T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİMLİ HALKA ÜZERİNDE ASAL İDEAL VE ASAL ALT MODÜL YARDIMIYLA HALKA VE MODÜL KARAKTERİZASYONU

Ortaç ÖNEŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİMLİ HALKA ÜZERİNDE ASAL İDEAL VE ASAL ALT MODÜL YARDIMIYLA HALKA VE MODÜL KARAKTERİZASYONU

Ortaç ÖNEŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 1001 kodlu Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı, 114F381 nolu proje ile desteklenmiştir.

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİMLİ HALKA ÜZERİNDE ASAL İDEAL VE ASAL ALT MODÜL YARDIMIYLA HALKA VE MODÜL KARAKTERİZASYONU

Ortaç ÖNEŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 07/04/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç. Dr. Şenol DOST

Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE

Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ

Yrd. Doç. Dr. Seçil ÇEKEN

ÖZET

BİRİMLİ HALKA ÜZERİNDE ASAL İDEAL VE ASAL ALT MODÜL YARDIMIYLA HALKA VE MODÜL KARAKTERİZASYONU

Ortaç ÖNEŞ

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Nisan 2017, 75 sayfa

Bu tezin amacı, asal idealler ile asal alt modüllerin ve bunlar yardımıyla tanımlanan bazı kavramların, modül ve halka karakterizasyonlarının belirlenmesinde nasıl kullanılabileceklerini ve bilinen modül sınıfları ile olan ilişkilerini araştırmaktır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, cebirin ve tezde kullanılan kavramların tarihsel süreci ve neden bu konuda çalışıldığı açıklanmıştır.

İkinci bölümde, tez boyunca kullanılan halka ve modül teorisine ilişkin çalışmamızın sonraki bölümünde kullanılacak olan temel bilgiler ve önemli sonuçlar verilmiştir. İkinci bölümden sonraki bölüm tamamen özgün çalışmalardan oluşmaktadır.

Üçüncü bölümde, radikal formül başlığı altında, değişmesiz halka üzerinde radikal formülü sağlayan bazı sol modül sınıfları bulunmuş ve belli bir koşul altında Dedekind bölgesinin genellemesi olan HNP-halkası üzerinde sonlu üretilmiş bir modülün hem radikal formülü sağladığı hem de bu modülün CS-modül ile burulmalı modülün direkt toplamı şeklinde ifade edilebildiği gösterilmiştir. Sol O-asal ideal başlığı altında, değişmesiz halka teorisinde asal ideal kavramının bir genellemesi olan sol O-asal ideal üzerine odaklanılmıştır. Sol O-asal ideal sınıfının bazı temel özellikleri verilmiş, bu ideal sınıfı ile değişmeli halka teorisindeki karşılığı arasındaki farklılıklara ve benzerliklere dikkat çekilmiştir. Sonuç olarak sol O-asal idealler için Cohen teoreminin değişmesiz halka teorisindeki bir genellemesi verilmiş ve sol O-radikal idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan R halkasındaki sol idealin, R'nin sonlu tane sol O-asal idealinin kesişimi olduğu gösterilmiştir. O-asal alt modül başlığı altında, sol O-asal idealin modül versiyonu ve asal alt modülün bir genellemesi olan O-asal alt modül kavramı tanıtılmıştır. Literatürden iyi bilindiği gibi, M modülünün P alt modülü asal alt modül iken $(P : M)$'nin R halkasının asal ideali olması özelliği modül teoride önemli bir yer tutar. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir. Bu tezde O-asal alt modüller için bu gerektirmenin tersinin de doğru olduğu bir özellik verilmiştir. Aynı zamanda modülün güçlü nilpotent elemanları ile tüm O-asal alt modüllerinin kesişimi arasındaki ilişkiler incelenmiştir. İdeallerle ilişkili Zariski alt uzay topolojileri başlığı altında, değişmeli R halkasının I ideali ile ilişkili olan tümleyen Zariski topolojisi $\mathcal{X}_I$ tanımlanmış ve bu topolojinin yarı-kompakt veya Noetherian olması için bazı gerekli ve yeterli cebirsel koşullar elde edilmiştir. Radikal idealin bir genellemesi olan, I idealini kapsamayan fakat 0 idealini kapsayan ideallerin kesişimi olarak tanımlanan $\mathcal{N}_I(0)$ idealinin asallığı ile $\mathcal{X}_I$ topolojisinin indirgenemezliğinin denk olduğu gösterilmiştir. Hem Zariski topolojisinin alt uzayları hem de halkalar için bazı karakterizasyonlar elde etmemize yardımcı olan cebirsel ve topolojik özellikler bulmak için halkanın idealleri ile tümleyen Zariski topolojileri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Sonuç olarak Zariski topolojisinin sonlu tane indirgenemez açık alt kümelerinin birleşimi biçiminde ifade edilmesiyle $\mathcal{N}_{I_i}(0)$'ın, R'nin asal ideali ve R halkasının bazı I_i ideallerinin sonlu bir toplamı şeklinde yazılabilmesinin denk olduğu gösterilmiştir. Modül üzerinde bazı topolojilerin yapısı başlığı altında, değişmeli halka üzerinde M modülünün bölüm modülü üzerinde dual Zariski topolojisi kullanılarak M modülü üzerinde bazı topolojiler ve bu topolojiler arasında sürekli bir fonksiyon tanımlanmıştır. M'nin bölüm modülü üzerinde dual Zariski topolojisine homeomorf olan M üzerinde bir topoloji bulunmuştur.

Dördüncü bölümde, bu çalışmanın sonuçları özetlenmiş, literatürdeki yeri vurgulanmış ve ileride çalışılması düşünülen konular belirtilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Asal ideal, Radikal İdeal, Asal Alt Modül, Radikal Alt Modül, Güçlü Nilpotent Eleman, Radikal Formül, Zariski Topoloji, Eşasal Alt Modül, Dual Zariski Topoloji.

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ALKAN (Danışman)
Doç. Dr. Şenol DOST
Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ
Yrd. Doç. Dr. Seçil ÇEKEN

ABSTRACT

THE CHARACTERIZATION OF RING AND MODULE THROUGH PRIME IDEAL AND PRIME SUBMODULE OVER A RING WITH UNITY

Ortaç ÖNEŞ

PhD Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
April 2017, 75 pages

The aim of this thesis is to investigate how the notion of prime ideals and submodules and some other notions defined with the help of prime ideals and submodules are used to determine characterizations of rings and modules and to figure out the relationships between these notions and some known module classes.

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, we briefly mention the historical process of algebra and notations used in this thesis and express why we study these topics.

In the second chapter, we give the definitions and important results of some concepts with respect to ring and module theory used in other chapter. The following chapter completely consists of original studies.

In the third chapter, under the title of radical formula, we find some classes of left modules which satisfy the radical formula in a noncommutative ring. We also prove that under a certain condition, a finitely generated module over an HNP-ring, which is the generalization of Dedekind domain, both satisfies the radical formula and can be decomposed into a direct sum of torsion module and CS-module. Under the title of left O-prime ideal, we focus on a one-sided generalization of the concept of prime ideal in a noncommutative ring, which is called a left O-prime ideal. Some of its basic properties are investigated, pointing out both similarities and differences between left O-prime ideals and their commutative counterparts. Mainly, we prove a noncommutative generalization of Cohen's Theorem for left O-prime ideals and that any left ideal in R is the intersection of a finite number of left O-prime ideals of a noncommutative ring R satisfying the ascending chain condition on left O-radical ideals. The section under the title of O-prime submodules is mainly devoted to O-prime submodules, which are not only the module version of left O-prime ideal but also a generalization of prime submodules, and the examination of how the O-prime submodules control the structure of modules. As is well-known, the property that when a submodule P becomes prime in case$(P : M)$ is prime ideal, which is known not to hold in general, is of central importance in the module theory . In this thesis, it is proved that a similar property to the above holds for O-prime submodules. We also investigate the relationships between the intersection of all O-prime submodules and strongly nilpotent elements of a module. Under the title of Zariski subspace topologies associated with ideals, we introduce a complement Zariski topology $\mathcal{X}_I$ associated with an ideal I of a commutative ring R and obtain some necessary and sufficient algebraic conditions for $\mathcal{X}_I$ to be quasi-compact space or Noetherian. We also define an ideal $\mathcal{N}_I(0)$, which is a generalization of radical ideal, to help us find a connection between irreducibility of $\mathcal{X}_I$ and the primeness of $\mathcal{N}_I(0)$. Furthermore, we are interested in the relationships between the complement Zariski topologies and ideals of a ring in order to find some algebraic and topological tools which allow us to get some characterizations for both rings and subspaces of Zariski topologies. We show that the Zariski topology is the finite union of irreducible open subsets if and only if the ring R is the sum of some ideals I_i and $\mathcal{N}_{I_i}(0)$ is prime ideal of R. Under the title of the structure of some topologies on a module, we construct some topologies on a module M by using the dual Zariski topology and define a continuous map between these topologies. Then we find a topology on M which is homeomorphic to the dual Zariski topology on a quotient module of M.

KEYWORDS: Prime Ideal, Radical Ideal, Prime Submodule, Radical Submodule, Strongly Nilpotent Element, Radical Formula, Zariski Topology, Second Submodule, Dual Zariski Topology.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ALKAN (Supervisor)
Assoc. Prof. Dr. Şenol DOST
Assoc. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Assoc. Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ
Asst. Prof. Dr. Seçil ÇEKEN

ÖNSÖZ

Asal sayıların bir genellemesi olarak asal idealler ve asal ideallerin bir genellemesi olarak da asal alt modüller tanımlanmıştır. Asal ideal ve asal alt modül konusu, uzun yıllardır birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bu konu ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmaktadır. Yapılan çalışmalarda, asal ideal ve asal alt modül kavramının ve bunlar yardımıyla tanımlanan bazı kavramların halka ve modüllerin sınıflandırılmasında önemli bir rol oynadığını gösterilmiş ve bu kavramların topolojik yapılar ile önemli bağlantıları bulunmuştur.

Bu tez çalışmasında asal ideal, asal alt modül ve bu kavramlar yardımıyla tanımlanan bazı yapılar, daha çok değişmesiz halkalar üzerinde ele alınarak çalışılmış ve bu kavramların halka ve modül karakterizasyonlarının belirlenmesinde nasıl kullanılabilecekleri araştırılmıştır. Bu tez çalışmasının asal ideal, asal alt modüller, HNP halkaları, Zariski topolojisi ve dual Zariski topolojisi ile ilgili halka ve modül teorisindeki konulara değerli katkılar sağlayacağı ve bu alanlarda yeni araştırmalar yapılmasına katkıda bulunacağı bir çalışma olacağı düşüncesindeyim.

Tez çalışmamı 1001 kodlu Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı, 114F381 nolu proje ile destekleyerek maddi olanak sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Akademik yaşamım boyunca her türlü yardım ve fedakarlık sağlayan, bilgisini, tecrübesini ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ALKAN'a teşekkür ederim.

Son olarak her zaman yanımda olan ve bu tezin gerçek yaratıcısı olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$\subseteq$	Kapsama
$\subset$	Kesin kapsama
$\nsubseteq$	Kapsama değil
$End_R(M)$	M üzerindeki R-endomorfizmalarının kümesi
${}_RM$	Sol R-modül M
$\bigoplus\limits_{i\in\Lambda} M_i$	M_i modüllerinin dik toplamı
$N \leq M$	N, M'nin alt modülü
$N \leq_e M$	N, M'nin esas alt modülü
$rad_M(N)$	N'nin M içindeki (asal) radikali
$\sqrt{I}$	I idealinin radikali
$Çekf$	f homomorfizmasının çekirdeği
$soc(M)$	M modülünün sokulu
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
$Ann_R(M)$	M modülünün R halkası içerisinde sıfırlayanı
$(0 :_M I)$	I idealinin M modülü içerisinde sıfırlayanı
$N_R(0)$	R halkasının asal radikali
$E_M(0)$	M modülünün zarfı
$\langle E_M(0)\rangle$	M modülünün zarfının ürettiği küme
$S_M(N)$	M'nin N üzerinde tanımlı tüm güçlü nilpotent elemanlarının kümesi
$W_M(0)$	M modülünün güçlü nilpotent elemanları tarafından üretilen küme
$\mathcal{X}$	R'nin tüm asal ideallerinin kümesi
$\mathcal{X}_I$	R halkasında I idealinin tümleyen topolojisi
$\mathcal{X}^s$	M'nin tüm eşasal alt modüllerinin kümesi
$\mathcal{X}_c$	M'nin eşasal tümleyen topolojisi
$\mathcal{X}_q$	M'nin eşasal bölüm topolojisi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathcal{P}$	Asal sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Milattan sonra 9. yüzyılda ortaya atılan cebir kelimesi, 19. yüzyılın başlarına kadar 4 veya daha az dereceli polinom denklemlerini çözmek anlamında kullanıyordu. Bu denklemlerin gösterimi, köklerinin yapısı ve köklerin ait olduğu çeşitli sayı sistemleri de bu sürece dahil olduktan sonra klasik cebir olarak adlandırılmıştır. 12. yüzyılın başlarına kadar cebir, aksiyomatik çalışmaların konusu olmuş, gelişen aksiyomlar daha sonra modern cebir veya soyut cebir olarak adlandırılmıştır. 19. yüzyılda klasik cebirden modern cebire geçiş yaşanmıştır.

Babil, Mısır, Çin ve Hindistan gibi büyük antik uygarlıkların çoğu esasen lineer ve kuadratik denklemler (ikinci dereceden bir bilinmeyenli polinom) olmak üzere polinom denklemlerin çözümleri ile ilgilenmişlerdir. M.Ö 1700'lü yıllarda özellikle Babilliler, bu konuda yetenekli cebircilerdi ve günümüzdekine benzer bir yöntem ile kuadratik denklemleri çözebiliyorlardı. Babillilerin ardından M.Ö. 600 yılında Hintliler ve M.Ö. 200 yılında Çinliler bu konuda gelişme kaydetmişlerdir. Onlar, ikinci dereceden denklemde negatif katsayı kullanmış ve ikinci dereceden denklemin iki tane kökü olduğunu kabul etmişlerdi. Çinlilerin herhangi bir dereceden polinom denkleminin yaklaşık köklerini bulan bir metodu vardı ve matrisleri kullanarak lineer denklem sistemini çözebiliyorlardı. Antik Yunanlı matematikçiler özellikle geometri ve sayılar teorisinde iyi olmasına rağmen cebirde biraz zayıftılar fakat Euclid'in sonsuz tane asal sayı var olduğunu yazdığı, cebirin temel teoreminin ve asal sayıların birçok özelliğinin olduğu "Elements" adlı büyük eseri cebirsel dile çevrilmesiyle cebirsel sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışma geometrik cebir olarak bilinir. Müslüman matematikçiler 9. yüzyıl ile 15. yüzyıl arasında önemli cebirsel gelişmeler elde etmişlerdir. Cebirin Euclid'i ünvanı verilen ve günümüzde kullanılan cebir kelimesinin kökeni olan "Al-jabr" adlı kitabın yazarı Muhammad ibn-Musa al-Khwarizmi, konuyu sistematikleştirdi ve cebiri bağımsız bir çalışma alanı yapmıştır. Babillilerin M.Ö. yaklaşık 1600'lü yıllarda, ikinci dereceden denklemi çözebiliyor olmasından sonra doğal bir soru olarak üçüncü dereceden denklemler benzer bir formülle çözülüp çözülemeyeceği sorusunu ortaya çıkardı. Bunun cevabının bulunması yaklaşık 3000 yıl aldı ve 16. yüzyıl matematikçilerinin bu soruyu cevaplandırması cebirde önemli bir etki yarattı. Küp köklü çözümü ilk olarak del Ferro ve Tartaglia keşfetmesine rağmen ilk kez Cardano, 1545 yılında "The Great Art" adlı eserinde yayınlamıştır. Daha çok 16. yüzyılda ve 17. yüzyılın başlarında Viete ve Descartes ile cebirde sembollerin gelişimi sağlandı ve bu semboller cebire dahil edildi. Viete ve Descardes'ın çalışmalarıyla polinom denklemleri teorisi daha fazla dikkat çeken bir alan olmaya başlamıştı. Konu ile ilgili diğer sorulardan daha zor ve önemli olan, "her polinom denklemin bir kökü var mı, varsa kökleri nasıldır ?" sorusu ortaya çıkmıştır. Bu soruya cebirin temel teoremi olarak bilinen "reel veya kompleks katsayılı her polinom denklemin bir kompleks kökü vardır" ile cevap bulundu. İspatında daha çok analizden yöntemler kullanan d'Alambert, 1746 yılında cebirin temel teoremini ispatladı fakat ardından daha fazla cebirsel yöntemler kullanılan ispat Euler tarafından yapıldı. Fakat her iki ispat da reel katsayılı polinom denklemler için yapılmıştır. Henüz 20 yaşında olan Gauss, 1797'de doktora tezinde bu tartışmayı sonlandırarak günümüzdeki ispatı vermiştir.

Değişmeli halka teorisinde, Fermat'ın son teoremi ile ilgili yapılan çalışmalar Kummer'ın ilgisini çekti. İdeallerin bir tür ”genelleştirilmiş sayı” olarak görüldüğü ama aslında orijinal terminolojisinin ”ideal sayı” olduğu 1840 yılında Kummer, çevrimsel (cyclotomic) sayılar bölgesindeki her elemanın "ideal asal"ların tek türlü çarpımı olduğunu göstermiştir, ancak Kummer'ın fikirleri açıkça formülize edilememişti. Dedekind ve Kronecker tarafından bu, farklı yollardan ve bağımsız olarak bulunmuştur. Dedekind'in 1871 yılındaki çığır açan çalışmasında, yaklaşık 20 yılını alan cebirsel sayı cisminin tamsayılar bölgesi, ideal ve asal ideali tanımlamasından sonra cebirsel sayı cisminin tam sayılar bölgesindeki sıfırdan farklı her idealin asal ideallerin tek türlü çarpımı olduğunu ispatlamıştır.

Bin yıl boyunca cebirin ana konusu olan denklemlerden sonra, Matematikçilerin matematiksel disiplin olarak cebir anlayışı 20. yüzyılda tamamen değişti. Günümüzdeki halka tanımı, ilk olarak 1914 yılında, Fraenkel tarafından ”On zero divisors and the decomposition of rings” adlı makalesinde verilmiştir. Fraenkel'in tanımı hem değişmeli hem de değişmesiz halkaları da kapsıyordu. Onun bu makalesindeki amacı Steinitz'in cisimler için yaptığı çalışmalara benzer, değişmeli ve değişmesiz halkalar için soyut ve kapsamlı teoriler vermekti. Daha sonra 1917 yılında Sono'nun ”On congruences” adlı makalesiyle bölüm halkaları, maksimal ve minimal idealler, basit halkalar, izomorfizma teoremi ve kompozisyon serileri gibi birçok terim modern cebire kazandırılmıştır. Halkanın bu soyut tanımına rağmen polinom halkaları, cebirsel sayılar halkası ve hyperkompleks sayılar halkası, halka teorisinde daha ön planda oldu. Halkalar; cebirsel sayı teorisi, cebirsel geometri ve invariant teori ile başlayan değişmeli halka ve kompleks sayıları çeşitli hyperkompleks sayı sistemlerine genişletme çabalarıyla başlayan değişmesiz halka olmak üzere iki geniş kategoriye ayrıldı.

1920 yılında ünlü cebirciler Noether ve Artin'in ellerinde bu çalışmalar daha soyut teorilere dönüştü. Yeni akımın en etkili öncülerden biri, Alman matematikçi Emmy Noether'di. Noether'den önce diğer matematikçiler, çalışmalarında tam sayıları ve polinomları kullanmışlardı fakat Noether, bunları soyut cebirin konusu haline getirdi. Noether'in 1921 yılında, bir disiplin olarak soyut cebiri başlatan ”Ideal theory in rings” adlı makalesinde polinom halkalarındaki asal ayrışım üzerinde Macauley, Lasker ve Hilbert'in sonuçlarının, günümüzde Noetherian halka olarak bilinen artan zincir koşulunu sağlayan halkalar için sağlandığını ispatladı. Noether'in 1927 yılındaki ”Abstract development of ideal theory in algebraic number field and function fields” adlı çalışmasında ise Dedekind ve Dedekind-Weber'in ideallerin ayrışımı üzerindeki sonuçlarını inceledi. Noether bu çalışmasında, Dedekind bölgeleri olarak adlandırılan sıfırdan farklı her idealin tek türlü olarak asal ideallerin çarpımı şeklinde yazılabilen değişmeli halkaları karakterize etmiştir.

Artin'e ilham olan Noether'in bu çalışmasıyla Artin, 1927 yılında ”On the theory of hypercomplex numbers” adlı makalesinde cebirler üzerinde Wedderburn'un teoremini, günümüzde Artin halka olarak bilinen azalan zincir koşulunu sağlayan değişmesiz halkalar için genelleştirdi. Artin bu çalışmasında, bu tür halkaların basit halkaların direkt toplamı şeklinde ayrıştırılabildiğini göstermiştir. 1929 yılında

Wolfgang Krull tarafından değişmeli halka üzerindeki tanımı kullanılarak asal ideal notasyonu değişmesiz halkalar için genelleştirildi.

Modern matematik genelde analiz, cebir ve topoloji olmak üzere üç temel alana ayrılmıştır. Bu üç temel alandan en az bilinen topoloji, genel topoloji ve cebirsel topoloji olmak üzere iki farklı alana ayrılmıştır fakat yaklaşık son 100 yılda topoloji önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir. Bugün hala, 2. dünya savaşından önce Warsaw'daki topoloji araştırma merkezinin ve Teksas Üniversitesindeki R.L. Moore'un topolojiye radikal yaklaşımlarından bahsedilmektedir. Stone, Boole halkasının asal spektrumunu topolojik olarak karakterize etti. Onun bu fikri, 1939 yılında Gelfand ve Kolmogoroff tarafından birimli halkanın maksimal ideallerinin kümesini ve 1945 yılında Jacobson tarafından birimli halkanın primitif sağ ideallerinin kümesini topolojik olarak karakterize etmek için kullanıldı. 1944 yılında değişmeli cebirde Zariski topolojisi, cisim üzerinde polinom halkasının asal spektrumunun topolojik olarak karakterize edilmesine denk olan projektif cebirsel değişimi (variety) topolojik olarak karakterize eden Zariski'nin çalışmalarında ilk olarak ortaya çıkmıştır. Kısa zaman içerisinde bu konu birçok cebircinin dikkatini çekmiş ve bu alanda birçok çalışma yapılmıştır (Behboodi ve Haddadi 2008a,b, Lu 1995, 1999, 2010, McCasland vd 1968, 1997).

Asal idealin modül teorideki genellemesi olan asal alt modül kavramı ilk olarak 1965 yılında Feller ve Swokowski tarafından tanımlanmış ve bu konuda yapılan ilk çalışmalar Dauns (1978), Feller ve Swokowski (1965) ve Karakaş (1972) tarafından yapılmıştır. Halka ve modülü karakterize etmede yardımcı olan bu konu, son yıllarda birçok cebirci tarafından çalışılmaktadır (Alkan ve Tıraş 2006, 2007, Azizi 2007, Behboodi 2009, Lu 1984, 1989, 1995, 1997, 1999, 2010, Man 1996, Man ve Smith 2002, McCasland ve Moore 1991, McCasland ve Smith 1993). Bu konunun gelişimi ile de farklı ispatlar yapmak ve cebirdeki açık problemlere farklı bir bakış getirerek çözüm bulmak için cebircilerin diğer alanlarla etkileşimi sonucu, asal alt modüller ve asal alt modüllerin duali olan eşasal alt modüller üzerinde topolojiler tanımlandı. Bu konu üzerinde birçok çalışma yapılmaktadır (Abuhlail 2015, Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2014, Ansari-Toroghy vd 2016, Farshadifar 2013, Lu 2010).

Son yıllarda bu konu üzerinde yayımlanan çalışmalar incelendiğinde, bu tez çalışmasının; asal ideal, asal alt modül ve Zariski topolojisi ile ilgili yapılacak çalışmalara katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Aksi belirtilmedikçe bu tez çalışması boyunca ele aldığımız tüm halkalar birimli, modüller ise birimsel (unitary) sol modüller olarak kabul edilecektir. R birimli bir halka ve M birimli sol R-modül olarak alınacaktır.

Bu tezde Öneş ve Alkan (2017a,b,c) çalışmaları temel alınarak asal idealler, asal alt modüller, asal ideal üzerinde tanımlı Zariski topolojisi ve asal alt modüllerin dual kavramı olan eşasal alt modüller üzerinde tanımlı dual Zariski topolojisi yardımıyla halka ve modül karakterize edilmiştir.

İlk olarak halka ve modül teorisine ilişkin, çalışmamızın sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel bilgiler ve önemli sonuçlar verilmiştir.

Değişmesiz halka üzerinde radikal formülü sağlayan bazı sol modül sınıfları bulunmuştur. Dedekind bölgesinin genellemesi olan HNP-halkanın bir genellemesi tanımlanmış ve HNP-halkasının genellemesi üzerinde sonlu üretilmiş bir modülün hem radikal formülü sağladığı hem de bu modülün CS-modül ile burulmalı modülün direkt toplamı şeklinde ifade edilebildiği gösterilmiştir.

Değişmesiz halka teorisinde asal ideal kavramının bir genellemesi olan sol O-asal ideal üzerine çalışılmış, sol O-asal ideal sınıfının bazı temel özellikleri verilmiş, bu ideal sınıfı ile değişmeli halka teorisindeki karşılığı arasındaki farklılıklara ve benzerliklere dikkat çekilmiştir. R bir halka ve R'nin P sol ideali, R'nin sonlu üretilmemiş tüm sol idealleri arasında maksimal olmak üzere P'nin sol O-asal ideali olduğu ispatlanmış ve sol O-asal idealler için Cohen teoreminin değişmesiz halka teorisindeki bir genellemesi verilmiştir. Sol O-radikal idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan R halkasındaki sol idealin, R halkasındaki sonlu tane sol O-asal idealin kesişimi olduğu gösterilmiştir.

Sol O-asal idealin modül versiyonu ve asal alt modülün bir genellemesi olan O-asal alt modül tanımlanmıştır. Literatürden iyi bilindiği gibi M modülünün P alt modülü asal alt modül iken $(P : M)$'nin R halkasının asal ideali olması özelliği modül teoride önemli bir yer tutar. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir. O-asal alt modüller için bu gerektirmenin tersinin de doğru olduğu bir özellik verilmiştir. Aynı zamanda modülün güçlü nilpotent elemanları ile tüm O-asal alt modüllerinin kesişimi arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bazı koşullar altında, M modülünün N alt modülünü kapsayan tüm O-asal alt modüllerinin kesişimi olan $O\text{-}rad_M(N)$'nin elemanları karakterize edilmiştir. M, O-radikal alt modüller üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan devirli sol R-modül olsun. O halde M'deki herhangi bir O-radikal alt modülün, sonlu tane O-asal alt modülün kesişimi olduğu ifade edilmiştir.

Değişmeli R halkasının I ideali ile ilişkili olan tümleyen Zariski topolojisi $\mathcal{X}_I$ tanımlanmış ve bu topolojinin yarı-kompakt veya Noetherian olması için bazı gerekli ve yeterli cebirsel koşullar elde edilmiştir. Radikal idealin bir genellemesi olan, I idealini kapsamayan fakat 0 idealini kapsayan ideallerin kesişimi olarak tanımlanan $\mathcal{N}_I(0)$ idealinin asallığı ile $\mathcal{X}_I$ topolojisinin indirgenemezliğinin denk olduğu gösterilmiştir. Hem Zariski topolojisinin alt uzayları hem de halkalar için bazı karakterizasyonlar elde edilmesine yardımcı olan cebirsel ve topolojik özellikler bulmak için halkanın idealleri ile tümleyen Zariski topolojileri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Zariski topolojisinin sonlu tane indirgenemez açık alt kümelerin birleşimi olarak ifade edilmesiyle $\mathcal{N}_{I_i}(0)$'ın, R'nin asal ideali ve R halkasının bazı I_i ideallerinin toplamı olarak yazılabilmesinin denk olduğu gösterilmiştir.

Değişmeli halka üzerinde M modülünün bölüm modülü üzerinde dual Zariski topolojisi kullanılarak M modülü üzerinde bazı topolojiler ve bu topolojiler arasında sürekli bir fonksiyon tanımlanmıştır. M'nin bölüm modülü üzerinde dual Zariski topolojisine homeomorf olan M üzerinde bir topoloji bulunmuştur.

2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI

Bu bölümde tez boyunca sıkça kullanılan bazı temel kavramların tanımı ve önemli sonuçları verilecektir. Bu bölümdeki temel kavramlar için Anderson ve Fuller (1992), Atiyah ve MacDonald (1969), Bland (2011), Bourbaki (1966a,b), Cohen (1946), Dummit ve Foote (1999), Goodearl ve Warfield (2004), Lam (1991), Matsumara (1986), Sharp (2001) kitaplarından; Abuhlail (2015), Ansari-Toroghy ve Farshadifar (2014), Azizi (2007), Behboodi (2007), Jenkins ve Smith (1992), Kaplansky (1974), Leung ve Man (1997), McCasland ve Moore (1991), McCasland ve Smith (1993), Yassemi (2001) makalelerinden ve Annin (2002) doktora tezinden yararlanılmıştır. Diğer özel kavramların tanımı ve sonuçları, tez boyunca konu içerisinde uygun yerlerde açıklanacaktır.

Tanım 2.1. *R bir halka olsun. R'nin asal radikali, R'nin tüm asal ideallerinin kesişimidir ve $rad_R(0)$ ile gösterilir. Eğer R'nin sıfır ideali asal ise R'ye asal halka denir.*

Önerme 2.2. *R bir halka olsun. R halkasının bir P ideali için aşağıdaki koşullar denktir:*

a) P, R'nin asal idealidir.

b) R'nin $P \subset I$ ve $P \subset J$ idealleri için $IJ \nsubseteq P$'dir.

c) R/P asal halkadır.

d) R'nin $IJ \subseteq P$ olacak şekildeki sağ I ve J idealleri için $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$'dir.

e) R'nin $IJ \subseteq P$ olacak şekildeki sol I ve J idealleri için $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$'dir.

f) $xRy \subseteq P$ olacak şekilde $x,y \in R$ için $x \in P$ veya $y \in P$'dir.

Tanım 2.3. *R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Her $a,b \in S$ için $arb \in S$ olacak şekilde $r \in R$ varsa S'ye m-sistem (multiplicative system) denir.*

R değişmeli bir halka olduğunda ise S'ye çarpımsal kapalı küme denir.

Çarpımsal kapalı bir küme m-sistem fakat tersi doğru değildir. Örneğin R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere $\{a, a^2, a^4, ...\}$ bir m-sistem fakat çarpımsal kapalı küme değildir.

Tanım 2.4. *R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun.*

$$\sqrt{I} = \{s \in R : s\text{'yi içeren her } m\text{-sistem'in } I \text{ ile kesişimi boştan farklıdır}\}$$

ile tanımlanır. R değişmeli bir halka olduğunda

$$\sqrt{I} = \{x \in R : \text{bir } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } x^n \in I\text{'dır}\}$$

kümesi R halkasının I'yı kapsayan bir idealidir. Bu ideale I idealinin radikali denir.

