{q}} \|f_1\|^p = q^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği üzerinden supremum alınırsa

$$\|f_1\|_{\Phi} = q^{\frac{1}{q}}$$

olur. Ohalde herhangi $f \in L_{\Phi}(\Omega) = L_p(\Omega)$ *için* $f_1(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_{L_p}}$ *olursa*

$$\|f\|_{\Phi} = q^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L_p}$$

dir.

Lemma 2.2.2. Φ *Young fonksiyonu,* $f \in L_{\Phi}(\Omega)$ *ve* $\|f\|_{\Phi} \neq 0$ *olsun. Bu durumda*

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}}\right) dx \leq 1$$

dir.

İspat. $f \in L_{\Phi}(\Omega)$ alalım. Bu durumda

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq \begin{cases} \|f\|_{\Phi} & , \varrho(g,\Psi) \leq 1 \\ \|f\|_{\Phi}\, \varrho(g,\Psi) & , \varrho(g,\Psi) > 1 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

dir. Yani, $\varrho(g,\Psi) \leq 1$ olması halinde Orlicz norm tanımından

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{\Phi}$$

eşitsizliği çıkar. $\varrho(g,\Psi) > 1$ için Lemma 2.1.3(f) 'deki

$$\Psi(\alpha t) \leq \alpha \Psi(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \alpha \in [0,1]$$

eşitsizliğinde $t = |g(x)|$ ve $\alpha = \frac{1}{\varrho(g,\Psi)}$ alırsak bu durumda

$$\Psi\left(\frac{|g(x)|}{\varrho(g,\Psi)}\right) \leq \frac{1}{\varrho(g,\Psi)} \Psi\left(|g(x)|\right)$$

olur ve bu son eşitsizliği Ω üzerinde integrallersek

$$\int\limits_{\Omega} \Psi\left(\frac{|g(x)|}{\varrho(g,\Psi)}\right) dx \leq 1$$

elde ederiz. Böylece $\|f\|_{\Phi}$ Orlicz norm tanımını bu son eşitsizliği sağlayanlar üzerinden yeniden yazarsak

$$\|f\|_{\Phi} = \sup \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)g(x)|}{\varrho(g,\Psi)}\right) dx$$

ve

$$\int |f(x)g(x)|\, dx \leq \varrho(g,\Psi)\, \|f\|_{\Phi}$$

bulunur.

Şimdi kabul edelim ki $f \in L_{\Phi}(\Omega)$ fonksiyonu sınırlı ve bir $\Omega_0 \subset \Omega$ kümesi için $x \in \Omega\setminus \Omega_0$ olmak üzere $f(x) = 0$ olsun. Bu durumda $g(x) = \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}}\right)$ alınırsa

$$\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}}\right) \text{ ve } \Psi\left(|g(x)|\right)$$

fonksiyonları sınırlı ve Ω_0 da integrallenebilir olur. Bundan başka bu fonksiyonlar $L_1(\Omega)$ uzayına da aittir.

(2.1.5) Hölder eşitsizliğinde $f = \frac{f(x)}{\|f\|_{\Phi}}$, $g = g$ alırsak

$$\int\limits_{\Omega} \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{\Phi}} g(x)\right| dx = \int\limits_{\Omega} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}}\right) dx + \int\limits_{\Omega} \Psi\left(|g(x)|\right) dx$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece(2.2.3)eşitsizliğinden ve

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}}\right) dx \leq 1$$

buluruz.

Sonuç olarak herhangi $f \in L_{\Phi}(\Omega)$ keyfi fonksiyonunu alalım. Bundan başka Ω 'nın Ω_n altkümeler dizisini de şöyle tanımlayalım

$$n \in \mathbb{N} \text{ için } \Omega_n \subset \Omega_{n+1},\ \mu\left(\Omega_n\right) < \infty \text{ ve } \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n.$$

Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x)$ olmak üzere fonksiyonu ise

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in \Omega_n, \ |f(x)| \le n \\ n & , x \in \Omega_{n,} \ |f(x)| > n \\ 0 & , x \in \Omega \backslash \Omega_n \end{cases}$$

biçiminde olsun. Böylece $\{f_n(x)\}, n \in \mathbb{N}$ fonksiyonları sınırlı ve yukarıdaki çalışma gereğince

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f_n(x)|}{\|f_n\|_\Phi}\right) dx \le 1$$

dir.. Ayrıca h.h.h $x \in \Omega$ için $|f_n(x)| \le |f(x)|$ olduğundan Orlicz normuna göre

$$\|f_n\|_\Phi \le \|f\|_\Phi \quad ,n \in \mathbb{N}$$

olur. Buradan Φ Young fonksiyonunun monotonluğundan

$$\Phi\left(\frac{|f_n(x)|}{\|f\|_\Phi}\right) \le \Phi\left(\frac{|f_n(x)|}{\|f_n\|_\Phi}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliği Ω üzerinden integrallersek

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f_n(x)|}{\|f\|_\Phi}\right) dx \le 1$$

buluruz. Sonuç olarak integral altında limite geçme teoremine göre

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi}\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f_n(x)|}{\|f\|_\Phi}\right) dx \le 1$$

elde edilir. □

Lemma 2.2.2 'yı aşağıdaki Orlicz sınıfları ile Orlicz uzayını karakterize eden teoremin ispatında kullanacağız.

