T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ UZAYLARINDA MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Sümeyya Tuğçe ARAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ UZAYLARINDA MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Sümeyya Tuğçe ARAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 10/01/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Yrd. Doç. Dr. Ramazan UYHAN

ÖZET

ORLICZ UZAYLARINDA MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Sümeyya Tuğçe ARAR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI
Ocak 2017, 36 sayfa

Bu çalışmadaki amacımız öncelikle L_p-Lebesque uzaylarının bir genelleştirilmesi olarak bilinen Orlicz uzaylarını tanımlayıp özelliklerini incelemektir.

W.Orlizc tarafından tanımlanan bu uzaylar Fonksiyonlar teorisi ve Fourier harmonik analizinin önemli araçlarındandır.

Son olarak Mf Hardy-Littlewood maksimal operatörünün Orlicz uzaylarında sınırlılığı için gerekli ve yeterli koşul verilecektir.

ANAHTAR KELİMELER: Konveks fonksiyon, Young fonksiyonu, Orlicz sınıfı, Orlicz uzayı, Maksimal operatör

JÜRİ: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI (Danışman)
Prof. Dr. İlham ALİYEV
Yrd. Doç. Dr. Ramazan UYHAN

ABSTRACT

ORLICZ SPACES AND MAXIMAL OPERATORS

Sümeyya Tuğçe ARAR

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI
January 2017, 36 pages

The aim of this thesis, firstly, is to define and investigate the properties of the Orlicz space, are the generalization of Lebesque space L_p.

This space is defined by W.Orlicz are very important tools in Function theory and Fourier harmonic analysis.

Finally is given a necessary and sufficient condition for boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator Mf on Orlicz space.

KEYWORDS: Convex function, Young function, Orlicz classes, Orlicz space, Maximal operator

COMMITTEE: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI (Supervisor)
Prof. Dr. İlham ALİYEV
Asst. Prof. Dr. Ramazan UYHAN

ÖNSÖZ

Orlicz uzayları, Polonyalı fizikçi-matematikçi W.Orlicz'in 1932 ve 1936 yıllarında teorik fizik üzerine yaptığı çalışmalarda kullandığı klasik L_p-Lebesque uzaylarından daha genel fonksiyon uzaylarıdır.

Bu fonksiyon uzayları, ilk defa W.Orlicz tarafından kullanıldığı için daha sonraki yıllarda Orlicz uzayları adını almıştır.

Literatürdeki bir anektoda göre, yaşadığı şehrin belediyesinden oturduğu küçük dairesinin, bir büyüğü ile değiştirilmesini talep etmesi üzerine, sizin "uzayınız" var diye isteği geri çevrilen sayısız başarı ve ödüle sahip Profesör W.Orlicz'in matematiğe ve matematik-fiziğin bir çok dalına önemli katkıları olmuştur.

İlerleyen zamanla Foksiyonlar teorisinin, Fourier harmonik analizinin temel çalışma alanlarından olan Orlicz uzayları ile birçok matematikçi çalışmış ve L_p-Lebesque uzaylarında olduğu gibi önemli operatörlerin sınırlılığı gibi problemler Orlicz uzaylarında da incelenmiştir.

Bu bağlamda yaptığımız bu çalışma hem Orlicz uzaylarını ve özelliklerini incelemek açısından hem de bundan sonraki çalışmalarımıza temel teşkil etmesi açısından önemlidir.

Çalışmamız giriş, kuramsal bilgiler ve kaynak taraması, Orlicz uzayı ve yakınsama ve sonuç olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü kendi içinde altbölümlere ayrılarak konveks fonksiyon kavramı ve Young fonksiyonu incelenmiş, kuramsal bilgiler ve kaynak taramalarından sonra Orlicz uzayı ve Orlicz uzayında yakınsama ve Orlicz uzayında Maksimal operatörünün sınırlılığı gösterildikten sonra çalışmamızda sonuç bölümü ve kaynaklar ile son bulmuştur.

Akademik hayatımın ilk basamaklarında sağlam bir altyapı oluşturmamı sağlayan, bilgi ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI ya her zaman beni aydnlattığı ve ufkumu genişlettiği için gönülden teşekkür ederim.

Bu günlere ulaşmamda büyük emeği olan, her kararımı destekleyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$
$L_p(\Omega)$	Lebesque Uzayı
$\widetilde{L}_\Phi(\Omega)$	Orlicz sınıfı
$L_\Phi(\Omega)$	Orlicz Uzayı
$\|f\|_\Phi$	Orlicz normu
$\|\|f(x)\|\|_\Phi$	Luxemburg normu
$Mf(x)$	Hardy-Littlewood maksimal operatörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

$L_{\Phi}(\Omega)$ Orlicz uzaylarının tanımında Φ fonksiyonu olarak Young fonksiyonu alınmaktadır. İleride göreceğimiz gibi Young fonksiyonu özel bir konveks fonksiyondur.

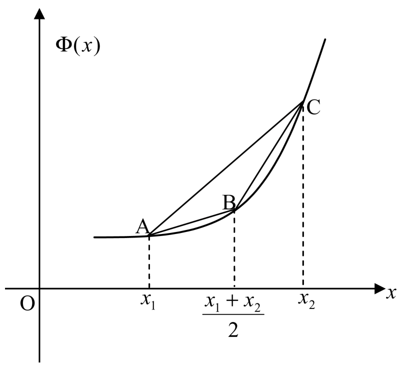
Bu bağlamda öncelikle konveks fonksiyon kavramına ve önemli özelliklerine ihtiyacımız vardır. Yine bu bölümde Orlicz uzaylarını tanımlamadan önce Young fonksiyonu ve Young eşitsizliği verilecektir.

1.1. KONVEKS FONKSİYON VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.1. *(Krasnoselskii ve Rutickii (1961))*
Φ sürekli, reel değerli fonksiyonu olmak üzere her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{\Phi(x_1)+\Phi(x_2)}{2} \tag{1.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa Φ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.



Şekil 1.1. Konveks Fonksiyon

Yani, noktaları birleştiren kirişler, fonksiyonun grafiğinin üzerinde kalmaktadır. Başka bir ifadeyle eğriye çizilen teğetler, eğrinin altında yer alır.

Teorem 1.2. *(Jensen Eşitsizliği) Φ sürekli ve konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$ ve $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için*

$$\Phi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha\Phi(x_1) + (1-\alpha)\Phi(x_2) \tag{1.2}$$

Jensen Eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki (1.2) eşitsizliği her $\alpha \in [0,1]$ için sağlanmasın. Bu durumda

$$f(\alpha) = \Phi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - \alpha\Phi(x_1) - (1-\alpha)\Phi(x_2)$$

sürekli fonksiyonunun maksimum değeri $M_0 > 0$ 'dır. Ayrıca M_0 değeri aldığı en küçük α 'yı da α_0 ile gösterelim. Yani, $f(\alpha_0) = M_0 > 0$ dır.

Bundan başka öyle bir $\delta > 0$ sayısı seçelim ki $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta] \subset [0, 1]$ olsun. Şimdi herhangi x_1, x_2 için

$$\begin{aligned} x_1^* &= (\alpha_0 - \delta)\, x_1 + (1 - \alpha_0 + \delta) x_2 \\ x_2^* &= (\alpha_0 + \delta)\, x_1 + (1 - \alpha_0 - \delta) x_2 \end{aligned}$$

noktalarını tanımlayalım. Φ fonksiyonu konveks fonksiyon olduğundan (1.1) eşitsizliğini bu noktalara uygulayalım:

$$\Phi\left(\frac{x_1^* + x_1^*}{2}\right) \le \frac{\Phi(x_1^*) + \Phi(x_2^*)}{2}.$$

Buradan

$$\frac{x_1^* + x_2^*}{2} = \alpha_0 x_1 + (1 - \alpha_0)\, x_2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &\Phi(\alpha_0 x_1 + (1 - \alpha_0)\, x_2) \le \\ &\le \frac{1}{2}\left[\Phi\Big((\alpha_0 - \delta)\, x_1 + (1 - \alpha_0 + \delta)\, x_2\Big) + \Phi\Big((\alpha_0 + \delta)\, x_1 + (1 - \alpha_0 - \delta)\, x_2\Big)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\Phi\Big((\alpha_0 - \delta)\, x_1 + (1 - \alpha_0 + \delta)\, x_2\Big) + \Phi\Big((\alpha_0 + \delta)\, x_1 + (1 - \alpha_0 - \delta)\, x_2\Big)\right] \\ &- \alpha_0 \Phi(x_1) - (1 - \alpha_0)\, \Phi(x_2) + \alpha_0 \Phi(x_1) + (1 - \alpha_0)\, \Phi(x_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f(\alpha_0) \le \frac{f(\alpha_0 - \delta) + f(\alpha_0 + \delta)}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. M_0, f fonksiyonunun maksimum değeri ve α_0 da $f(\alpha_0) = M_0$ koşulunu sağlayan en küçük α olduğundan

$$\frac{f(\alpha_0 - \delta) + f(\alpha_0 + \delta)}{2} < M_0$$

olmalıdır bu $f(\alpha_0) < M_0$ olmasını gerektirir ve $f(\alpha_0) = M_0$ ile çelişir. Dolayısıyla yukarıdaki Jensen eşitsizliği $\forall \alpha : 0 \le \alpha \le 1$ için sağlanmaktadır. $\square$

Not 1.3. *Jensen eşitsizliğinde $x_1 \neq x_2$ halinde $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ için eşitlik elde ederiz. Ayrıca $\alpha_0 \in (0, 1)$ için $f(\alpha_0) = 0$ ise her $\alpha \in [0, 1]$ için $f(\alpha) = 0$ olduğu açıktır. Çünkü Φ sürekli ve konveks fonksiyon olduğundan f 'nin de sürekli ve konveks fonksiyon olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz. Ayrıca yukarıda gördük ki $f(\alpha)$ fonksiyonunu pozitif yapan bir $\alpha \in (0, 1)$ değeri bulunmamaktadır. Şimdi kabul edelim ki herhangi bir α_1 için*

$f(\alpha_1) \leq 0$ *olsun. Bu durumda* α_0 *sayısını*

$$\alpha_0 = \frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1}\alpha_1 + \frac{\alpha_0-\alpha_1}{1-\alpha_1}$$

biçiminde ifade ederek ve f *'nin sürekli, konveks fonksiyon olduğunu dikkate alarak Jensen eşitsizliğine göre*

$$f(\alpha_0) \leq \frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1} f(\alpha_1) + \frac{\alpha_0-\alpha_1}{1-\alpha_1} f(1)$$

elde ederiz. $f(1) = 0$ *olduğundan* $f(\alpha_0) \leq 0$ *bulunur ki bu* $f(\alpha_0) = 0$ *olması ile çelişir.*

(1.2) Jensen Eşitsizliğinin genel hali ise aşağıdaki gibidir.