Sonuç 2.5. *R değişmeli bir halka olsun. $I = 0$ ideali için*

$$\sqrt{0} = \{x \in R : \text{bir } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } x^n = 0\text{'dır}\}$$

ideali, halkanın tüm nilpotent elemanlarının oluşturduğu kümedir. Bu ideale nil radikal veya asal radikal denir ve $N_R(0)$ ile gösterilir.

Sonuç 2.5 ile $\sqrt{0} = rad_R(0)$'dır.

Sonuç 2.6. *R bir halka olsun. P, R'nin asal idealidir ancak ve ancak $R \backslash P$ bir m-sistemdir.*

Önerme 2.7. *R değişmeli bir halka, I ve J, R'nin iki ideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*

i) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$*'dır.*

ii) $\sqrt{I} + \sqrt{J} = R$*'dir ancak ve ancak* $I + J = R$*'dir.*

iii) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$*'dir.*

Önerme 2.8. *R değişmeli bir halka olsun. I, R'nin ideali ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ çarpımsal kapalı küme olmak üzere $I \cap S = \emptyset$ olsun. O halde $P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde I'yı içeren R'nin bir P asal ideali vardır.*

Önerme 2.9. *R bir halka olsun. I, R'nin sol ideali ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ bir m-sistem olmak üzere $I \cap S = \emptyset$ olsun. O halde $P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde I'yı içeren R'nin bir P asal ideali vardır.*

Tanım 2.10. *R bir halka ve $a \in R$ olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için $a_{i+1} \in a_i R a_i$ ve $a_0 = a$ koşullarını sağlayan $\eta(a) = \{a, a_1, ...\}$ kümesine a'nın dizisi denir.*

Tanım 2.11. *R bir halka, $a \in R$ ve I, R'nin sol ideali olsun. Her bir $\{a_i \in R : a_{i+1} \in a_i R a_i \text{ ve } a_0 = a,\ i \in \mathbb{Z}\}$ dizisi için $a_k R \subseteq I$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı varsa R'nin a elemanına I üzerinde güçlü nilpotent eleman (strongly nilpotent element) denir.*

Başka bir ifadeyle bu tanım şu şekilde de verilebilir:
$\eta(a) = \{a_i \in R : a_{i+1} \in a_i R a_i \text{ ve } a_0 = a,\ i \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere $\eta(a) \cap I \neq \emptyset$ ise a'ya I üzerinde güçlü nilpotent eleman denir. $S_R(I)$, R'nin I üzerinde tanımlı tüm güçlü

nilpotent elemanlarının kümesini göstermek üzere $S_R(I)$ tarafından üretilen sol ideal $W_R(I)$ ile gösterilir.

Önerme 2.12. *R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ güçlü nilpotent eleman ise a nilpotent elemandır. Eğer R değişmeli ise o halde R'nin her nilpotent elemanı güçlü nilpotent elemandır.*

İspat. $a \in R$ güçlü nilpotent eleman olsun. $a_0 = a$ ve $a_{i+1} \in a_iRa_i$ koşulunu sağlayan her a_0, a_1,... dizisinin sonlu elemanı sıfırdan farklıdır. $a_0 = a$ ve $a_{n+1} = a_n^2 = a_n 1_R a_n \in a_nRa_n$ olacak şekilde bir dizi seçelim. O halde $a_1 = a^2$, $a_2 = a^4$, ... , $a_n = a^{2^n}$,... fakat bazı $n \geqslant 0$ için $a_n = a^{2^n} = 0$ olur. Böylece a nilpotent elemandır.

R değişmeli halka ve $a \in R$ nilpotent olsun. $a_0 = a$ ve $a_{i+1} \in a_iRa_i$ koşulunu sağlayan a_0, a_1, ... dizisini düşünelim. O halde

$$a_1 = ar_0a = r_0a^2$$

$$a_2 = a_1r_1a_1 = r_1a_1^2 = r_1r_0^2a^4$$

.
.
.

$$a_n = r_{n-1}r_{n-2}^2...r_1^{2^{n-2}}r_0^{2^{n-1}}a^{2^n}$$

.
.
.

$a \in R$ nilpotent olduğundan $a^m = 0$ olacak şekilde pozitif bir m tam sayısı vardır. Eğer n, $2^n \geqslant m$ olacak şekilde seçilirse $a_n = 0$ ve böylece a, güçlü nilpotent eleman olur. □

Önerme 2.13. *R bir halka olsun. O halde R'nin asal radikali, R'nin tüm güçlü nilpotent elemanlarının kümesine eşittir ($rad_R(0) = W_R(0)$).*

R değişmeli bir halka olsun. R'nin ideallerinin her artan zinciri sonlu bir adımda duruyorsa R'ye Noetherian halka denir. Noetherian halkalar için kullanışlı olan aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 2.14. *R değişmeli bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) R Noetherian halkadır.

ii) R'nin her ideali sonlu üretilmiştir.

iii) R'nin ideallerinden oluşan boştan farklı her ailenin bir maksimal elemanı vardır.

Her temel ideal bölgesi bir Noetherian halkadır. Örneğin $\mathbb{Z}$ bir Noetherian halkadır.

Önteorem 2.15. *R değişmeli bir halka olsun. Eğer R Noetherian halka ise R'nin her ideali, asal ideallerin bir çarpımını içerir.*

İspat. $\Omega = \{I \subseteq R : I$ asal ideallerin bir çarpımını içermesin$\}$ olsun. $\Omega \neq \emptyset$ olsa, R Noetherian olduğundan Ω'nın maksimal bir P elemanı vardır. $P \in \Omega$ maksimal elemanı asal olmadığından $BC \subseteq P$ fakat $B \nsubseteq P$ ve $C \nsubseteq P$ olacak şekilde B, C idealleri bulunabilir. Böylece $P \subset B + P$, $P \subset C + P$ ve $(B+P)(C+P) \subseteq P$ olup P asal ideallerin bir çarpımını içerir. Bu ise $P \in \Omega$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $\Omega = \emptyset$ olur. □

Literatürde Cohen teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.16. *R değişmeli bir halka olsun. R'nin her asal ideali sonlu üretilmiş ise R Noetheriandır.*

İspat. R halkasının her asal ideali sonlu üretilmiş olsun. R Noetherian olmasın. $\Omega = \{I \subseteq R : I$, R'nin sonlu üretilmemiş ideali$\}$ kümesini oluşturalım. $\Omega \neq \emptyset$'tur. $(\Omega, \subseteq)$ sıralı kümesinin herhangi bir tam sıralı alt kümesi (zincir) olarak $\{I_i\}$ alalım. $J = \cup I_i$ de R'nin sonlu üretilmemiş bir idealidir. Eğer J sonlu üretilmiş olsa, zincirde üreteçlerin hepsini kapsayan bir I_k ideali bulunur ve bu durumda $J = I_k$ olacağından zincirdeki ideallerin sonlu üretilmediği kabulüyle çelişir. O halde $J \in \Omega$ bir üst sınır ve Zorn önteoremine göre Ω'nın en az bir maksimal elemanı P vardır. P'nin asal ideal olduğu gösterilirse, asal ideallerin sonlu üretildiği kabul edildiği için bir çelişki elde edilir ve $\Omega = \emptyset$ bulunup her idealin sonlu üretilmiş olduğu ispatlanmış olunur.

$R = R.1_R$ sonlu üretilmiş ve $P \in \Omega$ sonlu üretilmediğinden $P \subset R$'dir. $a, b \in R \backslash P$ ve $ab \in P$ olsun. O halde $P \subset P + Ra$ olduğundan $p_1, p_2, ..., p_m \in P$ ve $r_1, ..., r_m \in R$ olmak üzere $P + Ra = \langle p_1 + r_1 a, ..., p_m + r_m a\rangle$ sonlu üretilmiştir. $(P : a) = \{r \in R : ra \in P\}$ olmak üzere $ab \in P$ olduğundan $b \in (P : a)$ ve böylece $P \subset (P : a)$ olur. O halde $v_1, ..., v_n \in R$ için $(P : a) = \langle v_1, ..., v_n\rangle$ ideali de sonlu üretilmiş ve her $i = 1, 2, ..., n$ için $av_i \in P$'dir. Böylece $P = \langle p_1, ..., p_n, av_1, ..., av_n\rangle$ sonlu üretilmiş bir ideal olur.

Gerçekten, $s_i \in R$ olmak üzere her $x \in P$ elemanı,

$$x = \sum_{i=1}^{m} s_i(p_i + r_i a) = \sum_{i=1}^{m} s_i p_i + \left(\sum_{i=1}^{m} s_i r_i\right) a$$

olup $\left(\sum_{i=1}^{m} s_i r_i\right) a = x - \sum_{i=1}^{m} s_i p_i \in P$'dir. O halde $s = \sum_{i=1}^{m} s_i r_i \in (P : a)$'dır. Buradan

$t_j \in R$ ve $s = \sum_{j=1}^{n} t_j v_j$ olmak üzere

$$x = \sum_{i=1}^{m} s_i p_i + \sum_{j=1}^{n} t_j (a v_j)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise $P \in \Omega$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $ab \notin P$ olup P asal idealdir. $\square$

Aşağıdaki teorem literatürde Kaplansky teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.17. *R değişmeli bir halka ve Noetherian olsun. O halde R temel ideal halkasıdır ancak ve ancak R'nin her maksimal ideali temel idealdir.*

Asal idealler üzerinde tanımlanan Zariski topolojisinin tanımını ve özelliklerini vermeden önce tezin daha sonraki bölümlerinde de kullanılacak olan topoloji ile ilgili bazı tanım ve özellikleri verelim.

Tanım 2.18. *X herhangi bir küme ve $P(X)$, X'in kuvvet kümesi olmak üzere $\tau \subseteq P(X)$ olsun. Eğer τ ailesi;*

i) $\emptyset, X \in \tau$,

ii) $U, V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$,

iii) Her $i \in \Lambda$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in \Lambda} U_i \in \tau$

koşullarını sağlıyorsa (X, τ) çiftine topolojik uzay denir.

Tanım 2.19. *(X, τ) topolojik uzay olsun.*

i) $A \subseteq X$ olsun. A üzerindeki alt uzay topolojisi $\tau_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$ ile tanımlanır.

ii) $A \subseteq X$ olsun. A'nın içerdiği X'in tüm açık alt kümelerinin birleşimine A'nin içi denir ve $\mathring{A}$ ile gösterilir.

iii) $X \neq \emptyset$ olsun. X_1 ve X_2, X'in boştan farklı kapalı alt kümeleri olmak üzere her $X_1 \cup X_2 = X$ ayrışımı için $X = X_1$ veya $X = X_2$ ise X topolojik uzayına indirgenemez (irreducible) denir.

iv) $D \subseteq X$ olsun. X'in boştan farklı her açık kümesi U için $U \cap D \neq \emptyset$ ise D'ye X'de yoğundur (dense) denir.

v) X'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X topolojik uzayına *yarı-kompakt (quasi-compact) denir.*

vi) $\mathcal{B}$*, X'in açık alt kümelerin bir kümesi olsun. Eğer X'in her açık alt kümesi* $\mathcal{B}$*'ye ait olan bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa* $\mathcal{B}$*'ye X topolojik uzayının bir tabanı denir.*

vii) X ve Y topolojik uzay ve $f : X \to Y$ *bir fonksiyon olsun. Eğer* $V \subseteq Y$ *açık kümesi için* $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$*, X'in bir açık kümesi ise f'ye X ve Y topolojik uzayları arasında sürekli fonksiyon denir.*

viii) X ve Y topolojik uzay, $f : X \to Y$ *birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer f ve* f^{-1} *fonksiyonlarının her ikisi de sürekli ise f'ye bir homeomorfizma denir. Eğer X ve Y topolojik uzayları arasında bir homeomorfizma varsa X ve Y topolojik uzaylarına homeomorf uzaylar denir.*

ix) X'in kapalı alt kümeleri azalan zincir koşulunu sağlıyorsa X'e Noetherian topolojik uzay denir.

Önerme 2.20. *R değişmeli bir halka,* $A \subseteq R$ *ve* $V(A) = \{P \in Spec(R) : A \subseteq P\}$ *olsun.*

i) Eğer I, R'nin A tarafından üretilen ideali ise $V(A) = V(I) = V(\sqrt{I})$*'dır.*

ii) $V(0) = Spec(R)$ *ve* $V(R) = \emptyset$*'tur.*

iii) $(A_i)_{i\in\Lambda}$*, R'nin alt kümelerinin herhangi bir ailesi olmak üzere* $\bigcap_{i\in\Lambda} V(A_i) = V\left(\bigcup_{i\in\Lambda} A_i\right)$*'dir.*

iv) I ve J, R'nin iki ideali olmak üzere $V(I)\cup V(J) = V(I\cap J) = V(IJ)$*'dir.*

İspat. *i)* $A \subseteq I \subseteq \sqrt{I}$ olduğundan $V(\sqrt{I}) \subseteq V(I) \subseteq V(A)$'dır. Fakat I, A'yı içeren en küçük ideal olduğu için $P \in V(A)$ olması $P \in V(I)$ olmasını gerektirir. O halde $V(I) = V(A)$'dır. Açıkça $V(I) = V(\sqrt{I})$'dır.

ii) Açık.

iii) $P \in \bigcap_{i\in\Lambda} V(A_i)$ olsun. O halde her $i \in \Lambda$ için $A_i \subseteq P$'dir. Böylece $\bigcup_{i\in\Lambda} A_i \subseteq P$ olup $P \in V\left(\bigcup_{i\in\Lambda} A_i\right)$'dir.

Diğer kapsama benzer yöntemle ispat edilir.

iv) $P \in V(I \cap J)$ olsun. O halde $I \cap J \subseteq P$'dir. Böylece $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olup $P \in V(I)$ veya $P \in V(J)$'dir. O halde $P \in V(I) \cup V(J)$'dir. Diğer kapsama benzer yöntemle ispat edilir.

$P \in V(IJ)$ olsun. O halde $IJ \subseteq P$'dir. Böylece $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olup $P \in V(I)$ veya $P \in V(J)$'dir. Buradan $P \in V(I) \cup V(J)$'dir.

Diğer kapsama benzer yöntemle gösterilir. □

$\mathcal{X} = Spec(R)$'de tüm kapalı kümelerin ailesini $\Gamma = \{V(E) : E \subseteq R\}$ ile gösterelim. Önerme 2.20'deki $(ii), (iii)$ ve (iv) özellikleriyle Γ, topolojik uzayın kapalı kümeler için aksiyomlarını sağlar. Γ'ya $Spec(R)$ üzerinde Zariski topolojisi denir.

Önerme 2.21. *R değişmeli bir halka ve $r \in R$ olsun. O halde $\mathcal{X}_r = \mathcal{X} \backslash V(r)$ olarak tanımlanan $\{\mathcal{X}_r : r \in R\}$ kümesi Zariski topolojisi için bir tabandır.*

İspat. $U \subseteq \mathcal{X}$ bir açık küme olsun. O halde J, R'nin ideali olmak üzere $U = \mathcal{X} \backslash V(J)$'dir. Buradan

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{X} \backslash V\left(\bigcup_{j \in J} \{j\}\right) = \mathcal{X} \backslash \left(\bigcap_{j \in J} V(j)\right) \\ &= \bigcup_{j \in J} (\mathcal{X} \backslash V(j)) = \bigcup_{j \in J} \mathcal{X}_j \end{aligned}$$

olup $\{\mathcal{X}_r : r \in R\}$ kümesi Zariski topolojisi için bir tabandır. □

Önerme 2.22. *R değişmeli bir halka ve $r \in R$ için $\mathcal{X}_r = \mathcal{X} \backslash V(r)$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

i) Her $r, s \in R$ için $\mathcal{X}_r \cap \mathcal{X}_s = X_{rs}$'dir.

ii) $\mathcal{X}_r = \emptyset$'tur ancak ve ancak r elemanı nilpotenttir.

iii) $\mathcal{X}_r = \mathcal{X}$'dir ancak ve ancak r birim elemandır.

iv) $\mathcal{X}_r = \mathcal{X}_s$'dir ancak ve ancak $\sqrt{\langle r \rangle} = \sqrt{\langle s \rangle}$'dir.

v) $\mathcal{X}$ yarı-kompakttır.

vi) Her $r \in R$ için $\mathcal{X}_r$ yarı-kompakttır.

İspat. (i), (ii), (iii) ve (iv) $\mathcal{X}_r$'nin tanımı ile açıktır.

(v) $\{U_i : i \in \Lambda\}$, $\mathcal{X}$'nin açık bir örtüsü olsun. Her bir U_i, $\mathcal{X}_r$ kümelerinin birleşimi olarak yazılabildiğinden her $i \in \Lambda$ için $U_i = \mathcal{X}_{r_i}$ olarak kabul edebiliriz. O halde

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i \in \Lambda} \mathcal{X}_{r_i} = \bigcup_{i \in \Lambda} (\mathcal{X} \backslash V(r_i))$$

$$= \mathcal{X} \backslash \left(\bigcap_{i \in \Lambda} V(r_i) \right) = \mathcal{X} \backslash V \left(\bigcup_{i \in \Lambda} \{r_i\} \right)$$

ve böylece $V(\langle \{r_i : i \in \Lambda\} \rangle) = \emptyset$, yani $\langle \{r_i : i \in \Lambda\} \rangle$'yı içeren asal ideal yoktur. O halde $\langle \{r_i : i \in \Lambda\} \rangle = \langle 1_R \rangle$'dir. Böylece $j \in \Delta$ için $z_j \in R$ olmak üzere $1 = \sum_{j \in \Delta} z_j r_j$ olacak şekilde sonlu bir $\Delta \subseteq \Lambda$ kümesi vardır. Buradan $V(\langle \{r_j : j \in \Delta\} \rangle) = \emptyset$ ve böylece

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \mathcal{X} \backslash V(\{r_j : j \in \Delta\}) = \mathcal{X} \backslash \left(\bigcap_{j \in \Delta} V(r_j) \right) \\ &= \bigcup_{j \in \Delta} (\mathcal{X} \backslash V(r_j)) = \bigcup_{j \in \Delta} \mathcal{X}_{r_j} \end{aligned}$$

dir. $\mathcal{X}$ sonlu sayıda $\mathcal{X}_{r_j}$ tarafından örtüldüğünden $\mathcal{X}$ yarı-kompakttır.

(vi) $r \in R$ olsun. Her $i \in \Lambda$ için $r_i \in R$ olmak üzere $\{\mathcal{X}_{r_i} : i \in \Lambda\}$, $\mathcal{X}_r$'nin açık bir örtüsü olsun. O halde

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_r &= \mathcal{X} \backslash V(r) \subseteq \bigcup_{i \in \Lambda} \mathcal{X}_{r_i} = \bigcup_{i \in \Lambda} (\mathcal{X} \backslash V(r_i)) \\ &= \mathcal{X} \backslash \left(\bigcap_{i \in \Lambda} V(r_i) \right) = \mathcal{X} \backslash V \left(\bigcup_{i \in \Lambda} \{r_i\} \right) \\ &= \mathcal{X} \backslash V(\{r_i : i \in \Lambda\}) \end{aligned}$$

dır. Buradan $V\left(\left\langle \bigcup_{i \in \Lambda} \{r_i\} \right\rangle \right) \subseteq V(r) = V(\sqrt{\langle r \rangle})$ olup $\sqrt{\langle r \rangle} \subseteq \sqrt{\left\langle \bigcup_{i \in \Lambda} \{r_i\} \right\rangle}$'dir. O halde $r^n \in \left\langle \bigcup_{i \in \Lambda} \{r_i\} \right\rangle$ olacak şekilde pozitif bir n tam sayısı vardır. Her $j \in \Delta$ için $z_j \in R$ olmak üzere $r^n = \sum_{j \in \Delta} z_j r_j$ olacak şekilde sonlu bir $\Delta \subseteq \Lambda$ kümesi vardır. Ayrıca $P \in V(r^n) \Leftrightarrow P \in V(r)$ olduğundan

$$\langle r^n \rangle \subseteq \langle \{r_j : j \in \Delta\} \rangle$$

olup

$$V(\{r_j : j \in \Delta\}) \subseteq V(r^n) = V(r)$$

dir. Buradan $\bigcap_{j \in \Delta} V(r_j) \subseteq V(r)$ ve $\bigcup_{j \in \Delta} (\mathcal{X} \backslash V(r_j)) \supseteq \mathcal{X} \backslash V(r)$ olup $\mathcal{X}_r \subseteq \bigcup_{j \in \Delta} \mathcal{X}_{r_j}$'dir. Δ sonlu küme olduğundan $\mathcal{X}_r$ yarı-kompakttır. □

Önteorem 2.23. *R değişmeli bir halka olsun. $\mathcal{X} = Spec(R)$ indirgenemezdir ancak ve ancak R'nin nil radikali $N_R(0)$ asal idealdir.*

İspat. (:$\Rightarrow$) R halkasının nil radikali $N_R(0)$ asal ideal olmasın. O halde $ab \in N_R(0)$ fakat $a, b \notin N_R(0)$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır. Buradan $a \notin N_R(0)$ olduğundan $V(a) \neq \mathcal{X}$ ve $\mathcal{X}_a \neq \emptyset$ olur. Benzer şekilde $\mathcal{X}_b \neq \emptyset$ olur. Aynı zamanda $\mathcal{X}_a$ ve $\mathcal{X}_b$, $\mathcal{X}$'de açık kümelerdir. Fakat

$$\mathcal{X}_a \cap \mathcal{X}_b = \mathcal{X}_{ab} = \mathcal{X} \backslash V(ab) \subseteq \mathcal{X} \backslash V(N_R(0)) = \emptyset$$

olup $\mathcal{X}$ indirgenemez değildir.

($\Leftarrow$:) R'nin nil radikali $N_R(0)$ asal ideal olsun. $\mathcal{X}$'in boş olmayan iki açık alt kümesi olarak D ve T alalım. $P_D \in D$ ve $P_T \in T$ olsun. S, R'nin ideali olmak üzere $D = \mathcal{X} \backslash V(S)$ olsun. Buradan $P_D \in D$ olup $P_D \notin V(S)$ ve $S \nsubseteq P_D$'dir. $N_R(0) \subseteq P_D$ olduğundan $S \nsubseteq N_R(0)$, yani $N_R(0) \notin V(S)$ ve $N_R(0) \in D$'dir. Benzer şekilde $N_R(0) \in T$ olduğu gösterilebilir. Böylece $N_R(0) \in D \cap T$ ve $D \cap T \neq \emptyset$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{X}$ indirgenemezdir. □

Tanım 2.24. *R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. $(N : M) = \{r \in R : rM \subseteq N\}$, R'nin bir idealidir. $(0 : M) = \{r \in R : rM = 0\}$ idealine M modülünün sıfırlayıcısı denir ve $Ann_R(M)$ ile gösterilir. Eğer $Ann_R(M) = 0$ ise M modülüne sadık (faithful) modül denir.*

Bu ideal tez boyunca sık sık kullanılacaktır.

Tanım 2.25. *R tamlık bölgesi ve M bir R-modül olsun. $m \in M$ elemanı için $rm = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ (regüler eleman, yani sağ ve sol sıfır bölen eleman değil) varsa m'ye M'nin burulmalı (torsion) elemanı denir.*

$$T(M) = \{m \in M : rm = 0 \textit{ olacak şekilde bir } 0 \neq r \in R \textit{ vardır}\}$$

alt modülüne de M'nin burulmalı (torsion) alt modülü denir.

$T(M) = M$ ise M'ye burulmalı (torsion) modül, $T(M) = 0$ ise M'ye serbest burulmalı (torsion-free) modül denir.

Asal ideallerin genellemesi olan asal alt modül kavramı modül teoride önemli bir yer tutar. Bu alt sınıf kullanılarak modüllerin karakterizasyonu ile ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir (Lu 1984, 1997, Man ve Smith 2002, McCasland ve Smith 1993).

Tanım 2.26. *R bir halka olmak üzere M sol R-modül ve P, M'nin öz alt modülü olsun. $rRm \subseteq P$ olacak şekilde her $r \in R$ ve $m \in M$ için $m \in P$ veya $r \in (P : M)$ ise P'ye M'nin asal alt modülü denir.*

Değişmeli halka üzerinde asal alt modül tanımı ise şu şekildedir: R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve P, M'nin öz alt modülü olsun. $rm \in P$ olacak şekilde her $r \in R$ ve $m \in M$ için $m \in P$ veya $r \in (P : M)$ ise P'ye M'nin asal alt modülü *denir.*

Örnek. *i) Değişmeli R halkasının her asal ideali R-modül R'nin asal alt modülüdür.*

ii) $2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$'nin asal alt modülü fakat $2\mathbb{Z}\oplus3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$'nin asal alt modülü değildir.

iii) p sabit bir asal sayı olsun. $\mathbb{Z}(p^{\infty}) = \left\{\frac{r}{p^n} + \mathbb{Z} : r \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+\right\}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$'nin sıfırdan farklı $\mathbb{Z}$-alt modülüdür. $\mathbb{Z}(p^{\infty})$'un asal alt modülü yoktur.

Önerme 2.27. *R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve N, M'nin öz alt modülü olsun. N alt modülünün asal olması için gerek ve yeter koşul $(N : M)$'nin R halkasının asal ideali olması ve M/N'nin bir serbest burulmalı $R/(N : M)$-modül olmasıdır.*

İspat. N asal alt modül olsun.

a,$b \in R$ olmak üzere $ab \in (N : M)$ ve $b \notin (N : M)$ olsun. O halde $abM \subseteq N$ ve $bM \nsubseteq N$ olur. Böylece $abt \in N$ ve $bt \notin N$ olacak şekilde bir $t \in M$ vardır. N, M'nin asal alt modülü olduğundan $a \in (N : M)$ olur. Böylece $(N : M) \in Spec(R)$ dir.

$\bar{0} \neq \bar{r} \in R/(N : M)$ ve $\bar{m} \in M/N$ olmak üzere $\bar{r}\bar{m} = \bar{0}$ olsun. O halde $rm \in N$ ve $r \notin (N : M)$'dir. N asal alt modül olduğundan $m \in N$ ve böylece $\bar{m} = \bar{0}$ olur. O halde M/N serbest burulmalı $R/(N : M)$-modüldür.

M/N serbest burulmalı $R/(N : M)$-modül olsun.

$r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ ve $r \notin (N : M)$ olsun. O halde $\bar{r}\bar{m} = \bar{0}$ ve $\bar{0} \neq \bar{r}$ olur. M/N serbest burulmalı $R/(N : M)$-modül olduğundan $\bar{m} = \bar{0}$ ve böylece $m \in N$ olur. Sonuç olarak N, M'nin asal alt modülüdür. □

N, M'nin asal alt modülü iken $(N : M) \in Spec(R)$ olduğunu gördük. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Örnek. *$M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$-modül ve $N = 2\mathbb{Z} \oplus 0$, M'nin alt modülü olsun. Burada $(N : M) = 0 \in Spec(\mathbb{Z})$ fakat N asal alt modül değildir. Çünkü $(1, 0) \in M$ ve $2 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2(1, 0) = (2, 0) \in N$ fakat $(1, 0) \notin N$ ve $2 \notin (N : M)$'dir.*

Önteorem 2.28. *R değişmeli halka ve M bir R-modül olsun. Eğer $(N : M)$, R'nin maksimal ideali ise N, M'nin asal alt modülüdür.*

Önteorem 2.29. *R değişmeli bir halka, M bir R-modül olsun. Eğer N, M'nin maksimal alt modülü ise N asal alt modüldür.*

Önerme 2.30. *R değişmeli bir halka ve M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler* *denktir:*

i) M *Noetherian modüldür.*

ii) M*'nin her alt modülü sonlu üretilmiştir.*

iii) M*'nin alt modüllerinin herhangi bir boştan farklı ailesinin bir maksimal elemanı vardır.*

Bir idealin radikali cebirsel geometride çok önemli bir yer teşkil etmektedir. Bu açıdan bir idealin radikali kavramının bir genellemesi olarak bir alt modülün radikal kavramı da modül teoride önemli bir kavramdır. Bu kavram kullanılarak halka ve modül karakterize edilmektedir.

Tanım 2.31. *R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve N, M'nin öz alt modülü olsun. N'yi kapsayan asal alt modül varsa N'yi kapsayan tüm asal alt modüllerin kesişimine N alt modülünün radikali denir ve $rad_M(N)$ ile gösterilir. Eğer N'yi kapsayan asal alt modül yoksa $rad_M(N) = M$ olarak tanımlanır.*

Özel olarak $rad_M(M) = M$ olur. $rad_M(0)$ radikaline M'nin radikali denir. $rad_M(N) = N$ ise N'ye radikal alt modül denir.

Örnek. *$M = R = \mathbb{Z}$ olsun. $24\mathbb{Z}$'yi kapsayan asal alt modüller $2\mathbb{Z}$ ve $3\mathbb{Z}$'dir. O halde $rad_{\mathbb{Z}}(24\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$'dir.*

Teorem 2.32. *R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve N ile L, M'nin alt modülleri olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

i) $N \subseteq rad_M(N)$*'dir.*

ii) $rad_M(rad_M(N)) = rad_M(N)$*'dir.*

iii) $rad_M(N \cap L) \subseteq rad_M(N) \cap rad_M(L)$*'dir.*

iv) R'nin her I ideali için $rad_M(IM) = rad_M(\sqrt{I}M)$'dir.

v) $\sqrt{(N : M)} \subseteq (rad_M(N) : M)$*'dir.*

vi) M sonlu üretilmiş R-modül ise $rad_M(N) = M$ olması için gerek ve yeter şart $N = M$ olmasıdır.

vii) $(rad_M(N) : rad_M(L)) = (rad_M(N) : L)$*'dir.*

viii) $rad_{M/N}(0) = (rad_M(N))/N$*'dir.*

İspat. Daha sonraki bölümde kullanacağımız $(viii)$'nin ispatını verelim.

P_i, M'nin asal alt modülü ve $rad_{M/N}(0) = \bigcap_{N/N\subseteq P_i/N} P_i/N$ olmak üzere $\bar{x} = x + N \in P_i/N$ olsun. O halde $x \in P_i$'dir. $N \subseteq P_i$ olduğundan $x \in rad_M(N)$'dir. O halde $\bar{x} = x + N \in (rad_M(N))/N$ olup buradan $rad_{M/N}(0) \subseteq (rad_M(N))/N$'dir.

P_i, M'nin asal alt modülü ve $rad_M(N) = \bigcap_{N\subseteq P_i} P_i$ olmak üzere $\bar{x} = x + N \in (rad_M(N))/N$ olsun. O halde $x \in rad_M(N)$'dir. Buradan $N \subseteq P$ olmak üzere $x \in P_i$'dir. O halde $\bar{x} = x + N \in P_i/N$ olur. Dolayısıyla $\bar{x} \in rad_{M/N}(0)$'dır. Buradan $(rad_M(N))/N \subseteq rad_{M/N}(0)$'dır. Sonuç olarak $rad_{M/N}(0) = (rad_M(N))/N$'dir. □

Teorem 2.33. *R değişmeli bir halka olsun. M sonlu üretilmiş R-modül, N ve L, M'nin alt modülleri olsun. O halde $rad_M(N) + rad_M(L) = M$'dir ancak ve ancak $N + L = M$'dir.*

Bir idealin radikalinin modül teorideki diğer bir genellemesini de şimdi verelim. Daha önceki genelleme ile eşitliği kullanılarak halka ve modüller hakkında bilgi sahibi olunabiliniyor.