Teorem 2.2.3. Φ *Young fonksiyonu,* $\Phi \in \Delta_2$ *olsun. Bu durumda*

$$L_\Phi(\Omega) = \widetilde{L_\Phi}(\Omega)$$

dir.

İspat. (**??**) Orlicz normu tanımına göre $\widetilde{L_\Phi}(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega)$ olduğunu biliyoruz. Ters kapsamayı görmek için Lemma 2.2.2 den faydalanacağız.

Şimdi $f \in L_\Phi(\Omega)$ ve $\|f\|_\Phi \neq 0$ olsun. Lemma'ya göre 2.2.2 'ye göre

$$\int\limits_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi}\right) dx \leq 1$$

dir. Yani, $g(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi} \in \widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ olur. Teorem 2.1.12 'a göre $\widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ lineer küme olduğundan $f \in \widetilde{L_\Phi}(\Omega)$ elde edilir. Dolayısıyla Φ Young fonksiyonu ve $\Phi \in \Delta_2$ olması halinde Orlicz sınıfı ile Orlicz uzayları çakışmaktadır. □

Teorem 2.2.4. *(Orlicz uzayında Hölder eşitsizliği) Φ, Ψ eşlenik Young fonksiyonu olsun. Eğer $f \in L_\Phi(\Omega), g \in L_\Psi(\Omega)$ ise $fg \in L_1(\Omega)$ ve*

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi \tag{2.2.4}$$

dır.

İspat. $\|g(x)\| = 0$ ise (2.2.4) eşitsizliği açıktır. $\|g(x)\| \neq 0$ olsun. Bu durumda Lemma 2.3.3'ye göre

$$\int_\Omega \Psi\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_\Psi}\right) dx \leq 1$$

dir. Böylece

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|\, dx = \|g\|_\Psi \int\limits_\Omega \left| f(x) \frac{g(x)}{\|g\|_\Psi} \right| dx$$

eşitliğinin her iki yanından $\varrho\left(\frac{g(x)}{\|g(x)\|_\Psi}, \Psi\right) \leq 1$ koşulu sağlanacak biçimde supremum alırsak

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi$$

(2.2.4) Hölder eşitsizliğini elde ederiz. □

Uyarı 2.2.5.

$$\Phi(t) = \frac{t^p}{p} \;\; ve \;\; \Psi(t) = \frac{t^q}{q}, \;\; p \geq 1, \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

alındığında bilindiğimiz gibi $L_\Phi(\Omega)$ uzayı ile $L_p(\Omega)$ uzayı ile çakışır, normları denktir ve *normları arasındaki ilişki ise*

$$\|f\|_\Phi = q^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L_p}$$

biçimindedir. Bu eşitsizliği (2.2.4) Hölder eşitsizliğine uyguladığımızda

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi = q^{\frac{1}{q}} p^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

eşitsizliğini elde ederiz ki bu klasik Hölder eşitsizliği değildir.

Orlicz uzayındaki (2.2.4) Hölder eşitsizliğine, genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği de denir. Fakat yukarıda bahsettiğimiz gibi L_p uzayındaki klasik Hölder eşitsizliği, (2.2.4) eşitsizliğinin özel hali de değildir.

Bir sonraki bölümde Luxemburg (2000) tarafından verilen Orlicz normuna denk bir norm tanımlayıp Orlicz normuna denkliğini göreceğiz (Kufner vd 1977).

2.3. Luxemburg Normu

Tanım 2.3.1. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık küme, Φ Young fonksiyonu ve f Ω da tanımlı ölçülebilir fonksiyon olsun.*

$$|||f|||_\Phi = \inf \left\{ k > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right) dx \leq 1 \right\} \tag{2.3.1}$$

normuna f 'nin Luxemburg normu denir. $|||f|||_\Phi$'nın norm koşullarını sağladığı kolayca kontrol edilir.

Ayrıca Lemma 2.2.2 'ye göre $f \in L_\Phi(\Omega)$ için

$$|||f|||_\Phi \leq \|f\|_\Phi \tag{2.3.2}$$

dir.

Lemma 2.3.2. *Φ Young fonksiyonu ve $f \in L_\Phi(\Omega)$ olsun. Bu durumda*

(a) $|||f|||_\Phi \leq 1 \Longrightarrow \int_\Omega \Phi(|f(x)|)\, dx \leq |||f|||_\Phi$

(b) $|||f|||_\Phi \geq 1 \Longrightarrow \int_\Omega \Phi(|f(x)|)\, dx \geq |||f|||_\Phi$

dir.

İspat.

(a) Lemma 2.1.3 (f) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$ $\alpha \in [0,1]$, $t \geq 0$ eşitsizliğinde $\alpha = |||f|||_\Phi$ ve $t = \frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi}$ alınırsa

$$\Phi\left(|f(x)|\right) \leq |||f|||_\Phi \, \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi}\right)$$

elde edilir. Ardından bu son eşitsizlik Ω üzerinden integrallenirse

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi\left(|f(x)|\right) dx &\leq |||f|||_\Phi \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi}\right) dx \\ &\leq |||f|||_\Phi\end{aligned}$$

bulunur.