Keyfi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{\Phi(x_1)+\Phi(x_2)+\cdots+\Phi(x_n)}{n} \tag{1.3}$$

(1.3) eşitsizliğini tümevarımla kolayca elde edebiliriz.

Şimdi bizim için gerekli bir eşitsizliği aşağıda elde edelim.

$x_1 \leq x_3 \leq x_2$ olmak üzere x_3 sayısını

$$x_3 = \frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}x_1 + \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}x_2$$

biçiminde yazalım. Böylece Jensen eşitsizliğine göre

$$\Phi(x_3) \leq \frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}\Phi(x_1) + \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\Phi(x_2)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} \Phi(x_3) - \Phi(x_1) &\leq \frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}\Phi(x_1) - \Phi(x_1) + \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\Phi(x_2) \\ &= \frac{x_1-x_3}{x_2-x_1}\Phi(x_1) + \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\Phi(x_2) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\Phi(x_3)-\Phi(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{\Phi(x_1)}{x_1-x_2} + \frac{\Phi(x_2)}{x_2-x_1} = \frac{\Phi(x_2)-\Phi(x_1)}{x_2-x_1} \tag{1.4}$$

eşitsizliğini ve

$$\begin{aligned}\Phi(x_3)-\Phi(x_2) &\leq \frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}\Phi(x_1)-\Phi(x_2)+\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\Phi(x_2)\\ &= \frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}\Phi(x_1)+\frac{x_3-x_2}{x_2-x_1}\Phi(x_2)\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\Phi(x_3)-\Phi(x_2)}{x_2-x_3} \leq \frac{\Phi(x_1)}{x_2-x_1}+\frac{\Phi(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\Phi(x_1)-\Phi(x_2)}{x_2-x_1} \tag{1.5}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece (1.4) ve (1.5) den

$$\frac{\Phi(x_3)-\Phi(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{\Phi(x_2)-\Phi(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{\Phi(x_2)-\Phi(x_3)}{x_2-x_3} \tag{1.6}$$

eşitsizliğini buluruz.

Konveks fonksiyonun özelliklerini incelemeye devam edelim. Aşağıdaki Lemma konveks fonksiyonun her noktada sol ve sağ türevlerinin varlığı ile ilgilidir.

Lemma 1.4. *(Krasnoselskii ve Rutickii (1961))*
$\Phi(x)$ konveks fonksiyon olsun. Bu durumda bu fonksiyonun her noktada sol türevi $\Phi'_-(x)$ ve sağ türevi $\Phi'_+(x)$ vardır. Ayrıca her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi'_-(x) \leq \Phi'_+(x) \tag{1.7}$$

dir.

İspat. $0 \leq h_1 \leq h_2$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x-h_2 < x-h_1 < x < x+h_1 < x+h_2$$

olduğundan (1.6) eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(x)-\Phi(x-h_2)}{h_2} &\leq \frac{\Phi(x)-\Phi(x-h_1)}{h_1} \leq \cdots\\ \cdots \leq \frac{\Phi(x+h_1)-\Phi(x)}{h_1} &\leq \frac{\Phi(x+h_2)-\Phi(x)}{h_2}\end{aligned} \tag{1.8}$$

olur. Bu eşitsizlik zincirinden görülür ki $\frac{\Phi(x)-\Phi(x-h)}{h}$ oranı $h \to 0^+$ iken azalmayandır, üstten sınırlıdır ve limiti $\Phi'_-(x)$ dir. Ayrıca $\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}$ oranı da $h \to 0^+$ iken artmayandır, alttan sınırlıdır ve limiti $\Phi'_+(x)$ dir ve limit durumunda $\Phi'_-(x) \leq \Phi'_+(x)$ eşitsizliği sağlanır. □

Lemma 1.5. *(Krasnoselskii ve Rutickii (1961)) $\Phi(x)$ konveks fonksiyonunun sağ türevi*

$\Phi'_{+}(x)$ *monoton azalmayan sağdan sürekli fonksiyondur. Benzer şekilde, sol türevi* $\Phi'_{-}(x)$ *monoton azalmayan soldan sürekli fonksiyondur.*

İspat. $x_1 < x_2$ alalım ve yeterince küçük $h > 0$ için $x_1 + h < x_2 - h$ olsun.
$x_1 < x_1 + h < x_2 - h < x_2$ olduğundan (1.6) eşitsizliğine göre

$$\frac{\Phi(x_1+h) - \Phi(x_1)}{h} \leq \frac{\Phi(x_2) - \Phi(x_2-h)}{h}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten $h \to 0^+$ için limite geçersek

$$\Phi'_{+}(x_1) \leq \Phi'_{-}(x_2) \tag{1.9}$$

olur. Ayrıca Lemma 1.4 'e göre $\Phi'_{-}(x_2) \leq \Phi'_{+}(x_2)$ olduğundan $\Phi'_{+}(x_1) \leq \Phi'_{+}(x_2)$ bulunur ki bu $\Phi'_{+}(x)$ fonksiyonunun monoton azalmayan olduğunu gösterir.
Şimdi $\Phi'_{+}(x)$ fonksiyonunun bir x_0 noktasında sağdan sürekli olduğunu görelim. Bunun için (1.8) eşitsizliğine göre her $h > 0$ için

$$\Phi'_{+}(x) \leq \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h}$$

dır. Burada h sabit tutulup, her iki yandan $x \to x_0^+$ iken limite geçersek ve $\Phi(x)$ fonksiyonunun sürekliliğini de dikkate alırsak

$$\lim_{x \to x_0^+} \Phi'_{+}(x) \leq \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan $h \to 0^+$ için limit alırsak

$$\lim_{x \to x_0^+} \Phi'_{+}(x) \leq \Phi'_{+}(x_0)$$

bulunur. Diğer yandan monotonluktan, $x > x_0$ iken $\Phi'_{+}(x) \geq \Phi'_{+}(x_0)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to x_0^+} \Phi'_{+}(x) \geq \Phi'_{+}(x_0)$ olur. Dolayısıyla

$$\lim_{x \to x_0^+} \Phi'_{+}(x) = \Phi'_{+}(x_0)$$

dir. Benzer yöntemle $\Phi'_{-}(x)$ fonksiyonunun da azalmayan soldan sürekli olduğu gösterilebilir. □

Lemma 1.6. $\Phi(x)$ *konveks fonksiyonu mutlak sürekli fonksiyondur ve her sonlu aralıkta Lipschitz koşulunu sağlar.*

İspat. $[a, b]$ aralığını gözönüne alalım. Ayrıca $a < x_1 < x_2 < b$ olsun. (1.6) eşitsizliğinden

$$\frac{\Phi(x_1) - \Phi(a)}{x_1 - a} \leq \frac{\Phi(x_2) - \Phi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\Phi(b) - \Phi(x_2)}{b - x_2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan limite geçersek

$$\Phi'_{+}(a) \leq \frac{\Phi(x_2) - \Phi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \Phi'_{-}(b) \tag{1.10}$$

eşitsizliğine ulaşırız ki bu ise $|\frac{\Phi(x_2)-\Phi(x_1)}{x_2-x_1}|$ değerinin sınırlı olduğunu gösterir.
Buradan Φ 'nin mutlak sürekli fonksiyon olduğu ve Lipschitz koşulunu sağladığı açıktır. □

Bu çalışmalar ile aşağıdaki önemli teoreme ulaşmış oluruz.

Teorem 1.7. *Her $\Phi(x)$ konveks fonksiyonu*

$$\Phi(x) = \int_a^x \Phi'(t)\, dt,\ \Phi(a) = 0$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\Phi'(t)$ azalmayan, sağdan ve sürekli fonksiyondur.

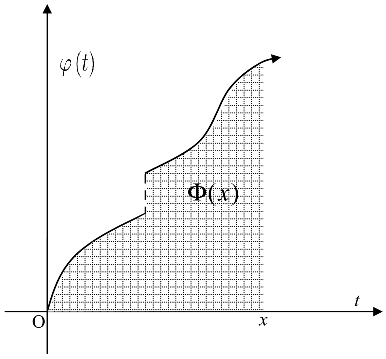
İspat. Öncelikle $\Phi(x)$ fonksiyonunun hemen her yerde türevinin var olduğunu gösterelim. $x_1 < x_2$ için (1.7) ve (1.9) 'dan

$$\Phi'_{-}(x_1) \leq \Phi'_{+}(x_1) \leq \Phi'_{-}(x_2)$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca Lemma 1.6 'ya göre $\Phi'_{-}(x)$ monoton ve soldan süreklidir. x_1, $\Phi'_{-}(x)$'in sürekli olduğu nokta olsun. Yukarıdaki eşitsizlikten $x_2 \to x_1$ iken limite geçersek $\Phi'_{-}(x_1) \geq \Phi'_{+}(x_1) \geq \Phi'_{-}(x_1)$ eşitsizlik zincirini yani $\Phi'_{-}(x) = \Phi'_{+}(x)$ eşitliğini elde ederiz. Ayrıca $\Phi(x)$ mutlak sürekli fonksiyon olduğundan türevinin belirsiz integralidir. □

1.2. YOUNG FONKSİYONU VE YOUNG EŞİTSİZLİĞİ

Konveks fonksiyon ve özelliklerini ilk bölümde inceledik, bu bölümde ise özel bir konveks fonksiyon olan Young fonksiyonunu tanımlayıp onunla çalışacağız.



Şekil 1.2. Young Fonksiyonu

Tanım 1.8. *(Krasnoselskii ve Rutickii (1961))*
$\varphi(t)$, $t > 0$ pozitif, monoton azalmayan, sağdan sürekli ve $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt, \quad x \geq 0 \tag{1.11}$$

fonksiyonuna Young Fonksiyonu (veya N-fonksiyonu) denir.