Tanım 2.34. *R değişmeli bir halka ve M bir R-modül olsun. N, M'nin alt modülü olmak üzere*

$$E_M(N) = \left\{ \begin{array}{c} m \in M : r_i \in R,\ m_i \in M \text{ ve } k_i \in \mathbb{N} \text{ olmak üzere} \\ m = r_i m_i \text{ ve } r_i^{k_i} m_i \in N\text{'dir} \end{array} \right\}$$

kümesinin üretmiş olduğu

$$\left\{ \begin{array}{c} m \in M : r_i \in R,\ m_i \in M \text{ ve } n, k_i \in \mathbb{N} \text{ olmak üzere} \\ m = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \text{ ve } r_i^{k_i} m_i \in N\text{'dir} \end{array} \right\}$$

alt modülüne N'nin zarfı denir ve $\langle E_M(N) \rangle$ ile gösterilir.

$E_M(N)$, M'nin her zaman alt modülü olmak zorunda değildir.

Örnek. *$M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$-modül ve $N = (9,9)\mathbb{Z} + (4,8)\mathbb{Z}$ olsun.*
$E_{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}((9,9)\mathbb{Z} + (4,8)\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$'nin alt modülü değildir.
Gerçekten, $(3,3) \in E_M(N)$'dir. Çünkü $3(1,1) = (3,3)$ ve $3^2(1,1) \in N$'dir.
$(2,4) \in E_M(N)$'dir. Çünkü $2(1,2) = (2,4)$ ve $2^2(1,2) \in N$'dir.
Fakat $(3,3) + (2,4) = (5,7) \notin E_M(N)$'dir. Varsayalım ki $(5,7) \in E_M(N)$ olsun. O halde $(5,7) = r(a,b)$ ve $r^k(a,b) \in N$ olur. Buradan $ra = 5$, $rb = 7$ olduğundan $r|5$ ve $r|7$'dir. Böylece $r = \pm 1$'dir. O halde $r = 1$ olmak üzere $(5,7) = (a,b) \in N$'dir. $(5,7) \in N$ ise $(5,7) = x(9,9) + y(4,8)$ olacak şekilde x,$y \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $5 = 9x + 4y$ ve $7 = 8y + 9x$ denklemlerinden $y = \frac{1}{2}$ olur. Bu ise $y \in \mathbb{Z}$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $E_M(N)$, M'nin alt modülü değildir.

Önteorem 2.35. *R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve N, M'nin herhangi bir alt modülü olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

i) $\langle E_M(0)\rangle \subseteq rad_M(0)$*'dır.*

ii) $\langle E_M(0)\rangle \subseteq \langle E_M(N)\rangle \subseteq rad_M(N)$*'dir.*

iii) $\left\langle E_{M/N}(0)\right\rangle = \langle E_M(N)\rangle /N$*'dir.*

Tanım 2.36. *R değişmeli bir halka ve M bir R-modül olsun. M'nin her N alt modülü için $rad_M(N) = \langle E_M(N)\rangle$ ise M modülüne radikal formülü sağlar denir. Her R-modül radikal formülü sağlarsa R halkasına radikal formülü sağlar denir.*

Radikal formül her zaman sağlanmaz. Bunun için aşağıdaki tanım ve önteoremden sonra bir örnek verilecektir. Bazı modül sınıflarında da sağlandığı sonraki bölümde gösterilecektir.

Tanım 2.37. *R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere her $r \in R$ ve $m \in M$ için $r^k m \in N$ iken $rm \in N$ ise N alt modülüne yarı-asal (semiprime) denir.*

Önteorem 2.38. *R değişmeli bir halka ve M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) M radikal formülü sağlar.

ii) M'nin her yarı-asal alt modülü, M'nin asal alt modüllerinin bir kesişimidir ve $\langle E_M(\langle E_M(0)\rangle)\rangle = \langle E_M(0)\rangle$*'dır.*

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ N, M'nin yarı-asal alt modülü olsun. O halde $\langle E_M(N)\rangle = N$'dir. (i) ile $rad_M(N) = N$'dir. Böylece N, M'nin asal alt modüllerinin bir kesişimidir. Diğer taraftan $\langle E_M(0)\rangle = rad_M(0)$ olduğundan $\langle E_M(0)\rangle$ yarı-asal ve böylece

$\langle E_M(\langle E_M(0)\rangle)\rangle = \langle E_M(0)\rangle$'dır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $\langle E_M(\langle E_M(0)\rangle)\rangle = \langle E_M(0)\rangle$ olduğundan $\langle E_M(0)\rangle$ yarı-asaldır. Böylece $rad_M(0) \subseteq \langle E_M(0)\rangle$'dır. Dolayısıyla M radikal formülü sağlar. □

Şimdi daha önce bahsettiğimiz radikal formülün her zaman sağlanmayacağına dair örneği verelim.

Örnek. *$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $R = \mathbb{Z}[X]$ olsun. $F = R \oplus R$ serbest R-modül olsun. $f = (2,X) \in F$ ve $P = R2 + RX$, R'nin maksimal ideali olsun. $N = Pf$ olsun. O halde N, F'nin asal alt modüllerinin kesişimi olmayan F'nin bir yarı-asal alt modülüdür. Bu F modülü, radikal formülü sağlamaz. Çünkü $f = (2, X) \in F$ olmak üzere $P = R2 + RX$, R'nin maksimal ideali ve $N = Pf$ olsun. N'nin yarı-asal alt* *modül olduğunu görelim.*

$r \in R$ ve $f \in F$ için $r^k f \in Pf = N$ olsun. O halde $r^k \in P$'dir. P maksimal ideal ve her maksimal ideal asal ideal olduğundan P asal idealdir. Dolayısıyla $r \in P$'dir. Böylece $rf \in Pf = N$ olup N yarı-asaldır.

Bu F modülü radikal formülü sağlamaz.

$M = F/N$ alalım. N yarı-asal olduğundan $\left\langle E_{F/N}(0)\right\rangle = \langle E_M(0)\rangle = 0$'dır. O halde $Rf/N = rad_M(0) \neq \langle E_M(0)\rangle = \bar{0}$'dir.

Tanım 2.39. *R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve $S = \{y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de M'nin bir üreteç sistemi olsun. Her $m \in M$ elemanı, $r_\alpha \in R$ ve $y_\alpha \in S$ olmak üzere $m = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} r_\alpha y_\alpha$ şeklinde sonlu bir toplam olarak yazılabiliyor ve bu yazılış tek türlü oluyorsa $S = \{y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$'ye M'nin bir tabanı denir. M modülüne de bir serbest modül denir.*

Önerme 2.40. *R değişmeli bir halka olsun. Her R-modül M, bir serbest R-modülün homomorf görüntüsüdür.*

Tanım 2.41. *R değişmeli bir halka ve M bir R-modül olsun. A ve B, R-modüller olmak üzere her $g : A \longrightarrow B$ R-modül epimorfizması ve her $h : M \longrightarrow B$ R-modül homomorfizması için $h = gf$ olacak şekilde bir $f : M \longrightarrow A$ R-modül homomorfizması bulunabiliyorsa M'ye bir projektif R-modül denir.*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"', "?"] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Önerme 2.42. *R değişmeli bir halka ve $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. O halde $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha$ projektif R-modüldür ancak ve ancak her $\alpha \in \Lambda$ için P_α projektif R-modüldür.*

Teorem 2.43. *R değişmeli bir halka, M ve P bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

$i)$ Her $M \longrightarrow^f P \longrightarrow 0$ R-epimorfizması için $f\alpha = 1_P$ olacak şekilde bir $\alpha : P \longrightarrow M$ R-homomorfizması vardır.

$ii)$ P, bir F serbest R-modülünde bir direkt toplam terimidir.

$iii)$ P projektiftir.

Tanım 2.44. *R bir halka ve M sıfırdan farklı bir R-modül olsun.*

i) M'nin kendisinden ve sıfırdan farklı bir alt modülü yoksa M'ye basit (simple) modül denir.

ii) $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, M'nin basit alt modüllerinin bir ailesi olsun. $M = \oplus_{\alpha\in\Lambda}T_\alpha$ parçalanışı varsa M'ye yarı-basit (semisimple) modül denir.

Tanım 2.45. *R bir halka, M sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. M'nin sıfırdan farklı her A alt modülü için $N \cap A \neq 0$ ise N'ye M'nin bir esas (essential) alt modülü, M'ye de N'nin bir esas genişlemesi (essential extension) denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir. M'nin sıfırdan farklı her alt modülü M'de esas ise M'ye düzgün (uniform) modül denir.*

Esas alt modülün bir başka denk tanımı ise şu şekildedir: R bir halka, M sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. Her $m \in M$ için $0 \neq rm \in N$ olacak şekilde $r \in R$ varsa N'ye M'de esas (essential) alt modül denir.

Tanım 2.46. *R bir halka, M sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. Eğer N'nin M'de esas genişlemesi yoksa N'ye M'de kapalı denir. N, K'da esas olacak şekilde N ve K, M'nin alt modülü olsun. Eğer K, M'de kapalı ise K'ya N'nin kapanışı denir. M'nin her kapalı alt modülü M'nin bir direkt toplamı ise M'ye CS-modül (extending modül) denir.*

Önerme 2.47. *R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. M'nin sokulu (socle)*

$$\begin{aligned} soc(M) &= \textstyle\sum\{K \leq M : K,\ M\text{'nin basit alt modülü}\} \\ &= \cap\{L \leq M : L,\ M\text{'nin esas alt modülü}\} \end{aligned}$$

olur.

M'nin sokulu, M'nin basit alt modülleri tarafından üretilen en büyük alt modülüdür.

Tanım 2.48. *R bir halka olsun.*

i) Eğer R'nin tüm sol ve sağ idealleri projektif R-modül ise R'ye hereditary halka denir.

ii) Eğer R halkası sağ ve sol Noetherian, R'nin sıfırdan farklı ideallerinin çarpımı yine sıfırdan farklı (R asal halka) ve hereditary ise R'ye HNP-halka denir.

Dedekind halkaları cebirsel geometride ve cebirsel sayılar teorisinde önemli bir tutar. Ayrıca, bir halka üzerindeki herhangi bir modülün yapısının belirlenmesi zor bir problem olmasına rağmen Dedekind halka üzerindeki modül yapıları kısmi olarak belirlenebilir.

Tanım 2.49. *R tamlık bölgesi ve R'nin her öz ideali, sonlu sayıda asal idealin* *çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa R'ye Dedekind halka denir.*

Dedekind bölgesi üzerinde sonlu üretilmiş modüllerin yapısını aşağıdaki teorem ile hatırlayalım. Bu nedenden dolayı Dedekind bölgeleri halka teoride önemli bir yer tutmaktadır.

Teorem 2.50. *R Dedekind bölgesi ve M sonlu üretilmiş R-modül olsun. n, M'nin rankı ve $T(M)$, M'nin burulmalı alt modülü olsun. $P_i^{\alpha_i}$, R'nin asal idealinin kuvveti, $\alpha_i \geq 1$, $t \geq 0$, $i \in \{1, 2, ..., t\}$ ve I, R'nin bir ideali olmak üzere*

$$M \cong R^{n-1} \oplus I \oplus T(M)$$

ve

$$T(M) \cong R/P_1^{\alpha_1} \oplus R/P_2^{\alpha_2} \oplus ... \oplus R/P_t^{\alpha_t}$$

dir.

Dedekind halkaları üzerinde tanımlanan modüllerin karakterizasyonu yapılabildiğinden Dedekind halkaları önemli bir halka sınıfı oluşturmaktadır.

Teorem 2.51. *R Dedekind halka ise her R-modül M için $rad_M(0) = \langle E_M(0) \rangle$'dır.*

O halde Dedekind halkaları radikal formülü sağlar.

Şimdi asal alt modülün dual kavramı olan eşasal (second) alt modülün tanımını, bazı özelliklerini ve eşasal alt modül üzerinde tanımlanan Zariski topolojisini verelim.

Tanım 2.52. *R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. $M \neq 0$ ve M'nin her N öz alt modülü için $Ann_R(M) = Ann_R(M/N)$ ise M'ye eşasal R-modül denir.*

Değişmeli halka üzerinde eşasal alt modül tanımı ise şu şekildedir: R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve $0 \neq N$, M'nin alt modülü olsun. Her $r \in R$ için $rN = 0$ veya $rN = N$ ise N'ye M'nin eşasal (second) alt modülü denir.

Son yıllarda yapılan çalışmalar bu alt modül sınıfının modül ve halka karakterizasyonlarında önemli bir rol oynadığını göstermiştir (Abuhlail 2015, Annin 2002, Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2012, 2014, Ansari-Toroghy vd 2016, Yassemi 2001).

Örnek. *Her basit modül eşasal modüldür.*

Önerme 2.53. *M sıfırdan farklı bir sol R-modül olsun. O halde M eşasal sol R-modüldür ancak ve ancak R'nin her I ideali için $IM = 0$ veya $IM = M$'dir.*

İspat. (:⇒) M eşasal bir sol R-modül ve I, R'nin bir ideali olsun. $IM \neq M$ olduğunu kabul edelim. O halde $Ann_R(M) = Ann_R(M/IM)$ olur. Bu da $I \subseteq Ann_R(M)$ olmasını gerektirir. Böylece $IM = 0$'dır.

($\Leftarrow$:) R'nin her I ideali için $IM = 0$ veya $IM = M$ olduğunu kabul edelim. N, M'nin bir öz alt modülü ve $Ann_R(M/N) = I$ olsun. Böylece $IM \neq M$'dir. O halde $IM = 0$ ve buradan $I \subseteq Ann_R(M)$'dir. Böylece $Ann_R(M) = Ann_R(M/N)$ olur. □

Önerme 2.54. *M eşasal bir sol R-modül ise $Ann_R(M)$, R'nin bir asal idealidir.*

İspat. M eşasal bir R-modül olsun. I ve J, R'nin idealleri olmak üzere $IJ \subseteq Ann_R(M)$ olsun. $J \nsubseteq Ann_R(M)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $JM \neq 0$'dır. M eşasal olduğundan $JM = M$'dir. Buradan $(IJ)M = I(JM) = IM = 0$ ve dolayısıyla $I \subseteq Ann_R(M)$ olur. Bu da $Ann_R(M)$'nin R'nin bir asal ideali olduğunu gösterir. □

Önerme 2.54'ün tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin $Ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = 0$, $\mathbb{Z}$'nin bir asal idealidir ancak $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ eşasal bir modül değildir.

Asal alt modüller üzerinde tanımlanan Zariski topolojisine benzer şekilde asal alt modüllerin duali olan eşasal alt modüller üzerinde de Zariski topolojisi tanımlanmıştır.

Önerme 2.55. *R değişmeli halka, M bir R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. $V^s(N) = \{P \in Spec^s(M) : Ann_R(N) \subseteq Ann_R(P)\}$ olsun. O halde*

i) $V^s(0) = \emptyset$ ve $V^s(M) = Spec^s(M)$,

ii) Λ indeks kümesi ve N_i, M'nin alt modülü olmak üzere
$$\bigcap_{i\in\Lambda} V^s(N_i) = V^s\left(\bigcap_{i\in\Lambda}(0 :_M Ann_R(N_i))\right),$$

iii) N ve L, M'nin alt modülü olmak üzere $V^s(N) \cup V^s(L) = V^s(N + L)$'dir.

Önerme 2.55 ile $\Gamma^s(M) = \{V^s(N) : N,\ M$'nin alt modülü$\}$ topolojik uzay için kapalı küme aksiyomlarını sağlar ve böylece $\Gamma^s(M)$ kapalı kümeler ailesi olmak üzere $Spec^s(M)$ üzerindeki topolojiye dual Zariski topolojisi denir.

Önerme 2.56. *R değişmeli halka, M bir R-modül ve $r \in R$ olsun. O halde $\mathcal{X}^s_r = \mathcal{X}^s \backslash V^s((0 :_M r))$ olarak tanımlanan $\{\mathcal{X}^s_r : r \in R\}$ kümesi dual Zariski topolojisi için bir tabandır.*

İspat. $U \subseteq \mathcal{X}^s$ bir açık küme olsun. O halde J, R'nin ideali olmak üzere

$U = \mathcal{X}^s \backslash V^s((0 :_M J))$'dir. Buradan

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{X}^s \backslash V^s \left(\bigcup_{r \in J} (0 :_M r) \right) = \mathcal{X}^s \backslash \left(\bigcap_{r \in J} V^s(0 :_M r) \right) \\ &= \bigcup_{r \in J} (\mathcal{X}^s \backslash V^s(0 :_M r)) = \bigcup_{r \in J} \mathcal{X}_r^s \end{aligned}$$

olup $\{\mathcal{X}_r^s : r \in R\}$ kümesi dual Zariski topolojisi için bir tabandır. $\square$

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölüm tamamen özgün çalışmalardan oluşmuştur. Elde edilen sonuçlar: Radikal Formül, Sol O-asal İdeal, O-asal Alt Modül, İdeallerle ilgili Zariski Alt Uzay Topolojileri ve Modül Üzerinde Bazı Topolojilerin Yapısı başlıkları altında verilecektir.

3.1. RADİKAL FORMÜL

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe kullanılan tüm halkalar birimli ve tüm modüller birimli sol modül olarak düşünülecektir. R birimli bir halka ve M birimli sol R-modül olarak alınacaktır.

Değişmeli ve birimli bir halkanın nilpotent elemanlarının kümesi bir ideal belirtir ve bu ideal tüm asal ideallerin kesişimine denktir. Asal ideal kavramı modüllere genişletilmiş ve modül versiyonu araştırılmıştır (Dauns 1980).

Radikal formülü ile Dedekind bölgesi arasındaki ilişkiler birçok makaleye çalışma konusu olmuştur (Alkan ve Tıraş 2007, Jenkins ve Smith 1992, McCasland ve Moore 1991, Pusat-Yılmaz ve Smith 2002, Smith 2001, Tıraş ve Alkan 2003). Böylece bu kavramlar kullanılarak Dedekind bölgeleri ve modüller için bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Fakat değişmesiz halka teorisinde, radikal formül ile Dedekind bölgesinin bir genellemesi olan HNP-halkası arasında yeteri kadar kullanışlı sonuçlar yoktur.

Değişmesiz halka teorisinde, bir idealin radikalinin m-sistem ile karakterize edilebiliyor olması kullanışlı bazı sonuçları beraberinde getirmiştir (Lam 1991). Değişmesiz halka üzerinde asal ideal ve radikal kavramları modüllere genelleştirilmiştir (McCasland ve Smith 1993). İlk olarak değişmeli halka teorisindekine benzer şekilde, değişmesiz halka üzerinde bir modülün alt modülünün radikalinin bir formunun ve radikal formül ile HNP-halkaları arasında bir ilişkinin olup olmadığı sorusu ortaya çıkmıştır.

R bir halka, M bir R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. Bu bölümde, N alt modülü üzerinde güçlü nilpotent elemanlar tarafından üretilen alt modül olan $W_M(N)$ ve modülün radikali üzerine odaklanılacaktır. Değişmesiz halka üzerinde radikal formülü sağlayan bazı sol modül sınıfları bulunmuştur. N alt modülünün radikali için şu tanımlama verilecektir: R, $\bar{R} = R/W_R(0)$ yarı-basit olacak şekilde bir halka olmak üzere $rad_M(N) = W_M(N) = W_R(0)M + N$'dir (Teorem 3.16).

Bu bölümün son kısmında ise HNP-halkaları üzerindeki modüller ele alınacaktır. CS-modül kavramı modül teorinin önemli konularından biri olup son yıllarda birçok yazar tarafından çalışılmaktadır (Çeken ve Alkan 2012, Dung vd 1994). Asal alt modüller kullanılarak, belli bir koşul altında sol CS-halkanın sol sokulunun Jacobson radikalinde olduğu gösterilecek ve belli bir koşul altında HNP-halkası üzerinde sonlu üretilmiş modülün hem radikal formülü sağladığı hem de CS-modül ile burulmalı modülün direkt toplamı şeklinde yazılabileceği gösterilecektir (Sonuç 3.20, Teorem 3.21, Teorem 3.22).

3.1.1. Alt Modülün Radikali

Sol R-modül R'nin asal alt modülünün bazı özelliklerini ifade eden önteorem ile başlayalım.

Önteorem 3.1. *R bir halka ve P, R'nin sol ideali olsun. O halde*

i) Eğer $0 \neq f \in End_R(R/P)$ birebir (injektif) ise P sol R-modül R'nin asal alt modülüdür.

ii) Her $xy \in P$ için $xRy \subseteq P$ olacak şekilde P bir asal alt modül ise her $f \in End_R(R/P)$ birebirdir.

İspat. *i)* $xRy \subseteq P$ olacak şekilde $x,y \in R$ olsun. Eğer $y \notin P$ ise $f(l+P) = ly + P$ olacak şekilde $f \in End_R(R/P)$ tanımlayalım. Her $r \in R$ için $f(xr+P) = 0$'dır. O halde $xR \subseteq P$'dir.

ii) $f \in End_R(R/P)$ olsun. $f(1+P) = y + P$ olacak şekilde $y \in R \backslash P$ vardır. Eğer $x + P \in$Çekf ise $xy \in P$ ve böylece $xRy \subseteq P$'dir. O halde $y \in P$ veya $xR \subseteq P$ olup Ç$ekf = 0$'dır. O halde her $f \in End_R(R/P)$ birebirdir. □

Önteorem 3.1'in sonucu olarak şu verilebilir:

Sonuç 3.2. *$xy \in P$ için $xRy \subseteq P$ olacak şekilde P, R' nin sol ideali olsun. Eğer P, sol R-modül R'nin asal alt modülü ise R/P bir ayrışamaz (indecomposable) R-modüldür.*

İspat. $P \subseteq A$ ve $P \subseteq B$, R'nin idealleri olmak üzere $R/P = A/P \oplus B/P$ olsun. $\overline{a} = a + P \in A/P$ olmak üzere $f(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a}$ örten homomorfizmasını (epimorfizma) düşünelim. Önteorem 3.1 ile Ç$ekf = 0$'dır. O halde R/P sıfırdan farklı iki alt modülünün direkt toplamı şeklinde yazılamaz. □

Şimdi herhangi bir alt modül üzerinde tanımlı güçlü nilpotent eleman kavramını tanımını hatırlayalım.

R bir halka, M sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. $a \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere her $\{a_i \in R : a_{i+1} \in a_i R a_i$ ve $a_0 = a,\ i \in \mathbb{Z}\}$ dizisi için $a_k Rm \subseteq N$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı varsa M'nin $x = am$ elemanına N üzerinde güçlü nilpotent eleman denir. $S_M(N)$'yi M'nin N üzerinde tanımlı tüm güçlü nilpotent elemanlarının kümesi olarak göstereceğiz. $S_M(N)$ kümesi M'nin bir alt modülü olmak zorunda değil. $S_M(N)$ kümesi tarafından üretilen alt modülü $W_M(N)$ ile göstereceğiz. R halkası değişmeli ise $W_M(N) = \langle E_M(N) \rangle$'dir. Buradan görüleceği üzere $W_M(N)$, $E_M(N)$'nin bir genellemesidir. Eğer $W_M(N) = rad_M(N)$ ise N'ye radikal formülü sağlar denir. Eğer her R-modül M radikal formülü sağlarsa R'ye radikal formülü sağlar denir.

$M = R$ durumunda daha özel bir tanım elde edilir. R sol R-modül ve I, R'nin alt modülü olsun. Her bir $\{a_i \in R : a_{i+1} \in a_iRa_i$ ve $a_0 = a,\ i \in \mathbb{Z}\}$ dizisi için $a_kR \subseteq I$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı varsa R'nin a elemanına I üzerinde güçlü nilpotent eleman denir.

Aşağıdaki önteorem güçlü nilpotent elemanlarının kümesinin R-modül homomorfizması altında korunduğunu göstermektedir.

Önteorem 3.3. *M, N sol R-modül ve B, M'nin alt modülü olsun. O halde $f : M \to N$ R-modül homomorfizması için $f(W_M(B)) \subseteq W_N(f(B))$'dir.*

Eğer f bir epimorfizma ve $Çek f \subseteq B$ ise $W_N(f(B)) \subseteq f(W_M(B))$'dir.

İspat. $m \in M$ ve $a \in R$ olmak üzere $x = am \in S_M(B)$ olsun. O halde $a_0 = a$ ve $a_{i+1} \in a_iRa_i$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, ...$ dizisi için $a_kRm \subseteq B$ olacak şekilde pozitif k tam sayısı vardır. O halde $f(a_kRm) = a_kRf(m) \subseteq f(B)$ ve böylece $f(x) \in S_N(f(B))$'dir. Sonuç olarak $f(W_M(B)) \subseteq W_N(f(B))$'dir.

Tersi için $n \in N$ ve $t \in R$ olmak üzere $x = tn \in S_N(f(B))$ olsun. f örten bir modül homomorfizması olduğundan $n = f(b)$ olacak şekilde $b \in B$ vardır. O halde $a_0 = t$ ve $a_{i+1} \in a_iRa_i$ olacak şekilde $a_0, a_1, a_2, ...$ dizisi için $a_kRn \subseteq f(B)$'dir. $b_r \in B$ ve $r \in R$ için $a_krn = f(b_r)$ ve her $r \in R$ için $f(a_krb - b_r) = 0$'dır. Böylece $a_kRb \subseteq B$ olup $x \in f(S_M(B))$'dir. Sonuç olarak $S_N(f(B)) \subseteq f(S_M(B))$ olup buradan $W_N(f(B)) \subseteq f(W_M(B))$'dir. □

Önteorem 3.4. *M sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. O halde $W_R(N : M)M \subseteq W_M(N)$'dir.*

İspat. $a \in S_R(N : M)$ ve $m \in M$ olmak üzere $x = am \in S_R(N : M)M$ olsun. $a \in S_R(N : M)$ olduğundan $a_0 = a$ ve $a_{i+1} \in a_iRa_i$ olacak şekilde $a_0, a_1, a_2, ...$ dizisi için $a_kR \subseteq (N : M)$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı vardır. Buradan $a_kRM \subseteq N$ ve her $m \in M$ için $a_kRm \subseteq N$'dir. O halde $x = am \in S_M(N)$ ve böylece $W_R(N : M)M \subseteq W_M(N)$'dir. □

Aşağıdaki önteorem bir alt modül üzerinde tanımlanan güçlü nilpotent elemanlarının kümesinin, bu alt modülü kapsayan bütün asal alt modüllerin kesişiminde olduğunu göstermektedir.

Önteorem 3.5. *M sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. O halde $W_M(N) \subseteq rad_M(N)$'dir.*

İspat. $x = am \in S_M(N)$ ve $x \notin rad_M(N)$ olsun. $am \notin P$ olacak şekilde M'nin N'yi içeren bir P asal alt modülü vardır. P asal alt modül olduğundan $aRam \nsubseteq P$'dir.

O halde $a_1m \notin P$ olacak şekilde $a_1 \in aRa$ vardır. Benzer şekilde P üzerindeki hipotez ile $a_1Ra_1m \nsubseteq P$'dir. Böylece $a_2m \notin P$ olacak şekilde $a_2 \in a_1Ra_1$ elemanı vardır. Sonuç olarak $a = a_0$ ve $a_{i+1} \in a_iRa_i$ olacak şekilde bir $a_0, a_1, a_2, ...$ dizisi elde ederiz $(i = 0, 1, 2, 3, ...)$ fakat $a_km \in P$ olacak şekilde bir pozitif k tam sayısı yoktur. O halde $a_kRm \nsubseteq N$ olup M'nin am elemanı N üzerinde güçlü nilpotent değildir. Bu ise $am \in S_M(N)$ ile çelişir. O halde $S_M(N) \subseteq rad_M(N)$ ve böylece $W_M(N) \subseteq rad_M(N)$'dir. □

Önteorem 3.6. *M sonlu üretilmiş sol R-modül, N ve L, M'nin alt modülleri olsun. O halde $W_M(N) + W_M(L) = M$'dir ancak ve ancak $N + L = M$'dir.*

İspat. $S_M(N) \cup S_M(L)$ kümesinin $W_M(N) + W_M(L)$'yi ürettiğini gözlemleyebiliriz.

(:⇒) $N + L \neq M$ olsun. M sonlu üretilmiş R-modül olduğundan $N + L \subseteq T$ olacak şekilde M'nin maksimal T alt modülü vardır. T aynı zamanda M'nin asal alt modülü olduğundan $W_M(N) \subseteq T$ ve $W_M(L) \subseteq T$'dir. Dolayısıyla $M = W_M(N) + W_M(L) \subseteq T$ olur. Bu ise T'nin maksimal alt modül olması ile çelişir. O halde $N + L = M$'dir.

(⇐:) $N \subseteq W_M(N)$, $L \subseteq W_M(L)$ ve $N + L = M$ olduğundan $W_M(N) + W_M(L) = M$'dir. □

Aşağıdaki teorem halka ile modülün, radikali ve güçlü nilpotent elemanlarının kümesi arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Teorem 3.7. *R bir halka ve I, R'nin sol ideali olsun. O halde $Rad_R(IR)$, R'nin IR idealini kapsayan tüm asal ideallerinin kesişimi olmak üzere*

$$W_R(I) \subseteq rad_R(I) \subseteq rad_R(IR) = Rad_R(IR) = W_R(IR)$$

dir.

İspat. $W_R(I) \subseteq rad_R(I)$ olduğu Önteorem 3.5 ile açıktır.

R'nin her asal ideali, sol R-modül R'nin asal alt modülü olduğundan $rad_R(I) \subseteq Rad_R(IR)$'dir. O halde $W_R(I) \subseteq rad_R(I) \subseteq Rad_R(IR)$ ve $W_R(IR) \subseteq rad_R(IR) \subseteq Rad_R(IR)$'dir.

$x \notin S_R(IR)$ olsun. O halde her pozitif k tam sayısı için $x_kR \nsubseteq IR$ olacak şekilde $\{x_i \in R : x_{i+1} \in x_iRx_i$ ve $x_0 = x,\ i \in \mathbb{Z}\}$ dizisi vardır ve $x_k \notin IR$'dir. $S = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$ bir m-sistem fakat $S \cap IR = \emptyset$'tur. O halde $x \notin Rad_R(IR)$'dir. Sonuç olarak $Rad_R(IR) \subseteq W_R(IR)$'dir. □

Teorem 3.7'nin sonucu olarak şu ifade edilebilir:

Sonuç 3.8. *R bir halka ve I, sol R-modül R'nin alt modülü olsun. Eğer I alt modülü* *aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa* $rad_R(I) = W_R(I)$*'dır.*

i) IR*'nin her elemanı* I *üzerinde güçlü nilpotent elemandır.*

ii) I*,* R*'nin idealidir.*

İspat. *i)* $x \in S_R(IR)$ olsun. O halde her $\{x_i \in R : x_{i+1} \in x_iRx_i$ ve $x_0 = x,\ i \in \mathbb{Z}\}$ dizisi için $x_kR \subseteq IR$ olacak şekilde pozitif k tam sayısı vardır ve $x_k \in IR$'dir. Hipotez ile her bir $\{a_i \in R : a_{i+1} \in a_iRa_i$ ve $a_0 = x_k,\ i \in \mathbb{Z}\}$ için $a_tR \subseteq I$ olacak şekilde pozitif bir t tam sayısı vardır. Böylece x, I üzerinde güçlü nilpotent elemandır ve $x \in W_R(I)$'dır. O halde Teorem 3.7 ile $rad_R(I) = W_R(I)$'dır.

ii) (i)'den açık. □

Aşağıdaki önteorem güçlü nilpotent elemanlar ile radikal modülün bölüm modülündeki özelliğini ifade etmektedir.