(b) Lemma 2.1.3 (f) $\Phi(\beta t) \geq \beta\Phi(t)$, $\beta > 1$, $t \geq 0$ eşitsizliğinde yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $\beta = |||f|||_\Phi - \varepsilon$ ve $t = \frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi - \varepsilon}$ alınırsa

$$\Phi\left(|f(x)|\right) \geq \left(|||f|||_\Phi - \varepsilon\right) \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi - \varepsilon}\right)$$

elde edilir ve bu eşitsizlik Ω üzerinden integrallenirse

$$\int_\Omega \Phi\left(|f(x)|\right) dx \geq |||f|||_\Phi - \varepsilon \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi - \varepsilon}\right) dx$$

elde edilir. Buradan Tanım 2.3.1 'e göre

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi - \varepsilon}\right) dx > 1$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_\Omega \Phi\left(|f(x)|\right) dx \geq |||f|||_\Phi - \varepsilon$$

yani,

$$\int_\Omega \Phi\left(|f(x)|\right) dx \geq |||f|||_\Phi$$

olur. □

Bu lemma ile birlikte Luxemburg normu ile Orlicz normunun denk olduğunu veren aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 2.3.3. *$f \in L_\Phi(\Omega)$ olmak üzere*

$$|||f|||_\Phi \leq \|f\|_\Phi \leq 2\,|||f|||_\Phi$$

dir.

İspat. (2.3.2) eşitsizliğine göre $|||f|||_\Phi \leq \|f\|_\Phi$ dir. Diğer taraftan (2.1.4) Young eşitsizliğini $s = |f(x)|$ ve $t = |g(x)|$ için yeniden yazalım ve Ω üzerinden integralleyelim. Böylece

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \int\limits_\Omega \Phi(|f(x)|)dx + \int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)dx$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ardından bu son eşitsizliğin her iki yanından $\varrho\,(g,\Psi) \leq 1$ koşulunu sağlayan g fonksiyonları üzerinden supremum alırsak

$$\|f\|_\Phi \leq \int\limits_\Omega \Phi\,(|f(x)|)\,dx + 1$$

olur. Bu son eşitsizlikte $f\,(x)$ yerine $\frac{|f(x)|}{|||f(x)|||_\Phi}$ yazarsak ve Luxemburg norm tanımını dikkate alırsak

$$\begin{aligned}\frac{\|f\|_\Phi}{|||f|||_\Phi} &\leq \int\limits_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi}\right)dx + 1\\ &\leq 2\end{aligned}$$

yani

$$\|f\|_\Phi \leq 2\,|||f|||_\Phi$$

eşitsizliğini elde ederiz. □

Uyarı 2.3.4. *Lemma 2.3.2 'e göre*

$$\int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)dx \leq 1 \Leftrightarrow |||g|||_\Psi \leq 1$$

dir. Bu gözlemi dikkate aldığımızda Orlicz normunu

$$\|f\|_\Phi = \sup_{|||g(x)|||_\Psi \leq 1} \int\limits_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \tag{2.3.3}$$

biçiminde de verebiliriz. Ayrıca Hölder eşitsizliği de

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{\Phi} \, |||g|||_{\Psi} \tag{2.3.4}$$

veya

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq |||f|||_{\Phi} \, \|g\|_{\Psi} \tag{2.3.5}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Örnek 2.3.1. $\Phi(t) = \frac{t^p}{p}, p \geq 1$ *olmak üzere Luxemburg normu*

$$|||f|||_{\Phi} = \inf \left\{ k > 0 : \int_{\Omega} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{k} \right) dx \leq 1 \right\}$$

ve

$$\int_{\Omega} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{k} \right) dx = \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{p} dx \leq k^p$$

eşitsizliğinden, k *lar üzerinden infimum alınırsa*

$$|||f(x)|||_{\Phi} \leq \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p$$

*eşitsizliğini elde ederiz. Bu son eşitsizlikten Uyarı 2.2.5 göz önüne alınarak ve (**??**) Hölder eşitsizliği kullanılarak*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx &\leq \|f\|_{\Phi} \, \|g\|_{\Psi} \\ &\leq \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L_p} \|f\|_{L_q} \\ &= \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q} \end{aligned}$$

klasik Hölder eşitsizliğine ulaşırız.

2.4. Orlicz Uzayında Yakınsama

Öncelikle $L_{\Phi}(\Omega)$ Orlicz uzayının Banach(tam normlu uzay) olduğunu aşağıdaki teorem ile görelim.

Teorem 2.4.1. $L_\Phi(\Omega)$ *Orlicz uzayı Banach uzaydır.*

İspat. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ $L_\Phi(\Omega)$'da Cauchy dizisi olsun.

Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır ki, keyfi $g \in \widetilde{L_\Psi}(\Omega)$, $\varrho(g, \Psi) \leq 1$ ve her $m, n \geq N_\varepsilon$ için

$$\int_\Omega |f_n(x) - f_m(x)|\, |g(x)|\, dx < \varepsilon \tag{2.4.1}$$

dir. Ayrıca Ω kümesinin bir parçalanışı

$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $\Omega i \cap \Omega j = \emptyset$, $i \neq j$, ve $0 < \mu(\Omega_1) < \infty$ olsun. $k > 0$ sayısı ise $\Psi(k) \leq \frac{1}{\mu(\Omega_1)}$ olacak şekilde seçilsin.g fonksiyonu da

$$g(x) = \begin{cases} k, & x \in \Omega_1 \\ 0, & x \in \Omega \backslash \Omega_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\int_\Omega \Psi(|g(x)|)\, dx = \int_{\Omega_1} \Psi(k)\, dx \leq \frac{1}{\mu(\Omega_1)} \mu(\Omega_1) = 1$$

elde edilir ve g fonksiyonu (2.4.1) eşitsizliğinde kullanılırsa her $n, m \geq N_\varepsilon$ için

$$\int_\Omega |f_n(x) - f_m(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{k} \tag{2.4.2}$$

bulunur.