Young fonksiyonuna örnek olarak, $\Phi_1(x) = x^p$, $x \geq 0, p \geq 1$ ve $\Phi_2(x) = e^{x^2} - 1$ fonksiyonlarını verebiliriz. Burada sırasıyla $\varphi_1(t) = pt^{p-1}$, $p \geq 1$ ve $\varphi_2(t) = 2te^{t^2}$ dir.

Teorem 1.9. Φ *Young fonksiyonu olsun. Bu durumda*

1. *$\Phi(x)$, $x \geq 0$ için da sürekli, negatif olmayan, $\Phi(0) = 0$ ve monoton azalmayan fonksiyondur.*
2. *$\Phi(x)$ konveks fonksiyondur.*
3. *$x \geq 0$ için $\begin{cases} \Phi(\alpha x) \leq \alpha\Phi(x), & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \Phi(\beta x) \geq \beta\Phi(x), & \beta \geq 1 \end{cases}$ dir.*
4. *$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$ ve $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty$ dir.*

İspat.

1. $x \geq 0$ için (1.11) tanımından $\Phi(0) = 0$ ve $\Phi(x) > 0$ 'dır. Ayrıca $x_0 > 0$ için $\varphi(t)$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$0 \leq |\Phi(x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_0^x \varphi(t)\, dt - \int_0^{x_0} \varphi(t)\, dt \right| = \left| \int_x^{x_0} \varphi(t)\, dt \right|$$
$$\leq \int_x^{x_0} \left| \varphi(t) \right| dt = |\varphi(\zeta)||x - x_0| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$$

şeklinde $\Phi(x)$ 'in sürekliliği elde edilir. Ayrıca yine (1.11) tanımından $\Phi(x)$ 'in kesin monoton olduğu açıktır.

2. $\Phi(x)$ fonksiyonunun (1.1) eşitsizliğini sağladığını görelim. Herhangi $x_1, x_2 > 0$ alalım ve $x_1 < x_2$ kabul edelim. $\varphi(t)$ fonksiyonu monoton azalmayan olduğundan

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) &= \int_0^{\frac{x_1+x_2}{2}} \varphi(t)\,dt = \int_0^{x_1} \varphi(t)\,dt + \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} \varphi(t)\,dt \\
&= \int_0^{x_1} \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} \varphi(t)\,dt \\
&\leq \int_0^{x_1} \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} \varphi(t)\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\Bigg(\int_0^{x_1} \varphi(t)\,dt + \int_0^{x_1} \varphi(t)\,dt + \int_0^{\frac{x_1+x_2}{2}} \varphi(t)\,dt \\
&- \int_0^{x_1} \varphi(t)\,dt + \int_0^{x_2} \varphi(t)\,dt - \int_0^{\frac{x_1+x_2}{2}} \varphi(t)\,dt\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{x_1} \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{x_2} \varphi(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\Big(\Phi(x_1) + \Phi(x_2)\Big)
\end{aligned}
$$

biçiminde $\Phi(x)$ fonksiyonunun konveksliği elde edilir.

3. Konveks fonksiyon için (1.2) Jensen eşitsizliğinde $x_2 = 0$ alırsak, her $x \geq 0$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için $\Phi(\alpha x) \leq \alpha\Phi(x)$ elde edilir. Ayrıca bu eşitsizlikte $\alpha = \frac{1}{\beta}$, $x = \beta y$ alırsak her $y \geq 0$ ve her $\beta \geq 1$ için $\Phi(y) \leq \frac{1}{\beta}\Phi(\beta y)$ yani $\Phi(\beta y) \geq \beta\Phi(y)$ bulunur.

4. $\varphi(t), t \geq 0$ fonksiyonu sürekli olduğundan integral için ortalama değer teoremine göre

$$
\lim_{x\to 0^+} \frac{\Phi(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\varphi(\xi_x)\,x = 0,\ 0 < \xi_x < x
$$

dır. Ayrıca $\varphi(t)$, $t \geq 0$ monoton azalmayan olduğundan

$$\frac{\Phi(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(t)\,dt \geq \frac{1}{x}\int_{\frac{x}{2}}^x \varphi(t)\,dt \geq \frac{1}{x}\frac{x}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$$

ve $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = \varphi(\infty) = \infty$ dan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Phi(x)}{x} \geq \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \infty, \quad (\varphi(\infty) = \infty)$$

elde edilir.

$\square$

Not 1.10. *Teorem 1.9. 3) 'deki $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$, $\alpha \in [0,1]$ eşitsizliğinden $\frac{\Phi(x)}{x}$ fonksiyonunun monoton azalmayan bir fonksiyon olduğunu elde ederiz. Şöyle ki herhangi $x_1, x_2 \geq 0$ için $x_1 \leq x_2$ olsun. Bu durumda $\alpha = \dfrac{x_1}{x_2}$, $t = x_2$ olmak üzere*

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}x_2\right) \leq \frac{x_1}{x_2}\Phi(x_2)$$

eşitsizliğinden

$$\frac{\Phi(x_1)}{x_1} \leq \frac{\Phi(x_2)}{x_2}$$

elde edilir.

Not 1.11. *Φ Young fonksiyonunun sürekli olduğunu yukarıda gördük. Kesin monoton artan olduğunda onun tersi $\Phi^{-1}(x)$, $x \geq 0$ 'dir. $\Phi^{-1}(x)$, $x \geq 0$ fonksiyonu da sürekli, kesin monoton artan, pozitif ve konvekstir. Yani, her $x_1, x_2 \geq 0$ için*

$$\Phi^{-1}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha\Phi^{-1}(x_1) + (1-\alpha)\Phi^{-1}(x_2) \tag{1.12}$$

Jensen eşitsizliğini sağlar.

Tanım 1.12. $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt$, *$x \geq 0$ Young fonksiyonu için*

$$\psi(s) = \sup_{\varphi(t)\leq s} t$$

olmak üzere

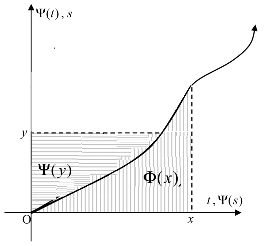
$$\Psi(y) = \int_0^y \psi(s)\,ds, \quad y \geq 0$$

fonksiyonuna Φ 'nin Eşlenik Young fonksiyonu denir.

Tanım 1.8'deki $\varphi(t)$ fonksiyonunun sağladığı özellikler $\psi(s)$ fonksiyonu içinde geçerlidir: $s > 0$ için $\psi(s)$ pozitiftir, $s \geq 0$ için sağdan süreklidir, monoton azalmayandır ve

$$\psi(0) = 0, \quad \lim_{s \to \infty} \psi(s) = \infty$$

dir. Eğer $\varphi(t)$ fonksiyonu sürekli ve monoton ve artan ise $\psi(s)$ fonksiyonu, $\varphi(t)$ 'nin bildiğimiz tersidir. (Kokilashvili ve Krbec (1991))



Şekil 1.3. Young Eşitsizliği

Teorem 1.13. *(Young Eşitsizliği) Φ ve Ψ eşlenik Young fonksiyonları olsun. Bu durumda her $x, y \geq 0$ için*

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y) \tag{1.13}$$

dir. Eğer $x = \psi(y)$ veya $y = \varphi(x)$ alınırsa eşitsizlik eşitliğe dönüşür.

İspat. Şekil 1.3 'den açıkca görülen Young eşitsizliğinin analitik ispatı Zaanen (1956) tarafından verilmiştir. $\square$

Örnek 1.14. *1. $p > 1$ için $\varphi(t) = t^{p-1}$ olmak üzere*

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt = \int_0^x t^{p-1}dt = \frac{x^p}{p}$$

fonksiyonunun eşleniği $\psi(s) = \sup\limits_{\varphi(t) \leq s} t = s^{\frac{1}{p-1}}$ iken

$$\Psi(y) = \int_0^y \psi(s)\,ds = \int_0^y s^{\frac{1}{p-1}}ds = \frac{y^q}{q}, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

dir. Buradan klasik halde bildiğimiz Young eşitsizliğini

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

elde ederiz.

2. $\varphi(t) = e^t - 1$ *için* $\Phi(x) = \int\limits_0^x (e^t - 1)\, dt = e^x - x - 1$ *fonksiyonunun eşleniği* $\psi(s) = \sup\limits_{\varphi(t) \le s} t = \ln(s+1)$ *iken*

$$\Psi(y) = \int\limits_0^y \psi(s)\, ds = \int\limits_0^y \ln(s+1)\, ds = (y+1)\ln(y+1) - y$$

dir.

(1.13) Young Eşitsizliğini tekrar göz önüne alırsak, her $x, y \ge 0$ için

$$\Psi(y) \ge xy - \Phi(x)$$

dir. Buradan eşlenik Young fonksiyonu $\Psi(y)$ 'nin bir başka tanımını şöyle verebiliriz:

$$\Psi(y) = \max_{x \ge 0}(xy - \Phi(x)) \tag{1.14}$$

Ayrıca açıktır ki

$$\Psi\left(\frac{\Phi(x)}{x}\right) < \Phi(x) \tag{1.15}$$

dir.

Böylece ileride bizim için gerekli olacak aşağıdaki Lemma'yı verebiliriz.

Lemma 1.15. Φ *ve* Ψ *eşlenik Young fonksiyonları olsun. Bu durumda* $y > 0$

$$y < \Phi^{-1}(y)\, \Psi^{-1}(y) \le 2y$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $y > 0$ için (1.13) Young Eşitsizliğinde

$$x = \Phi^{-1}(y) \text{ ve } y = \Psi^{-1}(y)$$

alırsak,

$$\Phi^{-1}(y)\, \Psi^{-1}(y) \le \Phi\left(\Phi^{-1}(y)\right) + \Psi\left(\Psi^{-1}(y)\right) = 2y$$

olur. Bundan başka (1.15) eşitsizliğinde $\Phi(x) = y \Leftrightarrow x = \Phi^{-1}(y)$ yazarsak

$$\Psi\left(\frac{y}{\Phi^{-1}(y)}\right) < y \Rightarrow y < \Psi^{-1}(y)\, \Phi^{-1}(y)$$

elde edilir. □

Tanım 1.16. *(Δ_2-koşulu) Φ Young fonksiyonu olsun. Öyle bir $k > 0$ ve $T \geq 0$ sayıları vardır ki $\forall x \geq T$ için*

$$\Phi(2x) \leq k\Phi(x), \, x \geq T \tag{1.16}$$

eşitsizliği sağlanırsa, Φ fonksiyonuna Δ_2 koşulunu sağlıyor denir.