Önteorem 3.9. *M sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

i) $W_{M/N}(0) = (W_M(N)/N)$.

ii) $rad_{M/N}(0) = (rad_M(N)/N)$.

İspat. *i)* $S_{M/N}(0) = \{r(x+N) : rx \in S_M(N)\}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\bar{m} = r(m+N) \in S_{M/N}(0)$ olsun. O halde $a_{i+1} \in a_iRa_i$ ve $a_0 = r$ olmak üzere R'nin a_0, a_1, a_2,... dizisi için $a_kR(m+N) = N$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı vardır. Buradan $a_kRm \subseteq N$'dir. O halde $rm \in S_M(N)$ ve sonuç olarak $\bar{m} = r(m+N) \in \{r(x+N) : rx \in S_M(N)\}$ olup $W_{M/N}(0) \subseteq (W_M(N)/N)$'dir.

$\bar{m} = m + N \in \{r(x+N) : rx \in S_M(N)\}$ olsun. O halde $m = rx \in S_M(N)$ varsayabiliriz. Her $\{a_i \in R : a_{i+1} \in a_iRa_i$ ve $a_0 = r,\ i \in \mathbb{Z}\}$ dizisi için $a_kRx \subseteq N$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı vardır ve böylece $a_kR(x+N) = 0 + N$'dir. Buradan $\bar{m} = r(x+N) \in S_{M/N}(0)$ olup $(W_M(N)/N) \subseteq W_{M/N}(0)$'dır.

ii) Teorem 2.32. □

Teorem 3.10. *R bir halka ve $m \in M$ olmak üzere $M = Rm$ sol R-modül olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

i) $W_M(0) = W_R(Ann_R(m))m$*'dir.*

ii) $Ann_R(m)R$*'nin her elemanı* $Ann_R(m)$ *üzerinde güçlü nilpotent ise* $rad_M(0) = W_M(0)$*'dır.*

İspat. $M = Rm$ ve $I = Ann_R(m)$ olsun. O halde I, R'nin sol idealidir.

i) $d \in R$ olmak üzere $x = rdm \in S_M(0)$ olsun. O halde $a_{i+1} \in a_iRa_i$ ve $a_0 = rd$ olmak üzere R'nin a_0, a_1, a_2,... dizisi için $a_kRm = 0$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı vardır ve buradan $a_kR \subseteq Ann_R(m)$'dir. Dolayısıyla $rd \in S_R(Ann_R(m))$ ve böylece $W_M(0) \subseteq W_R(Ann_R(m))m$'dir. Tersi Önteorem 3.4 ile açık. O halde $W_M(0) = W(Ann_R(m))m$'dir.

ii) $M = Rm$, R/I'ya izomorf olduğundan $W_M(0)$, $W_{R/I}(0) = W_R(I)/I$'ya izomorftur. Benzer şekilde $rad_M(0)$, $rad_{R/I}(0) = rad_R(I)/I$'ya izomorftur. Diğer taraftan Sonuç 3.8 ile $rad_R(I) = W_R(I)$ ve böylece $rad_M(0)$, $W_M(0)$'a izomorftur. Sonuç olarak $rad_M(0) = W_M(0)$'dır. □

Şimdiki öntereom ise güçlü nilpotent elemanın ve radikal modülün dik toplananlarındaki özelliğini vermektedir.

Önteorem 3.11. *M ve M^*sol R-modül olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

i) $W_M(0) \oplus W_{M^*}(0) = W_{M\oplus M^*}(0)$*'dır.*

ii) $rad_M(0) \oplus rad_{M^*}(0) = rad_{M\oplus M^*}(0)$*'dır.*

İspat. (i)'yi göstermek yeterlidir.

$A = \{(ra, 0) : ra \in S_M(0)\}$ $(B = \{(0, kb) : kb \in S_{M^*}(0)\})$ kümesi $W_M(0) \oplus 0$ $(0 \oplus W_{M^*}(0))$ alt modülünü üretir.

$x \in A \cup B$ olsun. $x = (rm, 0) \in A$ varsayabiliriz ve böylece $rm \in S_M(0)$'dır. $a_0 = r$ ve $a_{i+1} \in a_iRa_i$ olmak üzere R'nin $a_0, a_1, a_2, ...$ dizisi için $a_kRm = 0$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı vardır ve böylece $a_kR(m, 0) = 0$'dır. O halde $r(m, 0) \in S_{M\oplus M^*}(0)$ olup $W_M(0) \oplus W_{M^*}(0) \subseteq W_{M\oplus M^*}(0)$'dır.

$x = r(m, n) \in S_{M\oplus M^*}(0)$ olsun. $a_0 = r$ ve $a_{i+1} \in a_iRa_i$ olmak üzere R'nin $a_0, a_1, a_2, ...$ dizisi için $a_kR(m, n) = 0$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı vardır. O halde $a_kRm = 0$ ve $a_kRn = 0$'dır. Sonuç olarak $r(m, n) = r(m, 0) + r(0, n) \in W_M(0) \oplus W_{M^*}(0)$'dır. Buradan $W_{M\oplus M^*}(0) \subseteq W_M(0) \oplus W_{M^*}(0)$'dır.

Sonuç olarak $W_M(0) \oplus W_{M^*}(0) = W_{M\oplus M^*}(0)$'dır. □

Önerme 2.40 ve Önteorem 3.11 kullanarak aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.12. *R bir halka olsun. Eğer her serbest R-modül radikal formülü sağlarsa her R-modül de radikal formülü sağlar.*

Önerme 3.13. *R bir halka ve M projektif sol R-modül olsun. O halde*

$$W_R(0)M = W_M(0) = rad_M(0) = rad_R(0)M$$

dir.

İspat. M projektif sol R-modül olsun. O halde $F = M \oplus A$ olacak şekilde serbest R-modül F ve R-modül A vardır.

İlk olarak iddiamızın F için doğru olduğunu ispatlayalım.

$\{x_i : i \in \Lambda\}$ kümesi F için bir taban olsun. O halde $F = \bigoplus_{i\in\Lambda} Rx_i$'dir. Her $x \in F$'nin sonlu tanesi sıfırdan farklı olan $r_i \in R$ için $x = \sum_{i\in\Lambda} r_i x_i$ olacak şekilde tek bir açılımı vardır. $\varphi_i(x) = r_i$ ile tanımlı $\varphi_i : F \to R$ homomorfizması tanımlayalım. O halde $i \in \Lambda$ için φ_i örten bir homomorfizmadır ve $x = \sum_{i\in\Lambda} \varphi_i(x) x_i$'dir.

Sonlu tanesi sıfırdan farklı olan $r_i \in R$ için $u = \sum_{i\in\Lambda} r_i x_i \in W_F(0)$ olsun. Böylece $u = \sum_{i\in\Lambda} \varphi_i(u) x_i$ ve Önteorem 3.3 ile $u = \sum_{i\in\Lambda} \varphi_i(u) x_i \in W_R(0)F$'dir. O halde $W_F(0) \subseteq W_R(0)F$ ve buradan $W_F(0) = W_R(0)F$'dir.

$m \in W_M(0)$ olsun. Önteorem 3.11 ile $W_F(0) = W_M(0) \oplus W_A(0)$ ve böylece $m \in W_F(0) = W_R(0)F = W_R(0)M \oplus W_R(0)A$'dır. O halde $r_i, k_j \in W_R(0)$, $m_i \in M$ ve $a_j \in A$ olmak üzere $m = \sum r_i m_i + \sum k_j a_j$'dir. Sonuç olarak $m = \sum r_i m_i \in W_R(0)M$ ve böylece $W_R(0)M = W_M(0)$'dır.

Benzer şekilde $rad_M(0) = rad_R(0)M$ olduğu gösterilir. $rad_R(0) = W_R(0)$ olduğundan $W_M(0) = W_R(0)M = rad_R(0)M = rad_M(0)$'dır. □

Teorem 3.14. *R bir halka, M/N projektif sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. O halde*

$$rad_M(N) = W_M(N) = W_R(0)M + N$$

dir.

İspat. Önteorem 3.9 ile $rad_{M/N}(0) = (rad_M(N))/N$ ve $W_M(N)/N = W_{M/N}(0)$'dır. M/N projektif R-modül olduğundan Önerme 3.13 ile $rad_{M/N}(0) = W_{M/N}(0) = W_R(0)(M/N)$ ve böylece $W_M(N)/N = ((W_R(0)M + N)/N)$'dir. Sonuç olarak $W_M(N) = W_R(0)M + N = rad_M(N)$'dir. □

Sonuç 3.15. *R bir halka, M/N projektif sol R-modül ve $W_R(0)M \subseteq N$ olacak şekilde N, R-modül M'nin alt modülü olsun. O halde $rad_M(N) = W_M(N) = N$'dir.*

İspat. Teorem 3.14 ile açık. □

Teorem 3.16. *$\bar{R} = R/W_R(0)$ yarı-basit olacak şekilde R bir halka ve N, sol R-modül M'nin alt modülü olsun. O halde $rad_M(N) = W_M(N) = W_R(0)M + N$'dir.*

İspat. $N = 0$ olsun. $rad_M(0) = W_R(0)M$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Lam (1991) ile $\bar{R}$ yarı-basit olduğundan $\bar{R}$-modül $\bar{M} = M/W_R(0)M$ de yarı-basittir ve yarı-basit halka üzerindeki modül projektif olduğundan Teorem 3.14 ile $W_{\bar{M}}(0) = W_{\bar{R}}(0)\bar{M} = rad_{\bar{M}}(0) = \bar{0}$'dir. Buradan $rad_M(0) = W_R(0)M$'dir.

$N \neq 0$ olsun. O halde $rad_{M/N}(0) = W_R(0)(M/N)$'dir. Sonuç olarak Önteorem 3.9 ve Teorem 3.14 ile $rad_M(N) = W_R(0)M + N = W_M(N)$'dir. □

Bazı halka sınıfları üzerindeki modüllerin radikal formülü sağladığı bilinmektedir. Bu halka sınıflarından birini aşağıdaki sonuç ile bulabiliriz.

Sonuç 3.17. *$\bar{R} = R/W_R(0)$ yarı-basit olacak şekilde R bir halka olsun. O halde R radikal formülü sağlar.*

İspat. M bir R-modül olsun. Teorem 3.16 ile $rad_M(0) = W_R(0)M$'dir. $W_R(0)M \subseteq W_M(0) \subseteq rad_M(0)$ olduğundan $W_R(0)M = W_M(0) = rad_M(0)$'dır. O halde M radikal formülü sağlar. □

3.1.2. HNP-halkaları Üzerindeki Modüller

Bu kısımda HNP-halkalarının bir genellemesi olan $HNPS$-halkaları tanımlanacak ve HNP-halkaları için karakterizasyon verilecektir.

Teorem 3.18. *R HNP-halkası, M sonlu üretilmiş sol R-modül, $m_i \in M$ ve K projektif sol R-modül olmak üzere $M = (\oplus_{i=1}^n Rm_i) \oplus K$ olsun. Sıfırdan farklı her $r \in R$ ve $i \in \{1, .., n\}$ için $Ann_R(m_i) = Ann_R(rm_i)$ olsun. Bu durumda*

$$W_R\left(\cap_{i=1}^n Ann_R(m_i)\right)\left(\oplus_{i=1}^n Rm_i\right) \oplus W_R(0)K = W_M(0)$$

dır.

İspat. $W_R\left(\cap_{i=1}^n Ann_R(m_i)\right)\left(\oplus_{i=1}^n Rm_i\right) = W_{\left(\oplus_{i=1}^n Rm_i\right)}(0)$ göstermek istiyoruz.

$n = 2$ için yapalım.

$rm \in S_{(R_{m_1} \oplus Rm_2)}(0)$ olsun. $a_0 = r$ ve $a_{i+1} \in a_iRa_i$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, ...$ dizisi için $a_kRm = a_kR(d_1, e_1) = 0$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı vardır. Buradan $a_kRd_1 = 0$ ve $a_kRe_1 = 0$'dır. Hipotez ile $a_kR \subseteq Ann_R(m_1) \cap Ann_R(m_2)$'dir. Sonuç olarak $r \in S_R(Ann_R(m_1) \cap Ann_R(m_2))$ ve $W_{(R_{m_1} \oplus Rm_2)}(0) \subseteq W_R(Ann_R(m_1) \cap Ann_R(m_2))(Rm_1 \oplus Rm_2)$'dir.

Tersi için $a \in S_R(Ann_R(m_1) \cap Ann_R(m_2))$ olmak üzere
$n = a(d_1, e_1) \in S_R(Ann_R(m_1) \cap Ann_R(m_2))(Rm_1 \oplus Rm_2)$ olsun.
$a_0 = a$ ve $a_{i+1} \in a_i R a_i$ olmak üzere $a_0, a_1, ...$dizisi için $a_k R \subseteq Ann_R(m_1) \cap Ann_R(m_2)$ olacak şekilde pozitif bir k tam sayısı vardır ve böylece $a_k R(m_1, m_2) = 0$ olup $W_R(Ann_R(m_1) \cap Ann_R(m_2))(Rm_1 \oplus Rm_2) \subseteq W_{(R_{m_1} \oplus Rm_2)}(0)$'dır. O halde

$$W_R \left(Ann_R(m_1) \cap Ann_R(m_2)\right) (Rm_1 \oplus Rm_2) = W_{(Rm_1 \oplus Rm_2)}(0)$$

dır. Aynı zamanda Önerme 3.13 ile $W_K(0) = W_R(0)K$ ve Önteorem 3.11 ile de

$$W_M(0) = W_{(Rm_1 \oplus Rm_2) \oplus K}(0) = W_{(Rm_1 \oplus Rm_2)}(0) \oplus W_K(0)$$

olduğundan

$$W_M(0) = W_R \left(Ann_R(m_1) \cap Ann_R(m_2)\right) (Rm_1 \oplus Rm_2) \oplus W_K(0)$$

dır. Sonuç olarak

$$W_R \left(\cap_{i=1}^{n} Ann_R(m_i)\right) \left(\oplus_{i=1}^{n} Rm_i\right) \oplus W_R(0)K = W_M(0)$$

dır. □

Dedekind bölgeleri değişmeli halka teorisinde önemli rol oynar ve Dedekind bölgeleri radikal formülü sağlar. Değişmesiz halka teorisinde bu kavramın genellemelerinden birisi de HNP-halkalarıdır. Dolayısıyla HNP-halkalarının da radikal formülü sağlayıp sağlamadığı kontrol edilebilir. Bunun için ilk önce bir M modülünün karakterizasyonunu verelim. M, HNP-halkası üzerinde sonlu üretilmiş modül ve K, M'nin alt modülü olsun. O halde K, $M/T(M)$'ye izomorf olmak üzere
$M = T(M) \oplus K$'dır (McConnel ve Robson 1987). Bu kısımda M modülü için bu ayrışımdan yararlanılacaktır.

Önteorem 3.19. *Her elemanı regüler olacak şekilde R bir halka ve $T(M) \subseteq N$ olmak üzere N, sol R-modül M'nin alt modülü olsun. O halde N'nin kapanışı L, $T(M/N) = L/N$ formundadır.*

Eğer M, HNP-halkası üzerinde sonlu üretilmiş ise L, M'nin bir direkt toplamıdır.

İspat. N, K'da esas olacak şekilde N ve K, M'nin alt modülleri olsun. O halde K/N, $T(M/N)$'nin alt modülür.

$T(M) \subseteq N$ ve $L/N = T(M/N)$ olacak şekilde N ve L, M'nin alt modülü olsun. $\bar{0} \neq x + N \in T(M/N)$ alalım. O halde $0 \neq rx \in N$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Aksi durumda $x + N = \bar{0}$ olur. Böylece L, N'nin esas genişlemesidir. M/L, $(M/N)/T(M/N)$'ye izomorf olduğundan M/L serbest burulmalı modül olup L, M'nin kapalı bir alt modülüdür.

Eğer M, HNP-halkası üzerinde sonlu üretilmiş modül ise M/L projektif ve böylece L, M'nin bir direkt toplam terimidir. □

R bir halka ve P, R'nin asal ideali olsun. $x, y \in R$ olmak üzere $xy \in P$ iken $xRy \subseteq P$ ise P'ye S-koşulunu sağlar denir. Eğer HNP-halkası R ve sıfır ideali S-koşulunu sağlıyor ise R'ye $HNPS$-halka denir. Açıkça, $HNPS$-halkası Dedekind bölgesinin bir genellemesidir.

Bu koşul altında aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.20. *R sol CS-halka olsun. O halde*

i) P, sol R-modül R'nin S-koşulunu sağlayan asal alt modülü olsun. Bu durumda P, R'de esastır.

ii) Eğer R'nin her asal ideali S-koşulunu sağlıyorsa $J(R)$, R'nin tüm maksimal ideallerinin kesişimi (Jacobson radikali) olmak üzere
$soc(_RR) \subseteq rad_R(0) \subseteq J(R)$'dir.

İspat. *i)* P, sol R-modül R'nin asal alt modülü ve L, P'nin kapanışı olsun. R sol CS-halka olduğundan $R = L \oplus K$ olacak R'nin K alt modülü vardır. Diğer taraftan Sonuç 3.2 ile R/P ayrıştırılamaz ve böylece $K = 0$'dır. Buradan P, R'de esastır.

ii) $soc(_RR)$, R'nin esas sol ideallerinin kesişimi olduğundan
$soc(_RR) \subseteq rad_R(0) \subseteq J(R)$'dir. □

Aşağıdaki teoremde Sonuç 3.20 kullanılarak $HNPS$-halkası üzerinde sonlu üretilmiş bir modül için bir karakterizasyon verilir.

Teorem 3.21. *R, $HNPS$-halka ve M sonlu üretilmiş sol R-modül olsun. O halde M modülü burulmalı modül ile CS-modülün direkt toplamıdır.*

İspat. M, HNP-halkası üzerinde sonlu üretilmiş modül ise K, $M/T(M)$'ye izomorf olmak üzere $M = T(M) \oplus K$'dır (McConnel ve Robson 1987). A, K'nın alt modülü olsun. O zaman Önteorem 3.19 ile L, A'nın bir kapanışı olmak üzere $T(K/A) = L/A$ ve böylece L, K'nın direkt toplam terimidir. O halde K CS-modüldür. □

Radikal formül ile ilgili aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.22. *M, HNP-halkası üzerinde sonlu üretilmiş sol modül olsun. $m \in M$ olmak üzere $Ann_R(m)R$'nin her elemanı $Ann_R(m)$ üzerinde güçlü nilpotent ise M radikal formülü sağlar.*

İspat. M, HNP-halkası üzerinde sonlu üretilmiş modül olsun. O halde McConnel ve Robson (1987) ile M, devirli modül veya projektif modülün direkt toplamıdır. Teorem 3.10 ve Önerme 3.13 kullanılarak ispat tamamlanır. □

3.2. SOL O-ASAL İDEAL

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe kullanılan tüm halkalar birimli olarak düşünülecektir. R birimli bir halka olarak alınacaktır.

Değişmeli halka üzerinde asal idealler hakkındaki Cohen ve Kaplansky teoremleri halkaları karakterize etmek için önemli teoremlerdir (Cohen 1950, Kaplansky 1974). Bu teoremlerden yola çıkarak bu bölümde, değişmesiz halkaların yapısını incelemek için sol O-asal idealler üzerine yoğunlaşılacaktır. Değişmeli halka teorisinde, bir halkanın nilpotent elemanlarının kümesi bir ideal belirtir ve bu ideal tüm asal ideallerin kesişimine eşittir. Ancak değişmesiz halka teorisinde, nilpotent elemanlarının kümesi bir ideal belirtmez ve asal ideallerin kesişimi ise m-sistem ile karakterize edilir (Lam 1991).

Bu bilgi doğrultusunda bu bölümde, asal ideallerin genellemesi ve bir idealin radikali için yeni tanım verilecek, bu yeni ideal sınıfının temel özellikleri incelenecek, değişmeli halka üzerinde tanımlanan asal ideal kavramı ile benzerlikleri ve farklılıkları belirtilecektir. Halkanın maksimal sol idealinin sol O-asal ideal olduğu gösterilecektir (Önteorem 3.26). R bir halka olsun. I, R'nin sol ideali ve $K = \{a_i \in R : a_0 = a \text{ ve } a_{i+1} \in a_i R a_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq R$ olmak üzere $I \cap K = \emptyset$ olsun. O halde $P \cap K = \emptyset$ olacak şekilde I'yı kapsayan R'nin P sol O-asal idealinin var olduğunu gösterilecektir (Önerme 3.33). Bu sonuç kullanılarak ve belli koşullar altında R'nin sol I idealini içeren tüm sol O-asal ideallerinin kesişimi olan $O\text{-}rad_R(I)$'nın elemanları için karakterizasyon verilecektir. Son olarak R sol O-radikal idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlıyorsa R'nin K sol O-radikal idealinin ($O\text{-}rad_R(K) = K$) sonlu tane O-asal ideallerinin kesişimi olduğu ifade edilecektir (Teorem 3.39).

3.2.1. Sol O-asal ideal

Değişmeli halkadaki asal ideal kavramının değişmesiz halka üzerinde bir genellemesi de "completely" asal idealdir. Reyes'te (2010) değişmesiz halkalarda "completely" asal idealin bir genellemesi olarak "completely" sağ asal ideal tanımlanmış ve bu yeni sınıfın özelliklerini araştırılmıştır. R bir halka ve P, R'nin sağ ideali olsun. R'nin $aP \subseteq P$ ve $ab \in P$ olacak şekilde a ve b elemanları için $a \in P$ veya $b \in P$ ise P'ye "completely" sağ asal ideal denir.

Bu tanımı aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz.

Tanım 3.23. *R bir halka ve P, R'nin sol ideali olsun. R'nin $PJ \subseteq P$ ve $IJ \subseteq P$ olacak şekilde sol I, J idealleri için $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ ise P'ye R'nin sol O-asal ideali denir.*

Eğer P asal ideal ise sol O-asal ideal olduğu açıktır. Ayrıca değişmesiz R halkası değişmeli olursa Tanım 3.23, bilinen asal ideal tanımına denk olmaktadır.

P, R'nin sol ideali olsun. $PJ \subseteq P$ olan R'nin sol J ideallerinin toplamı olarak tanımlanan $\mathbb{I}_R(P)$, R'nin sol idealidir. Şunu da gözlemleyebiliriz: $\mathbb{I}_R(P) = R$'dir ancak ve ancak P, R'nin idealidir.

Aşağıdaki önteorem bu sol idealin bazı özellikleri göstermektedir.

Önteorem 3.24. *R bir halka ve I, R'nin sol ideali olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

i) $\mathbb{I}_R(I) \subseteq \mathbb{I}_R(I^2)$*'dir.*

ii) $\mathbb{I}_R(I) \subseteq \mathbb{I}_R(\mathbb{I}_R(I))$*'dır.*

iii) Eğer $f : R \to S$ *bir halka epimorfizması ise* $f(\mathbb{I}_R(I)) \subseteq \mathbb{I}_S(f(I))$*'dır. Ayrıca* $\text{Çek} f \subseteq I$ *ise bu kapsamanın tersi de doğrudur.*

İspat. (i) $J \in \mathbb{I}_R(I)$ olsun. O halde $IJ \subseteq I$ ve buradan $I^2J = IIJ \subseteq I^2$ olup $\mathbb{I}_R(I) \subseteq \mathbb{I}_R(I^2)$'dir.

(ii) $J \in \mathbb{I}_R(I)$ olsun. O halde $IJ \subseteq I$'dır. $I\mathbb{I}_R(I)J \subseteq I$ olduğundan $J \in \mathbb{I}_R(\mathbb{I}_R(I))$ olup $\mathbb{I}_R(I) \subseteq \mathbb{I}_R(\mathbb{I}_R(I))$'dır.

(iii) J, R'nin sol ideali olmak üzere $f(J) \in f(\mathbb{I}_R(I))$ ve $IJ \subseteq I$ olsun. Buradan $f(IJ) = f(I)f(J) \subseteq f(I)$ ve $f(J)$, S'nin sol ideali olduğundan $f(J) \in \mathbb{I}_S(f(I))$'dır.

Ters kapsama için $f(J) \in \mathbb{I}_S(f(I))$ olsun. Böylece $f(I)f(J) \subseteq f(I)$'dır. $x \in I$ ve $z \in J$ alalım. $f(xz) = f(y)$ olacak şekilde $y \in I$ vardır. Böylece $f(xz-y) = 0$'dır. O halde $xz - y \in \text{Çek} f \subseteq I$ ve $xz \in I$'dır. Böylece $IJ \subseteq I$ olup buradan $f(J) \in f(\mathbb{I}_R(I))$'dır. □

Bu sol ideal sınıfı ile sol O-asal ideal arasında şöyle bir ilişki vardır:

Önteorem 3.25. *R bir halka ve P, R'nin sol ideali olsun. O halde P sol O-asal idealdir ancak ve ancak* $\mathbb{I}_R(P) = P$*'dir.*

İspat. $\mathbb{I}_R(P) = P$ olsun. $\mathbb{I}_R(P)$'nin tanımı ile P, R'nin sol O-asal idealidir.

P, R'nin sol O-asal ideali olsun. Hipotez ile $\mathbb{I}_R(P) \neq R$'dir. O halde $a \in R \backslash \mathbb{I}_R(P)$ ve $b \in \mathbb{I}_R(P)$ elemanlarını alalım. Böylece $c = pxa \notin P$ olacak şekilde $x \in R$ ve $p \in P$ elemanı vardır. Buradan $cRb \subseteq PRb \subseteq P$ ve P sol O-asal ideal olduğundan $c \in P$ veya $b \in P$'dir. $c \notin P$ olduğundan $b \in P$ olup $\mathbb{I}_R(P) \subseteq P$'dir. Diğer kapsama her zaman sağlandığından $\mathbb{I}_R(P) = P$'dir. □

Sol O-asal ideal ile asal ideal kavramlarının farklı olduğunu aşağıdaki önteorem ile görebiliriz.

Önteorem 3.26. *R halkasının herhangi bir sol maksimal ideali sol O-asal idealdir.*

İspat. P, R'nin sol maksimal ideali olsun. $PJ \subseteq P$ olacak şekilde I ve J'yi R'nin sol idealleri olarak alalım. Eğer I ve J sol idealleri P'de değilse P'nin maksimalliğinden $P + I = R$ ve $P + J = R$'dir. O halde $R = (P + I)(P + J) = P + IJ$ olup IJ, P'de değildir. Sonuç olarak P sol O-asal idealdir. □

Önteorem 3.27. *I^2, R'nin sol O-asal ideali olacak şekilde I, R'nin ideali olsun. O halde I idempotent idealdir.*

İspat. I^2 sol O-asal ideal, $I^2 I \subseteq I^2$ ve $II \subseteq I^2$ olduğundan $I \subseteq I^2$'dir. Sonuç olarak $I = I^2$ olup I idempotent ideal olur. □

Aşağıdaki önerme sol O-asal idealin epimorfizma altında korunduğunu göstermektedir.

Önerme 3.28. *R, S iki halka ve P, R'nin sol ideali olsun. $\varphi : R \to S$ halka epimorfizması ve Çek$\varphi \subseteq P$ olsun. O halde P, R'nin sol O-asal idealidir ancak ve ancak $\varphi(P)$, S'nin sol O-asal idealidir.*

İspat. $(:\Rightarrow)$ $\varphi(P)J \subseteq \varphi(P)$ ve $IJ \subseteq \varphi(P)$ olacak şekilde I ve J, S'nin sol idealleri olsun. O halde $\varphi^{-1}(I)\varphi^{-1}(J) \subseteq P$ ve $P\varphi^{-1}(J) \subseteq P$'dir. P, R'nin sol O-asal ideali olduğundan $\varphi^{-1}(I) \subseteq P$ veya $\varphi^{-1}(J) \subseteq P$'dir. Böylece $I \subseteq \varphi(P)$ veya $J \subseteq \varphi(P)$'dir. Sonuç olarak $\varphi(P)$, S'nin sol O-asal idealidir.

$(\Leftarrow:)$ $\varphi(P)$, S'nin sol O-asal ideali olsun. $PB \subseteq P$ ve $AB \subseteq P$ olacak şekilde A ve B, R'nin sol idealleri olsun. O halde $\varphi(A)\varphi(B) \subseteq \varphi(P)$ ve $\varphi(P)\varphi(B) \subseteq \varphi(P)$'dir. Böylece $\varphi(A) \subseteq \varphi(P)$ veya $\varphi(B) \subseteq \varphi(P)$'dir. Çek$\varphi \subseteq P$ olduğundan $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$'dir. Sonuç olarak P, R'nin sol O-asal idealdir. □

Önerme 3.28'den aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 3.29. *R bir halka olsun. O halde P, R'nin sol O-asal idealidir ancak ve ancak $N \subseteq P \subseteq R$ olacak şekilde her N ideali için P/N, R/N'nin sol O-asal idealidir.*

3.2.2. Sol O-asal idealin radikali

Şimdi literatürde iyi bilinen, bir idealin radikali tanımına benzer şekilde sol O-asal idealin radikali kavramını tanıtalım.

Tanım 3.30. *R bir halka ve I, R'nin sol ideali olsun. I'yı içeren R'nin tüm sol O-asal ideallerinin kesişimine I'nın O-radikali denir ve $O\text{-}rad_R(I)$ ile gösterilir. Eğer $O\text{-}rad_R(I) = I = W_R(I)$ ise I'ya sol O-radikal ideal denir.*

R'nin her asal ideali sol O-asal ideal olduğundan $O\text{-}rad_R(I) \subseteq rad_R(I)$'dır.

Değişmeli halka teorisinden hatırlanacağı üzere aşağıdaki teoremin benzeri radikal modüller için ifade edilmiştir (Teorem 2.33). Aşağıdaki teorem bunun

O-radikal ideal versiyonudur ve bu teorem halkanın sol idealleri ile bu ideallere ait O-radikal idealler arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Teorem 3.31. *R bir halka, N ve L, R'nin sol ideali olsun. O halde $O\text{-}rad_R(N) + O\text{-}rad_R(L) = R$'dir ancak ve ancak $N + L = R$'dir.*

İspat. $O\text{-}rad_R(N) + O\text{-}rad_R(L) = R$ ve $N + L \neq R$ olsun. O halde $N + L \subseteq T$ olacak şekilde R'nin bir T sol maksimal ideali vardır. Önteorem 3.26 ile T, R'nin sol O-asal ideali olduğundan $O\text{-}rad_R(N) \subseteq T$ ve $O\text{-}rad_R(L) \subseteq T$'dir. Böylece

$$O\text{-}rad_R(N) + O\text{-}rad_R(L) \subseteq T$$

olup bu $T \subset R$ olmasıyla çelişir. O halde $N + L = R$'dir.

$N \subseteq O\text{-}rad_R(N)$, $L \subseteq O\text{-}rad_R(L)$ ve $N + L = R$ olduğundan

$$O\text{-}rad_R(N) + O\text{-}rad_R(L) = R$$

dir. □

Şimdiki önerme sol O-asal ideallerin çarpımsal küme ile bağlantısını ifade etmektedir.