Böylece $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $L_1(\Omega_1)$ uzayında Cauchy dizisi olduğu çıkar. $L_1(\Omega_1)$ uzayı tam uzay olduğundan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve her altdizisi de yakınsaktır.Buradan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ' nin öyle bir $\{f_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır ki $L_1(\Omega_1)$ uzayında $f \in L_1(\Omega_1)$ fonksiyonuna yakınsar. Aynı yöntem Ω_2 için yapılır ve f fonksiyonuna yakınsayan $\{f_{n,2}\}$ yakınsak alt dizisi elde edilir ve bu şekilde devam edilirse iç içe

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \supset \{f_{n,1}\}_{n=1}^{\infty} \supset \cdots \supset \{f_{n,k}\}_{n=1}^{\infty} \supset \ldots$$

alt dizileri oluşur ve her bir $\{f_{n,k}\}$ alt dizisi Ω_k ,$k = 1, 2, 3$...da hemen her yerde $f(x)$ 'e yakınsar. integral altında limite geçme ile ilgili Fatou Lemma 'sına göre, her $n \geq N_\varepsilon$ için

$$\int_\Omega |f(x) - f_{n,k}(x)|\, |g(x)|\, dx < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $f_{n,k} - f \in L_\Phi(\Omega)$ ve $f = f_{n,k} - (f_{n,k} - f) \in L_\Phi(\Omega)$ dir. Dahası

$$\lim_{n,k\to\infty} \|f_{n,k} - f\|_\Phi = 0$$

dir. Bu ise $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayından alınan her bir Cauchy dizisinin, bu uzayda yakınsaklığı yani, $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayının Banach uzayı olması demektir. □

Tanım 2.4.2. ***(Norma göre Yakınsama)*** *$\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayında bir dizi ve $f \in L_\Phi(\Omega)$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\Phi = 0$$

ise $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi, f fonksiyonuna $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayında norma göre yakınsaktır denir ve $f_n \to f$, $n \to \infty$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.3. ***(Φ -ortalama Yakınsama)*** *$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayında bir dizi ve $f \in L_\Phi(\Omega)$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(|f_n(x) - f(x)|)\, dx = 0$$

ise $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi, f fonksiyonuna $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayında Φ -ortalama (Φ -mean) yakınsıyor denir ve $f_n \to f$, $n \to \infty$ ile gösterilir.

Bundan sonraki amacımız bu iki yakınsama arasındaki ilişkiyi incelemek olacaktır.

Teorem 2.4.4. *$L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayında $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi ve f fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi, f fonksiyonuna norma göre yakınsak ise Φ -ortalama da yakınsaktır.*

İspat. Herhangi bir $g \in L_\Phi(\Omega)$ fonksiyonu için Teorem 2.3.3 'e göre

$$|||g|||_\Phi \le \|g\|_\Phi$$

eşitsizliğinden $\|g\|_\Phi \le 1$ halinde $|||g|||_\Phi \le 1$ elde ederiz. Bu durumda Lemma 2.3.2 'den

$$\int_\Omega \Phi(|g(x)|)\, dx \le |||g|||_\Phi \le \|g\|_\Phi$$

eşitsizliğini elde ederiz. Artık burada $g(x)$ yerine $f_n(x) - f(x)$ alınırsa

$$\int_\Omega \Phi(|f_n(x) - f(x)|)\, dx \le \|f_n - f\|_\Phi$$

eşitsizliğini ve limite geçilirse

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \Phi\left(|f_n(x) - f(x)|\right) dx \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

bulabiliriz. Bu ise $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin f fonksiyonuna $L_{\Phi}(\Omega)$ Orlicz uzayında $\Phi-$ortalama yakınsak olması demektir.

Teoremin tersi doğru değildir. Yani Φ -ortalama yakınsamadan, norma göre yakınsama elde edilmez. Örneği Krasnosel'skii ve rutickii (1961) ve J.B.Ruticki vermiştir. Örneğin temeli $\Phi \notin \triangle_2$ koşuluna dayanır. İleride göreceğiz ki $\Phi \in \triangle_2$ olması halinde bu iki yakınsama denktir. Bunun için aşağıdaki hazırlıklara ihtiyacımız var. □

Uyarı 2.4.5. *$f \in L_{\Phi}(\Omega)$ ve $\|f\|_{\Phi} \leq 1$ olsun.Buradan Lemma 2.3.2 ve Teorem 2.3.3 'den*

$$\int_{\Omega} \Phi\left(|f(x)|\right) dx \leq |||f|||_{\Phi} \leq \|f\|_{\Phi} \leq 1$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu demektir ki, f fonksiyonunun Orlicz normu çok küçük olması halinde $\int_{\Omega} \Phi\left(|f(x)|\right) dx$ integrali de çok küçük olmaktadır. Aşağıdaki lemma ile bunun tersini göreceğiz.