Φ, Δ_2 koşulunu sağlıyorsa başka bir ifade ile öyle $k(p) > 0$ ve $T \geq 0$ sayıları vardır ki $\forall x \geq T$ için

$$\Phi(px) \leq k(p)\,\Phi(x), \, x \geq T \tag{1.17}$$

eşitsizliği sağlanır. Şöyle ki, $p > 0$ için öyle bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $p < 2^n$ 'dir. Bundan başka (1.16) eşitsizliğine n üzerinden tümevarım uygulayarak $x \geq T$ için

$$\Phi(2^n x) \leq k^n \Phi(x)$$

elde ederiz. Böylece Φ 'nin monotonluğundan,

$$\Phi(px) \leq \Phi(2^n x) \leq k^n \Phi(x) = k(p)\,\Phi(x), \quad k(l) = k^n$$

elde edilir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Matematiğin önemli dallarından olan Fonksiyonlar teorisinin, Fourier harmonik analizinin ve matematik-fiziğin temel çalışma alanı, temel teknik aracı olan Orlicz uzayları ve onların kardeş uzayları olarak bilinen Orlicz-Morrey uzayları, Orlicz-Sobolev uzayları, Orlicz-Campanato uzayları ve diğerleri ile Cianchi (1999), Kita (1997, 1996), O'Neil (1965), Rao ve Ren (1991), Kokilashvili ve Krbec (1991), Guliyev ve Deringoz (2014), Donaldson ve Trudinger (1971), Torchinsky (1976), Kufner vd (1977)gibi birçok matematikçi çalışmış ve L_p-Lebesque uzaylarında olduğu gibi bu uzaylarda da önemli operatörlerin sınırlılığı gibi problemler incelenmiştir.

Örneğin iyi bilinen Hardy-Littlewood maksimal operatörü L_p Lebesque uzaylarında $1 < p \leq \infty$ halinde sınırlı; L_1 'de sınırlı değil iken Kita (1997, 1996)ve Cianchi (1999)tarafından Orlicz uzayları kullanılarak $p = 1$ sınırlılığı gösterilmiştir.

Bundan başka yine Fourier harmonik analizinin önemli teoremlerinden biri olan Hardy-Littlewood-Sobolev teoreminin benzeri Orlicz uzaylarında Donaldson ve Trudinger (1971)tarafından kanıtlanmıştır.

3. ORLİCZ UZAYI VE YAKINSAMA

Tanım 3.1. *(Kufner vd (1977)) (Orlicz Sınıfı)*
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *açık bir küme ve* $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *olmak üzere*

$$\widetilde{L}_{\Phi}(\Omega) = \{f : f,\ \Omega \text{ 'da Lebesque ölçülebilir, } \int\limits_{\Omega} \Phi(|f(x)|)\,dx < \infty\}$$

kümesine Orlicz Sınıfı denir.

Örnek 3.2.
1. $\Phi(x) = x^p$, $x \geq 0$, $p \geq 1$ *olmak üzere* $\widetilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ *Orlicz sınıfı,* $L_p(\Omega)$ *Lebesque uzayı olur.*
2. $\Phi(x) = |\sin x|$ *alındığında ve* $\mu(\Omega) < \infty$ *olmak üzere* $\widetilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ *Orlicz sınıfı,* Ω*'da tanımlı tüm ölçülebilir fonksiyonları içerir. Şöyle ki* f*,* Ω*'da herhangi ölçülebilir fonksiyon olmak üzere*

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(|f(x)|)\,dx = \int\limits_{\Omega} |\sin|f(x)||dx \leq \mu(\Omega) < \infty$$

dır.

3. $\Phi(x) = e^x$, $x > 0$ *ve* $\Omega = (0,1)$ *olmak üzere,* $f(x) = \frac{1}{2}\ln x$ *için*

$$\int\limits_{0}^{1} \Phi(|f(x)|)\,dx = \int\limits_{0}^{1} e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \infty$$

iken

$$\int\limits_{0}^{1} \Phi(|2f(x)|)\,dx = \int\limits_{0}^{1} e^{-\ln x}dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x}dx = \infty$$

olur. Buradan $\tilde{L}_p(\Omega)$ *Orlicz sınıfının her zaman lineer bir küme olmadığını görürüz.*

$\tilde{L}_p(\Omega)$ Orlicz sınıfı için Φ fonksiyonu olarak Young fonksiyonu alındığında aşağıdaki önemli sonuçlara ulaşırız. İlk teorem Orlicz sınıflarının sıralamasıyla ilgilidir. Ardından ise $\tilde{L}_p(\Omega)$ Orlicz sınıfının lineer bir küme olması için yeterli koşulu göreceğiz.

Teorem 3.3. Φ_1, Φ_2 *Young fonksiyonları ve* $\mu(\Omega) < \infty$ *olsun. Bu durumda* $\tilde{L}_{\Phi_2}(\Omega) \subset \tilde{L}_{\Phi_1}(\Omega)$ *olması için gerek ve yeter koşul her* $x \geq T$ *için*

$$\Phi_1(x) \leq c\Phi_2(x)$$

olacak şekilde $c > 0$ *ve* $T > 0$ *sayılarının var olmasıdır.*

İspat. $\Leftarrow$: $f \in \tilde{L}_{\Phi_2}(\Omega)$ alalım.

$$\int_{\Omega_1} \Phi(|f(x)|)\,dx \leq c \int_{\Omega_2} \Phi(|f(x)|)\,dx < \infty$$

olduğundan $f \in \tilde{L}_{\Phi_1}(\Omega)$ olur.
$\Rightarrow$: Kabul edelim ki $\forall x \geq T$ için $\Phi_1(x) \leq c\Phi_2(x)$ koşulunu sağlayan $c > 0$, $T > 0$ sayıları var olmasın. Bu durumda $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ olacak şekilde öyle bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır ki

$$\Phi_1(x_n) > 2^n \Phi_2(x_n)$$

olur. Ayrıca Ω içinde ikişerli arakesitleri boş Ω_n kümelerini de

$$\mu(\Omega_n) = \frac{\Phi_2(x_1)\,\mu(\Omega)}{2^n \Phi_2(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde alalım. $f(x)$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$f(x) = \begin{cases} x_n, & x \in \Omega_n \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_n. \end{cases}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} \Phi_2(|f(x)|)\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_n} \Phi_2(|f(x)|)\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_2(x_n) \frac{\Phi_2(x_1)\,\mu(\Omega)}{2^n \Phi_2(x_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Phi_2(x_1)\,\mu(\Omega) < \infty \end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} \Phi_1(|f(x)|)\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_n} \Phi_1(|f(x)|)\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_1(x_n) \frac{\Phi_2(x_1)\,\mu(\Omega)}{2^n \Phi_2(x_n)} \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \Phi_2(x_n) \frac{\Phi_2(x_1)\,\mu(\Omega)}{2^n \Phi_2(x_n)} = \infty \end{aligned}$$

olur. Bu ise $\tilde{L}_{\Phi_2}(\Omega) \subset \tilde{L}_{\Phi_1}(\Omega)$ olması ile çelişir. □

Teorem 3.4. *$\mu(\Omega) < \infty$ olmak üzere $\tilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ Orlicz sınıfının lineer olması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlamasıdır.*

İspat. $\Rightarrow$: $\mu(\Omega) < \infty$ ve $\tilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ lineer olsun. $\Phi_1(x) = \Phi(2x)$ diyelim.

Herhangi $f \in \tilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ için $\tilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ lineer olduğundan

$$\int_{\Omega} \Phi_1 (|f(x)|)\, dx = \int_{\Omega} \Phi(2|f(x)|)\, dx < \infty$$

yani, $f \in \tilde{L}_{\Phi_1}(\Omega)$ elde edilir. Böylece Teorem 3.3 'e göre her $x \geq T$ olacak şekilde öyle $c > 0$ ve $T > 0$ sayıları vardır ki

$$\Phi_1(x) \leq c\Phi(x)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise her $x \geq T$ içın $\Phi(2x) \leq c\Phi(x)$ dir. Yani Φ 'nin Δ_2 koşulunu sağlamasıdır.
$\Leftarrow$: Φ, Δ_2 koşulunu sağlasın. Bu durumda öyle $k > 0$ ve $T > 0$ sayıları vardır ki her $x \geq T$ için

$$\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$$

dir. Şimdi herhangi $\alpha > 0$ sayısı için yeterince büyük $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $\alpha \leq 2^N$ dir. Buradan Φ Young fonksiyonu monoton artan olduğundan $\Phi(\alpha x) \leq \Phi\left(2^N x\right)$ olur. Tümevarımla da kolayca görebiliriz ki

$$\Phi(\alpha x) \leq \Phi\left(2^N x\right) \leq k^N \Phi(x) \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $\gamma \in \mathbb{R}$, $f, g \in \tilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ için (3.1) eşitsizliğinden

$$\int_{\Omega} \Phi(|\gamma f(x)|)\, dx \leq \int_{\Omega} \Phi\left(|2^N f(x)|\right) dx \leq k^N \int_{\Omega} \Phi(|f(x)|)\, dx < \infty$$

olur. Yani $\gamma f \in \tilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ dir. Φ-Young fonksiyonunun konveksliğinden ise

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Phi(|f(x) + g(x)|)\, dx &= \int_{\Omega} \Phi\left(\left|\frac{1}{2} 2f(x) + \frac{1}{2} 2g(x)\right|\right) dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\Omega} \Phi(|2f(x)|)\, dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} \Phi(|2g(x)|)\, dx \\ &< \infty\end{aligned}$$

elde edilir bu ise $f + g \in \tilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ demektir. □

Tanım 3.5. *(Kokilashvili ve Krbec (1991))(Orlicz Uzayı)*
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık küme, Φ ve Ψ eşlenik Young fonksiyonları olsun.

$$\begin{aligned} L_{\Phi}(\Omega) &= \{\, f : f,\ \Omega \text{ 'da Lebesque ölçülebilir ve } \|f\|_{\Phi} < \infty \,\} \\ \|f\|_{\Phi} &= \sup_{\int_{\Omega} \Psi(|g(x)|)dx \leq 1} \int_{\Omega} |f(x)\, g(x)| dx \end{aligned} \tag{3.2}$$

ile tanımlı normlu uzaya Orliz Uzayı denir.