Önerme 3.32. *R bir halka olsun. I, R'nin sol ideali ve $K \subseteq R$ bir çarpımsal küme olmak üzere $I \cap K = \emptyset$ olsun. O halde $P \cap K = \emptyset$ olacak şekilde R'nin I'yı içeren bir P sol O-asal ideali vardır.*

İspat. Ψ kümesini şu şekilde tanımlayalım:

$$\Psi = \{L : L \cap K = \emptyset \text{ ve } L, R\text{'nin sol ideali}\}.$$

$I \in \Psi$ olduğundan $\Psi \neq \emptyset$'tur. Zorn önteorem ile Ψ'nin bir maksimal P elemanı vardır. $PB \subseteq P$ olacak şekilde A ve B, R'nin sol idealleri olsun.

A ve B, P'de olmasın. O halde hem $(P+A)\cap K \neq \emptyset$ hem de $(P+B)\cap K \neq \emptyset$ olur. $a \in (P + A) \cap K$ ve $b \in (P + B) \cap K$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır. Buradan $ab \in K \cap ((P + A)(P + B)) = K \cap (AB + P)$ olup AB, P'de olamaz. Böylece P, R'nin sol O-asal idealidir. □

Aşağıdaki önerme sol O-asal ideal ile halkanın bir elemanına ait dizisi arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Önerme 3.33. *R bir halka olsun. I, R'nin sol ideali ve $K = \{a_i \in R : a_0 = a \text{ ve } a_{i+1} \in a_iRa_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq R$ olmak üzere $I \cap K = \emptyset$ olsun. O halde $P \cap K = \emptyset$ olacak şekilde R'nin I'yı içeren bir P sol O-asal ideali vardır.*

İspat. Ψ kümesini şu şekilde tanımlayalım:

$$\Psi = \{L : L \cap K = \emptyset \text{ ve } L,\ R\text{'nin sol ideali}\}.$$

$I \in \Psi$ olduğundan $\Psi \neq \emptyset$'dır. Zorn önteorem ile Ψ'nin bir maksimal P elemanı vardır. $PB \subseteq P$ olacak şekilde A ve B, R'nin sol idealleri olsun.

A ve B, P'de olmasın. O halde hem $(P + A) \cap K \neq \emptyset$ hem de $(P + B) \cap K \neq \emptyset$ olur. $r_n \in (P + A) \cap K$ ve her $t \geq n$ için $r_t \in (P + A) \cap K$ olsun. Benzer şekilde $r_m \in (P + B) \cap K$ ve her $v \geq m$ için $r_v \in (P + B) \cap K$ olsun. $m \geq n$ varsayalım. O halde $l, k \in R$ olmak üzere $r_{m+1} = lr_nkr_m$'dir ve böylece $r_{m+1} \in K \cap ((P + A)(P + B)) = K \cap (AB + P)$'dir. Buradan AB, P'de olamaz ve böylece P, R'nin sol O-asal idealidir. □

Şimdi $W_R(I)$ ile sol O-asal ideal arasındaki ilişkiyi verelim.

Önteorem 3.34. *R bir halka, $a \in R$ ve I, R'nin sol ideali olsun. O halde $O\text{-}rad_R(I) \subseteq W_R(I)$'dır.*

İspat. $a \in O\text{-}rad_R(I)$ fakat a, I üzerinde güçlü nilpotent eleman olmasın. O halde $I \cap K = \emptyset$ olacak şekilde $K = \{a_i \in R : a_0 = a \text{ ve } a_{i+1} \in a_iRa_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq R$ kümesi vardır. Önerme 3.33 ile $P \cap K = \emptyset$ olacak şekilde R'nin I'yı içeren bir P sol O-asal ideali vardır. Bu ise $a \in O\text{-}rad_R(I)$ olmasıyla çelişir. O halde $O\text{-}rad_R(I) \subseteq W_R(I)$'dır. □

Aşağıdaki önteoremin şartlarından birinin sağlanması durumunda Önteorem 3.34'teki kapsamanın tersi de doğrudur.

Önteorem 3.35. *R bir halka, $a \in R$ ve I, R'nin sol ideali olsun. Aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa $O\text{-}rad_R(I) = W_R(I)$'dır.*

1) *R'nin P sol O-asal ideali için $xa \notin P$ iken $axa \notin P$'dir.*

2) *İdeal olmayan her P sol O-asal ideal, sol maksimal idealdir.*

İspat. $W_R(I) \subseteq O\text{-}rad_R(I)$ olduğunu gösterelim. Diğer kapsama Önteorem 3.34'te gösterildi.

$a \in S_R(I)$ fakat $a \notin O\text{-}rad_R(I)$ olsun. O halde $a \notin P$ olacak şekilde R'nin I'yı içeren bir P sol O-asal ideali vardır. P sol O-asal ideali için iki durum vardır:

a) $PRa \subseteq P$ olsun. aRa, P'de olmadığından sıfırdan farklı $a_1 = at_0a \in aRa$ elemanı vardır ve $a_1 \notin P$'dir. O halde $PRa_1 \subseteq PRa \subseteq P$ ve böylece a_1Ra_1, P'de değildir. Benzer şekilde sıfırdan farklı $a_2 = a_1t_1a_1 \in a_1Ra_1$ elemanı vardır. Bu yöntemi kullanarak a'nın $\eta(a) = \{a_i : a_{i+1} \in a_iRa_i \text{ ve } a_0 = a,\ i \in \mathbb{N}\}$ dizisini elde ederiz fakat her $i \in \mathbb{N}$ için $a_i \notin P$ olduğundan $\eta(a) \cap I = \emptyset$ olur. Sonuç olarak a, I

üzerinde R'nin güçlü nilpotent elemanı değildir. Bu ise $a \in S_R(I)$ ile çelişir. O halde $W_R(I) \subseteq O\text{-}rad_R(I)$'dır.

b) $PRa \nsubseteq P$ olsun.

i) (1)'deki koşul sağlansın. $(p_0x)\,a \notin P$ olacak şekilde $p_0 \in P$ ve $x \in R$ vardır ve (1) ile $a_1 = a\,(p_0x)\,a \notin P$ elemanını seçebiliriz.

ii) (2)'deki koşul sağlansın. O halde R'nin P sol maksimal ideali vardır ve $P + PRa = R$'dir. O halde $1 = m + ka$ olacak şekilde $m \in P$ ve $k \in PR$ vardır ve $a - am = aka \notin P$'dir. $a_1 = aka$ olarak seçelim.

$PRa_1 \nsubseteq P$ olduğundan b'deki yöntem ile $t \in R$ olmak üzere $a_2 = a_1ta_1 \notin P$ elemanını seçebiliriz.

Sonuç olarak a'nın $\eta(a) = \{a_i : a_{i+1} \in a_iRa_i$ ve $a_0 = a,\ i \in \mathbb{N}\}$ dizisi vardır fakat her $i \in \mathbb{N}$ için $a_i \notin P$ olduğundan $\eta(a) \cap I = \emptyset$ olur. O halde a, I üzerinde R'nin güçlü nilpotent elemanı değildir. Bu ise $a \in S_R(I)$ ile çelişir. O halde $W_R(I) \subseteq O\text{-}rad_R(I)$'dır. $\square$

Önteorem 3.35'te (1)'deki koşulu sağlayan bir sol O-asal ideal için örnek verelim.

Örnek. *F bir cisim olmak üzere* $R = \begin{bmatrix} F & F & F \\ 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}$ *bir halka olsun. O halde* $P = \begin{bmatrix} F & F & F \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *sol ideal fakat sağ ideal değildir.*

İlk önce P'nin sol O-asal ideal olduğunu gösterelim. Bunun için $\mathbb{I}_R(P) = \{a \in R : PRa \subseteq P\}$*'yi hesaplayalım.*

Eğer $q = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathbb{I}_R(P)$ *ise* $Pq \subseteq PRq \subseteq P$*'dir.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in P$$

dir ancak ve ancak $e = 0$*'dır.*

Böylece $q = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ *'dır.*

$$q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

olsun. O halde $q_1 \in Rq$ ve $PRq_1 \subseteq PRq \subseteq P$ olduğundan $q_1 \in \mathbb{I}_R(P)$'dir. Böylece $f = 0$ olup $q \in P$'dir. Sonuç olarak $\mathbb{I}_R(P) = P$ olup Önteorem 3.25 ile P, R'nin sol O-asal idealidir.

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. O halde hem xg hem de pxg P'de değil ve buradan $PRg \nsubseteq P$'dir. Sonuç olarak $gpxg \notin P$ olup P sol O-asal ideali, Önteorem 3.35'teki (1) *koşulunu sağlar.*

Fakat

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin P \text{ ve } g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \notin P$$

ise $g_2g_1 \notin P$ fakat $g_1g_2g_1 \in P$'dir. Bu ise Önteorem 3.35'teki (1) *koşulunu sağlamayan bir örnektir. Sonuç olarak bu koşul her zaman sağlanmaz.*

Aşağıdaki teorem bir sol idealin sonlu üretilmemiş tüm sol idealler arasında maksimal ise bunun sol O-asal ideal olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.36. *R bir halka ve R'nin sağ ideal olmayan P sol ideali, R'nin sonlu üretilmemiş tüm sol idealleri arasında maksimal olsun. O halde P, R'nin sol O-asal idealidir.*

İspat. $\mathbb{I}_R(P) \neq P$, $b \in \mathbb{I}_R(P) \backslash P$ ve $aRb \subseteq P$ olacak şekilde $a \in R$ olsun. O halde $P + Rb$, P'den farklıdır ve sonlu üretilmiştir. $p_i \in P$ ve $r_i \in R$ olmak üzere $\{p_1 + r_1b, ..., p_t + r_tb\}$, $P + Rb$'nin üreteç kümesi olsun. $K = \{y \in R : yb \in P\}$ kümesini tanımlayalım. O halde K, a ve P'yi içeren R'nin bir sol idealidir.

$a \notin P$ olsun. $P + Ra \neq P$ olduğundan K, R'nin sonlu üretilmiş bir sol idealidir. $x \in P$ alalım. O halde $u_i \in R$ olmak üzere $x = u_1(p_1{+}r_1b){+}...{+}u_t(p_t{+}r_tb)$ ve buradan $x-(u_1p_1{+}...{+}u_tp_t) = (u_1r_1{+}...{+}u_tr_t)b$'dir. Böylece $(u_1r_1{+}...{+}u_tr_t) \in K$ olup buradan $x \in Rp_1 + ... + Rp_t + Kb$ ve $P = Rp_1 + ... + Rp_t + Kb$'dir. Bu ise P'nin sonlu üretilmemiş olmasıyla çelişir. O halde $a \in P$ ve P, R'nin sol O-asal idealidir. □

Teorem 3.36 ile aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.37. *R bir halka olsun. Eğer R'nin sağ ideal olmayan her sol O-asal ideali sonlu üretilmiş ise R sol idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlar.*

İspat. R'de her sol O-asal ideali sonlu üretilmiş olsun. Şu kümeyi oluşturalım:

$$\Omega = \{I_i : I_i,\ R\text{'nin sonlu üretilmemiş sol ideali}\}$$

$\Omega \neq \emptyset$ olsun. O halde $I_i \in \Omega$ olmak üzere $J = \cup I_i$, R'nin sonlu üretilmemiş sol idealidir ve J, Ω için bir üst sınırdır. Zorn önteorem ile Ω'nın maksimal bir P elemanı vardır. Önteorem 3.26 ile P, R'nin sol O-asal idealidir. Bu ise $P \in \Omega$ olması ile çelişir. Böylece R, sol idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlar. □

Bu, sol O-asal idealler için Cohen Teoreminin değişmeli olmayan halkalar üzerindeki bir genellemesi sonucuna ulaştırır.

Sonuç 3.38. *(Sol O-asal idealler için Cohen Teoremi) R bir halka olsun. Eğer R'nin her sol O-asal ideali sonlu üretilmiş ise R sol Noetherian halkadır.*

Şimdiki teorem, belli bir koşul altında R'deki herhangi sol O-radikal idealin sonlu tane sol O-asal ideallerin kesişimi olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.39. *R, sol O-radikal idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan bir halka olsun. O halde R'deki herhangi sol O-radikal ideal, sonlu tane sol O-asal ideallerin kesişimidir. Ek olarak R'deki herhangi sol ideal, sonlu tane sol O-asal idealin kesişimidir.*

İspat. R'deki sol O-radikal ideal, sonlu tane sol O-asal ideallerin kesişimi olmasın ve $I = O\text{-}rad_R(I)$ sol O-radikal ideali bu şartı sağlayan idealler arasında maksimal olsun. O halde I, sol O-asal değildir ve böylece $\mathbb{I}_R(I) \neq I$'dır. $aRb \subseteq I$ olacak şekilde $a \in R\backslash I$ ve $b \in \mathbb{I}_R(I)\backslash I$ alalım. J, $I + Ra$'nın sol O-radikali ve K, $I + Rb$'nin sol O-radikali olsun. I maksimal olduğundan J ve K, sonlu tane sol O-asal idealin kesişimi şeklinde ifade edilebilir. $I = J \cap K$ olduğunu göstererek çelişki elde edeceğiz.

$x \in J \cap K$ olsun. $J = O\text{-}rad_R(I + Ra)$ ve $K = O\text{-}rad_R(I + Rb)$ olup buradan $I + Ra \subseteq W_R(I + Ra)$ ve $I + Rb \subseteq W_R(I + Rb)$'dir O halde x hem $I + Ra$ hem de $I + Rb$ üzerinde güçlü nilpotent elemandır. Eğer $T = \{a_i : a_{i+1} \in a_i R a_i$ ve $a_0 = x,\ i \in \mathbb{N}\}$ ise $a_n \in (I + Ra) \cap T$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır ve her $t \geq n$ için $a_t \in (I+Ra)\cap T$'dir. Benzer şekilde $a_m \in (I+Rb)\cap T$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır ve her $v \geq m$ için $a_v \in (I + Rb) \cap T$'dir. $n \leq m$ varsayalım. $l, k \in R$ için $a_{m+1} = l a_n k a_m \in T$'dir ve böylece $a_{m+1} \in T \cap ((I + Ra)(I + Rb)) = T \cap I$'dır. O halde $a_{m+1} \in I$ ve I, sol O-radikal ideal olduğundan $W_R(I) = O\text{-}rad_R(I) = rad_R(I) = I$ olup $x \in I$'dır. Bu ise I'nın sonlu tane sol O-asal ideallerin kesişimi olmaması varsayımı ile çelişir. Sonuç olarak R'deki herhangi sol O-radikal ideal, sonlu tane sol O-asal idealin kesişimidir. □

3.3. O-ASAL ALT MODÜL

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe kullanılan tüm halkalar birimli ve tüm modüller birimli sol modül olarak düşünülecektir. R birimli bir halka ve M birimli sol R-modül olarak alınacaktır.

Bu bölümde modüllerin yapısı, sadece sol O-asal idealin modül versiyonu olmayan, aynı zamanda asal alt modülün de bir genellemesi olan O-asal alt modül yardımıyla incelenecektir. İlk olarak O-asal alt modüllerin özelliklerine çalışılacak ve bu sınıf ile bilinen diğer asal alt modül sınıfları arasındaki ilişkiler incelenecektir. O-asal alt modüller ile bilinen diğer asal alt modül sınıflarının farklı olduğunu vurgulamak amacıyla bir örnek verilecektir (Önteorem 3.41). M sonlu üretilmiş sol R-modül olsun. N, M'nin alt modülü ve
$K = \{a_i \in R\backslash\{0_R\} : a_0 = a \text{ ve } a_{i+1} \in a_i R a_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq R$ olmak üzere
$N \cap Km = \emptyset$ olsun. O halde $P \cap Km = \emptyset$ olacak şekilde N'yi içeren M'nin
O-asal alt modülü P'nin var olduğu gösterilecektir (Önerme 3.49). Bu sonuç kullanılarak belli koşullar altında M modülünün N alt modülünü kapsayan tüm
O-asal alt modüllerinin kesişimi olan $O\text{-}rad_M(N)$'nin elemanları karakterize edilecektir (Teorem 3.51). Son olarak devirli M modülü O-radikal alt modüller üzerinde artan zincir koşulunu sağlıyorsa M'nin O-radikal alt modülü N'nin sonlu tane O-asal alt modülün kesişimi olduğu gösterilecektir (Teorem 3.54).

3.3.1. O-asal Alt Modül

Bir önceki bölümde halka için yapılanların modül versiyonu üzerine çalışılacaktır. İlk olarak O-asal alt modül kavramını tanıtarak bu bölüme başlayalım.

Tanım 3.40. *R bir halka, M sol R-modül ve P, M'nin öz alt modülü olsun.
$(P : m)Rb \subseteq (P : m)$ ve $aRbm \subseteq P$ olacak şekilde R'nin a,b elemanları ve M'nin m elemanı için $am \in P$ veya $bm \in P$ ise P'ye M'nin O-asal alt modülü denir.*

M'nin her asal alt modülü O-asal alt modüldür. Her $m \in R\backslash I$ için $I = (I : m)$ olacak şekilde I, R'nin bir sol ideali ise I, sol R-modül R'nin O-asal alt modülüdür ancak ve ancak I, R'nin sol O-asal idealidir. Şimdi $m \in M$ olmak üzere
$\Omega_m(P) = (P : m) = \{r \in R : rm \in P\}$ kümesini oluşturalım. Açıkça $\Omega_m(P)$, R'nin sol idealidir. Ayrıca şu da gözlemlenebilir: $\Omega_m(P) = R$'dir ancak ve ancak $m \in P$'dir.

P, M'nin alt modülü ve $f : M \to M^*$ bir R-modül homomorfizması olsun. O halde $m \in M$ için $\Omega_m(P) \subseteq \Omega_{f(m)}(f(P))$'dir. Eğer $\text{Çek} f \subseteq P$ ise bu kapsamanın tersi de doğrudur.

Aşağıdaki önteorem ile aynı zamanda asal alt modül olmayan fakat O-asal alt modül olan bir örnek de verilmiş olur.

Önteorem 3.41. *R asal bir halka, $M = R \oplus R$ sol R-modül ve P, R'nin asal ideali olsun. O halde $N = 0 \oplus P$, M'nin O-asal alt modülüdür fakat asal alt modülü* *değildir.*

İspat. N, M'nin alt modülü olmak üzere $rRm \subseteq N$ olacak şekilde $r \in P$ ve $m = (0,1) \in M$ olsun. Açıkça $m \notin N$ ve $rM \nsubseteq N$'dir. Sonuç olarak N, M'nin asal alt modülü değildir.

Şimdi N'nin O-asal alt modül olduğunu gösterelim.

$xRy(a,b) \subseteq N$ ve $\Omega_{(a,b)}(N)Ry \subseteq \Omega_{(a,b)}(N)$ olacak şekilde x,y,a,$b \in R$ olsun. Böylece her $t \in R$ için $xtya = 0$ ve $xtyb \in P$'dir. O halde aşağıdaki durumlar vardır:

$i)$ Eğer $x = 0$ ise $x(a,b) \in N$'dir.

$ii)$ Eğer $y = 0$ ise $y(a,b) \in N$'dir.

$iii)$ Eğer hem x hem de y sıfır değil ise R asal halka ve $xRyb \subseteq P$olduğundan $a = 0$'dır. $P \in Spec(R)$ olduğundan $x \in P$ veya $yb \in P$'dir.

Eğer $x \in P$ ise $x(0,b) \in N$'dir.

Eğer $yb \in P$ ise $y(0,b) \in N$'dir. O halde N, M'nin O-asal alt modülüdür. □

M değişmeli bir halka üzerinde bir modül ve P, M'nin alt modülü olsun. P, M'nin asal alt modülü iken $(P : M)$, R'nin asal ideali olmasına rağmen $(P : M)$, R'nin asal ideali iken P, M'nin asal alt modülü olmak zorunda değildir. Bu yüzden çoğu makale "$(P : M)$, R'nin asal ideali iken P, M'nin ne zaman asal alt modülü olur ? " açık problemini ele almıştır.

Aşağıdaki önteorem, sol O-asal ideal ile O-asal alt modül arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Önteorem 3.42. *M sol R-modül ve P, M'nin alt modülü olsun. O halde P, M'nin O-asal alt modülüdür ancak ve ancak $m \in M \backslash P$ için $\Omega_m(P)$, R'nin sol O-asal idealidir.*

İspat. $(:\Rightarrow)$ P, M'nin O-asal alt modülü olsun.

$\Omega_m(P)Rb \subseteq \Omega_m(P)$ ve $aRb \subseteq \Omega_m(P)$ olacak şekilde $a \in R$ ve $b \in R\backslash\Omega_m(P)$ alalım. O halde $aRbm \subseteq P$ ve P, M'nin O-asal alt modülü olduğundan $a \in \Omega_m(P)$'dir.

$(\Leftarrow:)$ $m \in M\backslash P$ için $\Omega_m(P)$, R'nin sol O-asal ideali olsun.

$\Omega_m(P)Rb \subseteq \Omega_m(P)$ ve $aRbm \subseteq P$ olacak şekilde $a \in R$ ve $b \in R\backslash\Omega_m(P)$ alalım. O halde $aRb \subseteq \Omega_m(P)$ ve $\Omega_m(P)Rb \subseteq \Omega_m(P)$'dir. $\Omega_m(P)$, R'nin sol O-asal ideali olduğundan $am \in P$'dir. □

Önteorem 3.43. *M sol R-modül ve P, M'nin alt modülü olsun. Eğer $0 \neq f \in End_M(M/P)$ birebir ise P, M'nin O-asal alt modülüdür.*

İspat. $aRbm \subseteq P$ ve $\Omega_m(P)Rb \subseteq \Omega_m(P)$ olacak şekilde $a, b \in R$ ve $m \in M$ olsun. Eğer $a \notin \Omega_m(P)$ ise $f(m+P) = am+P$ olacak şekilde $f \in End_M(M/P)$ alalım. O halde $f(bm+P) = 0$'dır. Sonuç olarak $b \in \Omega_m(P)$'dir. □

Aşağıdaki önerme O-asal alt modülün epimorfizma altında korunduğunu göstermektedir.

Önerme 3.44. *M, M^* sol R-modül ve P, M'nin alt modülü olsun. $\varphi : M \to M^*$ R-modül epimorfizması ve $Çek\varphi \subseteq P$ olsun. O halde P, M'nin O-asal alt modülüdür ancak ve ancak $\varphi(P)$, M^*'ın O-asal alt modülüdür.*

İspat. (:⇒) P, M'nin O-asal alt modülü olsun.

$aRb\varphi(m) \subseteq \varphi(P)$ ve $\Omega_{\varphi(m)}(\varphi(P))Rb \subseteq \Omega_{\varphi(m)}(\varphi(P))$ olacak şekilde a, $b \in R$, $m \in M$ ve $\varphi(m) \in M^*$olsun. $\varphi(aRbm) \subseteq \varphi(P)$ ve $Çek\varphi \subseteq P$ olduğundan $aRbm \subseteq P$ ve $\Omega_m(P)Rb \subseteq \Omega_m(P)$'dir. Hipotez ile $a \in \Omega_m(P)$ veya $b \in \Omega_m(P)$'dir. Böylece $\varphi(am) \in \varphi(P)$ veya $\varphi(bm) \in \varphi(P)$'dir. Sonuç olarak $\varphi(P)$, M^*'ın O-asal alt modülüdür.

(⇐:) $\varphi(P)$, M^*'ın O-asal alt modülü olsun.

$aRbm \subseteq P$ ve $\Omega_m(P)Rb \subseteq \Omega_m(P)$ olacak şekilde $a, b \in R$ ve $m \in M$ olsun. Böylece $aRb\varphi(m) \subseteq \varphi(P)$ ve $\Omega_{\varphi(m)}(\varphi(P))Rb \subseteq \Omega_{\varphi(m)}(\varphi(P))$'dir. Hipotez ile $\varphi(am) \in \varphi(P)$ veya $\varphi(bm) \in \varphi(P)$'dir. $Çek\varphi \subseteq P$ olduğundan $am \in P$ veya $bm \in P$'dir. □

Önerme 3.44'ten aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 3.45. *R bir halka ve M sol R-modül olsun. O halde P, M'nin O-asal alt modülüdür ancak ve ancak her $N \subseteq P \subseteq M$ olacak şekilde N alt modülü için P/N, R-modül M/N'nin O-asal alt modülüdür.*

3.3.2. *O*-radikal alt modül

Literatürde iyi bilinen, bir modülün radikali tanımına benzer şekilde O-asal alt modülün radikali kavramını tanıtalım.

Tanım 3.46. *M sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. N'yi içeren M'nin tüm O-asal alt modüllerinin kesişimine N alt modülünün O-radikali denir ve $O\text{-}rad_M(N)$ ile gösterilir. Eğer $O\text{-}rad_M(N) = N = W_M(N)$ ise N'ye M'nin O-radikal alt modülü denir.*

Teorem 3.31'de benzeri ifade edilen ve onun O-asal alt modül versiyonu olan aşağıdaki teoremi ispatsız ifade edelim.

Teorem 3.47. *M sonlu üretilmiş sol R-modül, N ve L, M'nin alt modülleri olsun. O halde $O\text{-}rad_M(N) + O\text{-}rad_M(L) = M$'dir ancak ve ancak $N + L = M$'dir.*

Şimdiki önerme O-asal alt modülün çarpımsal küme ile bağlantısını ifade etmektedir.

Önerme 3.48. *M sonlu üretilmiş sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. $m \in M$ ve $K \subseteq R$ bir çarpımsal küme olmak üzere $N \cap Km = \emptyset$ olsun. O halde $P \cap Km = \emptyset$ olacak şekilde M'nin N'yi içeren bir O-asal alt modülü P vardır.*

İspat. $N \subseteq L$ ve L, M'nin alt modülü olmak üzere Ψ kümesini şu şekilde tanımlayalım:

$$\Psi = \{L : L \cap Km = \emptyset \text{ veya } (L : M) \cap K = \emptyset\}.$$

Ψ küme kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı kümedir. Aynı zamanda şunu da gözlemleyebiliriz: $L \cap Km = \emptyset$ ise $(L : M) \cap K = \emptyset$'tur.

Ψ'den Λ zinciri alalım. O halde $A = \bigcup\limits_{A_i \in \Lambda} A_i$ ve böylece $A \in \Psi$'dir. Zorn önteorem ile Ψ'nin maksimal bir P elemanı vardır.

$n \in M \backslash P$, $a \in R \backslash \Omega_n(P)$ ve $b \in R \backslash \Omega_n(P)$ için $\Omega_n(P)Rb \subseteq \Omega_n(P)$ olsun. $aRbn \nsubseteq P$ olduğunu göstermek istiyoruz. P, Ψ'de maksimal olduğundan $((P : M) + Ra) \cap K \neq \emptyset$ ve $(P + Rbn) \cap Km \neq \emptyset$ olur. $l \in ((P : M) + Ra) \cap K$ ve $km \in (P + Rbn) \cap Km$ olsun. $q \in (P : M)$, t, $d \in R$, $k \in K$ ve $p \in P$ olmak üzere $l = q + da$ ve $km = p + tbn$'dir. K çarpımsal olduğundan $lk \in K$'dır. O halde $lkm = (q + da)(p + tbn) = qp + qtbn + dap + datbn \in Km$ olup $qp + qtbn + dap \in P$ ve $P \cap Km = \emptyset$ olduğundan $datbn \notin P$'dir. Sonuç olarak $aRbn \nsubseteq P$'dir. □

Aşağıdaki önerme O-asal alt modül ile modülün bir elemanına ait dizisi arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Önerme 3.49. *M sonlu üretilmiş sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. $m \in M$ ve $K = \{a_i \in R : a_0 = a \text{ ve } a_{i+1} \in a_i R a_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq R$ olmak üzere $N \cap Km = \emptyset$ olsun. O halde $P \cap Km = \emptyset$ olacak şekilde M'nin N'yi içeren O-asal alt modülü P vardır.*

İspat. $N \subseteq L$ ve L, M'nin alt modülü olmak üzere Ψ kümesini şu şekilde tanımlayalım:

$$\Psi = \{L : L \cap Km = \emptyset \text{ veya } (L : M) \cap K = \emptyset\}.$$

Λ, Ψ'de bir zincir olsun. O halde $A = \bigcup\limits_{A_i \in \Lambda} A_i$ ve böylece $A \in \Psi$'dir. Zorn önteorem ile Ψ'nin maksimal bir P elemanı vardır.

$n \in M \backslash P$, $r_1 \in R \backslash \Omega_n(P)$ ve $r_2 \in R \backslash \Omega_n(P)$ için $\Omega_n(P)Rr_2 \subseteq \Omega_n(P)$ olsun. P, Ψ'de maksimal olduğundan $(P+Rr_2n) \cap Km \neq \emptyset$ ve $[(P:M)+Rr_1] \cap K \neq \emptyset$ olur. $k_am \in (P+Rr_2n) \cap Km \neq \emptyset$ ve $k_b \in [(P:M)+Rr_1] \cap K \neq \emptyset$ olsun. $a \geq b$ varsayalım. $q \in (P:M)$, t, $d \in R$ ve $p \in P$ olmak üzere $k_b = q + dr_1$ ve $k_am = p + tr_2n$'dir. Önerme 3.33'ün ispatına benzer yöntemle $k_{a+1} = xk_byk_a \in K$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır ve böylece

$$\begin{aligned} k_{a+1}m &= xk_byk_am = x(q+dr_1)y(p+tr_2n) \\ &= xqyp + xqytr_2n + xdr_1yp + xdr_1ytr_2n \in Km \end{aligned}$$

dir. $xqyp + xqytr_2n + xdr_1yp \in P$ ve $P \cap Km = \emptyset$ olduğundan $xdr_1ytr_2n \notin P$'dir. Sonuç olarak $r_1Rr_2n \nsubseteq P$'dir. □

Şimdiki önteorem O-$rad_M(N)$ veya M devirli ise O-asal alt modüllerin kesişiminin, güçlü nilpotent elemanlar tarafından üretilen alt modülde kapsandığını göstermektedir.

Önteorem 3.50. *M sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. Eğer O-$rad_M(N)$ veya M devirli ise O-$rad_M(N) \subseteq W_M(N)$'dir.*

İspat. $m \in M$ için O-$rad_M(N) = Rm$ olsun. $a \in R$ olmak üzere $am \in O$-$rad_M(N)$ fakat am, N üzerinde güçlü nilpotent eleman olmasın. O halde $N \cap Km = \emptyset$ olacak şekilde $K = \{a_i \in R : a_0 = a \text{ ve } a_{i+1} \in a_iRa_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq R$ vardır. Önerme 3.49 ile $P \cap Km = \emptyset$ olacak şekilde N'yi içeren M'nin O-asal alt modülü P vardır. Bu ise $am \in O$-$rad_M(N)$ ile çelişir. O halde O-$rad_M(N) \subseteq W_M(N)$'dir.

$m \in M$ için $M = Rm$ olsun. $a \in R$ olmak üzere $am \in O$-$rad_M(N)$ fakat am, N üzerinde güçlü nilpotent eleman olmasın. $N \cap Km = \emptyset$ olacak şekilde $K = \{a_i \in R : a_0 = a \text{ ve } a_{i+1} \in a_iRa_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq R$ vardır. Önerme 3.49 ile $P \cap Km = \emptyset$ olacak şekilde N'yi içeren M'nin O-asal alt modülü P vardır. Bu ise $am \in O$-$rad_M(N)$ ile çelişir. O halde O-$rad_M(N) \subseteq W_M(N)$'dir. □

Aşağıdaki önteoremin şartlarından birinin sağlanması durumunda Önteorem 3.50'deki kapsamanın tersi de doğrudur.

Önteorem 3.51. *M sol R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. Eğer O-$rad_M(N)$ veya M devirli ve aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa $W_M(N) = O$-$rad_M(N)$'dir.*

1) *P, M'nin O-asal alt modülü olmak üzere $xam \notin P$ iken $axam \notin P$'dir.*

2) *Her O-asal alt modül P maksimal alt modüldür.*

İspat. $W_M(N) \subseteq O$-$rad_M(N)$ olduğunu gösterelim. Diğer kapsama Önteorem 3.50 de gösterildi.

$am \in W_M(N)$ fakat $am \notin O\text{-}rad_M(N)$ olsun. O halde N'yi içeren M'nin bir O-asal alt modülü P vardır ve $am \notin P$'dir. O-asal alt modül P için iki durum vardır:

a) $\Omega_m(P)Ra \subseteq \Omega_m(P)$ olsun.

$aRam \nsubseteq P$ olduğundan $a_1m \notin P$ olacak şekilde sıfırdan farklı $a_1 = at_0a \in aRa$ vardır. O halde $\Omega_m(P)Ra_1 \subseteq \Omega_m(P)Ra \subseteq \Omega_m(P)$ ve böylece $a_1Ra_1m \nsubseteq P$'dir. Dolayısıyla $a_2m \notin P$ olacak şekilde sıfırdan farklı $a_2 = a_1t_1a_1 \in a_1Ra_1$ vardır. Bu yöntem kullanılarak $a_im \notin P$ olacak şekilde a'nın $\eta(a) = \{a_i : a_{i+1} \in a_iRa_i$ ve $a_0 = a,\ i \in \mathbb{N}\}$ dizisi elde edilir fakat her $i \in \mathbb{N}$ için $a_im \notin P$ olduğundan $\eta(a)m \cap P = \emptyset$ olur. O halde am, M'nin N üzerinde güçlü nilpotent elemanı değildir. Bu ise $am \in W_M(N)$ olmasıyla çelişir. O halde $W_M(N) \subseteq O\text{-}rad_M(N)$'dir.

b) $\Omega_m(P)Ra \nsubseteq \Omega_m(P)$ olsun.

i) (1)'deki koşul sağlansın. $(p_0x)\,am \notin P$ olacak şekilde $x \in R$ ve $p_0 \in \Omega_m(P)$ elemanları vardır ve böylece (1) ile $a_1m = a\,(p_0x)\,am \notin P$ elemanını seçebiliriz.

ii) (2)'deki koşul sağlansın. O halde P, M'nin maksimal alt modülü ve $P + Ram = M$'dir. Böylece $a \in R$ için $aM = aP + aRam$ ve böylece $am - ap = alam \notin P$'dir. O halde $a_1m = atam$ elemanını seçebiliriz.

$\Omega_m(P)PRa_1 \nsubseteq \Omega_m(P)$ olduğundan b'deki yöntem ile $t \in R$ olmak üzere $a_2m = a_1ta_1m \notin P$ elemanını seçebiliriz.

Sonuç olarak a'nın $\eta(a) = \{a, a_1, a_2, ... : a_{i+1} \in a_iRa_i$ ve $a_0 = a,\ i \in \mathbb{N}\}$ dizisi vardır fakat her $i \in \mathbb{N}$ için $a_im \notin P$ olduğundan $\eta(a)m \cap P = \emptyset$ olur. O halde am, M'nin N üzerinde güçlü nilpotent elemanı değildir. Bu ise $am \in W_M(N)$ olmasıyla çelişir. O halde $W_M(N) \subseteq O\text{-}rad_M(N)$'dir. □

Aşağıdaki teorem bir alt modül sonlu üretilmemiş alt modüller arasında maksimal ise bunun O-asal alt modül olduğunu gösterir.

Teorem 3.52. *R sol Noetherian halka, M sol R-modül ve P, M'nin alt modülü olsun. P, M'nin sonlu üretilmemiş tüm alt modülleri arasında maksimal olsun. O halde P, M'nin O-asal alt modülüdür.*

İspat. $aRbm \subseteq P$ ve $\Omega_m(P)Rb \subseteq \Omega_m(P)$ olacak şekilde $m \in M$, $\Omega_m(P) \neq R$, $a \in R \backslash \Omega_m(P)$ ve $b \in R \backslash \Omega_m(P)$ olsun. O halde $P + Rbm \neq P$ ve $P + Rbm$ sonlu üretilmiştir. $p_i \in P$ ve $r_i \in R$ olmak üzere $\{p_1 + r_1bm, ..., p_t + r_tbm\}$, $P + Rbm$'nin üreteç kümesi olsun.

$K = \{y \in R : ybm \in P\}$ kümesini tanımlayalım. R sol Noetherian halka olduğundan K, R'nin sonlu üretilmiş sol idealidir.

$x \in P \subsetneq P + Rbm$ alalım. $u_i \in R$ için $x = u_1(p_1 + r_1bm) + ... + u_t(p_t + r_tbm)$ ve böylece

$$x - (u_1p_1 + ... + u_tp_t) = (u_1r_1 + ... + u_tr_t)bm$$

dir. O halde $(u_1r_1 + ... + u_tr_t) \in K$'dır. Buradan $x \in Rp_1 + ... + Rp_t + Kbm$ olup $P \subseteq Rp_1 + ... + Rp_t + Kbm$'dir. Diğer taraftan $Rp_1 + ... + Rp_t + Kbm \subseteq P$'dir. Sonuç olarak $P = Rp_1 + ... + Rp_t + Kbm$ olur. Bu ise P'nin sonlu üretilmemiş olmasıyla çelişir. O halde P, M'nin O-asal alt modülüdür. □

M'nin her asal alt modülü sonlu üretilmiş ise M alt modüller üzerinde artan zincir koşulunu sağlar. O halde aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 3.53. *M'nin her O-asal alt modülü sonlu üretilmiş ise M alt modüller üzerinde artan zincir koşulunu sağlar.*

İspat. M'nin her O-asal alt modülü sonlu üretilmiş olsun. Ω kümesini şu şekilde tanımlayalım:

$$\Omega = \{N_i : N_i,\ M\text{'nin sonlu üretilmemiş alt modülü}\}.$$

$\Omega \neq \emptyset$ olsun. O halde $J = \cup N_i$, M'nin sonlu üretilmemiş alt modülü ve J, Ω'de bir üst sınırdır. Zorn önteorem ile Ω'nın maksimal bir P elemanı vardır. Teorem 3.52 ile P, M'nin O-asal alt modülüdür. Bu ise P'nin sonlu üretilmiş olmasıyla çelişir. O halde $\Omega = \emptyset$ olup M alt modüller üzerinde artan zincir koşulunu sağlar. □

Aşağıdaki teorem O-asal alt modüller için Kaplansky teoreminin bir genellemesi olarak kabul edilebilir.

Teorem 3.54. *M, O-radikal alt modüller üzerinde artan zincir koşulunu sağlayan devirli sol R-modül olsun. O halde M'deki herhangi bir O-radikal alt modül, sonlu tane O-asal alt modülün kesişimidir. Ek olarak M'deki herhangi alt modül sonlu tane O-asal alt modülün kesişimidir.*

İspat. $m \in M$ olmak üzere $M = Rm$ ve P, M'nin alt modülü ise $P = \Omega_m(P)m$'dir. M'deki herhangi bir O-radikal alt modül sonlu tane O-asal alt modülün kesişimi olmasın ve bu şartı bozanlar arasında P alt modülü maksimal olsun. Açıkça P, O-asal alt modül değildir. $aRbm \subseteq P$ ve $\Omega_m(P)Rb \subseteq \Omega_m(P)$ olacak şekilde $\Omega_m(P) \neq R$, $a \in R \backslash \Omega_m(P)$ ve $b \in R \backslash \Omega_m(P)$ elemanlarını alalım. J, $\Omega_m(P) + Ra$'nın sol O-radikal ideali ve K, $P + Rbm$'nin O-radikal alt modülü olsun. P maksimal, $bm \notin P$ ve $P \subsetneq P + Rbm$ olduğundan K, sonlu tane O-asal alt modülün kesişimi olarak ifade edilebilir. $p \in P = \Omega_m(P)m$ alalım. $p = tm$ olacak şekilde $t \in \Omega_m(P)$ vardır. O halde $p \in Jm$ olup $P \subseteq Jm$'dir. Böylece Jm sonlu tane O-asal alt modülün kesişimi olarak ifade edilebilir. $P = Jm \cap K$'ye ulaşarak bir çelişki bulmak istiyoruz.

$x \in Jm \cap K$ olsun.

O halde $K = O\text{-}rad_M(P + Rbm)$ ve $Jm = (O\text{-}rad_R(\Omega_m(P) + Ra))\, m$ olup $x \in Jm \subseteq W_R(\Omega_m(P) + Ra)m$ ve $x \in K \subseteq W_M(P + Rbm)$'dir. Böylece x hem $((\Omega_m(P) + Ra)m)$ hem de $P + Rbm$ üzerinde güçlü nilpotent elemandır.
$T = \{a_i : a_{i+1} \in a_iRa_i$ ve $a_0 = j,\, i \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $a_nm \in ((\Omega_m(P)+Ra)m)\cap Tm$ elemanı vardır ve her $t \geq n$ için $a_tm \in ((\Omega_m(P) + Ra)m) \cap Tm$'dir. Benzer şekilde $a_mm \in (P+Rbm)\cap Tm$ elemanı vardır ve her $v \geq m$ için $a_vm \in (P+Rbm)\cap Tm$'dir. $n \leq m$ varsayalım. O halde şunu gözlemleyebiliriz: $l, k \in R$ için $a_{m+1} = la_nka_m \in T$ ve $a_{m+1}m \in Tm \cap ((\Omega_m(P) + Ra)(P + Rbm))) \subseteq Tm \cap P$'dir. O halde $a_{m+1}m \in P$ olup P, O-radikal alt modül olduğundan $a_{m+1}m \in W_M(P) = P = O\text{-}rad_M(P)$'dir. Teorem 3.10 ile $W_M(P) = W_R(P : m)m = rad_R(P : m)m$ olup $x \in P$'dir. O halde $P = Jm \cap K$ olur fakat bu varsayım ile çelişir. Sonuç olarak M'deki herhangi bir O-radikal alt modül sonlu tane O-asal alt modülün kesişimidir. □

3.4. İDEALLER İLE İLİŞKİLİ ZARISKI ALT UZAY TOPOLOJİLERİ

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe kullanılan tüm halkalar birimli ve değişmeli olarak düşünülecektir.

Halkaları ve idealleri karakterize etmek için kullanılan asal ideal kavramı, asal ideallerin spektrumu üzerinde tanımlanan topolojilerin gelişmesine de yol açmıştır. Bunun bir sonucu olarak topolojiler ile cebirsel özellikler arasında birçok kullanışlı bağlantılar ispatlanmıştır (Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2014, Lu 1999). Literatürden iyi bilindiği gibi değişmeli bir halkanın nil radikalinin asal ideal olması için gerekli ve yeterli topolojik koşullar vardır (Atiyah ve MacDonald 1969). Aynı zamanda spektral uzay, modül ile ilişkili topoloji bilindiğinde modülün cebirsel özelliklerinin çalışılmasına da katkıda bulunmuş ve bu durum spektral uzayı, cebirsel geometride temel araçlardan biri yapmıştır. Genel nokta (generic point) veya Noetherian uzay bu tür çalışmalara örnektir. Ayrıca asal alt modüller üzerinde tanımlanan Zariski topolojisi birçok yazarın dikkatini çekmektedir (Lu 1999, 2010, McCasland vd 1968, 1997, Zariski ve Samuel 1975).

Bu bölümde, halkanın bir ideali için Zariski topolojisinin alt uzayı tanımlanacak ve Zariski topolojisinin açık alt uzayları ile halkanın idealleri arasındaki ilişkiler incelenecektir. Nil radikal ve halkalar için bazı karakterizasyonlar veren topolojik yapılar elde etmek için bu topolojik uzay incelenecektir. Aynı zamanda Zariski topolojisinin alt uzayının yarı-kompakt, yoğun, indirgenemez veya Noetherian uzay olması için koşulları belirlememize olanak sağlayacak bazı cebirsel yapılara da yoğunlaşılacaktır. İlk olarak sonlu üretimiş ideal ile yarı-kompakt kavramları arasındaki ilişkiler incelenecektir. R halkasının I idealinin tümleyen (complement) Zariski topolojisi olarak tanımlanan $\mathcal{X}_I$ yarı-kompakt iken $r_i \in R$ olmak üzere $\sqrt{I} = \sqrt{Rr_1 + ... + Rr_n}$ olduğu gösterilecektir (Teorem 3.58). Ayrıca $\mathcal{X}_I$'nın yarı-kompakt olması için gerekli ve yeterli cebirsel şart ifade edilecektir (Teorem 3.58). Radikal idealin bir genellemesi olan $\mathcal{N}_I(0)$ ideali tanımlanacak ve bu idealin temel özellikleri belirtilecektir (Tanım 3.59 ve Önerme 3.60). Fakat indirgenemezlik için bir karakterizasyon bulmada, bu idealin cebirsel özelliklerinden ziyade onun topolojik özellikleriyle daha fazla ilgilenilecektir. R bir halka olsun. I, R'nin öz ideali ve $\sqrt{I} \neq \sqrt{0}$ olsun. Teorem 3.61'de şu gösterilecektir: $\mathcal{X}_I$ indirgenemezdir ancak ve ancak $\mathcal{N}_I(0)$, R'nin asal idealidir. Ayrıca $\mathcal{X}_I$'nın Noetherian olması için bazı cebirsel gerekli ve yeterli şartlar verilecektir (Teorem 3.62 ve Teorem 3.63).

Halka için karakterizasyonlar belirlenmesine yardımcı olacak bazı cebirsel ve topolojik yapılar bulmak için halkanın idealleri ile tümleyen Zariski topolojileri arasındaki ilişkilere yoğunlaşılacaktır. Teorem 3.64'nin bir sonucu olarak şu gösterilecektir: R bir halka, I ve J, R'nin öz idealleri olsun. O halde $\mathcal{X}_I \cap \mathcal{X}_J = \emptyset$'tur ancak ve ancak $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{IJ} = \sqrt{0}$'dır (Sonuç 3.66). Teorem 3.67'de $Spec(R)$'nin indirgenemezliği üzerine odaklanılacak ve şu ispatlanacaktır: $\mathcal{X} = Spec(R)$ indirgenemezdir ancak ve ancak $R/\sqrt{0}$'ın her ideali esastır. Ayrıca açık bir alt uzayın açık bir örtüsünün olması veya yarı-kompakt olması için cebirsel gerekli ve yeterli koşullar verilecektir (Sonuç 3.71 ve Sonuç 3.72). Böylece halkanın nil radikalini karakterize etmek için hem cebirsel hem de topolojik araçlar bulunacak ve son olarak I_i, R'nin öz ideali ve $\mathcal{X}_{I_i}$ indirgenemez olmak üzere $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{I_i}$'dir ancak ve ancak $R = \sum\limits_{i=1}^{n} I_i$ ve $\mathcal{N}_{I_i}(0)$, R'nin asal ideali olduğu gösterilecektir (Teorem 3.74).

3.4.1. İdeal ile ilişkili alt uzay

Bu bölümde sıklıkla kullanılacak aşağıdaki önerme R halkasının I ideali ile ilişkili Zariski alt uzay topolojisini tanımlamaktadır.

Önerme 3.55. *R bir halka ve I, R'nin ideali olsun. $\mathcal{X}_I = Spec(R) \backslash V(I)$ ve R'nin B ideali için $\tilde{V}(B) = V(B) \backslash V(I)$ olmak üzere*

$$\Gamma_I = \left\{ \tilde{V}(B) : B,\ R\text{'nin ideali} \right\}$$

ailesi $\mathcal{X}_I$ üzerinde bir topolojik uzayın kapalı kümeler ailesidir.

İspat. B, R'nin bir ideali olmak üzere $U = \tilde{V}(B)$ olsun.

i) Eğer $B = 0$ ise $V(0) = Spec(R)$'dir. O halde

$$\tilde{V}(0) = V(0) \backslash V(I) = Spec(R) \backslash V(I) = \mathcal{X}_I$$

olup $\mathcal{X}_I \in \Gamma_I$'dır.

$(Spec(R), \Gamma)$ topolojik uzay olduğundan $V(R) = \emptyset$ ve böylece $\tilde{V}(R) = \emptyset \in \Gamma_I$'dır.

ii) $i \in \Lambda$ için B_i, R'nin ideali olmak üzere Γ_I'nın $\left\{ \tilde{V}(B_i) \right\}$ ailesini göz önüne alalım.

$$\bigcap_{i\in\Lambda} V(B_i) = V\left(\bigcup_{i\in\Lambda} B_i\right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in\Lambda} \tilde{V}(B_i) &= \bigcap_{i\in\Lambda}(V(B_i)\backslash V(I)) = \left(\bigcap_{i\in\Lambda}(V(B_i)\right)\backslash V(I)\\ &= V\left(\bigcup_{i\in\Lambda} B_i\right)\backslash V(I)\\ &= \tilde{V}\left(\bigcup_{i\in\Lambda} B_i\right) \in \Gamma_I\end{aligned}$$

dır.

iii) U_1 ve U_2, R'nin idealleri olmak üzere $\tilde{V}\,(U_1), \tilde{V}(U_2) \in \Gamma_I$ olsun. $(Spec(R), \Gamma)$ topolojik uzay olduğundan

$$V(U_1) \cup V(U_2) = V(U_1 \cap U_2)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\tilde{V}\,(U_1) \cup \tilde{V}(U_2) &= [(V(U_1) \cup V(U_2))]\backslash V(I)\\ &= [(V(U_1 \cap U_2))]\backslash V(I)\\ &= \tilde{V}(U_1 \cap U_2) \in \Gamma_I\end{aligned}$$

dır. □

Önerme 3.55'te tanımlanan topolojiye R'de I idealinin tümleyen (complement) Zariski topolojisi denir.

Şu kolayca gözlemlenebilir: $I = R$ iken $\mathcal{X}_I = Spec(R)$ ve $I = \emptyset$ iken $\mathcal{X}_I = \emptyset$'tur.

Örnek. *$R = \mathbb{Z}$, $J = 30\mathbb{Z}$ ve $I = 10\mathbb{Z}$ olsun. O halde $Spec(R) = \{p_i\mathbb{Z} : p_i \in \mathcal{P}\}$, $V(I) = \{2\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}\}$ ve $\mathcal{X}_I = \{p_i\mathbb{Z} : p_i \in \mathcal{P}\backslash \{2, 5\}\}$'tir.*

$$V(30\mathbb{Z}) = \{2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}\}$$

fakat $\tilde{V}(30\mathbb{Z}) = V(30\mathbb{Z})/V(10\mathbb{Z}) = \{3\mathbb{Z}\}$'dir. Sonuç olarak R'de I'nın tümleyen Zariski topolojisi $(\mathcal{X}, \Gamma)$ Zariski topolojisinden farklıdır.

Şimdi tümleyen Zariski topolojisi için bir taban verelim.

Teorem 3.56. *R bir halka ve I, R'nin ideali olsun. $r \in R$ olmak üzere $(\mathcal{X}_I)^r = \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(r)$ olsun. O halde $\{(\mathcal{X}_I)^r : r \in R\}$ ailesi R'de I'nın tümleyen Zariski topolojisi için bir tabandır.*

İspat. Eğer $\mathcal{X}_I = \emptyset$ ise o zaman $(\mathcal{X}_I)^r = \emptyset$ olup bu aşikar durumdur. O halde $\mathcal{X}_I \neq \emptyset$ varsayabiliriz.

$U \subseteq \mathcal{X}_I$ açık bir küme olsun. O halde J, R'nin bir ideali olmak üzere $U = \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(J) = Spec(R) \backslash (V(J) \cup V(I))$'dır. Böylece

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}\left(\bigcup_{r_i \in J} \{r_i\}\right) = \mathcal{X}_I \backslash \left(\bigcap_{r_i \in J} \tilde{V}(r_i)\right) \\ &= \bigcup_{r_i \in J} (\mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(r_i)) = \bigcup_{r_i \in J} (\mathcal{X}_I)^{r_i} \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $\{(\mathcal{X}_I)^r : r \in R\}$ ailesi R'de I'nın tümleyen Zariski topolojisi için bir tabandır. □

Aşağıdaki önerme $\mathcal{X}_I$ ile I ideali arasındaki ilişkileri belirtmektedir.

Önerme 3.57. *R bir halka ve I, R'nin ideali olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

i) $r \in R$ için $(\mathcal{X}_I)^r = \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(r) = Spec(R) \backslash (V(rI))$'dır.

ii) Her $r,s \in R$ için $(\mathcal{X}_I)^r \cap (\mathcal{X}_I)^s = (\mathcal{X}_I)^{rs}$'dir.

iii) $(\mathcal{X}_I)^r = \emptyset$'tur ancak ve ancak $rI \subseteq \sqrt{0}$'dır.

iv) Eğer r birim eleman ise $(\mathcal{X}_I)^r = \mathcal{X}_I$'dır.

v) $(\mathcal{X}_I)^r = (\mathcal{X}_I)^s$'dir ancak ve ancak $\sqrt{rI} = \sqrt{sI}$'dır.

vi) Eğer $(\mathcal{X}_I)^r = \mathcal{X}_I$ ise $\sqrt{rI} = \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\langle r \rangle}$'dir.

İspat. *i)* $(\mathcal{X}_I)^r$'nin tanımından açıktır.

ii) $P \in (\mathcal{X}_I)^r \cap (\mathcal{X}_I)^s$ olsun. O halde $P \in (\mathcal{X}_I)^r$ ve $P \in (\mathcal{X}_I)^s$'dir. Buradan $rI \nsubseteq P$ ve $sI \nsubseteq P$ olup $P \in \mathcal{X}$ olduğundan $rsI \nsubseteq P$'dir. Dolayısıyla $P \in (\mathcal{X}_I)^{rs}$ ve $(\mathcal{X}_I)^r \cap (\mathcal{X}_I)^s \subseteq (\mathcal{X}_I)^{rs}$'dir.

$P \in (\mathcal{X}_I)^{rs} = Spec(R) \backslash V(rsI)$olsun. O halde $rsI \nsubseteq P$'dir. $P \in Spec(R)$ olduğundan $r \notin P$, $s \notin P$ ve $I \nsubseteq P$'dir. O halde $P \in Spec(R) \backslash V(rI)$ ve $P \in Spec(R) \backslash V(sI)$'dır. Böylece $P \in (\mathcal{X}_I)^r$ ve $P \in (\mathcal{X}_I)^s$ olup buradan $P \in (\mathcal{X}_I)^r \cap (\mathcal{X}_I)^s$'dir. Dolayısıyla $(\mathcal{X}_I)^{rs} \subseteq (\mathcal{X}_I)^r \cap (\mathcal{X}_I)^s$'dir.

iii) $(\mathcal{X}_I)^r = \emptyset$ olsun. O halde $Spec(R) = V(rI)$'dır. Böylece R'nin her P asal ideali için $rI \subseteq P$ olup $rI \subseteq \sqrt{0}$'dır.

$rI \subseteq \sqrt{0}$ olsun. O halde R'nin her P asal ideali için $rI \subseteq P$'dir. Böylece $Spec(R) = V(rI)$ olup $(\mathcal{X}_I)^r = \emptyset$ olur.

iv) Eğer r birim eleman ise r, R'nin hiçbir asal idealinde olamaz. O halde $V(r) = \emptyset$ ve böylece $(\mathcal{X}_I)^r = \mathcal{X}_I$'dır.

v) $(\mathcal{X}_I)^r = (\mathcal{X}_I)^s$ olsun. O halde $V(rI) = V(sI)$ olup buradan $\sqrt{rI} = \sqrt{sI}$'dır.

$\sqrt{rI} = \sqrt{sI}$ olsun. O halde $V(rI) = V(sI)$ olup buradan $(\mathcal{X}_I)^r = (\mathcal{X}_I)^s$'dir.

vi) $(\mathcal{X}_I)^r = \mathcal{X}_I$ olsun. O halde $V(rI) = V(I)$'dır. O halde $\sqrt{rI} = \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\langle r \rangle}$'dir. □

Aşağıdaki teoremi vermeden önce bu teoremin ispatında bize yardımcı olacak şu özelliği verelim:

R bir halka ve I, R'nin öz ideali olsun. $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\langle \{r_i \in R : i \in \Lambda\} \rangle}$ iken $\sqrt{I} = \sqrt{\langle \{r_j : j \in \Delta\} \rangle}$ olacak şekilde Λ'nın sonlu bir alt kümesi Δ varsa I'ya $(*)$ koşulunu sağlar denir. Örnek olarak $R/\sqrt{I}$ Noetherian halka ise I, $(*)$ koşulunu sağlar.

Aşağıdaki teorem I idealine ait cebirsel bir özellik ve $\mathcal{X}_I$'ya ait topolojik bir özellik vermektedir.

Teorem 3.58. *R bir halka ve I, R'nin öz ideali olsun. $r \in R$ olmak üzere $(\mathcal{X}_I)^r = \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(r)$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

i) *Her $r \in R$ için $(\mathcal{X}_I)^r$ yarı-kompaktır.*

ii) *Eğer $\mathcal{X}_I$ yarı-kompakt ise $r_i \in R$ olmak üzere $\sqrt{I} = \sqrt{Rr_1 + ... + Rr_n}$'dir.*

iii) *Eğer I, $(*)$ koşulunu sağlarsa $\mathcal{X}_I$ yarı-kompaktır.*

İspat. *i*) r,$r_i \in R$ olmak üzere her $i \in \Lambda$ için $\{(\mathcal{X}_I)^{r_i} : i \in \Lambda\}$, $(\mathcal{X}_I)^r$'nin açık bir örtüsü olsun. O halde

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}_I)^r &= \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(r) \subseteq \bigcup_{i \in \Lambda} (\mathcal{X}_I)^{r_i} = \bigcup_{i \in \Lambda} \left(\mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(r_i) \right) \\ &= \mathcal{X}_I \backslash \left(\bigcap_{i \in \Lambda} \tilde{V}(r_i) \right) = \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V} \left(\bigcup_{i \in \Lambda} \{r_i\} \right)\end{aligned}$$

ve böylece $\tilde{V}\left(\left\langle \bigcup_{i\in\Lambda}\{r_i\}\right\rangle\right) \subseteq \tilde{V}(r) = \tilde{V}\left(\sqrt{\langle r\rangle}\right)$'dir. Buradan $\sqrt{\langle r\rangle} \subseteq \sqrt{\left\langle \bigcup_{i\in\Lambda}\{r_i\}\right\rangle}$ olur. O halde $r^n \in \left\langle \bigcup_{i\in\Lambda}\{r_i\}\right\rangle$ olacak şekilde pozitif bir n tam sayısı vardır. Böylece $z_j \in R$ olmak üzere $j \in \Delta$ için $r^n = \sum z_j r_j$ olacak şekilde sonlu bir $\Delta \subseteq \Lambda$ kümesi vardır. O halde $r^n \in \langle\{r_j : j \in \Delta\}\rangle$ ve böylece $\tilde{V}(\langle\{r_j : j \in \Delta\}\rangle) \subseteq \tilde{V}(r^n) = \tilde{V}(r)$'dir. Buradan $\bigcap_{j\in\Delta} \tilde{V}(r_j) \subseteq \tilde{V}(r)$'dir. O halde

$$\bigcup_{j\in\Delta}(\mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(r_j)) \supseteq \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(r)$$

ve

$$(\mathcal{X}_I)^r \subseteq \bigcup_{j\in\Delta}(\mathcal{X}_I)^{r_j}$$

dir. Δ sonlu bir küme olduğundan $(\mathcal{X}_I)^r$ yarı-kompakttır.

ii) $\mathcal{X}_I$ yarı-kompakt ve $I = \langle r_i : i \in \Lambda\rangle$ olsun. O halde $V(\langle\{r_i : i \in \Lambda\}\rangle) = V(I)$ ve böylece $\tilde{V}(\langle\{r_i : i \in \Lambda\}\rangle) = \emptyset$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_I &= \mathcal{X}_I \backslash \emptyset = \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}\left(\bigcup_{i\in\Lambda} r_i\right) = \mathcal{X}_I \backslash \left(\bigcap_{i\in\Lambda}\tilde{V}(r_i)\right) \\ &= \bigcup_{i\in\Lambda}\left(\mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(r_i)\right) = \bigcup_{i\in\Lambda}(\mathcal{X}_I)^{r_i} \end{aligned}$$

dir. $\mathcal{X}_I$ yarı-kompakt olduğundan $\mathcal{X}_I = \bigcup_{i=1}^{n}(\mathcal{X}_I)^{r_i} = \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(\langle r_1, r_2, ..., r_n\rangle)$ olacak şekilde sonlu bir $\Delta = \{1, 2, ...n\} \subseteq \Lambda$ kümesi vardır.
Böylece $\tilde{V}(\langle r_1, r_2, ..., r_n\rangle) = \emptyset$ olur. O halde şu iki durum vardır:

$V(\langle r_1, r_2, ..., r_n\rangle) = \emptyset$ veya $V(\langle r_1, r_2, ..., r_n\rangle) \subseteq V(I)$'dır.

Eğer $V(\langle r_1, r_2, ..., r_n\rangle) = \emptyset$ ise $I = R$ olup bu I'nın öz ideal olması ile çelişir.

O halde $V(\langle r_1, r_2, ..., r_n\rangle) \subseteq V(I)$'dır. Buradan $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\langle r_1, r_2, ..., r_n\rangle}$ ve $\sqrt{\langle r_1, r_2, ..., r_n\rangle} \subseteq \sqrt{I}$ olduğundan $\sqrt{I} = \sqrt{Rr_1 + Rr_2 + ...Rr_n}$'dir.

iii) I, $(*)$ koşulunu sağlasın.

$\{A_i : i \in \Lambda\}$, $\mathcal{X}_I$'nın açık bir örtüsü olsun. A_i, $r_i \in R$ olmak üzere $(\mathcal{X}_I)^{r_i}$ kümelerinin bir birleşimi olarak ifade edilebildiğinden her $i \in \Lambda$ için $A_i = (\mathcal{X}_I)^{r_i}$

olarak alabiliriz. O halde

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_I &\subseteq \bigcup_{i\in\Lambda}(\mathcal{X}_I)^{r_i} = \bigcup_{i\in\Lambda}\left(\mathcal{X}_I\backslash\tilde{V}(r_i)\right)\\ &= \mathcal{X}_I\backslash\left(\bigcap_{i\in\Lambda}\tilde{V}(r_i)\right) = \mathcal{X}_I\backslash\tilde{V}\left(\bigcup_{i\in\Lambda}r_i\right)\\ &= \mathcal{X}_I\backslash\tilde{V}(\{r_i : i\in\Lambda\}).\end{aligned}$$

dır. Böylece $\tilde{V}\left(\langle\{r_i : i\in\Lambda\}\rangle\right) = \emptyset$ olup şu iki durum vardır:

a) $V\left(\langle\{r_i : i\in\Lambda\}\rangle\right) = \emptyset$ olması durumu;

$\langle\{r_i : i\in\Lambda\}\rangle$'ı içeren asal ideal yoktur. Böylece $\langle\{r_i : i\in\Lambda\}\rangle = R$'dir. O halde $a_j\in R$ olmak üzere $1 = \sum_{j\in\Delta} a_j r_j$ olacak şekilde sonlu bir alt küme $\Delta\subseteq\Lambda$ vardır. Böylece $V\left(\langle\{r_j : j\in\Delta\}\rangle\right) = \emptyset$ ve

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_I &= \mathcal{X}_I\backslash\tilde{V}\left(\{r_j : j\in\Delta\}\right) = \mathcal{X}_I\backslash\left(\bigcap_{j\in\Delta}\tilde{V}(r_j)\right)\\ &= \bigcup_{j\in\Delta}\left(\mathcal{X}_I\backslash\tilde{V}(r_j)\right) = \bigcup_{j\in\Delta}(\mathcal{X}_I)^{r_j}\end{aligned}$$

dir. $\mathcal{X}_I$ sonlu tane $(\mathcal{X}_I)^{r_j}$ tarafından örtüldüğünden $\mathcal{X}_I$ yarı-kompakttır.

b) $V\left(\langle\{r_i : i\in\Lambda\}\rangle\right) \subseteq V(I)$ olması durumu;

$\sqrt{I}\subseteq\sqrt{\langle\{r_i : i\in\Lambda\}\rangle}$'dır. $(*)$ koşulu ile $\sqrt{I} = \sqrt{\langle\{r_j : j\in\Delta\}\rangle}$ olacak şekilde sonlu bir $\Delta\subseteq\Lambda$ kümesi vardır. O halde $V(I) = V\left(\langle\{r_j : j\in\Delta\}\rangle\right)$ ve böylece $\tilde{V}\left(\langle\{r_j : j\in\Delta\}\rangle\right) = \emptyset$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_I &= \mathcal{X}_I\backslash\tilde{V}(\{r_j : j\in\Delta\})) = \mathcal{X}_I\backslash\left(\bigcap_{j\in\Delta}\tilde{V}(r_j)\right)\\ &= \bigcup_{j\in\Delta}\left(\mathcal{X}_I\backslash\tilde{V}(r_j)\right) = \bigcup_{j\in\Delta}(\mathcal{X}_I)^{r_j}\end{aligned}$$

dir. $\mathcal{X}_I$ sonlu tane $(\mathcal{X}_I)^{r_j}$ tarafından örtüldüğünden $\mathcal{X}_I$ yarı-kompakttır. □

Aşağıdaki tanım halkanın radikal idealinin bir genellemesi olan yeni bir ideal sınıfını tanıtmaktadır.

Tanım 3.59. *R bir halka ve I, R'nin ideali olsun. R'nin I'yı içermeyen ama R'nin bir T idealini içeren tüm asal ideallerin kesişimine I-radikal ideal denir ve $\mathcal{N}_I(T)$ ile gösterilir.*

Eğer $I = R$ ise $\mathcal{N}_I(T)$, T idealinin radikaline eşittir.

Aşağıdaki önerme bu I-radikal idealin bazı cebirsel özelliklerini vurgulamaktadır.

Önerme 3.60. *R bir halka ve I, R'nin öz ideali olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

i) $\mathcal{N}_I(T)$, R'nin idealidir.

ii) $K \subseteq I \subseteq T$ olacak şekilde K ve T, R'nin idealleri olmak üzere $\mathcal{N}_{I/K}(T/K) = \mathcal{N}_I(T)/K$'dır.

iii) $\mathcal{N}_I(0) = \mathcal{N}_{\sqrt{I}}(0)$'dır.

İspat. *i)* $\mathcal{N}_I(T)$'nın tanımı ile açıktır.

ii) $I \nsubseteq Q_i$ ve Q_i, R'nin asal ideali olmak üzere $\mathcal{N}_I(T) = \bigcap_{T\subseteq Q_i} Q_i$ olsun. O halde $T/K \subseteq Q_i/K$ ve Q_i/K, R/K'nın asal ideali ve $I/K \nsubseteq Q_i/K$'dır. Böylece $\mathcal{N}_I(T)/K = \left(\bigcap_{T\subseteq Q_i} Q_i\right)/K = \bigcap_{T/K\subseteq Q_i/K} (Q_i/K) = \mathcal{N}_{I/K}(T/K)$'dır.

iii) I'yı içermeyen bir asal ideal $\sqrt{I}$'yı da içeremeyeceğinden $\mathcal{N}_I(0) = \mathcal{N}_{\sqrt{I}}(0)$ dır. □

Aşağıdaki teorem $\mathcal{N}_I(0)$ ile $\mathcal{X}_I$ arasında bir ilişiki vermektedir.

Teorem 3.61. *R bir halka olsun. I, R'nin öz ideali ve $\sqrt{I} \neq \sqrt{0}$ olsun. $\mathcal{X}_I$ indirgenemezdir ancak ve ancak $\mathcal{N}_I(0)$, R'nin asal idealidir.*

İspat. ($\Leftarrow$:) $\mathcal{N}_I(0)$, R'nin asal ideali ve K, $\mathcal{X}_I$'nın boştan farklı açık bir alt kümesi olsun. O halde E, R'nin ideali olmak üzere
$K = \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(E) = Spec(R) \backslash (V(I) \cup V(E)) = Spec(R) \backslash V(IE)$'dir.

$P \in K$ alalım. O halde $P \notin (V(E) \cup V(I))$ ve buradan $I \nsubseteq P$ ve $E \nsubseteq P$'dir. Böylece $\mathcal{N}_I(0) \subseteq P$ ve $E \nsubseteq \mathcal{N}_I(0) \subseteq P$'dir. Buradan $\mathcal{N}_I(0) \notin V(E)$ ve $\mathcal{N}_I(0)$'ın tanımı ile $\mathcal{N}_I(0) \notin V(I)$'dır. O halde $\mathcal{N}_I(0) \in K$'dır. Böylece $\mathcal{X}_I$'nın herhangi boş olmayan açık alt kümesi $\mathcal{N}_I(0)$'ı içerir. Sonuç olarak $\mathcal{X}_I$ indirgenemezdir.

(:$\Rightarrow$) $\mathcal{X}_I$ indirgenemez olsun. $\mathcal{N}_I(0)$, R'nin asal ideali olmasın. O halde $ab \in \mathcal{N}_I(0)$ ve $a, b \in R \backslash \mathcal{N}_I(0)$ olacak şekilde R'nin a ve b elemanları vardır. $\sqrt{I} \neq \sqrt{0}$ ve $a \in R \backslash \mathcal{N}_I(0)$ olduğundan $\tilde{V}(a) \neq \emptyset$ ve $\tilde{V}(a) \neq \mathcal{X}_I$'dır. Dolayısıyla $(\mathcal{X}_I)^a \neq \emptyset$ olur. Benzer yöntem ile $(\mathcal{X}_I)^b \neq \emptyset$ olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}_I)^a \cap (\mathcal{X}_I)^b &= (\mathcal{X}_I)^{ab} = \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(ab) \\ &\subseteq \mathcal{X}_I \backslash \tilde{V}(\mathcal{N}_I(0)) \end{aligned}$$

$$= \quad Spec(R)\backslash (V(\mathcal{N}_I(0)) \cup V(I)) = \emptyset$$

olur. Bu ise $\mathcal{X}_I$'nın indirgenemezliği ile çelişir. O halde $\mathcal{N}_I(0)$, R'nin asal idealidir. □

Topolojik uzay ile halka arasında daha fazla ilişki bulunmasına yardımcı olacak I-radikal idealler üzerinde bir koşul tanımlayalım.

R bir halka ve I, R'nin öz ideali olsun. U_i, R'nin ideali olmak üzere $\mathcal{N}_I(U_1) \subseteq \mathcal{N}_I(U_2) \subseteq \mathcal{N}_I(U_3) \subseteq ...$ zinciri için $\mathcal{N}_I(U_m) = \mathcal{N}_I(U_{m+i})$ (her $i \in \mathbb{N}$ için) olacak şekilde pozitif bir m tam sayısı varsa R'ye TN-koşulunu sağlar denir.

Teorem 3.62. *R bir halka ve I, R'nin öz ideali olsun. O halde aşağıdakiler denktir:*

i) R halkası TN-koşulunu sağlar.

ii) $\mathcal{X}_I$ Noetherian topolojik uzaydır.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ R halkası TN-koşulunu sağlasın.

U_i, R'nin ideali olmak üzere $\tilde{V}(U_1) \supseteq \tilde{V}(U_2) \supseteq \tilde{V}(U_3) \supseteq ...$ zincirini alalım. O halde $\mathcal{N}_I(U_1) \subseteq \mathcal{N}_I(U_2) \subseteq \mathcal{N}_I(U_3) \subseteq ...$ ve R halkası TN-koşulunu sağladığından her $i \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{N}_I(U_m) = \mathcal{N}_I(U_{m+i})$ olacak şekilde pozitif bir m tam sayısı vardır. Sonuç olarak her $i \in \mathbb{N}$ için $\tilde{V}(U_m) = \tilde{V}(U_{m+i})$'dir. Böylece $\mathcal{X}_I$ Noetheriandır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $\mathcal{X}_I$ Noetherian olsun.

U_i, R'nin ideali olmak üzere $\mathcal{N}_I(U_1) \subseteq \mathcal{N}_I(U_2) \subseteq \mathcal{N}_I(U_3) \subseteq ...$ zincirini alalım. Buradan $\tilde{V}(U_1) \supseteq \tilde{V}(U_2) \supseteq \tilde{V}(U_3) \supseteq ...$ ve $\mathcal{X}_I$ Noetherian olduğundan her $i \in \mathbb{N}$ için $\tilde{V}(U_m) = \tilde{V}(U_{m+i})$ olacak şekilde pozitif m tam sayısı vardır ve böylece her $i \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{N}_I(U_m) = \mathcal{N}_I(U_{m+i})$'dir. Sonuç olarak R halkası TN-koşulunu sağlar. □

Aşağıdaki teorem cebirsel ve topolojik özellikler arasındaki bazı ilişkileri göstermektedir.

Teorem 3.63. *R bir halka olsun. O halde aşağıdakiler denktir:*

i) $\mathcal{X}$ Noetherian topolojik uzaydır.

ii) R'nin her I ideali için $\mathcal{X}_I$ Noetherian topolojik uzaydır.

iii) R halkası TN-koşulunu sağlar.

iv) R halkası radikal idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlar.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ ve $(iv) \Rightarrow (i)$ Açıktır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ U_i, R'nin ideali olmak üzere $V(U_1) \supseteq V(U_2) \supseteq V(U_3) \supseteq ...$ zincirini ve $I = \cap U_i$ alalım. O halde $\tilde{V}(U_1) \supseteq \tilde{V}(U_2) \supseteq \tilde{V}(U_3) \supseteq ...$ zinciri vardır. $\mathcal{X}_I$ Noetherian olduğundan her $i \in \mathbb{N}$ için $\tilde{V}(U_m) = \tilde{V}(U_{m+i})$ olacak şekilde pozitif m tam sayısı vardır ve $V(U_m) = V(U_{m+i})$'dir. O halde $\mathcal{X}$ Noetheriandır.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Teorem 3.62. □

3.4.2. İdealler ile Alt uzaylar arasındaki ilişkiler

Bu kısımda halkalar için bazı karakterizasyonlar bulunacak ve halkanın idealleri ile tümleyen Zariski topolojileri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Aşağıdaki teorem tümleyen Zariski topolojileri ile halkanın idealleri arasındaki ilişkileri göstermektedir.

Teorem 3.64. *R bir halka, I,J ve K, R'nin öz idealleri olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

i) $\mathcal{X}$'in herhangi bir açık kümesi $\mathcal{X}_I$ formundadır.

ii) $\mathcal{X}_I = \mathcal{X}_J$'dir ancak ve ancak $\sqrt{I} = \sqrt{J}$'dir.

iii) $\mathcal{X}_I \cap \mathcal{X}_J = \mathcal{X}_K$'dır ancak ve ancak $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{IJ} = \sqrt{K}$'dır.

iv) $\mathcal{X}_I \subseteq \mathcal{X}_J$'dir ancak ve ancak $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$'dir.

İspat. *i)* $\mathcal{X}_I$'nın tanımından açıktır.

ii) $\mathcal{X}_I = Spec(R) \backslash V(I) = \mathcal{X}_J = Spec(R) \backslash V(J)$ olsun. O halde $V(I) = V(J)$ ve buradan $\sqrt{I} = \sqrt{J}$'dir.

$\sqrt{I} = \sqrt{J}$ olsun. O halde $V(I) = V(J)$ olup buradan $\mathcal{X}_I = \mathcal{X}_J$'dir.

iii) $\mathcal{X}_I \cap \mathcal{X}_J = \mathcal{X}_K$ olsun. $\mathcal{X}_I \cap \mathcal{X}_J = Spec(R) \backslash V(I \cap J)$ ve $\mathcal{X}_K = Spec(R) \backslash V(K)$ olduğundan hipotez ile $Spec(R) \backslash V(I \cap J) = Spec(R) \backslash V(K)$'dır. Buradan $V(K) = V(I \cap J)$ olup böylece $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{IJ} = \sqrt{K}$'dır.

$\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{IJ} = \sqrt{K}$ olsun. Buradan $V(K) = V(I \cap J)$ olup o halde $Spec(R) \backslash V(I \cap J) = Spec(R) \backslash V(K)$'dır. Sonuç olarak $\mathcal{X}_I \cap \mathcal{X}_J = \mathcal{X}_K$'dır.

iv) $\mathcal{X}_I = Spec(R) \backslash V(I) \subseteq Spec(R) \backslash V(J) = \mathcal{X}_J$ olsun. O halde $V(J) \subseteq V(I)$ ve böylece $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$'dir.

$\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$ olsun. O halde $V(J) \subseteq V(I)$ ve böylece $\mathcal{X}_I = Spec(R) \backslash V(I) \subseteq Spec(R) \backslash V(J) = \mathcal{X}_J$'dir. □

Aşağıdaki sonuç, Teorem 3.64 (iii)'nin özel bir halidir.

Sonuç 3.65. *R bir halka, I ve J, R'nin öz idealleri olsun. O halde $\mathcal{X}_I \cap \mathcal{X}_J = \emptyset$'tur ancak ve ancak $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{IJ} = \sqrt{0}$'dır.*

Teorem 3.66. *R bir halka ve I, R'nin öz ideali olsun. O halde $\mathcal{X}_I$, $\mathcal{X}$'de yoğundur ancak ve ancak $\sqrt{0}$'da olmayan R'nin her J öz ideali için $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{0}$'dır.*

İspat. $\mathcal{X}_I$, $\mathcal{X}$'de yoğun ve J, R'nin $\sqrt{0}$'da olmayan bir öz ideali olsun. O halde $\mathcal{X}_J = Spec(R) \backslash V(J) \neq \emptyset$, Zariski topolojisinde açık bir kümedir. Hipotez ile $\mathcal{X}_I \cap \mathcal{X}_J \neq \emptyset$ olur. Sonuç 3.65 ile $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{0}$'dır.

$\sqrt{0}$'da olmayan R'nin her J öz ideali için $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{0}$ olsun. Sonuç 3.65 ile $\mathcal{X}_I \cap \mathcal{X}_J \neq \emptyset$ olur. O halde $\mathcal{X}_I$, $\mathcal{X}$'de yoğundur. □

Aşağıdaki teorem topolojik özellikler kullanılarak $R/\sqrt{0}$ halkası için bir karakterizasyon vermektedir.

Teorem 3.67. *R bir halka olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) $\sqrt{0}$, R'nin asal idealidir.

ii) $\mathcal{X} = Spec(R)$ indirgenemezdir.

iii) $R/\sqrt{0}$'ın her ideali esastır.

iv) $\mathcal{X} = Spec(R)$'nin her açık alt kümesi yoğundur.

İspat. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Önteorem 2.23.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ I ve J, R'nin idealleri olmak üzere $\mathcal{X}_I$ ve $\mathcal{X}_J$ açık alt kümeler olsun. O halde $\left(J+\sqrt{0}\right)/\sqrt{0}$ ve $\left(I+\sqrt{0}\right)/\sqrt{0}$, $R/\sqrt{0}$'ın idealidir. Buradan

$$\begin{aligned}\sqrt{0} &\neq \sqrt{\left(J+\sqrt{0}\right)\cap\left(I+\sqrt{0}\right)}\\ &= \sqrt{\left(J+\sqrt{0}\right)\left(I+\sqrt{0}\right)} = \sqrt{\left(JI+\sqrt{0}\right)}\end{aligned}$$

olup $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{0}$'dır. Dolayısıyla $\mathcal{X}_I \cap \mathcal{X}_J = Spec(R) \backslash V(IJ) \neq \emptyset$ olur. O halde $\mathcal{X}_I$, $\mathcal{X}$'de yoğundur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $\left(J+\sqrt{0}\right)/\sqrt{0}$ ve $\left(I+\sqrt{0}\right)/\sqrt{0}$, $R/\sqrt{0}$'ın ideali olmak üzere $\left(\left(J+\sqrt{0}\right)/\sqrt{0}\right) \cap \left(\left(I+\sqrt{0}\right)/\sqrt{0}\right) = \sqrt{0}$ olsun. O halde $\sqrt{\left(J+\sqrt{0}\right)\cap\left(I+\sqrt{0}\right)} = \sqrt{\left(JI+\sqrt{0}\right)} = \sqrt{0}$ olur ve buradan $IJ \subseteq \sqrt{0}$'dır. Böylece $\mathcal{X}_I \cap \mathcal{X}_J = Spec(R) \backslash V(IJ) = \emptyset$ olur. Bu ise $\mathcal{X}$'in indirgenemezliği ile çelişir. O halde $\left(\left(J+\sqrt{0}\right)/\sqrt{0}\right) \cap \left(\left(I+\sqrt{0}\right)/\sqrt{0}\right) \neq \sqrt{0}$ olup $R/\sqrt{0}$'ın her ideali esastır.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ $Spec(R)$'nin her açık alt kümesi yoğun ise I ve J, R'nin ideali olmak üzere $\mathcal{X}_I \cap \mathcal{X}_J = Spec(R) \backslash V(IJ) \neq \emptyset$ olur. O halde $\mathcal{X}$ indirgenemezdir. □

Teorem 3.68. *R bir halka ve her $i \in \Lambda$ için I_i, R'nin öz ideali olsun. D, R'nin ideali olmak üzere $\bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{X}_{I_i} = \mathcal{X}_D$'dir ancak ve ancak $\sqrt{D} = \sqrt{\sum_{i\in\Lambda} I_i}$'dir.*

İspat. $(:\Rightarrow)$ D, R'nin ideali olmak üzere $\bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{X}_{I_i} = \mathcal{X}_D$ olsun.

$D \subseteq P$ olacak şekilde P, R'nin asal ideali olsun. O halde $P \notin \mathcal{X}_D$ ve böylece $P \notin \bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{X}_{I_i}$'dir. Dolayısıyla her $i \in \Lambda$ için $P \notin \mathcal{X}_{I_i}$'dir. Her $i \in \Lambda$ için $I_i \subseteq P$ ve buradan $\bigcup_{i\in\Lambda} I_i \subseteq P$ olup $\sqrt{\sum_{i\in\Lambda} I_i} \subseteq \sqrt{D}$'dir.

P, R'nin asal ideali olmak üzere $\sum_{i\in\Lambda} I_i \subseteq P$ olsun. O halde $\bigcup_{i\in\Lambda} I_i \subseteq P$ olup her $i \in \Lambda$ için $I_i \subseteq P$'dir. Dolayısıyla her $i \in \Lambda$ için $P \notin \mathcal{X}_{I_i}$'dir. Buradan $P \notin \bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{X}_{I_i} = \mathcal{X}_D$ olup $D \subseteq P$'dir. Sonuç olarak $\sqrt{D} \subseteq \sqrt{\sum_{i\in\Lambda} I_i}$'dir. Her iki kapsamadan da $\sqrt{D} = \sqrt{\sum_{i\in\Lambda} I_i}$'dir.

$(\Leftarrow:)$ $\sqrt{D} = \sqrt{\sum_{i\in\Lambda} I_i}$ olsun.

$P \in \mathcal{X}_D$ alalım. O halde $D \nsubseteq P$ olup $\sqrt{D} \nsubseteq P$'dir. Hipotez ile $\sqrt{\sum_{i\in\Lambda} I_i} \nsubseteq P$ ve buradan $\sum_{i\in\Lambda} I_i \nsubseteq P$ olup her $i \in \Lambda$ için $I_i \nsubseteq P$'dir. O halde $P \in \mathcal{X}_{I_i}$ ve böylece $P \in \bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{X}_{I_i}$ olup $\mathcal{X}_D \subseteq \bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{X}_{I_i}$'dir.

$P \in \bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{X}_{I_i}$ olsun. O halde her $i \in \Lambda$ için $I_i \nsubseteq P$'dir. Buradan $\sum_{i\in\Lambda} I_i \nsubseteq P$ olup $\sqrt{\sum_{i\in\Lambda} I_i} \nsubseteq P$'dir. Hipotez ile $\sqrt{D} \nsubseteq P$ olup $D \nsubseteq P$'dir. Böylece $P \in \mathcal{X}_D$ olup $\bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{X}_{I_i} \subseteq \mathcal{X}_D$'dir. Her iki kapsamadan da $\bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{X}_{I_i} = \mathcal{X}_D$'dir. □

Teorem 3.69. *R bir halka, her $i \in \Lambda$ için I_i, R'nin öz ideali ve D, R'nin sonlu üretilmiş ideali olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) $\bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{X}_{I_i} = \mathcal{X}_D$*'dir.*

ii) $\bigcup\limits_{i\in\Delta} \mathcal{X}_{I_i} = \mathcal{X}_D$ *olacak şekilde sonlu* $\Delta \subseteq \Lambda$ *alt kümesi vardır.*

iii) $\sqrt{\sum\limits_{i\in\Delta} I_i} = \sqrt{D}$ *olacak şekilde sonlu* $\Delta \subseteq \Lambda$ *alt kümesi vardır.*

İspat. $(i) \Rightarrow (iii)$ $\sqrt{\sum\limits_{i\in\Lambda} I_i} = \sqrt{D}$, $t \in \mathbb{N}$ ve $D, d_i \in R$ olmak üzere $\{d_1, ..., d_t\}$ kümesi tarafından üretilen R'nin ideali olsun. Her d_i için $d_i^{n_i} \in \sum\limits_{i\in\Lambda} I_i$ olacak şekilde pozitif bir n_i tam sayısı vardır. Böylece $d_i^{n_i} \in \sum\limits_{i\in\Delta_i} I_i$ olacak şekilde sonlu bir $\Delta_i \subseteq \Lambda$ alt kümesi vardır. $n = \max\{n_1, ...n_t\}$ ve $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i$ olsun. O halde $\sqrt{\sum\limits_{i\in\Delta} I_i} = \sqrt{D}$'dir.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Teorem 3.68.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Açık. □

Teorem 3.69'un bir sonucu olarak şu ifade edilebilir:

Sonuç 3.70. *R bir halka ve her* $i \in \Lambda$ *için* I_i*, R'nin öz ideali olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) $\bigcup\limits_{i\in\Lambda} \mathcal{X}_{I_i} = Spec(R)$*'dir.*

ii) $\bigcup\limits_{i\in\Delta} \mathcal{X}_{I_i} = Spec(R)$ *olacak şekilde sonlu* $\Delta \subseteq \Lambda$ *alt kümesi vardır.*

iii) $\sum\limits_{i\in\Delta} I_i = R$ *olacak şekilde sonlu* $\Delta \subseteq \Lambda$ *alt kümesi vardır.*

Böylece aşağıdaki sonuç literatürde iyi bilinen bir sonucun genellemesini ifade etmektedir.

Sonuç 3.71. *R bir halka ve D, R'nin sonlu üretilmiş ideali olsun. O halde* $\mathcal{X}_D$ *yarı-kompakttır.*

Sonuç 3.72. *R bir halka olsun. R lokal halkadır ancak ve ancak* $Spec(R)$*'nin açık bir alt örtüsü yoktur.*

Aşağıdaki teorem topolojik özellikler kullanarak R'nin $\sqrt{0}$ ideali için bir karakterizasyon vermektedir.

Teorem 3.73. *R, her ideali için TN-koşulunu sağlayan bir halka olsun. O halde* $\sqrt{0} = \sqrt{I_1 ... I_n}$ *olacak şekilde R'nin* $I_1, ..., I_n$ *öz idealleri vardır.*

İspat. R, her ideali için TN-koşulunu sağlayan bir halka olduğundan Teorem 3.63

ile $\mathcal{X} = Spec(R)$ Noetherian topolojik uzaydır. Kunz (1985) ile $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i = \mathcal{X}$ olacak şekilde $\mathcal{X}$'in sonlu tane birbirinden farklı U_i indirgenemez bileşenleri vardır.

Atiyah ve MacDonald'dan (1969) bir topolojik uzayın indirgenemez bileşeni kapalıdır. O halde her $i \in \{1, ..., n\}$ için $U_i = V(I_i)$ olacak şekilde R'nin I_i ideali vardır. Buradan

$$\emptyset = \mathcal{X} \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n} V(I_i) \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathcal{X} \backslash V(I_i)) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{I_i}$$

dir. Teorem 3.64 ile $\sqrt{0} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \sqrt{I_i} = \sqrt{I_1 ... I_n}$'dir. □

Şimdiki teorem R halkasının bazı ideallerinin sonlu toplamı şeklinde yazılması ile $\mathcal{X}$'in sonlu tane indirgenemez $\mathcal{X}_{I_i}$'nin birleşimi şeklinde olması arasında gerek ve yeter şart olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 3.74. *R bir halka ve I_i, R'nin öz ideali olsun. O halde $\mathcal{X}_{I_i}$ indirgenemez olmak üzere $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{I_i}$'dir ancak ve ancak $R = \sum\limits_{i=1}^{n} I_i$ ve $\mathcal{N}_{I_i}(0)$, R'nin asal idealidir.*

İspat. Teorem 3.61 ve Teorem 3.68 ile ispat açıktır. □

3.5. MODÜL ÜZERİNDE BAZI TOPOLOJİLERİN YAPISI

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe kullanılan tüm halkalar birimli, değişmeli ve tüm modüller birimli modül olarak düşünülecektir. R birimli, değişmeli bir halka ve M birimli R-modül olarak alınacaktır.

2001 yılında Yassemi tarafından asal alt modüllerin dual kavramı olarak tanımlanan eşasal alt modüller ile ilgili son yıllarda birçok çalışma yapılmaktadır. Yapılan bu çalışmalar, eşasal alt modüllerin halka ve modüllerin karakterizasyonlarının belirlenmesinde önemli bir rol oynadığını göstermektedir. Eşasal alt modül sınıfının topolojik yapılar ile ilgili önemli bağlantıları bulunmuştur (Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2014, Çeken ve Alkan 2011). Bir modülün eşasal alt modüllerinin kümesi üzerinde bazı topolojilerin tanımlı olduğu gösterilmiş ve halka üzerinde tanımlı Zariski topolojisine dual olabilecek bir topolojik uzayın özellikleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır (Abuhlail 2015). Abuhlail'in bu çalışmasından sonra eşasal alt modüller kullanılarak topoloji ile cebir arasında önemli ilişkilerin kurulabileceği düşünülmektedir.

M modülünün asal spektrumu, M'nin tüm asal alt modüllerinin kümesidir ve $Spec(M)$ ile gösterilir. N, M'nin alt modülü olsun. $Spec(M)$ üzerinde kapalı kümesinin formu $V(N) = \{P \in Spec(M) : (N : M) \subseteq (P : M)\}$ şeklinde olan Zariski topolojisini Lu (1999) tanımladı. $Spec(M)$ üzerinde tanımlanan bu topoloji birçok yazar tarafından da çalışılmaktadır (Behboodi ve Haddadi 2008a, Lu 2010, McCasland vd 1997).

Asal alt modüllerin dual kavramı olan eşasal (second) alt modüller birçok yazar tarafından çalışılmaktadır (Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2012, Çeken vd 2013a,b, Çeken ve Alkan 2015a). M bir R-modül ve $0 \neq N$, M'nin alt modülü olsun. Her $r \in R$ için $rN = 0$ veya $rN = N$ ise N'ye M'nin eşasal (second) alt modülü denir. Eğer N, M'nin eşasal alt modülü ise $p = Ann_R(N)$, R'nin asal idealidir. Bu durumda N'ye M'nin p-eşasal (p-second) alt modülü denir. M modülünün eşasal spektrumu, M'nin tüm eşasal alt modüllerinin kümesidir ve $\mathcal{X}^s = Spec^s(M)$ ile gösterilir. N, M'nin alt modülü olsun. $Spec^s(M)$ üzerinde kapalı kümesinin formu $V^s(N) = \{P \in Spec^s(M) : Ann_R(N) \subseteq Ann_R(P)\}$ olan Zariski topolojisinin duali tanımlanmıştır (Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2014).
$\{V^s(N) : N$, M'nin alt modülü$\}$ kümesi $Spec^s(M)$ üzerinde topolojik uzay için kapalı kümeler aksiyomlarını sağlar ve bu topolojiye dual Zariski topolojisi denir (Önteorem 2.55). $Spec^s(M)$ üzerinde tanımlanan dual Zariski topolojisi birçok yazar tarafından çalışılmaktadır (Ansari-Toroghy ve Farshadifar 2014, Çeken ve Alkan 2011, 2015b). Çeken ve Alkan'da (2015b) M'nin düzgün (uniform) modül veya M'nin sonlu tane maksimal eşasal alt modülünün var olması gibi birçok cebirsel özelliklere denk olan topolojik özellikler verilmiş fakat $Spec^s(M)$ üzerindeki dual Zariski topolojisi kullanılarak M'nin bölüm modülünün özelliklerine çalışılmamıştır.

Bu bölümde, M modülünün bölüm modülü üzerinde dual Zariski topolojisini kullanarak M modülü üzerinde bazı topolojiler inşa edilecek ve bu elde edilen topolojiler arasında sürekli bir fonksiyon tanımlanacaktır (Önerme 3.76, Önerme 3.78, Önerme 3.79). Son olarak M modülünün bölüm modülü üzerinde dual Zariski topolojisine homeomorf olan M üzerinde bir topoloji bulunacaktır (Teorem 3.80).

3.5.1. Modül Üzerindeki Topolojiler

Eşasal alt modüller için temel önteorem ile başlayalım.

Önteorem 3.75. *M bir R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. Eğer S, M'nin eşasal alt modülü ve $N \nsubseteq S$ ise $(N : S + N) = (0 : S)$'dir.*

İspat. $r \in (N : S + N)$ olsun. O halde $r(S + N) \subseteq N$ ve buradan $rS \subseteq N$'dir. S, Mnin eşasal alt modülü olduğundan $rS = 0$ veya $rS = S$'dir. Eğer $rS = S$ ise bu $N \nsubseteq S$ ile çelişir. Böylece $rS = 0$ ve buradan $r \in (0 : S)$ olup
$(N : S + N) \subseteq (0 : S)$'dir. Diğer kapsama açıktır. □

Önerme 3.76. *$f : M \to M'$ bir R-modül monomorfizması (birebir homomorfizma) ve P, M'nin alt modülü olsun. O halde $P \to f(P)$ ile tanımlı*
$\Omega : (Spec^s(M), \tau) \to (Spec^s(M'), \tau')$ fonksiyonu birebir ve süreklidir.

İspat. $V^s(N')$, $Spec^s(M')$'de kapalı bir küme olsun. $\Omega^{-1}(V^s(N'))$'nün $(Spec^s(M), \tau)$ da kapalı, yani $\Omega^{-1}(V^s(N')) = V^s(f^{-1}(N'))$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$S \in V^s(f^{-1}(N'))$ olsun. O halde $(0 : f^{-1}(N')) \subseteq (0 : S)$'dir.
$(0 : N') \subseteq (0 : f(S))$'yi göstermek istiyoruz. Eğer $rN' = 0$ ise
$0 = f(rN') = rf(N')$'dür. Burada şunu gözlemleyebiliriz: $rf^{-1}(N') = 0$ ve buradan $(0 : N') \subseteq (0 : f^{-1}(N')) \subseteq (0 : S) \subseteq (0 : f(S))$'dir. Ayrıca $f(S)$, M''de eşasal alt modüldür. O halde $f(S) \in V^s(N')$'dür.

$S \in \Omega^{-1}(V^s(N'))$ olsun. O halde $f(S) \in V^s(N')$ ve böylece
$(0 : N') \subseteq (0 : f(S))$'dir. $rf^{-1}(N') = 0$ olacak şekilde $r \in R$ olsun. O halde
$0 = rf(S) = f(rS)$'dir. f monomorfizma olduğundan $rS = 0$'dır. O halde
$(0 : f^{-1}(N')) \subseteq (0 : S)$ ve $S \in V^s(f^{-1}(N'))$'dür. □

Önerme 3.76'nın sonucu olarak şu ifade edilebilir:

Sonuç 3.77. *M bir R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. $Spec^s(N)$ üzerindeki dual Zariski topolojisi $Spec^s(M)$'nin alt uzay topolojisidir.*

Önerme 3.78. *M bir R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun.*
$\mathcal{X}_c = Spec^s(M) \backslash Spec^s(N)$ ve B, M'nin alt modülü olmak üzere $V_c(B) = V^s(B) \backslash Spec^s(N)$ ise $\Gamma_c = \{V_c(B) : B$, M'nin alt modülü$\}$, $\mathcal{X}_c$ üzerinde topolojik uzay için kapalı küme aksiyomlarını sağlar.

İspat. *i)* Eğer $B = M$ ise $V^s(B) = Spec^s(M)$ ve böylece
$V_c(B) = Spec^s(M) \backslash Spec^s(N) = \mathcal{X}_c \in \Gamma_c$'dir.

$Spec^s(M)$ topolojik uzay olduğundan $V^s(B) = \emptyset$ olacak şekilde M'nin bir B alt modülü vardır. Böylece $V_c(B) = \emptyset \in \Gamma_c$'dir.

ii) B_i, M'nin alt modülü olmak üzere $V_c(B_i) = V^s(B_i) \backslash Spec^s(N)$ olsun. O halde Λ indeks kümesi ve N_i, M'nin alt modülü olmak üzere

$$\bigcap_{i\in\Lambda} V^s(B_i) = V^s\left(\bigcap_{i\in\Lambda}(0 :_M Ann_R(B_i))\right)$$

dir.

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i\in\Lambda} V_c(B_i) &= \bigcap_{i\in\Lambda}(V^s(B_i) \backslash Spec^s(N)) = \left(\bigcap_{i\in\Lambda} V^s(B_i)\right) \backslash Spec^s(N) \\
&= V^s\left(\bigcap_{i\in\Lambda}(0 :_M Ann_R(B_i))\right) \backslash Spec^s(N) \\
&= V_c\left(\bigcap_{i\in\Lambda}(0 :_M Ann_R(B_i))\right) \in \Gamma_c
\end{aligned}$$

dir.

iii) $V^s(U_1)\backslash Spec^s(N)$, $V^s(U_2)\backslash Spec^s(N) \in \Gamma_c$ olsun. $Spec^s(M)$ topolojik uzay olduğundan U_1 ve U_2, M'nin alt modülleri olmak üzere

$$V^s(U_1) \cup V^s(U_2) = V^s(U_1 + U_2)$$

dir.

$$\begin{aligned} V_c(U_1) \cup V_c(U_2) &= [(V^s(U_1)\backslash Spec^s(N))] \cup [(V^s(U_2)\backslash Spec^s(N))] \\ &= [(V^s(U_1) \cup V^s(U_2))] \backslash Spec^s(N) \\ &= [(V^s(U_1 + U_2))] \backslash Spec^s(N) \\ &= V_c(U_1 + U_2) \end{aligned}$$

dir. □

Önerme 3.78'de tanımlanan topolojiye M'de N'nin tümleyen dual Zariski topolojisi denir ve $\tau_c = \{\mathcal{X}_c \backslash V_c(B) : B$, M'nin alt modülü$\}$ olmak üzere $(\mathcal{X}_c, \tau_c)$ ile gösterilir.

M bir R-modül olsun. D, N ve B, M'nin alt modülleri ve χ, M'nin alt modülünün bir kümesi olsun.

$$\chi/N = \{(A+N)/N : A \in \chi\}$$

ve

$$\varsigma(D) = \{B \leq M : B/N \in V^s(D/N)\}$$

olarak tanımlayalım. Açıkça $V^s(D/N) = \varsigma(D)/N$'dir. N_i, M'nin alt modülü olmak üzere $\bigcap_{i\in\Lambda}(N_i/N) = \left(\bigcap_{i\in\Lambda} N_i\right)/N$ eşitliğini biliyoruz.

Bu bilgiler altında aşağıdaki önerme yeni bir topoloji tanımlamaktadır.

Önerme 3.79. *M bir R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. Eğer $\mathcal{X}_q = \{A \leqslant M : A/N \in Spec^s(M/N)\}$ ise $\Gamma_q = \{\varsigma(D) : D$, M'nin alt modülü$\}$, $\mathcal{X}_q$ üzerinde bir topolojik uzay için kapalı küme aksiyomlarını sağlar.*

İspat. Şunu gözlemleyebiliriz:

$$\begin{aligned} \varsigma(D) &= \{B \leqslant M : B/N \in V^s(D/N)\} \\ &= \{B \in \mathcal{X}_q : (N:D) \subseteq (N:B)\} \end{aligned}$$

dir.

i) $D = N$ için

$$\varsigma(D) = \{B \in \mathcal{X}_q : (N : N) \subseteq (N : B)\} = \emptyset \in \Gamma_q$$

dur.

$D = M$ için

$$\varsigma(D) = \{B \in \mathcal{X}_q : (N : M) \subseteq (N : B)\} = \mathcal{X}_q \in \Gamma_q$$

dur.

ii) N_i, M'nin alt modülü ve Λ indeks kümesi olmak üzere $\bigcap\limits_{i\in\Lambda} \varsigma(N_i) = \varsigma(K)$ olacak şekilde M'nin bir K alt modülü var olduğunu göstermek istiyoruz.

$$\begin{aligned}
\left[\bigcap_{i\in\Lambda} \varsigma(N_i)\right]/N &= \bigcap_{i\in\Lambda}(\varsigma(N_i)/N) = \bigcap_{i\in\Lambda} V^s(N_i/N) \\
&= V^s\left(\bigcap_{i\in\Lambda}(0 :_{M/N} Ann_R(N_i/N))\right) \\
&= V^s\left(\bigcap_{i\in\Lambda}(L_i/N)\right) \\
&= V^s\left(\left(\bigcap_{i\in\Lambda} L_i\right)/N\right) = \varsigma\left(\bigcap_{i\in\Lambda} L_i\right)/N
\end{aligned}$$

dir. O halde $\bigcap\limits_{i\in\Lambda} \varsigma(N_i) = \varsigma(\bigcap\limits_{i\in\Lambda} L_i)$ olup $K = \bigcap\limits_{i\in\Lambda} L_i$ seçebiliriz.

iii) N_1 ve N_2, M'nin alt modülleri olmak üzere $\varsigma(N_1) \cup \varsigma(N_2) = \varsigma(N_1 + N_2)$ olduğunu göstermek istiyoruz. O halde

$$\begin{aligned}
(\varsigma(N_1) \cup \varsigma(N_2))/N &= [\varsigma(N_1)/N] \cup [\varsigma(N_2)/N] \\
&= V^s(N_1/N) \cup V^s(N_2/N) \\
&= V^s((N_1 + N_2)/N) \\
&= \varsigma(N_1 + N_2)/N
\end{aligned}$$

olup $\varsigma(N_1) \cup \varsigma(N_2) = \varsigma(N_1 + N_2)$'dir. □

Önerme 3.79'da tanımlanan topolojiye M'nin N tarafından bölüm dual Zariski topolojisi denir ve $\tau_q = \{\mathcal{X}_q \backslash \varsigma(B) : B$, M'nin alt modülü $\}$ olmak üzere $(\mathcal{X}_q, \tau_q)$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem, Önerme 3.79'da tanımlanan topoloji ile $(Spec^s(M/N), \tau)$ topolojisi arasında birebir, örten, kendisi ve tersi sürekli bir fonksiyonun varlığını göstermektedir.

Teorem 3.80. *M bir R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. $(\mathcal{X}_q, \tau_q)$ ile $(Spec^s(M/N), \tau)$ homeomorf topolojik uzaylardır.*

İspat. $S \in \mathcal{X}_q$ olmak üzere $S \to S/N$ ile tanımlı $\psi : (\mathcal{X}_q, \tau_q) \to (Spec^s(M/N), \tau)$ bir fonksiyon olsun.

$\psi^{-1}(Spec^s(M/N)\backslash V^s(A/N)) = \mathcal{X}_q\backslash\varsigma(A)$ olduğunu gösterelim.

$S \in \mathcal{X}_q\backslash\varsigma(A)$ olsun. O halde $S/N \in Spec^s(M/N)$ ve $S \notin \varsigma(A)$'dir. Böylece $S/N \notin V^s(A/N)$'dir. Buradan $\psi(S) \in Spec^s(M/N)\backslash V^s(A/N)$ olup $S \in \psi^{-1}(Spec^s(M/N)\backslash V^s(A/N))$'dir.

$S \in \psi^{-1}(Spec^s(M/N)\backslash V^s(A/N))$ olsun. O halde $\psi(S) = S/N \in Spec^s(M/N)\backslash V^s(A/N)$'dir. S/N, M/N'de eşasal alt modül olduğundan $S \in \mathcal{X}_q$'dur. Böylece $S \notin \varsigma(A)$ ve $S \in \mathcal{X}_q\backslash\varsigma(A)$'dır.

O halde ψ sürekli foksiyondur.

$S \to S/N$ ile tanımlı $\psi : (\mathcal{X}_q, \tau_q) \to (Spec^s(M/N), \tau)$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğu açıktır. Aynı zamanda ψ'nin tersi de sürekli ve böylece $(\mathcal{X}_q, \tau_q)$ ile $(Spec^s(M/N), \tau)$ homeomorf topolojik uzaylardır. □

Aşağıdaki teorem $(Spec^s(M/N), \tau)$ topolojisi Noetherian ise Önerme 3.78 de tanımlanan topolojinin de Noetherian olduğu göstermektedir.

Teorem 3.81. *M bir R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. Eğer $(Spec^s(M), \tau)$ Noetherian topolojik uzay ise N'nin tümleyen dual Zariski topolojisi de Noetherian'dır.*

İspat. $(\mathcal{X}_c, \tau_c)$, N'nin tümleyen dual Zariski topolojisi olsun. U_i, M'nin alt modülü olmak üzere $V^s(U_1)\backslash Spec^s(N) \supseteq V^s(U_2)\backslash Spec^s(N) \supseteq ...$ zincirini alalım. Buradan $V^s(U_1) \supseteq V^s(U_2) \supseteq ...$ zincirini elde ederiz. $(Spec^s(M), \tau)$ Noetherian topolojik uzay olduğundan her i pozitif tam sayısı için $V^s(U_m) = V^s(U_{m+i})$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan her i pozitif tam sayısı için $V^s(U_m)\backslash Spec^s(N) = V^s(U_{m+i})\backslash Spec^s(N)$'dir. Böylece $(\mathcal{X}_c, \tau_c)$ Noetherian topolojik uzaydır. □

Tümleyen dual Zariski topolojisi ile bölüm dual Zariski topolojisinin birbirinden farklı olduğuna dair bir örnek vererek bu tez çalışmasını bitirelim.

Örnek. *$M = R = \mathbb{Z}$ ve $N = 30\mathbb{Z}$ olsun. O halde $Spec^s(M) = \mathcal{X}_c = \emptyset$ fakat $Spec^s(M/N) = \{15\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}, 10\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}\}$ ve $\mathcal{X}_q = \{6\mathbb{Z}, 10\mathbb{Z}, 15\mathbb{Z}\}$'dir. Sonuç olarak M'de N'nin tümleyen dual Zariski topolojisi, M'nin N tarafından bölüm dual Zariski topolojisinden farklıdır. Ek olarak S ve N, M'nin alt modülü olmak* *üzere* S/N, M/N*'de eşasal iken* S*'nin* M*'de eşasal olmak zorunda olmadığına da bir örnektir.*

4. SONUÇ

Asal ideal, asal alt modül, eşasal alt modül ve Zariski topolojisinin halka ve modül teorisindeki önemini ve birçok alanda uygulamasının olduğunu biliyoruz. Bu kavramlar aracılığıyla halka ve modül için karakterizasyonlar verilebiliyor. Bu tezde bu karakterizasyonların bazıları özellikle giriş ve temel kavramlar bölümünde hatırlatılmıştır.

Bu tezde aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur:

HNP-halkası için bir karakteriasyon bulunmuştur (Teorem 3.16). Dedekind bölgelerinin bir genellemesi olan HNP-halkasının bir genellemesi olarak $HNPS$-halkası tanımlanmış ve $HNPS$-halkası üzerinde sonlu üretilmiş modülün bir koşul altında hem radikal formülü sağladığı hem de CS-modül ile burulmalı modülün direkt toplamı şeklinde yazılabildiği gösterilmiştir (Teorem 3.21, Teorem 3.22). Ayrıca asal alt modüller kullanılarak sol extending halkanın sol sokulunun bir koşul altında Jacobson radikalinde olduğu gösterilmiştir (Sonuç 3.20).

Asal ideallerin genellemesi ve bir idealin radikali için yeni tanım verilmiştir (Tanım 3.23 ve Tanım 3.30). R bir halka olsun. I, R'nin sol ideali ve $K = \{a_i \in R : a_0 = a \text{ ve } a_{i+1} \in a_iRa_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq R$ olmak üzere $I \cap K = \emptyset$ olsun. O halde $P \cap K = \emptyset$ olacak şekilde I'yı kapsayan R'nin P sol O-asal idealinin var olduğunu gösterilmiştir (Önerme 3.33). Bu sonuç kullanılarak ve belli koşullar altında R'nin sol I idealini içeren tüm sol O-asal ideallerinin kesişimi olan $O\text{-}rad_R(I)$'nin elemanları için karakterizasyon verilmiştir (Önteorem 3.35). Bunun bir sonucu olarak sol O-asal idealler için Cohen teoreminin değişmesiz halka teorisindeki bir genellemesi ifade edilmiştir (Sonuç 3.38). R sol O-radikal idealler üzerinde artan zincir koşulunu sağlıyorsa R'nin K sol O-radikal idealinin ($O\text{-}rad_R(K) = K$) sonlu tane O-asal ideallerinin kesişimi olduğu gösterilmiştir (Teorem 3.39).

Modüllerin yapısı, sadece sol O-asal idealin modül versiyonu olmayan aynı zamanda asal alt modüllerin bir genellemesi de olan O-asal alt modül yardımıyla incelenmiştir. M sonlu üretilmiş sol R-modül olsun. N, M'nin alt modülü ve $K = \{a_i \in R : a_0 = a \text{ ve } a_{i+1} \in a_iRa_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq R$ olmak üzere $N \cap Km = \emptyset$ olsun. O halde $P \cap Km = \emptyset$ olacak şekilde N'yi içeren M'nin bir O-asal alt modülü P'nin var olduğu gösterilmiştir (Önerme 3.49). Bu sonuç kullanılarak belli koşullar altında $O\text{-}rad_M(N)$'nin elemanları karakterize edilmiştir (Teorem 3.51). M modülü O-radikal alt modüller üzerinde artan zincir koşulunu sağlıyorsa M'nin O-radikal alt modülünün sonlu tane O-asal alt modülün kesişimi olduğu gösterilmiştir (Teorem 3.54).

Halkanın bir ideali için Zariski topolojisinin alt uzayı tanımlanmış ve Zariski topolojisinin açık alt uzayları ile halkanın idealleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Sonlu üretimiş ideal ile yarı-kompakt uzay kavramları arasında ilişki bulunmuştur. R halkasının I idealinin tümleyen Zariski topolojisi olarak tanımlanan $\mathcal{X}_I$ yarı-kompakt iken $r_i \in R$ olmak üzere $\sqrt{I} = \sqrt{Rr_1 + ... + Rr_n}$ olduğu gösterilmiştir

(Teorem 3.58). Ayrıca $\mathcal{X}_I$'nın yarı-kompakt olması için gerekli ve yeterli cebirsel şart ifade edilmiştir (Teorem 3.58). Radikal idealin bir genellemesi olan $\mathcal{N}_I(0)$ idealinin tanımı verilmiş ve bu idealin temel özellikleri belirtilmiştir (Tanım 3.59 ve Önerme 3.60). R bir halka olsun. I, R'nin öz ideali ve $\sqrt{I} \neq \sqrt{0}$ olsun. Teorem 3.61'te şu gösterilmiştir: $\mathcal{X}_I$ indirgenemezdir ancak ve ancak $\mathcal{N}_I(0)$, R'nin asal idealidir. Ayrıca $\mathcal{X}_I$'nın Noetherian olması için bazı cebirsel gerekli ve yeterli şartlar verilmiştir (Teorem 3.62 ve Teorem 3.63). Halkalar için karakterizasyonlar vermek için yardımcı olacak bazı cebirsel ve topolojik yapılar bulmak için halkanın idealleri ile tümleyen Zariski topolojileri arasındaki ilişkilere yoğunlaşılmıştır. Teorem 3.67'te $Spec(R)$'nin indirgenemezliği üzerine odaklanılmış ve şu ispatlanmıştır: $\mathcal{X} = Spec(R)$ indirgenemezdir ancak ve ancak $R/\sqrt{0}$'ın her ideali esastır. Ayrıca açık bir alt uzayın açık bir örtüsünün olması veya yarı-kompakt olması için cebirsel gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir (Sonuç 3.71 ve Sonuç 3.72). Böylece halkanın nil radikalini karakterize etmek için hem cebirsel hem de topolojik araçlar bulunmuştur. I_i, R'nin öz ideali ve $\mathcal{X}_{I_i}$ indirgenemez olmak üzere $\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{I_i}$'dir ancak ve ancak $R = \sum_{i=1}^{n} I_i$ ve $\mathcal{N}_{I_i}(0)$, R'nin asal ideali olduğu gösterilmiştir (Teorem 3.74).

M modülünün bölüm modülü üzerinde dual Zariski topolojisini kullanarak M modülü üzerinde bazı topolojiler inşa edilmiş ve bu elde edilen topolojiler arasında sürekli bir fonksiyon tanımlanmıştır (Önerme 3.76, Önerme 3.78, Önerme 3.79). Ayrıca M modülünün bölüm modülü üzerinde dual Zariski topolojisine homeomorf olan M üzerinde bir topoloji de bulunmuştur (Teorem 3.80).

Bundan sonra yapılacak çalışmalar için bu tezde tanımlanan topolojilerin alt uzayları ile alt modülleri arasındaki ilişkinin incelenmesi, bu ilişki yardımıyla topoloji ve modülün özelliklerinin karşılaştırılması düşünülmektedir.

5. KAYNAKLAR

ABU-SAYMEH, S. 1995. One dimensions of finitely generated modules. *Communications in Algebra*, 23: 1131-1144.

ABUHLAIL, J. 2015. Zariski topologies for coprime and second submodules. *Algebra Colloquium*, 22 (1): 47-72.

ALKAN, M. 2004. Asal, Yoğun ve Tersinir Alt Modüller Yardımı ile Bir Halkanın Karakterizasyonu. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

ALKAN, M. and TIRAŞ, Y. 2006. Projective modules and prime submodules.*Czechoslovak Math. Journal*, 56 (2): 601-611.

ALKAN, M. and TIRAŞ, Y. 2007. On prime submodules. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 37 (3): 709-722.

ANDERSON, W and FULLER, K.R. 1992. Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, New York.

ANDRUNAKIEVICH, V.A. 1983. On completely prime ideals of a ring. *Mat. Sb. (N.S)*, 3 (7): 291-296.

ANNIN, S. 2002. Associated and Attached Primes over Noncommutative Rings. Thesis of Doctor of Philosophy in Mathematics, University of California, Berkeley.

ANSARI-TOROGHY, H. and FARSHADIFAR, F.H. 2012. On the dual notion of prime submodules (II). *Mediterranean Journal of Mathematics*, 9: 327-336.

ANSARI-TOROGHY, H. and FARSHADIFAR, F. 2014. The Zariski topology on the second spectrum of a module. *Algebra Colloquium*, 671: 327-336.

ANSARI-TOROGHY, H., KEYVANI, S. and FARSHADIFAR, F.H. 2016. On the second spectrum of a module (II). *Bulletin of the Malysian Mathematical Science Society*, 39: 1089-1103.

ATIYAH, M.F. and MACDONALD, I.G. 1969. Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley Publishing, London.

AZIZI, A. 2007. Radical formula and prime submodule. *Journal of Algebra*, 307: 454-460.

BEHBOODI, M. 2007. A generalization of Baer's lower nilradical for modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, 6 (2): 337-353.

BEHBOODI, M. and HADDADİ, M.R. 2008a. Classical Zariski topology of modules and spectral spaces I. *International Electronic Journal of Algebra*, 4: 104-130.

BEHBOODI, M. and HADDADİ, M.R. 2008b. Classical Zariski topology of modules and spectral spaces II. *International Electronic Journal of Algebra*, 4: 131-148.

BEHBOODI, M. 2009. On the prime radical and Baer's lower nilradical of modules. *Acta Mathematica Hungarica*, 122 (3): 293-306.

BLAND, P.E. 2011. Rings and Their Modules. De Gruyter, Berlin.

BOURBAKI, N. 1961. Algebra Commutative. Herman, Paris.

BOURBAKI, N. 1966a. Elements of Mathematics: General Topology Part 1, Addison Wesley, Massachusetts.

BOURBAKI, N. 1966b. Elements of Mathematics: General Topology Part 2, Addison Wesley, Massachusetts.

CHANDRAN, V.R. 1977. On two analogues of Cohen's theorem. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 8 (1): 54-59.

COHEN, I. S. 1946. On the structure and ideal theory of complete local rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 59: 54-106.

COHEN, I. S. 1950. Commutative rings with restricted minimum condition. *Duke Math. Journal*, 17: 27-42.

ÇALLIALP, F. and TEKİR, Ü. 2004. On the prime radical of a module over a noncommutative ring. *Taiwanese Journal of Mathematics* , 8 (2): 337-341.

ÇEKEN, S. and ALKAN, M. 2011. Dual of Zariski topology for modules. *AIP Conference Proceedings*, 1389 (1): 357-360.

ÇEKEN, S. and ALKAN, M. 2012. On τ-extending modules. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 9: 129-142.

ÇEKEN, S. and ALKAN, M. 2013. On prime submodules and primary decompositions in two-generated free modules. *Taiwanese Journal of Mathematics*,17: 133-142.

ÇEKEN, S., ALKAN, M. and SMITH, P.F. 2013a. Second modules over noncommutative rings. *Communications in Algebra*, 41 (1): 83-98.

ÇEKEN, S., ALKAN, M. and SMITH, P.F. 2013b. The dual notation of the prime radical of a module. *Journal of Algebra*, 392: 265-275.

ÇEKEN, S. 2014. Asal ve Eşasal Alt Modüller Yardımıyla Modül ve Halka Karakterizasyonlarının Belirlenmesi. Doktora Tezi, Akdeniz Universitesi, Antalya.

ÇEKEN, S. and ALKAN, M. 2015a. On second submodules. *American Mathematical Society Contemporary Mathematics Series*, Volume 634.

ÇEKEN, S. and ALKAN, M. 2015b. On the second spectrum and the second classical Zariski topology of a module. *Journal of Algebra and Its Applications*, 14 (8): 1-13.

DAUNS, J. 1978. Prime modules. *J. Reine Angew Mathematik*, 298: 156-181.

DAUNS, J. 1980. Prime modules and one-sided ideals. *In ring theory and algebra III. Proceeding of the Third Oklahoma Conference, (B.R. McDonald ed.). Dekker. New York*, 301-344.

DUMMIT, D.S. and FOOTE, R.M. 1999. Abstract Algebra, Prentice Hall, New Jersey.

DUNG, N.V., HUYNH, D.V., SMITH, P.F. and WISBAUER, R. 1994. Extending Modules, Longman, Guildford.

EISENBUD, D. and ROBSON, I.C. 1970. Modules over Dedekind Prime Rings. *Journal of Algebra*, 16: 67-85.

FARSHADIFAR, F.H. 2013. Modules with noetherian second spectrum. *Journal of Algebra and related topics*, 1 (1): 19-30.

FELLER, E.H. and SWOKOWSKI, E.W. 1965. Prime modules. *Canad. J. Math.*, 17: 1041-1052.

GARDNER, B.J. and WIEGANDT, R. 2004. Radical Theory of Rings. Marcel Dekker, New York.

GOLDIE, A.W. 1962. Non-commutative principal ideal rings. *Arch. Math.*, 13: 213-221.

GOODEARL, K.R. and WARFIELD, R.B. 2004. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. London Math. Soc. Student Texts 16, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

HUYNH, D.V. 1988. A note on rings with chain conditions. *Acta Mathematica Hungarica,* 51 (1-2): 65-70.

JATEGAONKAR, A.V. 1968. Left principal ideal domains. *Journal of Algebra*, 8 (2): 148-155.

JENKINS, J. and SMITH, P.F. 1992. On the prime radical of a module over a commutative ring. *Comm. Algebra*, 20 (12): 3593-3602.

KAPLANSKY, I. 1974. Commutative Rings. The University of Chicago Press, Chicago.

KARAKAŞ, H.I. 1972. On Noetherian modules. *METU J. Pure Appl. Sci.*, 5: 165-168.

KLEINER, I. 2007. A History of Abstract Algebra. Birkhäuser, Boston.

KOH, K. 1971. On one sided ideals of a prime type. *Proc. Amer. Math. Society*, 28: 321-329.

KUNZ, E. 1985. Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Birkhäuser, Boston.

LAM, T.Y. 1991. A First Course in Noncommutative Rings. Springer-Verlag, New York.

LAM, T.Y. 1999. Lectures On Modules and Rings. Springer-Verlag, New York.

LAM, T.Y. 2003. Exercises in Classical Ring Theory. Springer-Verlag, New York.

LAM, T.Y. 2007. Exercises in Modules and Rings. Springer-Verlag, New York.

LEUNG, K.H. and MAN, H.S. 1997. On commutative noetherian rings which satisfy the radical formula. *Glasgow Math Journal*, 39: 285-293.

LU, C.P. 1984. Prime submodules of modules. *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 33 (1): 61-69.

LU, C.P. 1989. M-radicals of submodules in modules. *Math. Japonica*, 34 (2): 211-219.

LU, C.P. 1995. Spectra of modules. *Comm. Algebra*, 23 (10): 3741-3752.

LU, C.P. 1997. Unions of prime submodules. *Houston Journal of Mathematics*, 23 (2): 203-213.

LU, C.P. 1999. The Zariski topology on the prime spectrum of a module. *Houston Journal of Mathematics*, 25 (3): 417-432.

LU, C.P. 2010. Modules with noetherian spectrum. *Comm. Algebra*, 38: 807-828.

MAN, S.H. 1996. One dimensional domains which satisfy the radical formula are Dedekind domains. *Archiv der Mathematik*, 66: 276-279.

MAN, S.H. and SMITH, P.F. 2002. On chains of prime Submodules. *Israil Journal of Mathematics*, 127: 131-155.

MATSUMARA, H. 1986. Commutative Ring Theory. Cambridge University Press, Cambridge.

MCCASLAND, R. L., MOORE, M.E. and SMITH, P.F. 1968. Rings with noetherian spectrum. *Duke Math. Journal*, 35: 631-639.

MCCASLAND, R. L. and MOORE, M. E. 1991. On radicals of submodules. *Comm. Algebra*, 19 (5): 1327-1341.

MCCASLAND, R. L. and SMITH, P.F. 1993. Prime submodules of noetherian modules. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 23 (3): 1041-1062.

MCCASLAND, R. L., MOORE, M.E. and SMITH, P.F. 1997. On the spectrum of a module over a commutative ring. *Comm. Algebra*, 25 (1): 79-103.

MCCONNEL, J.C. and ROBSON, J.C. 1987. Noncommutative Noetherian Rings. Wiley-Interscience, Chichester.

MORADI, S. and AZIZI, A. 2015. Generalizations of prime submodules. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44 (3): 587-595.

ÖNEŞ, O. and ALKAN, M. 2017a. On left O-prime ideals over a noncommutative ring. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 27 (1): 107-113.

ÖNEŞ, O. and ALKAN, M. 2017b. The radical formula for noncommutative rings. *Ukrainian Mathematical Journal*, (kabul edildi).

ÖNEŞ, O. and ALKAN, M. 2017c. The structure of some topologies on a module. *Book Series: AIP Conference Proceedings*, (baskıda).

PUSAT-YILMAZ, D. and SMITH, P.F. 2002. Modules which satisfy the radical formula. *Acta Mathematica Hungarica*, 95 (1-2): 155-167.

REYES, M.L. 2010. One-sided prime ideals in noncommutative algebra. Thesis of Doctor of Philosophy in Mathematics, University of California, Berkeley.

SHARP, R.Y. 2001. Steps in Commutative Algebra. Cambridge University Press, Cambridge.

SHARPE, D.W. and VAMOS, P. 1972. Injective Modules. Cambridge University Press, London.

SMITH, P.F. 2001. Primary modules over commutative rings. *Glasgow Math. Journal*, 43: 103-111.

SMITH, P.F. 2004. Radical submodules and uniform dimension of modules. *Turkish Journal of Mathematics*, 28: 255-270.

TIRAŞ, Y. and ALKAN, M. 2003. Prime modules and submodules. *Comm. in Algebra*, 31: 395-396.

YASSEMI, S. 2001. The dual notion of prime submodules. *Archivum Mathematicum*, 37 (4): 273-278.

ZARISKI, O. and SAMUEL, P. 1975. Commutative Algebra Vol. 1. Springer-Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Mersin'in Tarsus ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Tarsus'ta tamamladı. 2005 yılında başladığı Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik bölümünden 2009 yılında mezun oldu. 2010-2011 güz döneminde başladığı Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü yüksek lisans programından 2012-2013 güz dönemi sonunda mezun oldu. 2012-2013 bahar yarıyılında başladığı Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü doktora programına devam etmektedir.