Lemma 2.4.6. *$\Phi \in \triangle_2$ olmak üzere $f \in L_{\Phi}(\Omega)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda öyle bir $m \in \mathbb{N}$ ve $c > 0$ sayıları vardır ki*

$$\int_{\Omega} \Phi\left(|f(x)|\right) dx \leq \frac{1}{k^m} \Longrightarrow \|f\|_{\Phi} \leq \frac{c}{2^m}$$

dir. (Buradaki $k > 0$ sabiti, $\triangle_2$ koşulundaki sabittir.)

İspat. Φ, $\triangle_2$ koşulunu sağladığından öyle $k > 0$ ve $T > 0$ sayıları vardır ki her $x \geq T$ için

$$\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$$

dir. Bundan başka $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Omega_1 \subset \Omega$, $\mu(\Omega_1) < \infty$ kümesi

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : 2^m |f(x)| \leq T\}$$

şeklinde olmak üzere. $x \in \Omega_1$ ise Φ Young fonksiyonunun monotonluğundan

$$\Phi(2^m |f(x)|) \leq \Phi(T)$$

eşitsizliği ve $x \notin \Omega_1$ ise $\Phi \in \triangle_2$ olduğundan

$$\Phi\left(2^m \left|f(x)\right|\right) \leq k^m \Phi\left(\left|f(x)\right|\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Dolayısıyla $\int\limits_{\Omega} \Phi\left(\left|f(x)\right|\right) dx \leq \frac{1}{k^m}$ ise

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \Phi\left(2^m \left|f(x)\right|\right) dx &= \int\limits_{\Omega_1} \Phi\left(2^m \left|f(x)\right|\right) dx + \int\limits_{\Omega \backslash \Omega_1} \Phi\left(2^m \left|f(x)\right|\right) dx \\
&\leq \Phi\left(T\right) \mu\left(\Omega_1\right) + k^m \int\limits_{\Omega} \Phi\left(\left|f(x)\right|\right) dx \\
&\leq \Phi\left(T\right) \mu\left(\Omega_1\right) + 1
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (2.1.5) Hölder eşitsizliğinden

$$\int\limits_{\Omega} 2^m \left|f(x)g(x)\right| dx \leq \int\limits_{\Omega} \Phi\left(2^m \left|f(x)\right|\right) dx + \int\limits_{\Omega} \Psi\left(\left|g(x)\right|\right) dx$$

bağıntısını ve her iki yanından $\int\limits_{\Omega} \Psi\left(\left|g(x)\right|\right) dx \leq 1$ koşulunu sağlayan g ’ ler üzerinden supremum alınınca da

$$2^m \left\|f\right\|_{\Phi} \leq \Phi\left(T\right) \mu\left(\Omega_1\right) + 2, \; c = \Phi\left(T\right) \mu\left(\Omega_1\right) + 2$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\left\|f(x)\right\|_{\Phi} \leq \frac{c}{2^m}, \; c = \Phi\left(T\right) \mu\left(\Omega_1\right) + 2$

Bu lemma ile birlikte artık yukarıdaki tanımladığımız Orlicz uzayına ait normların denkliğini gösterebiliriz. □

Teorem 2.4.7. *$L_{\Phi}\left(\Omega\right)$ Orlicz uzayı, $\Phi \in \triangle_2$ olsun. Bu durumda $L_{\Phi}\left(\Omega\right)$ uzayından alınmış $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi ve f fonksiyonu için $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin f fonksiyonuna Orlicz normunda yakınsaması için gerek ve yeter koşul Φ-ortalama yakınsamasıdır.*

İspat. Teorem 2.4.4 ile gerekliliği yukarıda gördük. Şimdi ise yeterliliği görelim. Yani $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f fonksiyonuna $\Phi-$ortalama yakınsak olsun. Böylece verilen her $\varepsilon > 0$ için öyle bir m$\in \mathbb{N}$ vardır ki, $c > 0$ Lemma 2.4.6 ’daki sabit olmak üzere $\varepsilon > \frac{c}{2^m}$ dir. Ayrıca öyle bir $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall n \geq N_{\varepsilon}$ için

$$\int\limits_{\Omega} \Phi\left(\left|f_n(x) - f(x)\right|\right) dx \leq \frac{1}{k^m}$$

dir. ($k > 0$, $\triangle_2$ koşulundaki sabittir.)

Dolayısıyla lemma 2.4.6 'ya göre her $n \geq N_\varepsilon$ için

$$\|f_n - f\|_\Phi \leq \frac{c}{2^m} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise Orlicz normunda yakınsamadır. □

2.5. Orlicz-Morrey Uzayları

Bu bölümde Orlicz-Morrey uzaylarını tanımlayıp birkaç özelliğini vereceğiz.Bunun için öncelikle ilk defa Morrey'in (1938) tanımladığı ve kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalarında kullandığı Morrey uzayını tanımlayacağız. Morrey uzayları da Fourier harmonik analizinin ve uygulamalarının temel araçları arasındadır. Örneğin bu uzaylarda Hardy-Littlewood maksimal operatörünün ve kesirsel integral operatörünün sınırlılığı problemleri ile Adams (1977), Guliyev (2009), Nakai (2001, 2008), Peetre (1969) vs tarafından çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir.