(3.2) ile verilen fonksiyonun norm koşullarını sağladığı kolayca görülebilir. Bundan başka (1.11) Young Eşitsizliğinden Ω üzerinden integral alınırsa

$$\int_{\Omega} \Phi\left(|f(x)\, g(x)|\right) dx \leq \int_{\Omega} \Phi\left(|f(x)|\right) dx + \int_{\Omega} \Psi\left(|g(x)|\right) dx$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra bu eşitsizliğin her iki yanından $\int_{\Omega} \Psi\left(|g(x)|\right) dx \leq 1$ koşulunu sağlayan g fonksiyonları üzerinden supremum alınırsa

$$\|f\|_{\Phi} \leq \int_{\Omega} \Phi\left(|f(x)|\right) dx + 1 \tag{3.3}$$

bulunur. Bu ise

$$\tilde{L}_{\Phi}(\Omega) \subset L_{\Phi}(\Omega)$$

demektir ki Orlicz sınıfları, Orlicz uzayı tarafından kapsanır.

Ayrıca $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$, $p \geq 1$ Young fonksiyonu alındığında $L_{\Phi}(\Omega)$ Orlicz uzayı, $L_p(\Omega)$ Lebesque uzayı olur. Normları arasındaki ilişki şöyledir:

$f \in L_{\Phi}(\Omega)$ fonksiyonunu $\|f\|_{L_p} = 1$ olacak şekilde alalım. Ayrıca Φ 'nin eşleniği $\Psi(x) = \frac{x^q}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $g \in L_q(\Omega) = L_{\Psi}(\Omega)$ fonksiyonunu

$$\int_{\Omega} \Psi\left(|g(x)|\right) dx \leq 1$$

koşulunu sağlayacak biçimde seçelim. Buradan $L_p(\Omega)$ uzaylarındaki klasik Hölder eşitsizliğine göre

$$\int_{\Omega} |f(x)\, g(x)| dx \leq \|f\|_{L_p} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(q \int_{\Omega} \Psi\left(|g(x)|\right) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikten $\int_{\Omega} \Psi\left(|g(x)|\right) dx \leq 1$ koşulunu sağlayan g 'ler üzerinden supremum alınırsa

$$\|f\|_{\Phi} \leq q^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Böylece f yerine $\frac{f}{\|f\|_{L_p}}$ yazıldığında

$$\|f\|_{\Phi} \leq q^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L_p} \tag{3.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca f, $g \in L_\Phi(\Omega)$ olmak üzere hemen her $x \in \Omega$ için $|f(x)| \leq |g(x)|$ eşitsizliği sağlanıyorsa (3.2) tanımından

$$\|f\|_\Phi \leq \|g\|_\Phi \tag{3.5}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Orlicz Uzayı tanımından gördük ki Orlicz Uzayı $L_\Phi(\Omega)$, Orlicz sınıfı $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ kapsamaktadır. Aşağıdaki Lemma ters kapsamayı gösterebilmek için önemlidir.

Lemma 3.6. *$f \in L_\Phi(\Omega)$ ve $\|f\|_\Phi \neq 0$ ise $\int\limits_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi}\right) dx \leq 1$ 'dir.*

İspat. Ψ, Φ 'nin eşlenik Young fonksiyonu ve $\int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)\, dx \leq 1$ olmak üzere Orlicz normu

$$\|f\|_\Phi = \sup_{\int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)dx \leq 1} \int\limits_\Omega |f(x)\, g(x)| dx$$

biçiminde olduğundan

$$\int\limits_\Omega |f(x)\, g(x)| dx \leq \|f\|_\Phi \tag{3.6}$$

elde edilir.

$\int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)\, dx > 1$ durumunda ise Teorem 1.9 'daki

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{için} \quad \Psi(\alpha x) \leq \alpha \Psi(x), \quad x \geq 0$$

eşitsizliğinde $\alpha = \frac{1}{\int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)dx}$ ve $x = |g(x)|$ alınırsa ve Ω üzerinden integrallenirse

$$\int\limits_\Omega \Psi\left(\frac{|g(x)|}{\int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)\, dx}\right) dx \leq \frac{1}{\int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)\, dx} \int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)\, dx \leq 1$$

bulunur. Buradan tekrar Orlicz normundan

$$\int\limits_\Omega |f(x)\, g(x)| dx \leq \|f\|_\Phi \int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)\, dx \tag{3.7}$$

eşitsizliğine ulaşırız.

Şimdi kabul edelim ki $f \in L_\Phi(\Omega)$ fonksiyonu sınırlı ve öyle bir $\Omega_0 \subset \Omega$ kümesi vardır ki $\mu(\alpha_0) < \infty$ ve $\forall x \in \Omega \setminus \Omega_0$ için $f(x) = 0$ olsun. Ayrıca $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)\, dt$

olmak üzere $g(x) = \varphi\left(\frac{f(x)}{\|f\|_\Phi}\right)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bundan başka $\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi}\right)$ ile $\Psi(|g(x)|)$ fonksiyonları da sınırlı ve Ω_0 kümesinde integrallenebilirlerdir.

Böylece (1.13) Young eşitsizliği göz önüne alınıp, Ω üzerinden integrallersek

$$\int_\Omega \frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi}|g(x)|dx \leq \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi}\right)dx + \int_\Omega \Psi(|g(x)|)\,dx$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada (3.6) ve (3.7) göz önüne alındığında

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi}\right)dx + \int_\Omega \Psi(|g(x)|)\,dx \leq \max\{1, \int_\Omega \Psi(|g(x)|)\,dx\}$$

bulunur. Bu ise

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi}\right)dx \leq 1$$

demektir.

Son olarak $f \in L_\Phi(\Omega)$ keyfi fonksiyon olsun. Ω 'nın Ω_n altkümeler dizisi: $n \in \mathbb{N}$ için $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$, $\mu(\Omega_n) < \infty$ ve $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ ve $f_n(x)$ fonksiyonları ise

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), \quad x \in \Omega_n & , |f(x)| \leq n \\ n, \quad x \in \Omega_n & , |f(x)| > n \\ 0 & , x \in \Omega \setminus \Omega_n \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. f_n 'ler sınırlı olduğundan

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f_n(x)|}{\|f_n\|_\Phi}\right)dx \leq 1$$

dir. Bundan başka hemen her $x \in \Omega$ için $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ olduğundan (3.5) 'e göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f_n\|_\Phi \leq \|f\|_\Phi$$

dir. Böylece Φ Young fonksiyonunun monoton artanlığından

$$\frac{|f_n(x)|}{\|f\|_\Phi} \leq \frac{|f_n(x)|}{\|f_n\|_\Phi} \text{ ve } \Phi\left(\frac{|f_n(x)|}{\|f\|_\Phi}\right) \leq \Phi\left(\frac{|f_n(x)|}{\|f_n\|_\Phi}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliği, Ω üzerinden integrallersek,

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f_n(x)|}{\|f\|_\Phi}\right)dx \leq 1$$

buluruz ve integral altında limite geçme teoremi Leviee'e göre

$$\int\limits_{\Omega} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) dx \leq 1$$

elde ederiz. □

Teorem 3.7. Φ *Young fonksiyonu* Δ_2 *koşulunu sağlarsa* $L_\Phi(\Omega) = \tilde{L}_\Phi(\Omega)$*'dir.*

İspat. $\tilde{L}_\Phi(\Omega) \subseteq L_\Phi(\Omega)$ olduğunu biliyoruz. O halde diğer kapsamayı görelim. Bunun için $f \in L_\Phi(\Omega)$ fonksiyonunu alalım öyle ki $\|f\|_\Phi \neq 0$ olsun. Lemma 3.6'ya göre

$$\int\limits_{\Omega} \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) dx \leq 1$$

dir. Yani, $\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi} \in \tilde{L}_\Phi(\Omega)$ 'dir. Φ, Δ_2 koşulunu sağladığında $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ Orlicz sınıfı lineer küme olduğundan $f \in \tilde{L}_\Phi(\Omega)$ olur. □

Teorem 3.8. *(Hölder eşitsizliği)* Φ *ve* Ψ *eşlenik Young fonksiyonları ve* $f \in L_\Phi(\Omega)$, $g \in L_\Psi(\Omega)$ *olmak üzere*

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)\, g(x)| dx \leq \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\|g\|_\Psi = 0$ ise (3.8) eşitsizliği açıktır. O halde $\|g\|_\Psi \neq 0$ olsun. Lemma 3.6 'ya göre $\int\limits_{\Omega} \Psi \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_\Psi} \right) dx \leq 1$ dir. Şimdi bu son eşitsizliği sağlayan fonksiyonlar üzerinden f 'nin Orlicz normunu yazarsak

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)\, g(x)| dx = \|g\|_\Psi \int\limits_{\Omega} \left| f(x) \frac{g(x)}{\|g\|_\Psi} \right| dx$$

den

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)\, g(x)| dx \leq \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi$$

Hölder eşitsizliğini elde ederiz. □

Not 3.9. $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$, $\Psi(x) = \frac{x^q}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $p \geq 1$ *aldığımız zaman* $L_\Phi(\Omega)$ *Orlicz uzayı* $L_p(\Omega)$ *Lebesque uzayı ile çakışıyordu ve normları arasındaki ilişki ise (3.4) 'den*

$$\|f\|_\Phi \leq q^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L_p} , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} , \quad p \geq 1$$

şeklindeydi. Dolayısıyla bu eşitsizliği (3.8) Hölder eşitsizliğine uygularsak

$$\int_{\Omega} |f(x)\, g(x)| dx \leq q^{\frac{1}{q}} p^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

elde ederiz ki bu bildiğimiz Klasik Hölder eşitsizliğinden farklıdır.