Tanım 2.5.1. (*Morrey Uzayı*) $1 \leq p < \infty$ *ve* $0 \leq \lambda < n$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} L_{p,\lambda} &= L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L_{p,\lambda}} < \infty \right\} \\ \|f\|_{L_{p,\lambda}} &= \sup_{B=B(a,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_B |f(x)|^p \, dx \right) \end{aligned}$$

normu ile tanımlanan $L_{p,\lambda}$ *uzayına Morrey uzayı denir. Burada*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < r\}$$

kümesi a-merkezli, $r > 0$ *yarıçaplı yuvardır.*

Tanımdan da görüleceği gibi $\lambda = 0$ için $L_{p,\lambda}$ Morrey uzayı L_p Lebesque uzayıdır. Orlicz Morrey uzayının tanımı için gerekli olan bazı tanım ve kavramları ise aşağıda verelim.

$\Theta : (0,\infty) \to (0,\infty)$ olmak üzere $r \leq s$ için $\Theta(r) \leq c\Theta(s)$ olacak şekilde $c > 0$ sabiti varsa Θ fonksiyonuna, neredeyse artan; $\Theta(r) \geq c\Theta(s)$ ise neredeyse azalan fonksiyon denir.

Şimdi $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ olsun. ϕ neredeyse azalan ve $r\phi(r)$ neredeyse artan fonksiyonların kümesini G ile gösterelim.

Φ Young fonksiyonu, $\phi \in G$ ve B, a-merkezli $r > 0$ yarıçaplı yuvar olmak üzere

$$\|f\|_{\Phi,\phi,B} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|B|\,\phi(|B|)} \int_B \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\} \tag{2.5.1}$$

fonksiyonu bir normdur. Burada $|B|$, B yuvarının Lebesque ölçümüdür.

Tanım 2.5.2. *(Orlicz-Morrey Uzayı) Φ Young fonksiyonu ve $\varphi \in G$ olsun.*

$$L_{\Phi,\phi} = L_{\Phi,\phi}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L_{\Phi,\phi}} < \infty \right\} \tag{2.5.2}$$

$$\|f\|_{L_{\Phi,\phi}} = \sup_B \|f\|_{\Phi,\phi,B}$$

normu ile $L_{\Phi,\phi}$ uzayına Orlicz-Morrey Uzayı denir.

$\|f\|_{L_{\Phi,\phi}}$ normu ile $L_{\Phi,\phi}$ Orlicz-Morrey Uzayı Banach uzayıdır.

$\Phi(r) = r^p$, $1 \leq p < \infty$ için $L_{\Phi,\phi}$ Orlicz-Morrey Uzayı, genelleşmiş Morrey uzayı olur ve

$$\|f\|_{\Phi,\phi,B} = \left(\frac{1}{|B|\,\phi(|B|)} \int_B |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$L_{\Phi,\phi}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L_{\Phi,\phi}} = \sup_B \|f\|_{\Phi,\phi,B} < \infty \right\}$$

ile tanımlanır.

Aşağıdaki teorem, Orlicz-Morrey uzayıları arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 2.5.3. Φ, Ψ *Young fonksiyonları ve $\phi, \psi \in G$ olsun.*

(a) $\Phi(r) \leq \Psi(cr)$ *ise* $L_{\Psi,\phi} \subset L_{\Phi,\phi}$ *ve* $\|f\|_{L_{\Phi,\phi}} \leq c\,\|f\|_{L_{\Psi,\phi}}$ *dir.*
(b) $\phi(r) \leq c\psi(r)$ *ise* $L_{\Phi,\phi} \subset L_{\Phi,\psi}$ *ve* $\|f\|_{L_{\Phi,\psi}} \leq \max(1,c)\,\|f\|_{L_{\Phi,\phi}}$ *dir.*

İspat. (a) Öncelikle

$$\|f\|_{L_{\Phi,\phi}} = \sup_B \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|B|\,\phi(|B|)} \int_B \Phi\left(\frac{|f(x|)}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}$$

olduğundan her B yuvarı için

$$\frac{1}{|B|\,\phi(|B|)} \int_B \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_{\Phi,\phi}}} \right) dx \leq 1$$

Yani her B yuvarı için

$$\int_B \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_{\Phi,\phi}}}\right)dx \le |B|\,\phi\left(|B|\right)$$

olur. Bundan başka $\int_B \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx \le |B|\,\phi\left(|B|\right)$ olacak şekilde $\lambda > 0$ varsa bu durumda $\|f\|_{L_{\Phi,\phi}} \le \lambda$ olmak zorundadır.

Şimdi $f \in L_{\Psi,\phi}$ olsun. Böylece her B yuvarı için

$$\int_B \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_{\Psi,\phi}}}\right)dx \le |B|\,\phi\left(|B|\right)$$

olur.Ayrıca hipotezden

$$\Phi\left(\frac{|f(x)|}{c\,\|f\|_{L_{\Psi,\phi}}}\right) \le \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_{\Psi,\phi}}}\right)$$

olur ve bueşitsizlik B üzerinden integrallenir ise

$$\int \Phi\left(\frac{|f(x)|}{c\,\|f\|_{L_{\Psi,\phi}}}\right)dx \le |B|\,\phi\left(|B|\right)$$

elde edilir.. Bu ise$f \in L_{\Phi,\phi}$ ve $\|f\|_{L_{\Phi,\phi}} \le c\,\|f\|_{L_{\Psi,\phi}}$ demektir.

(b) $f \in L_{\Phi,\phi}$ ve $\phi\left(r\right) \le c.\psi\left(r\right)$ olsun. Ayrıca Φ Young fonksiyonu konveks fonksiyon olduğundan

$$\alpha \in [0,1] \;\; \text{için} \;\; \Phi\left(\alpha t\right) \le \alpha\Phi\left(t\right), t \ge 0$$

eşitsizliğinde $\alpha = \frac{1}{\max(1,c)}$, $t = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_{\Phi,\phi}}}$ alalım. Böylece

$$\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\max(1,c)\,\|f\|_{L_{\Phi,\phi}}}\right) \le \frac{1}{\max(1,c)}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_{\Phi,\phi}}}\right) \le \frac{1}{c}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_{\Phi,\phi}}}\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu durumda her iki taraftan B üzerinden integrallersek

$$\int_B \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\max(1,c)\,\|f\|_{L_{\Phi,\phi}}}\right)dx \le \frac{1}{c}\,|B|\,\phi\left(|B|\right) \le |B|\,\psi\left(|B|\right)$$

ve dolayısıyla $\|f\|_{L_{\Phi,\psi}} \le \max(1,c)\,\|f\|_{L_{\Phi,\phi}}$ dir. □

Son olarakOrlicz-Morrey uzayları için genelleşmis Hölder eşitsizliğini vermeden önce aşağıdaki lemma ile Young fonksiyonu için genelleşmiş Young eşitsizliğini verelim.

Teorem 2.5.4. *(Nakai 2001) (Genelleşmiş Young Eşitsizliği)* Φ, Θ, Ψ *Young fonksiyonları ve* $\Phi^{-1}, \Psi^{-1}, \Theta^{-1}$ *de onların sırasıyla bilinen tersleri olsun. Ayrıca her* $x \geq 0$ *için*

$$\Phi^{-1}(x)\,\Psi^{-1}(x) \leq \Theta^{-1}(x)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda her $x \geq 0$ *ve her* $y \geq 0$ *için*

$$\Theta(xy) \leq \Phi(x) + \Psi(y)$$

dir.

İspat. $x \geq 0$ için $\Phi^{-1}(x) = \inf\{y : \Phi(y) > x\}$ olduğundan $\Phi(\Phi^{-1}(x)) \leq x \leq \Phi^{-1}(x)$ olur. Benzer bağıntı Ψ ve Θ için de vardır.

Şimdi $x \geq 0$, $y \geq 0$ için $\Phi(x) \leq \Psi(y)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} xy &\leq \Phi^{-1}(\Phi(x)).\Psi^{-1}(\Psi(y)) \\ &\leq \Phi^{-1}(\Psi(y)).\Psi^{-1}(\Psi(y)) \\ &\leq \Theta(\Psi(y)) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\Theta(xy) \leq \Theta\left(\Theta^{-1}(\Psi(y))\right) \leq \Psi(y)$$

olur. Ayrıca $\Phi(x) > \Psi(y)$ için benzer şekilde $\Theta(xy) \leq \Phi(x)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\Theta(xy) \leq \max(\Phi(x),\ \Psi(y)) \leq \Phi(x) + \Psi(y)$$

olur. □

Teorem 2.5.5. *(Nakai 2001)* Φ_i *Young fonksiyonları,* $\phi_i \in G$, $i = 1, 2, 3...$ *olsun. Ayrıca* $r, s > 0$ *için*

$$\Phi_1^{-1}(r\phi_1(s))\,\Phi_3^{-1}(r\phi_3(s)) \leq c\Phi_2^{-1}(r\phi_2(s))$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $c > 0$ *var olsun. Bu durumda* $f \in L_{\Phi_1,\phi_1}$, $g \in L_{\Phi_3,\phi_3}$ *için* $f.g \in L_{\Phi_2,\phi_2}$ *ve*

$$\|fg\|_{L_{\Phi_2,\phi_2}} \leq 2c\,\|f\|_{L_{\Phi_1,\phi_1}}\,\|g\|_{L_{\Phi_3,\phi_3}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Genelliği bozmadan $\|f\|_{L_{\Phi_1,\phi_1}} = \|f\|_{L_{\Phi_3,\phi_3}} = 1$ kabul edebiliriz. Herhangi B

yuvarı ve $x \in B$ için

$$r = \max\left(\frac{\Phi_1\left(|f(x)|\right)}{\phi_1\left(|B|\right)}, \frac{\Phi_3\left(|g(x)|\right)}{\phi_3\left(|B|\right)}\right)$$

diyelim. Bundan başka $f \in L_{\Phi_1,\phi_1}$ ve $g \in L_{\Phi_3,\phi_3}$ olduğundan

$$\int\limits_B \Phi_1\left(|f(x)|\right) dx \leq |B|\,\phi_1\left(|B|\right), \quad \int\limits_B \Phi_3\left(|f(x)|\right) dx \leq |B|\,\phi_3\left(|B|\right)$$