Uygulamalarda daha çok kullanışlı olan ve Orlicz normuna denk olan Luxemburg normunu aşağıda tanımlayalım. Normların denkliklerini de ileride göreceğiz.

Tanım 3.10. *(Luxemburg Normu) Φ, Young fonksiyonu ve f, Ω 'da tanımlı ölçülebilir fonksiyon olsun.*

$$|||f|||_{\Phi} = \inf\{k > 0 : \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right) dx \leq 1\} \tag{3.9}$$

normuna f'nin Luxemburg normu denir. Kolaylıkla gösterilebilir ki (3.9) ile verilen fonkiyon norm koşullarını sağlar. Bu norm Luxemburg (2000) tarafindan tanımlanmıştır.

Lemma 3.6'ya göre, $f \in L_{\Phi}(\Omega)$ ve $\|f\|_{\Phi} \neq 0$ için

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}}\right) dx \leq 1$$

olduğundan

$$|||f(x)|||_{\Phi} \leq \|f(x)\|_{\Phi} \tag{3.10}$$

dir.

Normların denkliğini görmek için aşağıdaki Lemma'yı verelim.

Lemma 3.11. $f \in L_{\Phi}(\Omega)$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \Phi(|f(x)|)\, dx \leq |||f|||_{\Phi}, & |||f|||_{\Phi} \leq 1 \\ \int_{\Omega} \Phi(|f(x)|)\, dx \geq |||f|||_{\Phi}, & |||f|||_{\Phi} > 1 \end{cases}$$

dir.

İspat. $|||f|||_{\Phi} \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$\Phi(\alpha x) \leq \alpha \Phi(x)\,, \alpha \in [0,1], \forall x \geq 0$$

eşitsizliğinde $\alpha = |||f|||_\Phi$ ve $x = \frac{|f(x)|}{|||f(x)|||_\Phi}$ alınırsa.

$$\Phi\left(|||f|||_\Phi \frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi}\right) \leq |||f|||\Phi\left(\frac{|f|_\Phi}{|||f(x)|||_\Phi}\right)$$
$$\Phi(|f(x)|) \leq |||f|||_\Phi \Phi\left(\frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi}\right)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik Ω üzerinden integrallenirse ve $\int\limits_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi}\right) dx \leq 1$ olduğundan

$$\int\limits_\Omega \Phi(|f(x)|)\, dx \leq |||f|||_\Phi$$

bulunur. Şimdi ise $|||f|||_\Phi > 1$ olsun. Bu halde

$$\Phi(\beta x) \geq \beta\Phi(x), \beta > 1, \forall x \geq 0$$

eşitsizliğinde $\epsilon > 0$ sayısı yeterince küçük olmak üzere $\beta = |||f|||_\Phi - \epsilon$ ve $\frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi - \epsilon}$ alınırsa

$$\Phi\left(|||f|||_\Phi - \epsilon \frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi - \epsilon}\right) \geq (|||f|||_\Phi - \epsilon)\, \Phi\left(\frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi - \epsilon}\right)$$

elde edilir ve bu son eşitsizlik Ω üzerinden integrallenirse

$$\int\limits_\Omega \Phi(|f(x)|)\, dx \geq (|||f|||_\Phi - \epsilon) \int\limits_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi - \epsilon}\right) dx \geq |||f|||_\Phi - \epsilon$$

eşitsizliğinden keyfi $\epsilon > 0$ için $\int\limits_\Omega \Phi(|f(x)|)\, dx \geq |||f(x)|||_\Phi$ elde edilir. □

Teorem 3.12. *$f \in L_\Phi(\Omega)$ olmak üzere f 'nin Orlicz normu ile Luxemburg normu denktir. Yani,*

$$|||f|||_\Phi \leq \|f\|_\Phi \leq 2|||f|||_\Phi$$

eşitsizlik zinciri sağlanır.

İspat. (3.10) eşitsizliğine göre $|||f|||_\Phi \leq \|f\|_\Phi$ 'dir. Ψ, Φ 'nin eşlenik Young fonksiyonu olmak üzere Young eşitsizliğinden

$$\int\limits_\Omega |f(x)\, g(x)| dx \leq \int\limits_\Omega \Phi(|f(x)|)\, dx + \int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)\, dx$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin her iki yanından $\int\limits_\Omega \Psi(|g(x)|)\, dx \leq 1$ koşulunu sağlayan g fonksiyonları üzerinden supremum alınırsa

$$\|f\|_\Phi \leq \int_\Omega \Phi\left(|f(x)|\right) dx + 1$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte f yerine $\frac{f}{|||f|||_\Phi}$ alınırsa

$$\frac{\|f\|_\Phi}{|||f|||_\Phi} \leq \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{|||f|||_\Phi}\right) dx + 1 \leq 2$$

bulunur. Böylece $\|f\|_\Phi \leq 2|||f|||_\Phi$ 'dir. □

Yukarıdaki Lemma 3.11 'e göre

$$\int_\Omega \Psi\left(|g(x)|\right) dx \leq 1 \Leftrightarrow |||g|||_\Psi \leq 1$$

olduğundan Orlicz normunu

$$\|f\|_\Phi = \sup_{|||g|||_\Psi \leq 1} \int_\Omega |f(x)\, g(x)| dx \tag{3.11}$$

biçiminde de yazabiliriz. Ayrıca Hölder eşitsizliği de

$$\int_\Omega |f(x)\, g(x)| dx \leq \|f\|_\Phi |||g|||_\Psi \tag{3.12}$$

veya

$$\int_\Omega |f(x)\, g(x)| dx \leq |||f|||_\Phi \|g\|_\Psi \tag{3.13}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bundan başka $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$, $x \geq 0$, $p > 1$ olmak üzere

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right) dx = \int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{pk^p} dx \leq 1$$

den

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |f(x)|^p dx \leq k^p \Rightarrow \left(\frac{1}{p}\right)^{1/p} \|f\|_p \leq k$$

ve Luxemburg Normu

$$|||f(x)|||_\Phi = \left(\frac{1}{p}\right)^{1/p} \|f\|_p$$

olur. Böylece (3.5) 'i dikkate alarak ve bu son eşitliği (3.12) de kullanarak

$$\int_{\Omega} |f(x)\, g(x)| dx \leq q^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \left(\frac{1}{q}\right)^{1/q} \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q \tag{3.14}$$

klasik Hölder eşitsizliğine ulaşırız.

Teorem 3.13. *$L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayı Banach uzayıdır.*

İspat. Kufner vd (1977), Krasnoselskii ve Rutickii (1961) □

Tanım 3.14. *(Krasnoselskii ve Rutickii (1961)) (Norma göre yakınsama)*
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi ve f fonksiyonu $L_\Phi(\Omega)$ Orlizc uzayında tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\Phi = 0$$

ise $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi, $f \in L_\Phi(\Omega)$ fonksiyonuna Orlicz normunda yakınsaktır denir ve $f_n \xrightarrow{L_\Phi(\Omega)} f,\ n \to \infty$ ile gösterilir.

Tanım 3.15. *(Krasnoselskii ve Rutickii (1961)) (Φ-ortalama yakınsama)*
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi ve f fonksiyonu $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayında tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \Phi\left(|f_n(x) - f(x)|\right) dx = 0$$

ise $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi, $f \in L_\Phi(\Omega)$ fonksiyonuna Φ-ortalama yakınsıyor denir.

Aşağıdaki teoremler ile bu yakınsamaların denk olduğunu göreceğiz.

Teorem 3.16. *$L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayında $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi, $f \in L_\Phi(\Omega)$ fonksiyonuna norma göre yakınsak ise Φ ortalama yakınsaktır. Yani,*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\Phi = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \Phi\left(|f_n(x) - f(x)|\right) dx = 0$$

dır.

İspat. $g \in L_\Phi(\Omega)$ ve $\|g\|_\Phi \leq 1$ olsun. Teorem 3.12 'ye göre $|||g|||_\Phi \leq \|g\|_\Phi \leq 1$ ve Lemma 3.11 'e göre $\int_{\Omega} \Phi(|g(x)|)\, dx \leq |||g(x)|||_\Phi \leq \|g\|_\Phi$ olur. Şimdi burada g yerine $f_n - f$ alırsak

$$0 \leq \int_{\Omega} \Phi\left(|f_n(x) - f(x)|\right) dx \leq \|f_n - f\|_\Phi$$

eşitsizliğinden $\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$ olduğunu elde ederiz. □

Tersi doğru değildir. $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayında Φ-ortalama yakınsaklık, norma göre yakınsamayı gerektirmez, ters örneği Krasnoselskii ve Rutickii (1961) vermiştir. Bu örnekte Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlamamaktadır. Aşağıdaki teoremde göreceğiz ki Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağladığı anda $L_\Phi(\Omega)$ uzayında bu iki yakınsama denk olacaktır. Bunun için öncelikle aşağıdaki Lemma'ya ihtiyacımız vardır. Lemma'nın ispatı ayrıntılı olarak Krasnoselskii ve Rutickii (1961) de verilmiştir.

Lemma 3.17. *Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlasın. Yani öyle $k > 0$ ve $T > 0$ sayıları vardır ki $\forall t \geq T$ için $\Phi(2t) \leq k\Phi(t)$ olsun. Ayrıca $g \in L_\Phi(\Omega)$ fonksiyonu için de*

$$\int_\Omega \Phi(|g(x)|)\,dx \leq \frac{1}{k^m}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ sayısı var olsun. Bu durumda öyle $c > 0$ sabiti vardır ki

$$|||g|||_\Phi \leq \frac{c}{2^m}$$

dir.

Artık $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayındaki yakınsamaların denk olduğunu görebiliriz.

Teorem 3.18. *Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlasın. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ fonksiyonlar dizisi ve f fonksiyonunu $L_\Phi(\Omega)$ uzayından alalım. Bu durumda*

$$f_n \underset{L_\Phi(\Omega)}{\longrightarrow} f,\ \ n \to \infty \Longleftrightarrow f_n \underset{\Phi-ortalama}{\longrightarrow} f,\ n \to \infty$$

dir.

İspat. Teorem 3.16 'da norma göre yakınsamamın Φ-ortalama yakınsamayı gerektirdiğini gördük. Şimdi bunun tersini görelim. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ fonksiyonlar dizisi $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayında $f \in L_\Phi(\Omega)$ fonksiyonuna Φ-ortalama yakınsak olsun. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(|f_n(x) - f(x)|)\,dx = 0$$

olsun. Bu durumda verilen herhangi $\epsilon > 0$ için öyle bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki c, Lemma 3.17 'deki sabit olmak üzere $\epsilon > \frac{c}{2^m}$ dir.

Ayrıca öyle bir $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki k, 3.17 'deki sabit olmak üzere $\forall\ n \geq N_\epsilon$ için

$$\int_\Omega \Phi(|f_n(x) - f(x)|)\,dx \leq \frac{1}{k^m}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece Lemma 3.17 'ye göre

$$\|f_n - f\|_\Phi \leq \frac{c}{2^m} < \epsilon$$

olur. Bu ise $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisinin $f \in L_{\Phi}(\Omega)$ fonksiyonuna $L_{\Phi}(\Omega)$ Orlicz uzayında norma göre yakınsak olması demektir. $\square$

4. ORLİCZ UZAYINDA MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Bu son kısımda Fourier harmonik analizinin temel teknik araçlarından olan Hardy-Littlewood maksimal operatörünün Orlicz uzaylarında sınırlı olduğunu göreceğiz.

Bunun için $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere x-merkezli $r > 0$ yarıçaplı B-yuvarı,

$$B = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki $|\cdot|$, bildiğimiz Lebesque ölçümüdür.

Böylece $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ local integrallenebilir fonksiyonu için Hardy-Littlewood maksimal operatörü $Mf(x)$ ise

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \tag{4.1}$$

biçimindedir. Klasik Lebesque uzayları $L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$ de bildiğimiz gibi $Mf(x)$ fonksiyonu $L_1(\mathbb{R}^n)$ 'den $L_1(\mathbb{R}^n)$ 'ye $(1,1)$-zayıf tipli

$$\left| \{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| < \lambda\} \right| \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx, \quad \lambda > 0 \tag{4.2}$$

ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ 'den $L_p(\mathbb{R}^n)$ 'ye (p,p)-güçlü sınırlıdır

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.3}$$

(Torchinsky (2012)), (Stein (2016)).

Aşağıda ise hem Mf maksimal operatörünün $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ Orlicz uzayında zayıf tipli olması için hem de $\mathbb{R}^n$'de local integrallenebilir f fonksiyonu için $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ Orliz uzayında

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(Mf(x))\, dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \phi(cf(x))\, dx \tag{4.4}$$

eşitsizliğinin sağlanması için yeterli ve gerekli koşul vereceğiz. Bu teoremler Kokilashvili ve Krbec (1991) tarafından kanıtlanmıştır. Bunun için gerekli tanım, kavram ve Lemma'ya ihtiyacımız vardır.

Tanım 4.1. *Kokilashvili ve Krbec (1991)*
$\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \geq 0$ için

$$\omega(x) \leq \phi(x) \leq c\,\omega(cx) \tag{4.5}$$

olacak şekilde ω konveks fonksiyonu ve $c > 0$ sabiti varsa ϕ fonksiyonuna yarıkonveks (quasiconvex) fonksiyon denir.

Lemma 4.2. *(Kokilashvili ve Krbec (1991))*
$\phi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ negatif olmayan, $[0,\infty)$ da artan, $\phi(0) = 0$, $\phi(\infty) = \infty$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

1. *ϕ, $[0,\infty)$ aralığında yarıkonveks fonksiyondur.*
2. *Her $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ ve her $t \in (0,1)$ için*

   $$\phi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq c\big(t\phi(cx_1) + (1-t)\phi(cx_2)\big)$$

   eşitsizliği sağlanacak biçimde $c > 0$ sabiti vardır.
3. *Her $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve her I-sınırlı aralığı için*

   $$\phi\left(\frac{1}{|I|}\int_I f(x)\,dx\right) \leq \frac{c}{|I|}\int_I \phi(cf(x))\,dx$$

   eşitsizliği sağlanacak biçimde $c > 0$ sabiti vardır.
4. *Her $0 < x_1 < x_2$ için*
   $$\frac{\phi(x_1)}{x_1} \leq \frac{c_1\phi(c_1x_2)}{x_2}$$
   eşitsizliği sağlanacak biçimde $c_1 > 1$ sabiti vardır.

İspat.

1. 1) $\Rightarrow$ 2) ϕ, $[0,\infty)$ aralığında yarıkonveks olsun. Bu durumda öyle $c > 0$ sayısı ve ω konveks fonksiyonu vardır ki

   $$\omega(x) \leq \phi(x) \leq c\,\omega(cx), \quad x \geq 0$$

   sağlanır. Herhangi $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ ve $t \in (0,1)$ alalım. ω konveks fonksiyon olduğundan

   $$\begin{aligned}\phi(tx_1 + (1-t)x_2) &\leq c\,\omega\big(c\,t\,x_1 + c(1-t)x_2\big)\\ &\leq c\,\big(t\,\omega(cx_1) + (1-t)\,\omega(cx_2)\big)\\ &\leq c\,\big(t\,\phi(cx_1) + (1-t)\,\phi(cx_2)\big)\end{aligned}$$

   elde edilir.
2. 1) $\Rightarrow$ 3) ϕ, $[0,\infty)$ aralığında yarıkonveks olsun. Bu durumda öyle $c > 0$ sayısı ve

ω konveks fonksiyonu vardır ki

$$\omega(x) \leq \phi(x) \leq c\,\omega(cx), \quad x \geq 0$$

sağlanır. Herhangi $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunu ve I-sınırlı aralığını alalım. İntegraller için Jensen eşitsizliğini göz önüne alarak

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I f(x)\,dx\right) &\leq c\omega\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I cf(x)\,dx\right)\\ &\leq \frac{c}{|I|}\int\limits_I \omega(cf(x))\,dx \leq \frac{c}{|I|}\int\limits_I \phi(cf(x))\,dx\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

3. 1) $\Rightarrow$ 4) ϕ, $[0,\infty)$ aralığında yarıkonveks olsun. Bu durumda öyle $c > 0$ sayısı ve ω konveks fonksiyonu vardır ki

$$\omega(x) \leq \phi(x) \leq c\omega(cx),\ x \geq 0$$

sağlanır. ω konveks fonksiyonu için $\frac{\omega(x)}{x}$ fonksiyonu azalmayan fonksiyon olduğundan herhangi $0 < x_1 < x_2$ için

$$\frac{\omega(x_1)}{x_1} \leq \frac{\omega(x_2)}{x_2}$$

olur. Ayrıca $c_1 > c$ ve $c_1 > 1$ sayısı için $\phi(x_1) \leq c_1\,\omega(c_1x_1)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x_1)}{x_1} &\leq c_1\frac{\omega(c_1x_1)}{x_1} = \frac{c_1^2\omega(c_1x_1)}{c_1x_1}\\ &\leq c_1^2\frac{\omega(c_1x_2)}{c_1x_2} = c_1\frac{\omega(c_1x_2)}{x_2}\\ &\leq c_1\frac{\phi(c_1x_2)}{x_2}\end{aligned}$$

elde edilir.

4. 4) $\Rightarrow$ 1) Her $0 < x_1 < x_2$ için

$$\frac{\phi(x_1)}{x_1} \leq c_1\frac{\phi(c_1x_2)}{x_2}$$

sağlanacak şekilde $c_1 > 1$ sabiti var olsun. ϕ 'nin $[0,\infty)$ ' yarıkonveks olduğunu göreceğiz. Bunun için

$$\omega(x) = \frac{1}{c_1}\int\limits_0^{\frac{x}{c_1}}\left(\sup_{0<\tau<s}\frac{\phi(\tau)}{\tau}\right)ds$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Kolayca kontrol edilebilir ki ω fonksiyonu

$$\omega\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{\omega(x_1)+\omega(x_2)}{2}$$

eşitsizliğini sağlar, yani konvekstir. Şimdi de (4.5) eşitsizliğinin sağlandığını görmek yeterlidir.

$$\omega(x) \le \frac{x}{c_1^2}\left(\sup_{0<\tau<\frac{x}{c_1}} \frac{\phi(\tau)}{\tau}\right) = \frac{x}{c_1^2}\frac{c_1}{x}\phi\left(\frac{x}{c_1}\right) = \frac{1}{c_1}\phi\left(\frac{x}{c_1}\right)$$

ve $c_1 > 1$ ve ϕ monoton artan olduğundan $\omega(x) \le \frac{1}{c_1}\phi\left(\frac{x}{c_1}\right) \le \phi(x)$ olur.
Bundan başka

$$\begin{aligned} 2c_1\omega(2c_1x) &= 2c_1\frac{1}{c_1}\int_0^{\frac{2c_1x}{c_1}}\left(\sup_{0<\tau<s}\frac{\phi(\tau)}{\tau}\right)ds = 2\int_0^{2x}\left(\sup_{0<\tau<s}\frac{\phi(\tau)}{\tau}\right)ds \\ &\ge \int_x^{2x}\left(\sup_{0<\tau<s}\frac{\phi(\tau)}{\tau}\right)ds \ge \frac{\phi(x)}{x}x = \phi(x) \end{aligned}$$

dir.

5. 3) $\Rightarrow$ 2) Her $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve her I sınırlı aralığı için öyle bir $c > 0$ sabiti vardır ki

$$\phi\left(\frac{1}{|I|}\int_I f(x)\,dx\right) \le \frac{c}{|I|}\int_I \phi(cf(x))\,dx$$

sağlansın. Herhangi $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ ve $0 < t < 1$ verilsin ve I aralığını da birim uzunlukta, $I = I_1 \cup I_2$, $|I_1| = t$, $|I_2| = (1-t)$ biçiminde seçelim. Bundan başka $f(x)$ fonksiyonunu ise

$$f(x) = \begin{cases} x_1, & x \in I_1 \\ x_2, & x \in I_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece yukarıdaki eşitsizlikten sol taraf

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{1}{|I|}\int_I f(x)\,dx\right) &= \phi\left(\int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx\right) = \phi(x_1|I_1| + x_2|I_2|) \\ &= \phi(x_1t + x_2(1-t)) \end{aligned}$$

olur. Sağ taraf ise

$$\begin{aligned} \frac{c}{|I|}\int_I \phi(cf(x))\,dx &= c\int_{I_1}\phi(cx_1)\,dx + c\int_{I_2}\phi(cx_2)\,dx \\ &= c\big(t\phi(cx_1) + (1-t)\phi(cx_2)\big) \end{aligned}$$

bulunur. Yani, $\phi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq c\big(t\phi(cx_1) + (1-t)\phi(cx_2)\big)$ sağlanır.

6. 2) ⇒ 4) Her $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ ve her $t \in (0,1)$ için öyle bir $c > 0$ sabiti vardır ki

$$\phi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq c\big(t\phi(cx_1) + (1-t)\phi(cx_2)\big)$$

eşitsizliği sağlansın. Herhangi $0 < t_1 < t_2$ alalım.

$$\phi(t_1) = \phi\left(\frac{t_1}{t_2}t_2\right) = \phi\left(\frac{t_1}{t_2}t_2 + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)0\right) \leq c\frac{t_1}{t_2}\phi(ct_2)$$

olur. Bu ise

$$\frac{\phi(t_1)}{t_1} \leq c\frac{\phi(ct_2)}{t_2}$$

demektir.

□

Tanım 4.3. *(Kokilashvili ve Krbec (1991))(zayıf (ϕ,ϕ) tipli)*
$\phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ 'da monoton azalmayan, her $x > 0$ için $\phi(x) > 0$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+}\phi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\phi(x) = \infty$ koşullarını sağlasın. Bundan başka $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ Orlicz uzayından $L_\phi(\mathbb{R}^n)$ Orlicz uzayına yarı-toplamsal $T : L_\Phi(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ operatörü de verilsin.

Eğer her $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi(f(x))\,dx < \infty$ ve her $\lambda > 0$ için

$$\phi(\lambda)\left|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}\right| \leq c\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi(cf(x))\,dx \tag{4.6}$$

eşitsizliğini sağlayan $c > 0$ sabiti varsa, T operatörüne $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ uzayına zayıf (ϕ,ϕ) tipli operatör denir.

Aşağıdaki teorem ile Hardy-Littlewood maksimal operatörünün zayıf (ϕ,ϕ) tipli olması için gerekli ve yeterli koşulu göreceğiz.

Teorem 4.4. *(Kokilashvili ve Krbec (1991))*
$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi(f(x))\,dx < \infty$ olsun. Bu durumda Mf Hardy-Littlewood maksimal operatörünün zayıf (ϕ,ϕ) tipli olması için gerek ve yeter koşul ϕ fonksiyonunun yarıkonveks olmasıdır.

İspat. ⇒: (4.6) eşitsizliği sağlansın. ϕ 'nin yarıkonveks olduğunu görmek için Lemma(4.2) 'deki 4) eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

O halde herhangi $0 < t_1 < t_2$ alalım.

$$I = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{n}}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

kümesini tanımlayalım. $f(x)$ fonksiyonu da

$$f(x) = \begin{cases} t_2, & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}$$

şeklinde olsun. Bu durumda

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |f(y)| dy \geq t_2 |I| = t_2 \frac{t_1}{t_2} = t_1$$

olur. Böylece

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t_1\}| \geq 1$$

dir. O halde (4.6) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \phi(t_1) &\leq \phi(t_1) \left|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t_1\}\right| \\ &\leq c \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(cf(x))\, dx \\ &= c\, \phi(ct_2) \frac{t_1}{t_2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\frac{\phi(t_1)}{t_1} \leq c \frac{\phi(ct_2)}{t_2}$ yani, ϕ 'nin yarıkonveks olması demektir.
$\Rightarrow$: ϕ yarıkonveks olsun. Bu durumda öyle ω konveks fonksiyonu ve $c > 0$ sabiti vardır ki $\forall x \geq 0$ için

$$\omega(x) \leq \phi(x) \leq c\, \omega(cx)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$cMf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |cf(y)| dy$$

olduğundan ve Jensen integral eşitsizliğinden

$$\omega(cMf(x)) \leq M(\omega(cf(x)))$$

olur. Böylece

$$\phi(cMf(x)) \leq c\omega\left(c^2 Mf(x)\right) \leq cM\left(\omega\left(c^2 f(x)\right)\right) \leq cM\left(\phi\left(c^2 f(x)\right)\right)$$

elde edilir. Böylece ω konveks fonksiyonunun monotonluğundan ve Maksimal operatörünün $(1,1)$ zayıf tipli olmasından

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)\left|\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf(x)|>\lambda\}\right| &= \phi(\lambda)\left|\{x\in\mathbb{R}^n : \phi(cMf(x))>\frac{1}{c}\phi(\lambda)\}\right| \\ &\leq \phi(\lambda)\left|\{x\in\mathbb{R}^n : M\left(\phi\left(c^2f(x)\right)\right)>\frac{1}{c^2}\phi(\lambda)\}\right| \\ &\leq c^2\int_{\mathbb{R}^n}\phi\left(c^2f(x)\right)dx\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.5. *(Kokilashvili ve Krbec (1991))*
$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi(f(x))\,dx<\infty$ olsun. Eğer ϕ^α, $\alpha\in(0,1)$ fonksiyonu yarıkonveks ise

$$\int_{\mathbb{R}^n}\phi(Mf(x))\,dx\leq c_1\int_{\mathbb{R}^n}\phi(cf(x))\,dx$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $c_1>0$, $c>0$ sabitleri vardır.

İspat. $\alpha\in(0,1)$ için ϕ^α yarıkonveks ise öyle ω konveks fonksiyonu ve $c>0$ sabiti vardır ki her $x\geq 0$ için

$$\omega(x)\leq\phi^\alpha(x)\leq c\,\omega(cx)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece Jensen integral eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned}\phi(Mf(x)) = \left(\phi^\alpha\big(Mf(x)\big)\right)^{\frac{1}{\alpha}} &\leq \left(c\,\omega\Big(cMf(x)\Big)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\left(cM\Big(\omega\big(cf(x)\big)\Big)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\leq \left(cM\Big(\phi^\alpha\big(cf(x)\big)\Big)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan Mf-Hardy Littlewood maksimal fonksiyonunun (p,p), $p>1$ güçlü tipli sınırlı olması kullanılarak

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi(Mf(x))\,dx\leq c^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(M\Big(\phi^\alpha\big(cf(x)\big)\Big)\right)^{\frac{1}{\alpha}}dx &\leq c^{\frac{1}{\alpha}}\,c_2^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\phi^\alpha\big(cf(x)\big)\right)^{\frac{1}{\alpha}}dx \\ &= c_1\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi\big(cf(x)\big)dx\end{aligned}$$

bulunur. □

5. SONUÇ

Bu tez çalışmamızda Polonyalı matematikçi W.Orlicz tarafından 1932 yıllarında tanımlanan Orlicz uzaylarını inceledik. Orlicz uzayları özel bir konveks fonksiyon (Young fonksiyonu) ile tanımlandığından öncelikle konveks fonksiyonları ve önemli özelliklerini çalıştır.

Orlic uzayları özellikle son yıllarda Fourier harmonik analizinin önemli çalışma alanları arasına girmiştik. Bu bağlamda yaptığımız çalışma ileride yapacağımız bilimsel çalışmalara da alt yapı niteliği taşımaktadır. Bununla birlikte Fourier harmonik analizinin temel operatörlerinden olan Hardy-Littlewood maksimal operatörünün Orlicz uzaylarında sınırlılığını veren Kokilashvili ve Krbec (1991) 'a ait olan teoremin kanıtını da verdik.

6. KAYNAKLAR

BIRNBAUM, Z. and ORLICZ, W.-F. 1931. Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen. *Studia Mathematica*, 3(1):1–67.

CIANCHI, A. 1999. Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 60(1):187–202.

DONALDSON, T. K. and TRUDINGER, N. S. 1971. Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems. *Journal of functional analysis*, 8(1):52–75.

GULIYEV, V. S. and DERINGOZ, F. 2014. On the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces. *Journal of Function Spaces*, 2014.

KITA, H. 1997. On Hardy-Littlewood Maximal Functions in Orlicz Spaces. *Mathematische Nachrichten*, 183(1):135–155.

KITA, H.-O. 1996. On maximal functions in Orlicz spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(10):3019–3025.

KOKILASHVILI, V. M. and KRBEC, M. 1991. *Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces*, World Scientific, 57.

KRASNOSELSKII, M. and RUTICKII, Y. 1961. Convex functions and Orlicz spaces. *Gorningen, Netherlands*.

KUFNER, A., JOHN, O. and FUCIK, S. 1977. *Function spaces*, Springer Science & Business Media, 3.

LUXEMBURG, W. A. 2000. *Riesz spaces*, Elsevier, 1.

NAKAI, E. 2004. Generalized fractional integrals on Orlicz-Morrey spaces. *Banach and function spaces*, 323–333 pp.

O'NEIL, R. 1965. Fractional integration in Orlicz spaces. I. *Transactions of the American Mathematical Society*, 115:300–328.

ORLICZ, W. 1936. *Über Räume (LM)*, Pols. Akad. Umiej.

ORLICZ, W. 1988. Über eine gewisse Klasse von Raumen vom Typus B. *Bull. intern. de*, 1:207–220.

RAO, M. M. and REN, Z. 1991. Theory of Orlicz spaces.

SAWANO, Y., SUGANO, S. and TANAKA, H. 2012. Orlicz–Morrey spaces and fractional operators. *Potential Analysis*, 36(4):517–556.

STEIN, E. M. 2016. *Singular integrals and differentiability properties of functions (PMS-30)*, Princeton university press, 30.

TORCHINSKY, A. 1976. Interpolation of operations and Orlicz classes. *Studia Mathematica*, 59(2):177–207.

TORCHINSKY, A. 2012. *Real-variable methods in harmonic analysis*, Courier Corporation.

ZAANEN, A. C. 1956. Linear analysis.

ÖZGEÇMİŞ

Sümeyya Tuğçe Arar, 1991 yılında Yozgat'ta doğdu.İlköğretim ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2009 yılında başladığı İstanbul Kültür Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümünü tam burslu kazandı ve lisans öğrenimini 2013 yılında tamamladı. 2013 yılı Eylül ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimini 2017 yılında tamamladı.