olur. Ayrıca yukardaki r 'nin tanımından

$$|f(x)| \leq \Phi_1^{-1}\left(\Phi_1\left(|f(x)|\right)\right) \leq \Phi_1^{-1}\left(r\phi_1\left(|B|\right)\right)$$

ve

$$|g(x)| \leq \Phi_3^{-1}\left(\Phi_3\left(|g(x)|\right)\right) \leq \Phi_3^{-1}\left(r\phi_3\left(|B|\right)\right)$$

dir. Buradan hipotezden

$$|f(x)g(x)| \leq \Phi_1^{-1}\left(r\phi_1\left(|B|\right)\right)\Phi_3^{-1}\left(r\phi_3\left(|B|\right)\right) \leq c\Phi_2^{-1}\left(r\phi_2\left(|B|\right)\right)$$

ve genelleşmiş Young eşitsizliğinin ispatındaki yöntemden

$$\begin{aligned}\Phi_2\left(\frac{|f(x)g(x)|}{2c}\right) &\leq \frac{1}{2}\Phi_2\left(\Phi_2^{-1}\left(r\phi_2\left(|B|\right)\right)\right) \leq \frac{1}{2}r\phi_2\left(|B|\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\Phi_1\left(|f(x)|\right)}{\phi_1\left(|B|\right)} + \frac{\Phi_3\left(|g(x)|\right)}{\phi_3\left(|B|\right)}\right)\phi_2\left(|B|\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin iki tarafından B üzerinden integrallersek

$$\int\limits_B \Phi_2\left(\frac{|f(x)g(x)|}{2c}\right) dx \leq |B|\,\phi_2\left(|B|\right)$$

buluruz. Bu ise

$$\|fg\|_{L_{\Phi_2,\phi_2}} \leq 2c$$

demektir. $\square$

3. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, öncelikle $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayları ve özellikleri incelenmiştir. Ardından ise Orlicz-Morrey uzaylarının tanımı verilip bazı özellikleri çalışılmıştır. Bu tez çalışması ile Orlicz uzaylarının Fourier harmonik analizinde önemli bir teknik araç olduğu literatürdeki çalışmalar sayesinde gözlemlenmiştir. Yine literatürdeki çalışmalardan Orlicz uzaylarının yanısıra Orlicz-Morrey, Orlicz-Sobolev, Orlicz-Campanato uzayları ile çalışıldığı anlaşılmıştır.

4. KAYNAKLAR

ADAMS, R. 1977. On the Orlicz-Sobolev imbedding theorem. *Journal of Functional Analysis*, 24(3):241–257.

BIRNBAUM, Z. and ORLICZ, W.-F. 1931. Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen. *Studia Mathematica*, 3(1):1–67.

CIANCHI, A. 1999. Strong and Weak Type Inequalities for Some Classical Operators in Orlicz Spaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 60(1):187–202.

COOPER, J. L. B. and ZAANEN, A. C. 1955. Linear Analysis. *The Mathematical Gazette*, 39(329):253.

GULIYEV, V. 2009. Boundedness of the Maximal, Potential and Singular Operators in the Generalized Morrey Spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2009(1):503948.

HASANOV, J. J. 2014. -Admissible Sublinear Singular Operators and Generalized Orlicz-Morrey Spaces. *Journal of Function Spaces*, 2014.

KITA, H. 1997. On Hardy - Littlewood Maximal Functions in Orlicz Spaces. *Mathematische Nachrichten*, 183(1):135–155.

KITA, H.-O. 1996. On maximal functions in Orlicz spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(10):3019–3025.

KOKILASHVILI, V. and KRBEC, M. 1991. *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*. World Scientific Pub Co Pte Lt.

KRASNOSEL'SKII, M. A. and RUTICKII, Y. B. 1961. *Convex functions and Orlicz spaces*. Noordhoff Groningen.

KUFNER, A., JOHN, O. and FUCIK, S. 1977. *Function spaces*. Springer Science & Business Media, 3.

LUXEMBURG, W. A. 2000. *Riesz spaces*. Elsevier, 1.

MORREY, C. B. 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 43(1):126–126.

NAKAI, E. 2001. On generalized fractional integrals. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 5(3):pp–587.

NAKAI, E. 2008. Orlicz–Morrey spaces and the Hardy–Littlewood maximal function. *Studia Mathematica*, 188(3):193–221.

ORLICZ, W. 1932. Uber eine gewisse Klasse von vom typus B. *Bulletin de L'Académie Polonaise Des Sciences*, 207–220.

ORLICZ, W. 1936. Uber Räumen LM. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser A*, 93–107.

PEETRE, J. 1969. On the theory of Lp, λ spaces. *Journal of Functional Analysis*, 4(1):71–87.

SAWANO, Y., SUGANO, S. and TANAKA, H. 2012. Orlicz–Morrey spaces and fractional operators. *Potential Analysis*, 36(4):517–556.

TORCHINSKY, A. 1976. Interpolation of operations and Orlicz classes. *Studia Mathematica*, 59(2):177–207.

TRUDINGER, N. 1967. On Imbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications. *Indiana University Mathematics Journal*, 17(5):473–483.

ÖZGEÇMİŞ

Gülsüm Kökalp, 1989 yılında Antalya'da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2009 yılında başladığı Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2013 yılında mezun oldu. 2014 'de Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı.