T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ÇEŞİTLİ YARIGRUPLARIN DOĞURDUĞU KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖR AİLELERİNİN YAKINSAMA HIZLARININ İNCELENMESİ

Selim ÇOBANOĞLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ÇEŞİTLİ YARIGRUPLARIN DOĞURDUĞU KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖR AİLELERİNİN YAKINSAMA HIZLARININ İNCELENMESİ

Selim ÇOBANOĞLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ÇEŞİTLİ YARIGRUPLARIN DOĞURDUĞU KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖR AİLELERİNİN YAKINSAMA HIZLARININ İNCELENMESİ

Selim ÇOBANOĞLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 21/07/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Prof. Dr. Salih AYTAR

Doç. Dr. Melih ERYİĞİT

Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN

Yrd. Doç. Dr. Zafer ŞANLI

# ÖZET

## ÇEŞİTLİ YARIGRUPLARIN DOĞURDUĞU KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖR AİLELERİNİN YAKINSAMA HIZLARININ İNCELENMESİ

**Selim ÇOBANOĞLU**

**Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı**
**Danışman: Prof. Dr. İlham ALİYEV**
**Temmuz 2017, 47 sayfa**

Harmonik Analizin önemli problemlerinden biri, potansiyel tipli integral operatörler için terslerini bulma formüllerinin elde edilmesidir. Bu konudaki çalışmalar hipersingüler integral tekniklerinin kullanılmasıyla geliştirilmiştir. Bu tez çalışmasında, Poisson, metaharmonik ve Gauss-Weierstrass yarıgruplarının doğurduğu ve bir $\varepsilon$ parametresine bağlı kesikli hipersingüler integraller aileleri tanıtılmış, ardından $L_p$'den alınan bir $\varphi$ fonksiyonunun pürüzsüzlük derecesi ile, bu kesikli hipersingüler integral ailelerinin $\varepsilon \to 0$ için noktasal ve $L_p$-uzayının normunda yakınsama hızları arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca, benzer problem Fourier-Bessel Harmonik Analizi çerçevesinde ifade edilip genelleşmiş Riesz potansiyellerinin terslerini bulmak için oluşturulan kesikli hipersingüler integral operatörler için de incelenmiştir.



**ANAHTAR KELİMELER:** Riesz potansiyelleri, Bessel potansiyelleri, genelleşmiş Riesz potansiyelleri, Poisson yarıgrubu, Gauss-Weierstrass yarıgrubu, metaharmonik yarıgrup, kesikli hipersingüler integraller, yakınsama hızı, genelleşmiş kayma operatörü.


**JÜRİ:** Prof. Dr. İlham ALİYEV (Danışman)
Prof. Dr. Salih AYTAR
Doç. Dr. Melih ERYİĞİT
Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN
Yrd. Doç. Dr. Zafer ŞANLI

## ABSTRACT

**INVESTIGATION OF THE RATE OF CONVERGENCE OF TRUNCATED HYPERSINGULAR INTEGRAL FAMILIES GENERATED BY VARIOUS SEMİGROUPS**

**Selim ÇOBANOĞLU**

**PhD Thesis in Mathematics**
**Supervisor: Prof. Dr. İlham ALİYEV**
**July 2017, 47 pages**

In Harmonic Analysis, an important problem is to obtain inversion formulas for the potential-type integral operators. The studies on this subject have been developed by the use of hypersingular integral techniques. In this thesis, the families of truncated hypersingular integrals generated by the Poisson, metaharmonic and Gauss-Weierstrass semigroups and dependent on a parameter $\varepsilon$, are introduced. Then the connection between the order of smoothness of a given $L_p$-function $\varphi$ and the rate of convergence of these families of truncated hypersingular integrals, which converge to $\varphi$ when $\varepsilon$ tends to $0$, is obtained. Also, similar problem is expressed for generalized Riesz potentials in framework of Fourier-Bessel Harmonic Analysis.

**KEYWORDS:** Riesz potentials, Bessel potentials, generalized Riesz potentials, Poisson semigroup, Gauss-Weierstrass semigroup, metaharmonic semigroup, truncated hypersingular integrals, rate of convergence, generalized translation operator.

**COMMITTEE:** Prof. Dr. İlham ALİYEV (Supervisor)
Prof. Dr. Salih AYTAR
Assoc. Prof. Dr. Melih ERYİĞİT
Assoc. Prof. Dr. Sinem SEZER EVCAN
Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

# ÖNSÖZ

Harmonik Analizin geliştirmiş olduğu kavramlar ve matematiksel teknikler, teorik matematiğin çeşitli dallarında olduğu gibi, uygulamalı matematikte, Fen ve Mühendisliğin birçok alanında geniş şekilde uygulanmaktadır. Harmonik Analizin en önemli teknik araçlarından biri de potansiyel tipli operatörlerdir. Klasik Riesz ve Bessel potansiyelleri olarak adlandırılan ve sırasıyla, $I^\alpha\varphi$ ve $J^\alpha\varphi$ ile gösterilen integral operatörler, Fourier dönüşümü dilinde

$$(I^\alpha\varphi)^\frown(x) = |x|^{-\alpha}\,\widehat{\varphi}\,(x)\,,\ x\in\mathbb{R}^n,\ 0<\alpha<n;$$

$$(J^\alpha\varphi)^\frown(x) = \left(1+|x|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}\widehat{\varphi}\,(x)\,,\ x\in\mathbb{R}^n,\ 0<\alpha<\infty$$

şeklinde tanımlanır.

Potansiyeller teorisinin önemli problemlerinden biri, potansiyel tipli integral operatörlerin terslerini bulmakla ilgilidir. Hipersingüler integraller teorisi adı ile bilinen teori, Riesz ve Bessel potansiyellerinin terslerini bulmak amacıyla ortaya çıkmıştır.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, Klasik Riesz ve Bessel potansiyellerinin terslerini belirlemek için tanımlanan; Poisson (Abel-Poisson) ve metaharmonik yarıgrupları yardımıyla oluşturulan ve bir $\varepsilon$ parametresine bağlı olan kesikli hipersingüler integral ailelerinin, $\varepsilon$ sıfıra giderken noktasal yaklaşım hızını, potansiyel operatörün etki ettiği fonksiyonun pürüzsüzlük derecesine bağlı olarak incelenmiştir. Daha sonra, benzer problem, $L_p$-yaklaşım için ifade edilerek çözülmüştür. Burada, Gauss-Weierstrass yarıgrubu yardımıyla oluşturulan kesikli hipersingüler integral ailelerinin $L_p$-uzayının normundaki yaklaşım hızları da incelenmiştir. Son olarak ise problem, Fourier-Bessel Harmonik Analizi çerçevesinde ifade edilmiş ve genelleşmiş kaymanın doğurduğu yarıgruplar kullanılarak çözülmüştür.

Bu çalışma teorik nitelikte olup, klasik Harmonik Analizde, Laplace-Bessel Harmonik Analizin çeşitli alanlarında, Fonksiyonel Uzaylarda ve zayıf tekilliğe sahip çekirdekli integral denklemler alanında çalışan matematikçiler için yardımcı kaynak rolünü oynayabilir.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. İlham ALİYEV'e, bölümümüzün diğer hocalarına ve doktora öğrenimim boyunca 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamındaki desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

# 1. GİRİŞ

Klasik Fourier Analizinin ve onun genişletilmesinden ortaya çıkan Harmonik Analizin geliştirmiş olduğu kavramlar ve matematiksel teknikler, teorik matematiğin çeşitli dallarında olduğu gibi, uygulamalı matematikte, Fen ve Mühendisliğin birçok alanında geniş şekilde uygulanmaktadır. Çeşitli integral dönüşümler (örneğin, Fourier ve Laplace dönüşümü), Fourier serileri, singüler integraller, maksimal operatörler v.b. Harmonik Analizin uyguladığı teknik araçlardan bazılarıdır. Harmonik Analizin çok önemli teknik araçlarından biri de potansiyel tipli operatörlerdir. Matematiğin bazı önemli diferansiyel operatörlerinin negatif “kesirsel” kuvvetleri olarak yorumlanan potansiyel tipli integral operatörler, önemli fonksiyonel uzayların (Sobolev uzayları, Riesz ve Bessel potansiyelleri uzayları v.b.) incelenmesinde, kısmi türevli denklemlerin çözümlerinde, çeşitli integral dönüşümlerin (örneğin, Radon dönüşümünün) terslerinin bulunmasında ve başka alanlarda kullanılmaktadır.

Laplace diferansiyel operatörü diye adlandırılan

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

diferansiyel operatörünün, matematiğin en ünlü diferansiyel operatörlerinden biri olduğu iyi bilinmektedir (örneğin, klasik dalga denklemi ve ısı geçirme denklemi bu operatör yardımıyla ifade edilir). Klasik Riesz potansiyelleri diye adlandırılan integral operatörler, $(-\Delta)$ operatörünün negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanmaktadır. Benzer şekilde, klasik Bessel potansiyelleri diye adlandırılan integral operatörler de, $I$ birim operatör olmak üzere, $(I-\Delta)$ diferansiyel operatörünün negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanmaktadır. Bunların her ikisi de, zayıf singülariteye (tekilliğe) sahip olan girişim (konvolusyon) tipli integral operatörlerdir.

Potansiyeller teorisinin önemli problemlerinden biri de, potansiyel tipli integral operatörlerin terslerini bulmakla ilgilidir. Hipersingüler integraller teorisi adı ile bilinen teori, Riesz ve Bessel potansiyellerinin terslerini bulmak amacıyla ortaya çıkmıştır. Bu konuda geniş bilgi, S. Samko, A. Kilbas ve O. Marichev’in (1993) ansiklopedik değere sahip kitabında, S. Samko’nun (2002) kitabında, B. Rubin’in (1996) kitabında ve çok sayıda başka kitap ve makalelerde bulunabilir.

1950 yıllarından bu yana, singüler Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile sıkı bağlantılı olan Fourier-Bessel Harmonik Analizi denilen Harmonik Analiz gelişmeye başlamış ve Klasik Fourier Harmonik Analizinde Riesz ve Bessel potansiyellerinin oynadığı rolü, Fourier-Bessel Harmonik Analizinde, doğal olarak, Laplace-Bessel operatörünün doğurduğu Bessel kayması (genelleşmiş kayma) ile ilişkilendirilen Riesz ve Bessel potansiyelleri oynamıştır. Bu potansiyellerin temel özellikleri Gadjiev(Hacıyev) ve Aliyev tarafından (Gadjiev ve Aliev 1988) verilmiş ve birçok yayında bu potansiyeller, çeşitli açılardan incelenmiştir (örneğin, Aliev ve Bayrakci (1998, 2002), Aliev ve Rubin (2005), Aliev vd (2008), Aliev (2009), Sezer ve Aliev (2010) kaynaklarına bakılabilir).

B. Rubin, 1986 yılında yayınlanan makalesinde, potansiyellerin terslerini bulmak için yeni bir method uygulamıştır. O, Abel-Poisson ve metaharmonik yarıgrupların doğurduğu hipersingüler integral operatörleri ailelerini tanımlamış ve böylelikle, çok değişkenli problemi tek değişkenli başka bir probleme indirgeyerek, Riesz ve Bessel potansiyellerinin tersleri için yeni formüller bulmuştur. Bu konuda Samko vd (1993) ve Rubin (1996) kitaplarında da geniş bilgi verilmiştir. Söz konusu makalesinde B. Rubin, Poisson (Abel-Poisson) ve metaharmonik yarıgrupların doğurduğu ve bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı "kesikli" hipersingüler integral operatörler ailelerini tanımlamıştır. Daha sonra, $L_p(\mathbb{R}^n), (1 \leq p < \infty)$ uzayından alınmış bir $\varphi$ fonksiyonunun Riesz (veya Bessel) potansiyeli ile, $\varepsilon$ parametresine bağlı "kesikli" hipersingüler integral operatörler ailesinin kompozisyonunu oluşturmuş ve $\varepsilon \to 0$ için bu kompozisyonun $\varphi$'ye noktasal ve $L_p$-normunda yakınsadığını göstermiştir.

Doğal olarak, ortaya şöyle bir soru çıkar: $\varphi$ fonksiyonu, lokal olarak bir noktada, veya global olarak $L_p$-anlamında bir tür "pürüzsüzlüğe" sahip olsun. Bu fonksiyonun "pürüzsüzlük" derecesine bağlı olarak, yukarıda bahsi geçen kompozisyonun, $\varepsilon \to 0$ için $\varphi$ fonksiyonuna (noktasal veya $L_p$-anlamında) yakınsama hızı hakkında bir yorum yapılabilir mi?

Aliev ve Eryiğit tarafından, 2013 yılında yayınlanan çalışmada, Gauss-Weierstrass yarıgrubu ve modifiye edilmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubu yardımıyla oluşturulan ve $L_p(\mathbb{R}^n), (1 \leq p < \infty)$ uzayından alınmış bir $\varphi$ fonksiyonunun Riesz ve Bessel potansiyelleri ile, $\varepsilon$ parametresine bağlı "kesikli" hipersingüler integral operatörler ailelerinin kompozisyonunun $\varphi(x^0)$'a yakınsama hızı, $\varphi$ 'nin bir $x^0 \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki "pürüzsüzlük" göstergesi (noktasal anlamda) dikkate alınarak, incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının esas amacı: a) Klasik Riesz ve Bessel potansiyellerinin terslerini belirlemek için tanımlanan; Poisson ve metaharmonik yarıgrupları yardımıyla oluşturulan ve bir $\varepsilon$ parametresine bağlı olan kesikli hipersingüler integral ailelerinin, $\varepsilon$ sıfıra giderken noktasal yaklaşım hızını, potansiyel operatörün etki ettiği fonksiyonun pürüzsüzlük derecesine bağlı olarak incelemek; b) benzer problemi, $L_p$-yaklaşım için ifade ederek çözmek; c) yukarıdaki alt başlıklarda sunulmuş problemleri, Fourier-Bessel Harmonik Analizi çerçevesinde ifade etmek ve genelleşmiş kaymanın doğurduğu yarıgrupları kullanarak, çözmeye çalışmaktır.

Tez çalışması, Giriş ve Kaynaklar bölümü dışında üç kısımdan ibarettir.

Birinci kısımda, kaynak taraması yapılarak tez çalışması boyunca gerekli olan bilgiler verilmiş ve bu konuda daha önce yapılmış olan çalışmalar hakkında kısa bilgilendirmeler yapılmıştır.

İkinci kısım, üç alt bölümden oluşmaktadır.

-Birinci bölümde, klasik Riesz potansiyellerinin terslerini bulmak için kurulan, Poisson yarıgrubunun doğurduğu ve bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı kesikli hipersingüler integral ailesinin, $\varepsilon$ sıfıra giderken noktasal yaklaşım hızı, potansiyel operatörün etki ettiği fonksiyonun $\mu$-pürüzsüzlük derecesine bağlı olarak incelenerek çeşitli tahminler elde edilmeye çalışılmıştır. Yine bu bölümde, benzer sonuçlar, klasik Bessel potansiyellerinin terslerini bulmak için kurulan, metaharmonik yarıgrubunun doğurduğu ve bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı kesikli hipersingüler integral operatörler ailesi için de elde edilmiştir.

-İkinci bölümde, klasik Riesz potansiyelleri için kurulan, Poisson yarıgrubunun doğurduğu kesikli hipersingüler integral operatörler ailesi ve klasik Bessel potansiyelleri için kurulan, metaharmonik yarıgrubun doğurduğu kesikli hipersingüler integral operatörler ailesinin $L_p$-uzayının normundaki yakınsama hızları, potansiyellerin etki ettiği fonksiyonların $L_p$ anlamında pürüzsüzlük göstergesi göz önünde bulundurularak, incelenmiştir. Yine, benzer şekilde, klasik Riesz potansiyelleri için kurulan, Gauss-Weierstrass yarıgrubunun doğurduğu kesikli hipersingüler integral ailesi ve klasik Bessel potansiyelleri için kurulan, modifiye edilmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubunun doğurduğu kesikli hipersingüler integral ailesi için $L_p$-uzayının normunda yakınsama hızları incelenmiştir.

-Üçüncü bölümde de, Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu genelleştirilmiş Riesz potansiyellerinin terslerini bulmak için oluşturulan kesikli hipersingüler integral operatörlerin yakınsama hızları, bir "pürüzsüzlük göstergesine" bağlı olarak incelenmiştir.

Üçüncü kısım ise, tez çalışması boyunca elde edilen sonuçların ifade edildiği kısımdır.

## 2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Bu bölümde bu tez çalışmasına temel oluşturacak bazı bilgiler ifade edilecektir.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ sırasıyla tam sayılar, doğal sayılar, reel sayılar ve kompleks sayılar kümeleri olmak üzere, $n$ boyutlu Öklid uzayı ve bu uzaydaki norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_j \in \mathbb{R}, \forall j = 1, ..., n\}\,; \;\; |x| = \left(x_1^2 + ... + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty; \|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

normuyla tanımlı, $\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir fonksiyonların klasik Lebesgue uzayıdır.

$L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile, $\mathbb{R}^n$'in her noktasının her $\delta$-komşuluğunda integrallenen fonksiyonlar uzayı gösterilecektir.

$C(\mathbb{R}^n)$ ile de $\mathbb{R}^n$'de sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı gösterilecektir.

Aşağıda kullanılacak olan "$hhh$" kısaltması, "hemen hemen her" anlamına gelecektir.

Bir başka kısaltma da $O$ (büyük O) sembolü ile ilgilidir:

$$a(\varepsilon) = O(b(\varepsilon)), \varepsilon \to 0 \Longleftrightarrow \exists c > 0, \;\; |a(\varepsilon)| \leq c\,|b(\varepsilon)|.$$

Şimdi tez boyunca kullanılacak olan bazı özel fonksiyonlar, eşitsizlikler, özel dönüşümler ve semboller kısaca tanıtılacak ve bazı önemli özellikleri verilecektir.

(a) **Gamma Fonksiyonu ve Bazı Özellikleri (**Samko vd 1993, Rubin 1996**):**

$\operatorname{Re} z > 0$ için Gamma fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Gamma fonksiyonunun bazı temel özellikleri şöyledir:

$i)\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \operatorname{Re} z > 0,$

$ii)\ \Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N},$

$iii)\ \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},\ (z\in\mathbb{Z})\,.$

(b) **Hardy-Littlewood Maksimal Fonksiyonu (**Stein 1970, Rubin 1996):

$f\in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$(\boldsymbol{M}\varphi)(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|\varphi(y)|\,dy \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, supremum, $x$'i içeren tüm $Q$ yuvarları (küpleri) üzerinden alınmıştır. $|Q|$ ile söz konusu yuvarın (küpün) hacmi gösterilmiştir.

(c) **McDonald Fonksiyonu** (Rubin 1996):

$r>0$ için $\nu$ dereceden McDonald fonksiyonu

$$\mathbb{K}_\nu(r)=\begin{cases}\left(\frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-r}\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right), & r>1,\\ \frac{(n-1)!}{2\left(\frac{r}{2}\right)^{\nu}}+O\left(r^{2-\nu}\right), & r<1,\nu\neq 0,\nu\in\mathbb{Z},\\ \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^{-|\nu|}}{2\sin(|\nu|\pi)\Gamma(1-|\nu|)}+O\left(r^{-\nu}\right), & r<1,\nu\notin\mathbb{Z},\\ \log\left(\frac{1}{r}\right)+O(1), & r<1,\nu=0,\end{cases} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır.

(d) **Hölder Eşitsizliği (**Samko vd 1993**):**

$f_1\in L_p,\ f_2\in L_q,\ 1\leq p,q\leq\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(x)\,f_2(x)|\,dx\leq\|f_1\|_p\,\|f_2\|_q \tag{2.3}$$

olur. Burada $p=\infty$ için $q=1$ olup $\|f\|_\infty=ess\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$'tir.

(e) **Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği** (Stein 1970, Folland 1984):

$1\leq p\leq\infty$ ve $\varphi(x,y)$ , $\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_y^m$'de ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\left\|\int_{\mathbb{R}_y^m}\varphi(x,y)\,dy\right\|_{L_p(\mathbb{R}_x^n)}\leq\int_{\mathbb{R}_y^m}\|\varphi(\cdot,y)\|_{L_p(\mathbb{R}_x^n)}\,dy$$

eşitsizliği sağlanır.

(f) **Klasik Fourier ve Ters Fourier Dönüşümleri ve Özellikleri** (Stein 1970, Sadosky 1979):

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(\xi)\, d\xi$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ olmak üzere, $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$'dir.

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü ise

$$f^{\vee}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)\, d\xi$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki tanımlar göz önüne alınırsa,

$$f^{\vee}(\xi) = (2\pi)^{-n} \widehat{f}(-\xi)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Fourier dönüşümünün iyi bilinen bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir:

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda,

i) $f\hat{}(x)$ sınırlı fonksiyondur ve $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

ii) $f\hat{}(x)$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}^n$'de düzgün süreklidir.

iii) $f \geq 0$ olsun. O zaman

$$\|f\hat{}\|_\infty = \|f\|_1 = f\hat{}(0)$$

eşitliği sağlanır.

iv) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f\hat{}(x) = 0$ 'dır.

v) $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g\hat{}(x) dx$$

eşitliği sağlanır.

(g) **Poisson Yarıgrubu ve Özellikleri** (Stein 1970, Rubin 1996):

$p\,(y;t)\,,(y \in \mathbb{R}^n, 0 < t < \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$p\,(y;t) = \left(e^{-t|\cdot|}\right)^{\vee}(y) = \frac{a_n t}{\left(t^2 + |y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}},\ a_n = \pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right). \tag{2.4}$$

Bu şekilde tanımlanan $p\,(y;t)$ fonksiyonuna Poisson çekirdeği denir. $P_t\varphi$ ile gösterilen ve Poisson yarıgrubu diye adlandırılan integral operatörler ailesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(P_t\varphi)\,(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p\,(y;t)\,\varphi\,(x-y)\,dy,\ \ (t>0)\,. \tag{2.5}$$

Bu yarıgrubun bazı temel özellikleri aşağıdaki lemmada verilmiştir.

**Lemma 2.1.** *(Rubin 1996)*

$i)$ *Her* $t > 0$ *için* $p\,(\cdot;t) \in L_1$ *olup*

$$\int_{\mathbb{R}^n} p\,(y;t)\,dy = 1 \text{ ve } (p\,(\cdot;t))\,\hat{}\,(\xi) = e^{-t|\xi|} \tag{2.6}$$

*eşitlikleri sağlanır.*

$ii)$ $\varphi \in L_p, 1 \le p \le \infty$ *olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:*

*1)* $\|P_t\varphi\|_p \le \|\varphi\|_p\,;$

*2)* $\sup\limits_x |(P_t\varphi)\,(x)| \le ct^{-\frac{n}{p}}\,\|\varphi\|_p\,,$ *c sayısı t'den bağımsızdır;*

*3)* $hhh\ x \in \mathbb{R}^n$ *için* $\sup\limits_{t>0} |(P_t\varphi)\,(x)| \le (\boldsymbol{M}\varphi)\,(x)\,;$

*burada* $(\boldsymbol{M}\varphi)\,(x)$*, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur (bakınız: (2.1) );*

*4)* $P_\tau\,[P_t\varphi\,(\cdot)]\,(x) = (P_{t+\tau}\varphi)\,(x)\,,\ t>0,\ \tau>0;$ *(yarıgrup özelliği)*;

*5)* $(hhhy) - \lim\limits_{t\to 0}(P_t\varphi)\,(x) = \varphi\,(x)\,.$

*Başka ifadeyle,* $\lim\limits_{t\to 0}(P_t\varphi)\,(x) = \varphi\,(x)$ *eşitliği hhh* $x \in \mathbb{R}^n$ *için sağlanır.*

*6)* $(L_p) - \lim\limits_{t\to 0}(P_t\varphi)\,(x) = \varphi\,(x)\,, 1 \le p < \infty.$

*Başka ifadeyle,*

$$\lim_{t\to 0} \|P_t\varphi - \varphi\|_p = 0$$

*eşitliği sağlanır.*

(h) **Metaharmonik Yarıgrup ve Özellikleri** (Rubin 1996)**:**

$m\,(y;t)\,,(y\in\mathbb{R}^n, t>0)$ fonksiyonu,

$$m\,(y;t) = \left(e^{-t\sqrt{1+|\cdot|^2}}\right)^{\vee}(y) = \frac{2t}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{\mathbb{K}_{\frac{n+1}{2}}\left(\sqrt{t^2+|y|^2}\right)}{\left(\sqrt{t^2+|y|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanan metaharmonik çekirdek olmak üzere, $M_t\varphi$ ile gösterilen metaharmonik yarıgrup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(M_t\varphi)\,(x) = \int_{\mathbb{R}^n} m\,(y;t)\,\varphi\,(x-y)\,dy,\ \ (t>0)\,.$$

Burada, $\mathbb{K}_{\frac{n+1}{2}}\,(r)$, McDonald fonksiyonudur (bakınız: (2.2)).

Aşağıdaki lemmada, bu yarıgrubun bazı önemli özellikleri verilmiştir.

**Lemma 2.2.** *(Rubin 1996)*

*i)* $m\,(y;t)$ *pozitiftir, her* $t>0$ *için* $m\,(\cdot;t)\in L_1$ *olup,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} m\,(y;t)\,dy = e^{-t}\ \textit{ve}\ \ (m\,(\cdot;t))^{\wedge}(\xi) = e^{-t\sqrt{1+|\xi|^2}} \tag{2.8}$$

*eşitlikleri sağlanır.*

*ii)* $\varphi\in L_p$, $1\le p\le\infty$ *olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:*

*1)* $\|M_t\varphi\|_p \le c_1\,\|\varphi\|_p$ , *(*$c_1$ *sayısı t'den bağımsızdır)*;

*2)* $\sup\limits_{t>0}|(M_t\varphi)\,(x)| \le c_2\,(\boldsymbol{M}\varphi)\,(x)$ ,
*burada* $(\boldsymbol{M}\varphi)\,(x)$ , *Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur;*

*3)* $\sup\limits_{x}|(M_t\varphi)\,(x)| \le c_3 e^{(\nu-1)t}t^{-\frac{n}{p}}\,\|\varphi\|_p$ , $(\forall\nu>0)$ ;

*burada* $c_3, t > 0$ *parametresine bağlı değildir*;

*4)* $(M_t M_\tau \varphi)(x) = (M_{t+\tau}\varphi)(x), \ (\forall t, \tau > 0);$

*5)* $(hhhy) - \lim\limits_{t \to 0^+} (M_t\varphi)(x) = \varphi(x);$

*6)* $(L_p) - \lim\limits_{t \to 0^+} (M_t\varphi)(x) = \varphi(x), \ 1 \leq p < \infty.$

$iii)$ $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ *olsun ve* $\varphi(\infty) \equiv \lim\limits_{|x| \to \infty} \varphi(x)$ *sonlu limiti var olsun. Bu durumda, her* $t > 0$ *için*

$$(M_t\varphi)(\cdot) \in C(\mathbb{R}^n) \ \textit{olup,} \ \lim_{|x| \to \infty} (M_t\varphi)(x) = e^{-t}\varphi(\infty)$$

*sağlanır. Ayrıca,* $t \to 0^+$ *için*

$$M_t\varphi \to \varphi$$

*yakınsaması tüm* $\mathbb{R}^n$*'de düzgün yakınsamadır. Dahası,* $\varphi$ *sürekli ve sınırlı ise, o zaman* $t \to 0^+$ *için*

$$M_t\varphi \to \varphi$$

*yakınsaması* $\mathbb{R}^n$*'deki her kompakt alt kümede düzgün yakınsamadır.*

Sıradaki lemma, Poisson çekirdeği ile metaharmonik çekirdek arasındaki bağıntıyı vermektedir.

**Lemma 2.3.** *(Rubin 1986, Aliev ve Bayrakci 2002)*

$m(y;t)$ *ve* $p(y;t)$*, sırasıyla metaharmonik ve Poisson çekirdekleri olsun. O halde,*

$$0 \leq m(y;t) \leq c.p(y;t)$$

*eşitsizliği sağlanır. Burada,* $c > 0$ *sayısı,* $y$ *ve* $t$*'den bağımsızdır.*

(ı) **Gauss-Weierstrass Yarıgrubu ve Özellikleri** (Rubin 1987, 1996)**:**

$y \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ olmak üzere, Gauss-Weierstrass çekirdeği

$$W(y;t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}, \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir $f(x)$, $(x \in \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu tarafından üretilen Gauss-Weierstrass yarıgrubu ise

$$(Uf)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} W(y;t) f(x-y)\, dy, \;\; (t>0),$$

şeklinde tanımlanır.

Bu yarıgrubun bazı önemli özellikleri şöyledir:

**Lemma 2.4.** *(Sadosky 1979, Rubin 1996)*

$i)$ *Her* $t>0$ *için*

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(y;t)dy = 1;$$

$ii)$ $f \in L_p, 1 \le p \le \infty$ *olsun. Bu durumda,*

*1)* $\|(Uf)(\cdot,t)\|_p \le \|f\|_p;$ (2.10)

*2)* $\sup\limits_{x} |(Uf)(x,t)| \le ct^{-\frac{n}{2p}} \|f\|_p;$ (2.11)

*3)* $\sup\limits_{t>0} |(Uf)(x,t)| \le (\boldsymbol{M}f)(x);$ (2.12)

*burada* $(\boldsymbol{M}f)(x)$, *Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur (bakınız: (2.1) );*

*4)* $U_\tau [U_t f(\cdot)](x) = (U_{t+\tau} f)(x), \; t>0, \; \tau>0$ *(yarıgrup özelliği)*;

*5)* $(hhhy) - \lim\limits_{t\to 0} (Uf)(x,t) = f(x);$

*6)* $(L_p) - \lim\limits_{t\to 0} (Uf)(\cdot,t) = f, \;\; (1 \le p < \infty).$

(i) **Modifiye Edilmiş Gauss-Weierstrass Yarıgrubu:**

Modifiye edilmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubu $U_M f$,

$$(U_M f)(x,t) = e^{-t} (Uf)(x,t); \;\; (t>0, \; x \in \mathbb{R}^n) \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır. $t=0$ için $(Uf)(x,0) = (U_M f)(x,0) = f(x)$ kabul edilir.

$(Uf)(\cdot,t)$ yarıgrubu ile ilgili daha fazla bilgi için Rubin (1987, 1996) kaynaklarına bakılabilir. Ayrıca, Samko vd (1993), Stein ve Weiss (1971) kaynaklarına da bakılabilir.

(j) **Klasik Riesz ve Bessel Potansiyelleri ve Çeşitli Gösterimleri:**

Sırasıyla, $I^{\alpha}\varphi$ ve $J^{\alpha}\varphi$ ile gösterilen ve klasik Harmonik Analizde önemli uygulamalara sahip olan Riesz ve Bessel potansiyelleri, Fourier dönüşümü dilinde

$$(I^{\alpha}\varphi)\widehat{}(x) = |x|^{-\alpha}\,\widehat{\varphi}\,(x)\,,\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < \alpha < n;$$

$$(J^{\alpha}\varphi)\widehat{}(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}\,\widehat{\varphi}\,(x)\,,\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < \alpha < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda Fourier dönüşümü dilinde tanımlanan Riesz ve Bessel potansiyellerinin integral gösterimleri, sırasıyla, şöyledir (Stein 1970):

$$(I^{\alpha}\varphi)\,(x) = \frac{1}{\gamma_n\,(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\,(y)\,|x-y|^{\alpha-n}\,dy,$$

burada,

$$\varphi \in L_p \text{ olup, } 0 < \alpha < \frac{n}{p} \text{ ve } \gamma_n\,(\alpha) = \frac{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}.$$

$$(J^{\alpha}\varphi)\,(x) = \frac{1}{\lambda_n\,(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\,(y)\,G_{\alpha}\,(x-y)\,dy,$$

burada,

$$\varphi \in L_p, 0 < \alpha < \infty,\ \lambda_n\,(\alpha) = 2^n\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

olmak üzere,

$$G_{\alpha}\,(x) = \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha-n}{2}}\,e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}\,\frac{dt}{t}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Riesz potansiyelinin, Poisson yarıgrubu vasıtasıyla (bir boyutlu) integral gösterimi şöyledir (Stein ve Weiss 1960):

$$(I^{\alpha}\varphi)\,(x) = \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\,(P_t\varphi)\,(x)\,dt.$$

Buradaki $P_t\varphi$ Poisson yarıgrubu, (2.5)'de tanımlandığı gibidir.

Bessel potansiyelinin, metaharmonik yarıgrup vasıtasıyla (bir boyutlu) integral gösterimi de şöyledir (Lizorkin 1964):

$$(J^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (M_t\varphi)(x)\, dt.$$

Buradaki $M_t\varphi$ metaharmonik yarıgrup, (2.7)'de tanımlandığı gibidir.

Ayrıca, Riesz ve Bessel potansiyelleri,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Laplace diferansiyel operatörü ve $I-$birim operatör olmak üzere, $(-\Delta)$ ve $(I-\Delta)$ operatörlerinin negatif "kesirsel kuvvetleri" olarak yorumlanabilirler (Stein 1970). Yani, formal olarak,

$$I^{\alpha}f = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f \text{ ve } J^{\alpha}f = (I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f$$

yazılabilir.

Riesz ve Bessel potansiyelleri ile ilgili geniş bilgiye, Stein (1970), Samko vd (1993), Samko (2002), Rubin (1996) kaynaklarından ulaşılabilir.

(k) **Poisson ve Metaharmonik Yarıgrupların Doğurduğu Kesikli İntegraller:**

Bir $g(t), (t \in \mathbb{R}^1)$ fonksiyonunun $l \in \mathbb{N}$ dereceden ve $\tau \in \mathbb{R}^1$ adımlı sonlu farkı şöyle tanımlanır:

$$\Delta_{\tau}^{l}[g](t) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k g(t+k\tau). \tag{2.14}$$

Rubin tarafından, bu sonlu fark ile $P_tf$ ve $M_tf$ yarıgrupları kullanılarak, "kesikli integraller" tanımlanmıştır (Rubin 1986, 1996):

$$(D_{\varepsilon}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k (P_{k\tau}f)(x)\right] \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}}, \tag{2.15}$$

$$(\mathfrak{D}_{\varepsilon}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k (M_{k\tau}f)(x)\right] \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}}. \tag{2.16}$$

Burada $l > \alpha$, $(P_0 f)(x) = (M_0 f)(x) = f(x)$ ve

$$\chi_l(\alpha) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-t}\right)^l t^{-1-\alpha} dt$$

sayısı, normalleştirici katsayı diye adlandırılır.

(l) **Gauss-Weierstrass Yarıgrubunun Doğurduğu Kesikli İntegraller:**

$(Uf)(x,t)$ ve $(U_M f)(x,t)$ yarıgrupları kullanılarak elde edilen "kesikli integraller" aşağıdaki şekilde ifade edilir (Rubin 1987, 1996):

$$(\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f)(x) = \frac{1}{\chi_l\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_\varepsilon^\infty \left[\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k (Uf)(x, k\tau)\right] \frac{d\tau}{\tau^{1+\frac{\alpha}{2}}}; \tag{2.17}$$

$$(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f)(x) = \frac{1}{\chi_l\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_\varepsilon^\infty \left[\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k (U_M f)(x, k\tau)\right] \frac{d\tau}{\tau^{1+\frac{\alpha}{2}}}, \tag{2.18}$$

burada, $\chi_l\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ katsayısı,

$$\chi_l\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-t}\right)^l t^{-1-\frac{\alpha}{2}} dt, \left(0 < \frac{\alpha}{2} < l,\ l \in \mathbb{N}\right)$$

şeklinde tanımlanan normalleştirici katsayıdır.

**Not 2.5.** *(2.15)-(2.18) kesikli integral ailelerine, kimi kaynaklarda Balakrishnan-Rubin tipli kesikli integraller de denir (Aliev ve Bayrakci 1998, Aliev ve Eryigit 2013).*

# 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

## 3.1. Çeşitli Yarıgrupların Doğurduğu Kesikli Hipersingüler İntegral Ailelerinin Noktasal Yakınsama Hızlarının İncelenmesi

B. Rubin, 1986 yılında yayınlanan çalışmasında Poisson yarıgrubunun doğurduğu $D_\varepsilon^\alpha f$ ,$(\varepsilon > 0)$ ve metaharmonik yarıgrubun doğurduğu $\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha f$, $(\varepsilon > 0)$ kesikli hipersingüler integraller ailelerini tanıtmış ve $\alpha > 0$ parametresi ile $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu üzerine konulan bazı koşullar altında $D_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi$ ve $\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi$ ifadelerinin $\varepsilon \to 0^+$ için noktasal (hemen hemen her yerde) ve $L_p$-normunda $\varphi$ 'ye yakınsadığını kanıtlamıştır. Burada, $I^\alpha \varphi$ ve $J^\alpha \varphi$, sırasıyla, $\varphi \in L_p$ fonksiyonunun Riesz ve Bessel potansiyelleri olup, $D_\varepsilon^\alpha$ ve $\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha$ aileleri (2.15)-(2.16)'daki gibi tanımlanmıştır.

Benzer şekilde B.Rubin, 1987 yılında yayınlanan çalışmasında, Gauss-Weierstrass yarıgrubunun doğurduğu kesikli hipersingüler integraller ailesini tanıtmış ve benzer sonuçları elde etmiştir.

2013 yılında Aliev ve Eryiğit tarafından yayınlanan "On a rate of convergence of truncated hypersingular integrals associated to Riesz and Bessel potentials" adlı çalışmada, Gauss-Weierstrass yarıgrubu ve modifiye edilmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubu yardımıyla oluşturulan $\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi$ ve $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi$ ifadelerinin $\varphi(x^0)$'a yakınsama hızı, $\varphi$'nin bir $x^0 \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki "pürüzsüzlük" göstergesi (noktasal anlamda) dikkate alınarak, irdelenmiştir.

Bu bölümde;

-Klasik Riesz potansiyellerinin terslerini belirlemek için kurulan, Poisson yarıgrubunun doğurduğu ve bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı kesikli hipersingüler integral ailelerinden;

-Klasik Bessel potansiyellerinin terslerini belirlemek için kurulan, metaharmonik yarıgrubun doğurduğu ve bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı kesikli hipersingüler integral ailelerinden;

-Bu ailelerin, $\varepsilon$ sıfıra giderken *noktasal yaklaşım* hızını, potansiyel operatörün etki ettiği fonksiyonun pürüzsüzlük derecesine bağlı olarak inceleme sonuçlarından bahsedilecektir.

Bunun için, ön hazırlık olarak, bazı önemli lemmalar verilecek ve gerekli kavramlar tanıtılacaktır.

**Lemma 3.1.** *(Rubin 1986, 1996)*

*i)* $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n), (1 \leq p < \infty)$ *ve* $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ *olsun. Bu durumda, her* $\varepsilon > 0$ *ve* *hemen hemen her (hhh)* $x \in \mathbb{R}^n$ *için,*

$$\left(D_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi\right)(x) = \int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\left(P_{\varepsilon\eta}\varphi\right)(x)\, d\eta \tag{3.1}$$

*eşitliği sağlanır.*

*ii)* $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n), (1 \leq p \leq \infty)$ *ve* $0 < \alpha < \infty$ *olsun. Bu durumda, her* $\varepsilon > 0$ *ve hhh* $x \in \mathbb{R}^n$ *için,*

$$\left(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi\right)(x) = \int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\left(M_{\varepsilon\eta}\varphi\right)(x)\, d\eta \tag{3.2}$$

*eşitliği sağlanır.*

*Yukarıdaki* $K_\alpha^{(l)}(\eta)$ *fonksiyonu şöyle tanımlanır:*

$$K_\alpha^{(l)}(\eta) = \left[\Gamma(1+\alpha)\chi_l(\alpha)\right]^{-1}\eta^{-1}\Delta_{-1}^l\left[\eta_+^\alpha\right]. \tag{3.3}$$

*Burada,*

$$a_+^\alpha = \left\{\begin{array}{ll} a^\alpha, & a > 0 \text{ için} \\ 0, & a \leq 0 \text{ için} \end{array}\right\}$$

*olmak üzere,* $\Delta_{-1}^l\left[\eta_+^\alpha\right] = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k}(-1)^k(\eta-k)_+^\alpha$ *olarak tanımlanmıştır.*

Aşağıdaki lemmada, $K_\alpha^{(l)}(\eta)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı ve bazı özellikleri ifade edilmiştir.

**Lemma 3.2.** *(Samko vd 1993, Rubin 1996)*

*(i)* $K_\alpha^{(l)}(\eta) \in L_1(0,\infty)$ *ve* $\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\, d\eta = 1$*'dir..*

*(ii)* $K_\alpha^{(l)}(\eta) = \left\{\begin{array}{ll} O(\eta^{\alpha-1}), & \eta \to 0^+ \\ O(\eta^{\alpha-l-1}), & \eta \to \infty \end{array}\right\}.$

Aşağıdaki tanım ve ardından gelen lemmalar bu bölümde önemli role sahiptir.

**Tanım 3.3.** $\rho \in (0,1)$ sabitlenmiş bir parametre ve $\mu(r)$, $(0 \leq r \leq \rho)$ fonksiyonu $[0,\rho]$ aralığında sürekli, $(0,\rho]$ 'da pozitif ve $\mu(0) = 0$ olsun.

Bir $\varphi \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu, bir $x^0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında

$$\left(\mathcal{M}_\mu\varphi\right)\left(x^0\right) \equiv \sup_{0<r\leq\rho}\frac{1}{r^n\mu(r)}\int_{|x|\leq r}\left|\varphi\left(x^0-x\right)-\varphi\left(x^0\right)\right| dx < \infty \tag{3.4}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyon $x^0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında "$\mu$-pürüzsüzlük" özelliğine sahiptir denir. (Burada, $|x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $dx = dx_1...dx_n$'dir).

**Not 3.4.** *Bundan sonra, bir $a > 0$ sayısı için $\mu(t) \geq at, (0 \leq t \leq \rho)$ ve $\rho \leq t < \infty$ için $\mu(t) = \mu(\rho)$ kabul edilecektir.*

**Lemma 3.5.** *(Aliev 1999, Sezer ve Aliev 2011, Aliev ve Eryigit 2013)*

*Bir $\varphi \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu bir $x^0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında $\mu$-pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun. Ayrıca, $\psi(r), (0 \leq r \leq \rho)$ fonksiyonu, $[0, \rho]$ aralığında azalan, negatif olmayan ve sürekli diferensiyellenebilir olsun ve $(\mathcal{M}_\mu \varphi)(x^0)$, (3.4)'de tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} &\int_{|x|\leq\rho} \left|\varphi\left(x^0 - x\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| \psi(|x|)\, dx \\ \leq \;& (\mathcal{M}_\mu \varphi)\left(x^0\right) \left[\rho^n \mu(\rho)\, \psi(\rho) + \int_0^\rho r^n \mu(r)\left(-\psi'(r)\right) dr\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

*eşitsizliği sağlanır.*

**Sonuç 3.6.** *$p(x, \varepsilon)$, (2.4)'de tanımlanan Poisson çekirdeği olsun, yani*

$$p(x; \varepsilon) = \frac{a_n \varepsilon}{\left(\varepsilon^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \; a_n = \pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

*O zaman, öyle $c > 0$ sayısı vardır ki*

$$\begin{aligned} &\int_{|x|\leq\rho} \left|\varphi\left(x^0 - x\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| p(x; \varepsilon)\, dx \\ \leq \;& c\,(\mathcal{M}_\mu \varphi)\left(x^0\right) \left[\varepsilon + \int_0^\infty \mu(\varepsilon t)\, \frac{dt}{1+t^2}\right] \end{aligned} \tag{3.6}$$

*eşitsizliği sağlanır.*

*İspat.* (3.5)'de $\psi(|x|) = p(x; \varepsilon) \equiv a_n \varepsilon \left(\varepsilon^2 + |x|^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} &\int_{|x|\leq\rho} \left|\varphi\left(x^0 - x\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| p(x; \varepsilon)\, dx \\ &\leq (\mathcal{M}_\mu \varphi)\left(x^0\right) \left[\rho^n \mu(\rho)\, \frac{a_n \varepsilon}{(\varepsilon^2 + \rho^2)^{\frac{n+1}{2}}} + \int_0^\rho r^n \mu(r) \left(-\frac{a_n \varepsilon}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)' dr\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Basit bir hesaplamayla

$$\rho^n \mu(\rho) \frac{a_n \varepsilon}{(\varepsilon^2+\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}} \leq c_1 \varepsilon, \ \left(c_1 = a_n \frac{\mu(\rho)}{\rho}\right),$$

ve

$$\left(-\frac{a_n \varepsilon}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)' = c_2 \frac{\varepsilon r}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}, \ (c_2 = a_n (n+1))$$

olduğu görülür. Elde edilen bu ifadeler $(3.7)$ eşitsizliğinde kullanılırsa ve $c = \max\{c_1, c_2\}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} &\int_{|x|\leq\rho} \left|\varphi\left(x^0 - x\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| p(x;\varepsilon)\, dx \\ &\leq c\left(\mathcal{M}_\mu \varphi\right)\left(x^0\right)\left[\varepsilon + \int_0^\rho \varepsilon \frac{r^{n+1}}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n+3}{2}}} \mu(r)\, dr\right] \\ &= c\left(\mathcal{M}_\mu \varphi\right)\left(x^0\right)\left[\varepsilon + \int_0^{\frac{\rho}{\varepsilon}} \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^{\frac{n+3}{2}}} \mu(\varepsilon t)\, dt\right] \\ &\leq c\left(\mathcal{M}_\mu \varphi\right)\left(x^0\right)\left[\varepsilon + \int_0^\infty \frac{\mu(\varepsilon t)}{1+t^2} dt\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. □

**Sonuç 3.7.** $\mu(r), (0 \leq r \leq \rho < 1)$ *fonksiyonu* $[0,\rho]$ *aralığında sürekli,* $(0,\rho]$ *aralığında pozitif ve* $\mu(0) = 0$ *olsun. Ayrıca, bir* $a > 0$ *sayısı için* $\mu(t) \geq at, (0 \leq t \leq \rho)$ *ve* $\rho \leq t < \infty$ *için* $\mu(t) = \mu(\rho)$ *olsun. Bundan başka, lokal sınırlı bir* $\omega(t) > 0$ *fonksiyonu için*

$$\mu(\varepsilon t) \leq \mu(\varepsilon)\, \omega(t) \text{ ve } \int_0^\infty \frac{\omega(t)}{1+t^2} dt < \infty, (\varepsilon \in (0,\rho), t \in (0,\infty)), \tag{3.8}$$

*sağlansın. O halde,* $\varepsilon \in (0,\rho)$ *parametresine bağlı olmayan bir* $A > 0$ *sayısı için*

$$\int_{|x|\leq\rho} \left|\varphi\left(x^0 - x\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| p(x;\varepsilon)\, dx \leq A\mu(\varepsilon), (\forall \varepsilon \in (0,\rho)) \tag{3.9}$$

*sağlanır.*

*İspat.* (3.8)'deki ifadeler (3.6)'da kullanılırsa ve $\mu(\varepsilon) \geq a\varepsilon, (0 \leq \varepsilon \leq \rho)$ koşulu göz önünde bulundurulursa,

$$\int_{|x|\leq\rho} \left|\varphi\left(x^0 - x\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| p(x;\varepsilon)\, dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \; c\left(\mathcal{M}_\mu\varphi\right)\left(x^0\right)\left[\varepsilon+\mu\left(\varepsilon\right)\int_0^\infty \frac{\omega\left(t\right)}{1+t^2}dt\right] \\ &\leq \; A\mu\left(\varepsilon\right), \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $A > 0$ sayısı, $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı değildir. □

Sırada, Sonuç 3.7'nin tüm koşullarını sağlayan $\mu\left(r\right)$ fonksiyonlarına örnekler verilmiştir.

**Örnek.** $0 < \gamma < 1$ *olsun. Bu durumda,*

$$\mu\left(r\right) = \begin{cases} r^\gamma, & 0 \leq r \leq \rho < 1 \\ \rho^\gamma, & r \geq \rho \end{cases}$$

*fonksiyonu,* $\omega\left(t\right) = t^\gamma$ *için, Sonuç 3.7'nin tüm koşullarını sağlar. Dolayısıyla, (3.9) eşitsizliği,* $\mu\left(\varepsilon\right) = \varepsilon^\gamma, \left(0 < \gamma < 1\right)$ *için sağlanır.*

**Örnek.** $0 < \gamma < 1$ *ve* $0 < \beta < \infty$ *olsun. Bu durumda,*

$$\mu\left(r\right) = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ r^\gamma\left|\ln r\right|^\beta, & 0 < r < \rho \\ \rho^\gamma\left|\ln \rho\right|^\beta, & r \geq \rho \end{cases}$$

*fonksiyonu,* $\omega\left(t\right) = t^\gamma\left(1+\frac{\left|\ln t\right|}{\left|\ln \rho\right|}\right)^\beta$ *için, Sonuç 3.7'nin tüm koşullarını sağlar.*

*Gerçekten,* $\varepsilon \in \left(0,\rho\right)$ *ve* $t \in \left(0,\infty\right)$ *için*

$$\begin{aligned} \mu\left(\varepsilon t\right) \; &= \; \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \varepsilon^\gamma t^\gamma\left|\ln\varepsilon+\ln t\right|^\beta, & 0 < t < \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \rho^\gamma\left|\ln\rho\right|^\beta, & t > \frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases} \\ &\leq \; \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \mu\left(\varepsilon\right)t^\gamma\left(1+\frac{\left|\ln t\right|}{\left|\ln\varepsilon\right|}\right)^\beta, & 0 < t < \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \rho^\gamma\left|\ln\rho\right|^\beta, & t > \frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases} \\ &\leq \; \mu\left(\varepsilon\right)\omega\left(t\right), \;\; \left(\varepsilon \in \left(0,\rho\right), t > 0\right), \end{aligned}$$

*elde edilir. (Burada,* $\omega\left(t\right) = t^\gamma\left(1+\frac{\left|\ln t\right|}{\left|\ln\rho\right|}\right)^\beta$ *'dır).*

Şimdi, yukarıdaki hazırlıklar kullanılarak, bu bölümün ana sonuçları ifade edilecektir.

**Teorem 3.8.** $\mu\left(r\right), \left(0 < r < \infty\right)$ *fonksiyonu, Sonuç 3.7'nin tüm koşullarını sağlasın. Ayrıca,* $\varphi \in L_p\left(\mathbb{R}^n\right), \left(1 \leq p < \infty\right)$ *fonksiyonu,* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *noktasında Tanım 3.3'de verilen* $\mu$*-pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun.* $D_\varepsilon^\alpha$ *ve* $\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha$ *operatörleri* $\left(2.15\right)-\left(2.16\right)$*'da tanım-*

*landığı gibi olsun ve $l \in \mathbb{N}$ parametresi $l > \alpha + 1$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $\varepsilon \to 0^+$ için*

$$i)\ \left|\left(D_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi\right)\left(x^0\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| = O\left(\mu\left(\varepsilon\right)\right), \tag{3.10}$$

$$ii)\ \left|\left(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi\right)\left(x^0\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| = O\left(\mu\left(\varepsilon\right)\right), \tag{3.11}$$

*sağlanır. Burada, $I^\alpha \varphi, \left(0 < \alpha < \frac{n}{p}\right)$ ve $J^\alpha \varphi, (0 < \alpha < \infty)$, sırasıyla, $\varphi$ fonksiyonunun Riesz ve Bessel potansiyelleridir.*

***İspat.*** i) $(3.1)$ formülü ve Lemma 3.2 (i) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left|\left(D_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi\right)\left(x^0\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| \\
&= \left|\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\left(P_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right) d\eta - \varphi\left(x^0\right)\right| \\
&= \left|\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\left(P_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right) d\eta - \int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\,\varphi\left(x^0\right) d\eta\right| \\
&= \left|\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\left(\left(P_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right) - \varphi\left(x^0\right)\right) d\eta\right| \\
&\le \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|\left|\left(P_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| d\eta
\end{aligned} \tag{3.12}$$

elde edilir.

$\forall \eta > 0$ için, $\int_{\mathbb{R}^n} p\left(y;\eta\right) dy = 1$ olduğundan (bakınız: (2.6)),

$$\begin{aligned}
&\left|\left(P_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| \\
=\ & \left|\int_{\mathbb{R}^n} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\varphi\left(x^0 - y\right) dy - \varphi\left(x^0\right)\right| \\
=\ & \left|\int_{\mathbb{R}^n} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\varphi\left(x^0 - y\right) dy - \int_{\mathbb{R}^n} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\varphi\left(x^0\right) dy\right| \\
=\ & \left|\int_{\mathbb{R}^n} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\left[\varphi\left(x^0 - y\right) - \varphi\left(x^0\right)\right] dy\right| \\
\le\ & \int_{|y|\le\rho} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\left|\varphi\left(x^0 - y\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| dy \\
& + \int_{|y|>\rho} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\left|\varphi\left(x^0 - y\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| dy \\
\equiv\ & i_1 + i_{2.}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

bulunur. $(3.9)$ ifadesinden $i_1 \le A\mu\left(\varepsilon\eta\right)$ olduğu görülür. Burada $A$ sayısı, $\varepsilon$ ve $\eta$'ya bağlı değildir. Şimdi, $i_2$'yi üstten tahmin etmek için Hölder eşitsizliği kullanılırsa, (bakınız:

(2.3)),

$$\begin{aligned}
i_2 &= \int_{|y|>\rho} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\left|\varphi\left(x^0-y\right)-\varphi\left(x^0\right)\right|dy \\
&\leq \int_{|y|>\rho} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\left|\varphi\left(x^0\right)\right|dy+\int_{|y|>\rho} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\left|\varphi\left(x^0-y\right)\right|dy \\
&\leq \left|\varphi\left(x^0\right)\right|\int_{|y|>\rho} p\left(y;\varepsilon\eta\right)dy+\|\varphi\|_p\left(\int_{|y|>\rho}\left(p\left(y;\varepsilon\eta\right)\right)^{p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\equiv i_3+i_4.
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $(2.4)$’den,

$$\begin{aligned}
i_3 &= \left|\varphi\left(x^0\right)\right|\int_{|y|>\rho}\frac{a_n\varepsilon\eta}{\left((\varepsilon\eta)^2+|y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}dy \\
&= c_1\varepsilon\eta\int_{|y|>\rho}\frac{dy}{\left((\varepsilon\eta)^2+|y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\quad \left(y=r\theta;\ \rho<r<\infty,\ \theta\in S^{n-1},\ dy=r^{n-1}drd\sigma\left(\theta\right)\ \text{yazılırsa}\right) \\
&= c_2\varepsilon\eta\int_\rho^\infty\frac{r^{n-1}}{\left((\varepsilon\eta)^2+r^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}dr \\
&\leq c_2\varepsilon\eta\int_\rho^\infty\frac{r^{n-1}}{r^{n+1}}dr=c_3\varepsilon\eta,
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $c_3\equiv c_3\left(\rho,n\right)$ katsayısı, $\varepsilon$ ve $\eta$’dan bağımsızdır. Benzer şekilde, yine $(2.4)$ göz önüne alınarak ve aynı değişken değiştirme uygulanarak,

$$\begin{aligned}
i_4 &= \|\varphi\|_p\,\varepsilon\eta\left(\int_{|y|>\rho}\frac{dy}{\left((\varepsilon\eta)^2+|y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= c_4\varepsilon\eta\left(\int_\rho^\infty\frac{r^{n-1}dr}{\left((\varepsilon\eta)^2+r^2\right)^{\frac{n+1}{2}p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq c_4\varepsilon\eta\left(\int_\rho^\infty\frac{dr}{r^{(n+1)p'-n+1}}\right)^{\frac{1}{p'}}\leq c_5\varepsilon\eta,
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $c_5$, $\varepsilon$ ve $\eta$ ’dan bağımsızdır. Tüm bu tahminler bir araya getirilirse,

$$\begin{aligned}
\left|\left(P_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right)-\varphi\left(x^0\right)\right| &\leq i_1+i_2 \\
&\leq A\mu\left(\varepsilon\eta\right)+c_3\varepsilon\eta+c_5\varepsilon\eta \\
&\leq c_6\left(\mu\left(\varepsilon\eta\right)+\varepsilon\eta\right) \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi, (3.12) ve (3.14)'den

$$\begin{aligned}
&\left|\left(D_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi\right)\left(x^0\right)-\varphi\left(x^0\right)\right| \\
\leq\ & c_7 \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|(\mu(\varepsilon\eta)+\varepsilon\eta)\, d\eta \\
\leq\ & c_7 \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|(\mu(\varepsilon)\,\omega(\eta)+\varepsilon\eta)\, d\eta \\
&(\text{burada } \mu(\varepsilon) \geq a\varepsilon,\ \varepsilon\in(0,\rho) \text{ koşulu kullanılmaktadır.}) \\
\leq\ & c_8 \mu(\varepsilon) \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|(\omega(\eta)+\eta)\, d\eta
\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir. $\int_0^\infty \frac{\omega(\eta)}{1+\eta^2} d\eta < \infty$ koşulu ve Lemma 3.2 (ii)'den

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \omega(\eta)\, d\eta \\
&= \int_0^1 \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \omega(\eta)\, d\eta + \int_1^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \omega(\eta)\, d\eta \\
&\leq c_9 + \int_1^\infty \frac{\omega(\eta)}{1+\eta^2}\left(1+\eta^2\right)\left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| d\eta \\
&(\eta\to\infty \text{ için } K_\alpha^{(l)}(\eta)=O\left(\eta^{\alpha-l-1}\right) \text{ asimptotu ve } l>\alpha+1 \text{ koşulu kullanılırsa}) \\
&\leq c_9 + c_{10}\int_1^\infty \frac{\omega(\eta)}{1+\eta^2} d\eta \equiv c_{11} < \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan, yine, $K_\alpha^{(l)}(\eta) = O\left(\eta^{\alpha-l-1}\right), (\eta\to\infty)$ ve $l>\alpha+1$ koşulları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \eta d\eta &= \int_0^1 \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \eta d\eta + \int_1^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \eta d\eta \\
&\leq c_{12} + \int_1^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \eta d\eta \\
&\leq c_{13,}
\end{aligned}$$

elde edilir. Tüm bu tahminler $(3.15)$'de kullanılırsa, $\varepsilon\to 0^+$ için

$$\left|\left(D_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi\right)\left(x^0\right)-\varphi\left(x^0\right)\right| \leq c.\mu(\varepsilon)$$

elde edilir. Burada $c$ katsayısı, $\varepsilon$'dan bağımsızdır.

Bu ise, i) kısmının ispatını tamamlar.

ii). kısmın ispatı, i)'nin ispatına indirgenerek gösterilebilir. Gerçekten, $(3.2)$ formülü ve Lemma 3.2 (i) kullanılarak

$$\left|\left(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi\right)\left(x^0\right)-\varphi\left(x^0\right)\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\left(M_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right)d\eta-\varphi\left(x^0\right)\right| \\
&= \left|\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\left(M_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right)d\eta-\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\,\varphi\left(x^0\right)d\eta\right| \\
&\leq \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|\left|\left(M_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right)-\varphi\left(x^0\right)\right|d\eta \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca, $\forall t>0$ için $\int_{\mathbb{R}^n} m(y;t)\,dy=e^{-t}$ olduğundan (bakınız: (2.8)),

$$\begin{aligned}
&\left(M_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right)-\varphi\left(x^0\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} m(y;\varepsilon\eta)\left[\varphi\left(x^0-y\right)-\varphi\left(x^0\right)\right]dy-\left(1-e^{-\varepsilon\eta}\right)\varphi\left(x^0\right),
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned}
&\left|\left(M_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right)-\varphi\left(x^0\right)\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} m(y;\varepsilon\eta)\left|\varphi\left(x^0-y\right)-\varphi\left(x^0\right)\right|dy+\left(1-e^{-\varepsilon\eta}\right)\left|\varphi\left(x^0\right)\right| \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 2.3 ve $\left(1-e^{-\varepsilon\eta}\right)\leq\varepsilon\eta$ tahmini $(3.17)$ eşitsizliğinde uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\left|\left(M_{\varepsilon\eta}\varphi\right)\left(x^0\right)-\varphi\left(x^0\right)\right| &\leq c_1\left[\int_{\mathbb{R}^n} p(y;\varepsilon\eta)\left|\varphi\left(x^0-y\right)-\varphi\left(x^0\right)\right|dy+\varepsilon\eta\right] \\
&\overset{(3.14)}{\leq} c_2\left(\mu(\varepsilon\eta)+\varepsilon\eta\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda kullanılan

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(y;\varepsilon\eta)\left|\varphi\left(x^0-y\right)-\varphi\left(x^0\right)\right|dy$$

ifadesinin tahmini, ispatın i). kısmında elde edilmiştir; (bakınız: (3.14)). Elde edilen sonuncu tahmin $(3.16)$'da kullanılırsa,

$$\left|\left(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha\varphi\right)\left(x^0\right)-\varphi\left(x^0\right)\right|\leq c_4\int_0^\infty\left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|\left(\mu(\varepsilon\eta)+\varepsilon\eta\right)d\eta$$

bulunur. İspatın geri kalan bölümü, i) kısmının son kısmıyla aynıdır. ($(3.15)$ formülüne bakınız).

Sonuç olarak, $\varepsilon\to0^+$ için

$$\left|\left(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha\varphi\right)\left(x^0\right)-\varphi\left(x^0\right)\right|=O\left(\mu(\varepsilon)\right)$$

elde edilir. Böylece, teoremin ispatı tamamlanır. □

Son olarak, bu teoremin iki sonucu verilecektir.

**Sonuç 3.9.** $\mu(t) = t^{\gamma}, 0 < \gamma < 1,\ t \in [0, \rho)$ *olsun ve* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *noktası,* $\varphi \in L_p$ *fonksiyonunun bir* $\mu$*-pürüzsüzlük noktası olsun. O zaman,* $\varepsilon \to 0^+$ *için*

$$\left|\left(D_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi\right)\left(x^0\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| = O\left(\varepsilon^\gamma\right),$$

$$\left|\left(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi\right)\left(x^0\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| = O\left(\varepsilon^\gamma\right)$$

*sağlanır.*

**Sonuç 3.10.** $\mu(t) = t^{\gamma}\left|\log t\right|^{\beta}, 0 < \gamma < 1,\ \beta \in (0, \infty),\ t \in (0, \rho)$ *olsun ve* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *noktası,* $\varphi \in L_p$ *fonksiyonunun bir* $\mu$*-pürüzsüzlük noktası olsun. O zaman,* $\varepsilon \to 0^+$ *için*

$$\left|\left(D_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi\right)\left(x^0\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| = O\left(\varepsilon^\gamma \left|\log \varepsilon\right|^\beta\right),$$

$$\left|\left(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi\right)\left(x^0\right) - \varphi\left(x^0\right)\right| = O\left(\varepsilon^\gamma \left|\log \varepsilon\right|^\beta\right)$$

*olur.*

## 3.2. Çeşitli Yarıgrupların Doğurduğu Kesikli Hipersingüler İntegral Ailelerinin $\mathbf{L}_p$ Metriğinde Yakınsama Hızlarının İncelenmesi

Bu bölümde, klasik Riesz potansiyelleri için kurulan, Poisson yarıgrubunun doğurduğu kesikli hipersingüler integraller ailesi ve klasik Bessel potansiyelleri için kurulan, metaharmonik yarıgrubun doğurduğu kesikli hipersingüler integraller ailesinin $L_p$ uzayının normundaki yakınsama hızları, potansiyellerin etki ettiği fonksiyonların $L_p$ anlamında pürüzsüzlük göstergesi göz önünde bulundurularak incelenmiştir. Yine, benzer şekilde, klasik Riesz potansiyelleri için kurulan, Gauss-Weierstrass yarıgrubunun doğurduğu kesikli hipersingüler integral ailesi ve klasik Bessel potansiyelleri için kurulan, modifiye edilmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubunun doğurduğu kesikli hipersingüler integral ailesi için $L_p$ uzayının normunda benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Bu bölümde sıkça kullanılacak olan, Poisson yarıgrubunun doğurduğu $\left(D_\varepsilon^\alpha f\right)(x)$, metaharmonik yarıgrubun doğurduğu $\left(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha f\right)(x)$, Gauss-Weierstrass yarıgrubunun doğurduğu $\left(\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f\right)(x)$ ve modifiye edilmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubunun doğurduğu $\left(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f\right)(x)$ "kesikli integralleri", sırasıyla, (2.15), (2.16), (2.17) ve (2.18)'de ifade edilmişti. Ayrıca, klasik Riesz potansiyelleri için Abel-Poisson yarıgrubu yardımıyla kurulan $\left(D_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi\right)(x)$ ve klasik Bessel potansiyelleri için metaharmonik yarıgrup yardımıyla kurulan $\left(\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi\right)(x)$ kesikli hipersingüler integral aileleri Lemma 3.1'de ifade edilmişti.

Benzer şekilde, Gauss-Weierstrass yarıgrubu yardımıyla kurulan $\left(\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi\right)(x)$ ve modifiye edilmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubu yardımıyla kurulan $\left(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi\right)(x)$ integral aileleri aşağıdaki lemmada ifade edilmiştir.

**Lemma 3.11.** *(Rubin 1987, 1996)*

*(a)* $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n), (1 \leq p < \infty)$ *ve* $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ *olsun. Bu durumda, her* $\varepsilon > 0$ *ve hhh* $x \in \mathbb{R}^n$ *için,*

$$(\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi)(x) = \int_0^\infty K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)(U\varphi)(x, \varepsilon\eta)\, d\eta; \tag{3.18}$$

*(b)* $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n), (1 \leq p \leq \infty)$ *ve* $0 < \alpha < \infty$ *olsun. Bu durumda, her* $\varepsilon > 0$ *ve hhh* $x \in \mathbb{R}^n$ *için,*

$$(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi)(x) = \int_0^\infty K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)(U_M\varphi)(x, \varepsilon\eta)\, d\eta \tag{3.19}$$

*eşitlikleri sağlanır. Burada,* $K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)$ *fonksiyonu şöyle tanımlanır:*

$$K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta) = \left[\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\chi_l\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1} \eta^{-1} \Delta_{-1}^l \left[\eta_+^{\frac{\alpha}{2}}\right]. \tag{3.20}$$

*Ayrıca, (2.14)'den,*

$$\Delta_{-1}^l \left[\eta_+^{\frac{\alpha}{2}}\right] = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k (\eta - k)_+^{\frac{\alpha}{2}} \text{ ve } a_+^{\frac{\alpha}{2}} = \left\{ \begin{array}{ll} a^{\frac{\alpha}{2}}, & a > 0 \text{ ise} \\ 0, & a \leq 0 \text{ ise} \end{array} \right\}$$

*dır.*

**Not 3.12.** *Yukarıdaki lemmada tanımlanan* $K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)$ *fonksiyonunun asimptotik davranışı ve önemli özellikleri, daha önce Lemma 3.2'de ifade edilmişti.*

Aşağıdaki tanım ve ardından gelen lemmalar, tezin bu kısmında önemli role sahiptir.

**Tanım 3.13.** $\rho \in (0, 1)$ sabitlenmiş bir parametre ve $\mu(r), (0 \leq r \leq \rho)$ fonksiyonu, $[0, \rho]$ aralığında sürekli, $(0, \rho]$'da pozitif ve $\mu(0) = 0$ olsun.

Bir $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n), (1 \leq p < \infty)$ fonksiyonu

$$\mathcal{M}_\mu = \mathcal{M}_\mu(\varphi) \equiv \sup_{0<r\leq\rho} \frac{1}{r^n \mu(r)} \int_{|x|\leq r} \|\varphi(\cdot - x) - \varphi(\cdot)\|_p \, dx < \infty \tag{3.21}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyon $L_p$-anlamında "$\mu$-pürüzsüzlük" özelliğine sahiptir denir.

(Burada, bilindiği üzere, $|x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $dx = dx_1...dx_n$'dir).

**Sonuç 3.14.** *$\mu$ fonksiyonu, Tanım 3.13'de tanımlandığı gibi olsun ve $\mu_\varphi$ fonksiyonu da $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun $L_p$–süreklilik modulü olsun, yani,*

$$\mu_\varphi(r) = \sup_{|x| \le r} \|\varphi(\cdot - x) - \varphi(\cdot)\|_p, \left(|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right).$$

*olsun. Buradan, $\mu_\varphi(r) \le \mu(r)$, $(0 \le r \le \rho)$ sağlanırsa, $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için $(3.21)$'deki $\mathcal{M}_\mu$ ifadesinin sonlu olduğu açıktır.*

**Not 3.15.** *Bundan sonra, bir $a > 0$ sayısı için $\mu(t) \ge at, (0 \le t \le \rho)$ ve $\rho \le t < \infty$ için $\mu(t) = \mu(\rho)$ kabul edilecektir.*

*Ayrıca, $\mu$ süreklilik modulü ise, $\lambda \ge 0$ için $\mu(\lambda t) \le (\lambda + 1)\mu(t)$ eşitsizliğinin sağlandığı iyi bilinmektedir (Devore ve Lorentz 1993).*

Aşağıdaki lemmanın, Lemma 3.5'ten önemli farkı, integral altında $L_p$-normu kullanılmasıdır.

**Lemma 3.16.** *Bir $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n), (1 \le p < \infty)$ fonksiyonu $L_p-$anlamında $\mu$-pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun. Ayrıca, $\psi(r), (0 \le r \le \rho)$ fonksiyonu $[0, \rho]$ aralığında azalan, negatif olmayan ve sürekli diferensiyellenebilir olsun ve $\mathcal{M}_\mu$, (3.21)'de tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} &\int_{|x| \le \rho} \|\varphi(t - x) - \varphi(t)\|_p \psi(|x|)\, dx \\ \le\ & \mathcal{M}_\mu \left[\rho^n \mu(\rho)\psi(\rho) + \int_0^\rho r^n \mu(r)(-\psi'(r))\, dr\right] \end{aligned} \tag{3.22}$$

*eşitsizliği sağlanır.*

Okuyucuya kolaylık sağlamak için bu lemmanın kısa ispatı verilecektir.

*İspat.* $g(x) = \|\varphi(t - x) - \varphi(t)\|_p$ ve $r = |x|$, $\theta \in S^{n-1}$ için $x = r\theta$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{|x| \le \rho} \|\varphi(t - x) - \varphi(t)\|_p \psi(|x|)\, dx = \int_{|x| \le \rho} g(x)\psi(|x|)\, dx \\ &= \int_0^\rho r^{n-1}\psi(r)\left(\int_{|\theta| = 1} g(r\theta)\, d\sigma(\theta)\right) dr \end{aligned}$$

olur.

$$\lambda(r) = \int_{|\theta| = 1} g(r\theta)\, d\sigma(\theta) \text{ ve } \Omega(r) = \int_0^r \lambda(t)\, t^{n-1} dt$$

fonksiyonları tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^\rho \psi(r)\lambda(r) r^{n-1} dr = \int_0^\rho \psi(r) d\Omega(r) \\ &= \psi(r)\Omega(r)\mid_0^\rho - \int_0^\rho \Omega(r)\psi'(r) dr \\ &= \psi(\rho)\Omega(\rho) + \int_0^\rho \Omega(r)(-\psi'(r)) dr. \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathcal{M}_\mu$'nün $(3.21)$'deki tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Omega(r) &= \int_0^r \lambda(t) t^{n-1} dt = \int_{|x|\le r} g(x) dx = \int_{|x|\le r} \|\varphi(t-x) - \varphi(t)\|_p dx \\ &\le r^n \mu(r) \mathcal{M}_\mu. \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$I \le \mathcal{M}_\mu \left[ \rho^n \mu(\rho)\psi(\rho) + \int_0^\rho r^n \mu(r)(-\psi'(r)) dr \right]$$

eşitsizliği elde edilir. □

**Sonuç 3.17.** *$\mu(r), (0 \le r \le \rho < 1)$ fonksiyonu $[0,\rho]$ aralığında sürekli, $(0,\rho]$'da pozitif ve $\mu(0) = 0$ olsun. Ayrıca, bir $a > 0$ sayısı için $\mu(t) \ge at, (0 \le t \le \rho)$ ve $\mu(t) = \mu(\rho)$, $(\rho \le t < \infty)$ olsun. Eğer*

$$\mu(\varepsilon t) \le \mu(\varepsilon)\omega(t) \text{ ve } \int_0^\infty \frac{\omega(t)}{1+t^2} dt < \infty, (\varepsilon \in (0,\rho), t \in (0,\infty))$$

*koşulunu sağlayan bir $\omega(t) > 0$ lokal sınırlı fonksiyonu varsa, bu durumda $\varepsilon \in (0,\rho)$ parametresine bağlı olmayan bir $A > 0$ sayısı için*

$$\int_{|x|\le\rho} \|\varphi(t-x) - \varphi(t)\|_p \, p(x;\varepsilon) dx \le A\mu(\varepsilon), \forall\varepsilon \in (0,\rho) \tag{3.23}$$

*eşitsizliği sağlanır.*

Yukarıdaki Sonuç 3.17'nin ispatı, Sonuç 3.7'deki gibi yapılır.

**Sonuç 3.18.** *Bir $\varphi$ fonksiyonu $L_p$ anlamında $\mu$–pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun ve $W(x;\varepsilon)$ de $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı Gauss-Weierstrass çekirdeği olsun(bakınız: (2.9)):*

$$W(x;\varepsilon) = (4\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}, \ (x \in \mathbb{R}^n).$$

*Bu durumda, her $\varepsilon \in (0, \rho)$ için*

$$\int_{|x|\leq\rho} \|\varphi(t-x) - \varphi(t)\|_p W(x;\varepsilon)\, dx \leq c\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \tag{3.24}$$

*eşitsizliği sağlanır. Burada $c > 0$ sayısı, $\varepsilon$ parametresine bağlı değildir.*

*İspat.* (3.22)'de $\psi(|x|) = W(x;\varepsilon)$ yazılsın. $\psi(r) = (4\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}$ olduğundan, basit hesaplamalar sonucunda

$$-\psi'(r) = c_1 r \varepsilon^{-1-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}};\ c_1 = 2^{-(n+1)}\pi^{-\frac{n}{2}}$$

elde edilir. $(-\psi'_\varepsilon(r))$ değeri $(3.22)$'de yerine yazılırsa, $\rho < 1$ için

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq\rho} \|\varphi(t-x) - \varphi(t)\|_p \psi(|x|)\, dx \\
&\leq \mathcal{M}_\mu\Big[\rho^n \mu(\rho)(4\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}} + \int_0^\rho c_1 r^{n+1}\mu(r)\,\varepsilon^{-1-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} dr\Big] \\
&\leq c_2 \mathcal{M}_\mu \varepsilon^{-1-\frac{n}{2}} \left[\int_0^\rho r^{n+1}\mu(r)\, e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} dr + \varepsilon e^{-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $r = \sqrt{\varepsilon}t$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq\rho} \|\varphi(t-x) - \varphi(t)\|_p \psi(|x|)\, dx \\
\leq\ & c_3 \left[\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}} t^{n+1}\mu\left(\sqrt{\varepsilon}t\right) e^{-\frac{t^2}{4}} dt + \varepsilon e^{-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}}\right]
\end{aligned} \tag{3.25}$$

bulunur. $\mu(\sqrt{\varepsilon}t) \leq (1+t)\,\mu(\sqrt{\varepsilon})$ eşitsizliğinden,

$$\int_0^{\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}} t^{n+1}\mu\left(\sqrt{\varepsilon}t\right) e^{-\frac{t^2}{4}} dt \leq \mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \int_0^\infty t^{n+1}(1+t)\, e^{-\frac{t^2}{4}} dt \leq c_4\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$$

olduğu görülür. Diğer yandan,

$$\varepsilon e^{-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}} \leq \varepsilon \leq \sqrt{\varepsilon}$$

olduğu da kullanılırsa,

$$\int_{|x|\leq\rho} \|\varphi(t-x) - \varphi(t)\|_p \psi(|x|)\, dx \leq c_5\left(\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right) + \sqrt{\varepsilon}\right)$$

bulunur. $\mu(t) \geq at, (0 \leq t \leq \rho,\ a > 0)$ koşulundan, $(\mu(\sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\varepsilon}) \leq c_6\mu(\sqrt{\varepsilon})$ sağlanır ve istenen sonuç

$$\int_{|x|\leq\rho} \|\varphi(t-x)-\varphi(t)\|_p W(x;\varepsilon)\,dx \leq c\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$$

elde edilir. □

Şimdi, yukarıda verilen bilgilerden yararlanılarak, tez çalışmasının bu kısmının ana sonuçları ifade edilecektir.

**Teorem 3.19.** *$\mu(r),(0<r<\infty)$ fonksiyonu Sonuç 3.17'nin tüm koşullarını sağlasın. Ayrıca, $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n),(1\leq p<\infty)$ fonksiyonu $L_p-$anlamında $\mu$-pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun, yani $(3.21)$'deki koşul sağlansın. $D_\varepsilon^\alpha$ ve $\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha$ operatörleri $(2.15)-(2.16)$'da tanımlandığı gibi olsun ve $l\in\mathbb{N}$ parametresi $l>\alpha+1$ koşulunu sağlasın. Bu durumda, $\varepsilon\to 0^+$ için*

$$i)\ \|D_\varepsilon^\alpha I^\alpha\varphi-\varphi\|_p = O(\mu(\varepsilon)), \tag{3.26}$$

$$ii)\ \|\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha\varphi-\varphi\|_p = O(\mu(\varepsilon)) \tag{3.27}$$

*sağlanır. Burada, $I^\alpha\varphi,\left(0<\alpha<\frac{n}{p}\right)$ ve $J^\alpha\varphi,(0<\alpha<\infty)$, sırasıyla, $\varphi\in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Riesz ve Bessel potansiyelleridir.*

*Özel olarak, $(3.26)-(3.27)$'deki bağıntılar*

$$\mu(\varepsilon)=\varepsilon^\gamma,\ (0<\gamma<1)\ \text{ve}\ \mu(\varepsilon)=\varepsilon^\gamma|\log\varepsilon|^\beta,\ (0<\gamma<1,\ \beta\in(0,\infty))$$

*için sağlanır.*

*İspat.* i) (3.1) formülü, Lemma 3.2 (i) ve Minkowski eşitsizliği kullanılarak:

$$\begin{aligned}
\|D_\varepsilon^\alpha I^\alpha\varphi-\varphi\|_p &= \left\|\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)(P_{\varepsilon\eta}\varphi)(x)\,d\eta-\varphi(x)\right\|_p \\
&= \left\|\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)(P_{\varepsilon\eta}\varphi)(x)\,d\eta-\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\varphi(x)\,d\eta\right\|_p \\
&= \left\|\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)((P_{\varepsilon\eta}\varphi)(x)-\varphi(x))\,d\eta\right\|_p \\
&\leq \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right|\|P_{\varepsilon\eta}\varphi-\varphi\|_p\,d\eta
\end{aligned} \tag{3.28}$$

elde edilir. Ayrıca, $\forall\eta > 0$ için $\int_{\mathbb{R}^n} p\,(y;\eta)\,dy = 1$ özelliği kullanılırsa (bakınız: (2.6)),

$$\begin{aligned}
\|P_{\varepsilon\eta}\varphi - \varphi\|_p &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} p\,(y;\varepsilon\eta)\,\varphi\,(t-y)\,dy - \varphi\,(t) \right\|_p \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} p\,(y;\varepsilon\eta)\,\varphi\,(t-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} p\,(y;\varepsilon\eta)\,\varphi\,(t)\,dy \right\|_p \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} p\,(y;\varepsilon\eta)\,[\varphi\,(t-y) - \varphi\,(t)]\,dy \right\|_p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} p\,(y;\varepsilon\eta)\,\|\varphi\,(\cdot - y) - \varphi\,(\cdot)\|_p\,dy \\
&= \int_{|y|\leq\rho} p\,(y;\varepsilon\eta)\,\|\varphi\,(\cdot - y) - \varphi\,(\cdot)\|_p\,dy \\
&\quad + \int_{|y|>\rho} p\,(y;\varepsilon\eta)\,\|\varphi\,(\cdot - y) - \varphi\,(\cdot)\|_p\,dy \\
&\equiv i_1\,(\varepsilon) + i_2\,(\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

olur. (3.23)'den $i_1\,(\varepsilon) \leq A\mu\,(\varepsilon\eta)$ elde edilir. (Burada $A$ sayısı, $\varepsilon$ ve $\eta$'ya bağlı değildir).

Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
i_2\,(\varepsilon) &\leq 2\,\|\varphi\|_p \int_{|y|>\rho} p\,(y;\varepsilon\eta)\,dy \overset{(2.4)}{=} 2\,\|\varphi\|_p\,a_n \int_{|y|>\rho} \frac{\varepsilon\eta}{\left((\varepsilon\eta)^2 + |y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}dy \\
&\quad \left( \begin{array}{c} \text{Kutupsal koordinatlara geçilirse} \\ y = r\theta,\ \rho < r < \infty,\ \theta \in S^{n-1};\ dy = r^{n-1}dr d\sigma\,(\theta) \end{array} \right) \\
&= c_1\varepsilon\eta \int_\rho^\infty \frac{r^{n-1}}{\left((\varepsilon\eta)^2 + r^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}dr \\
&\leq c_1\varepsilon\eta \int_\rho^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n+1}}dr = c_2\varepsilon\eta,
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $c_2 \equiv c_2\,(\rho;n)$ katsayısı, $\varepsilon$ ve $\eta$ 'ya bağlı değildir. Böylece

$$\begin{aligned}
\|P_{\varepsilon\eta}\varphi - \varphi\|_p &\leq A\mu\,(\varepsilon\eta) + c_2\varepsilon\eta \\
&\leq c_3\,(\mu\,(\varepsilon\eta) + \varepsilon\eta)
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan,

$$\|D_\varepsilon^\alpha I^\alpha\varphi - \varphi\|_p \overset{(3.28)}{\leq} c_3 \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}\,(\eta)\right| (\mu\,(\varepsilon\eta) + \varepsilon\eta)\,d\eta$$

(Sonuç 3.17'deki koşul kullanılırsa)

$$\leq c_3 \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}\,(\eta)\right| (\mu\,(\varepsilon)\,\omega\,(\eta) + \varepsilon\eta)\,d\eta$$

olduğu görülür. $\mu(\varepsilon) \geq a\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,\rho)$ koşulu kullanılırsa

$$\|D_{\varepsilon}^{\alpha} I^{\alpha}\varphi - \varphi\|_p \leq c_4 \mu(\varepsilon) \int_0^{\infty} \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| (\omega(\eta) + \eta)\, d\eta$$

olur.

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega(\eta)}{1+\eta^2} d\eta < \infty$$

koşulu ve Lemma 3.2 (ii)'den

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| \omega(\eta)\, d\eta \\
= \;& \int_0^{1} \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| \omega(\eta)\, d\eta + \int_1^{\infty} \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| \omega(\eta)\, d\eta \\
\leq \;& c_5 + \int_1^{\infty} \frac{\omega(\eta)}{1+\eta^2} \left(1+\eta^2\right) \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| d\eta \\
& \left( \begin{array}{c} \eta \to \infty \text{ için } K_{\alpha}^{(l)}(\eta) = O\left(\eta^{\alpha-l-1}\right) \text{ asimptotiği ve} \\ l > \alpha + 1 \text{ koşulu kullanılırsa} \end{array} \right) \\
\leq \;& c_5 + c_6 \int_1^{\infty} \frac{\omega(\eta)}{1+\eta^2} d\eta \equiv c_7 < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| \eta d\eta &= \int_0^{1} \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| \eta d\eta + \int_1^{\infty} \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| \eta d\eta \\
&\leq c_8 + \int_1^{\infty} \left|K_{\alpha}^{(l)}(\eta)\right| \eta d\eta \leq c_{9,}
\end{aligned}$$

olur. (Burada, $\eta \to \infty$ için $K_{\alpha}^{(l)}(\eta) = O\left(\eta^{\alpha-l-1}\right)$ asimptotiği ve $l > \alpha + 1$ koşulu kullanılmıştır).

Tüm bu tahminlerin sonucunda,

$$\|D_{\varepsilon}^{\alpha} I^{\alpha}\varphi - \varphi\|_p \leq c\mu(\varepsilon),\; \varepsilon \to 0^+$$

elde edilir. Burada $c$ sayısı, $\varepsilon$ parametresinden bağımsızdır.

Böylece, i)'nin ispatı tamamlanmış olur.

ii) (3.2) formülü, Lemma 3.2 (i) ve Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\|\mathfrak{D}_{\varepsilon}^{\alpha} J^{\alpha}\varphi - \varphi\|_p = \left\| \int_0^{\infty} K_{\alpha}^{(l)}(\eta) \left(M_{\varepsilon\eta}\varphi\right) d\eta - \varphi \right\|_p$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\left(M_{\varepsilon\eta}\varphi\right) d\eta - \int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\,\varphi d\eta \right\|_p \\
&= \left\| \int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\left(M_{\varepsilon\eta}\varphi - \varphi\right) d\eta \right\|_p \\
&\leq \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \left\|M_{\varepsilon\eta}\varphi - \varphi\right\|_p d\eta.
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, $\forall t > 0$ için $\int_{\mathbb{R}^n} m(y;t)\,dy = e^{-t}$ özelliği kullanılırsa (bakınız: (2.8)),

$$\begin{aligned}
& M_{\varepsilon\eta}\varphi(t) - \varphi(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} m(y;\varepsilon\eta)\,\varphi(t-y)\,dy - \varphi(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} m(y;\varepsilon\eta)\,\varphi(t-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} m(y;\varepsilon\eta)\,\varphi(t)\,dy - \left(1-e^{-\varepsilon\eta}\right)\varphi(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} m(y;\varepsilon\eta)\left[\varphi(t-y)-\varphi(t)\right] dy - \left(1-e^{-\varepsilon\eta}\right)\varphi(t)
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned}
& \left\|M_{\varepsilon\eta}\varphi(t) - \varphi(t)\right\|_p \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} m(y;\varepsilon\eta)\left[\varphi(t-y)-\varphi(t)\right] dy - \left(1-e^{-\varepsilon\eta}\right)\varphi(t) \right\|_p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} m(y;\varepsilon\eta)\left\|\varphi(t-y)-\varphi(t)\right\|_p dy + \left(1-e^{-\varepsilon\eta}\right)\left\|\varphi(t)\right\|_p \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.3'den, $y$ ve $t$ 'ye bağlı olmayan bir $c_1 > 0$ sayısı için

$$0 \leq m(y;t) \leq c_1.p(y;t)$$

eşitsizliğinin sağlandığı bilinmektedir.

Bu ve $(1-e^{-\varepsilon\eta}) \leq \varepsilon\eta$ eşitsizliği (3.29)'da kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left\|M_{\varepsilon\eta}\varphi(t) - \varphi(t)\right\|_p \\
&\leq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} p(y;\varepsilon\eta)\left\|\varphi(t-y)-\varphi(t)\right\|_p dy + \varepsilon\eta\left\|\varphi(t)\right\|_p \\
&\leq c_2 \left[\int_{\mathbb{R}^n} p(y;\varepsilon\eta)\left\|\varphi(t-y)-\varphi(t)\right\|_p dy + \varepsilon\eta\right]
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi, $0 < \rho < 1$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(y;\varepsilon\eta)\left\|\varphi(t-y)-\varphi(t)\right\|_p dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{|y|\leq\rho} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\left\|\varphi\left(t-y\right)-\varphi\left(t\right)\right\|_{p} dy \\
&\quad+\int_{|y|>\rho} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\left\|\varphi\left(t-y\right)-\varphi\left(t\right)\right\|_{p} dy \\
&\equiv i_1\left(\varepsilon\right)+i_2\left(\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

denilsin. Sonuç 3.17'ye göre $i_1\left(\varepsilon\right) \leq A\mu\left(\varepsilon\eta\right)$ olur. (Burada $A$ sayısı, $\varepsilon$ ve $\eta$'ya bağlı değildir). Diğer yandan, bu teoremin i). kısmının ispatındaki $i_2\left(\varepsilon\right)$ ifadesi ile buradaki $i_2\left(\varepsilon\right)$ ifadesi aynı olduğundan

$$i_2\left(\varepsilon\right) \leq c_3\varepsilon\eta$$

tahmini elde edilir. Burada, $c_3 \equiv c_3\left(\rho;n\right)$ katsayısı, $\varepsilon$ ve $\eta$'ya bağlı değildir. Böylece,

$$\int_{\mathbb{R}^n} p\left(y;\varepsilon\eta\right)\left\|\varphi\left(t-y\right)-\varphi\left(t\right)\right\|_{p} dy \leq A\mu\left(\varepsilon\eta\right)+c_3\varepsilon\eta$$

olur ve buradan,

$$\left\|M_{\varepsilon\eta}\varphi-\varphi\right\|_{p} \leq c_2\left[A\mu\left(\varepsilon\eta\right)+c_3\varepsilon\eta+\varepsilon\eta\right]$$

elde edilir. Sonuçta,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathfrak{D}^{\alpha}_{\varepsilon}J^{\alpha}\varphi-\varphi\right\|_{p} &\leq c_4\int_0^{\infty}\left|K^{(l)}_{\alpha}\left(\eta\right)\right|\left(\mu\left(\varepsilon\eta\right)+\varepsilon\eta\right)d\eta \\
&\leq c_4\int_0^{\infty}\left|K^{(l)}_{\alpha}\left(\eta\right)\right|\left(\mu\left(\varepsilon\right)\omega\left(\eta\right)+\varepsilon\eta\right)d\eta \\
&\quad \left(\mu\left(\varepsilon\right)\geq a\varepsilon, \varepsilon\in\left(0,\rho\right)\ \text{koşulu kullanılırsa}\right) \\
&\leq c_5\mu\left(\varepsilon\right)\int_0^{\infty}\left|K^{(l)}_{\alpha}\left(\eta\right)\right|\left(\omega\left(\eta\right)+\eta\right)d\eta.
\end{aligned}$$

olduğu görülür. İspatın bundan sonraki kısmı, i) kısmının ispatının sonundaki gibi yapılır:

$$\int_0^{\infty}\frac{\omega\left(\eta\right)}{1+\eta^2}d\eta<\infty$$

koşulu ve Lemma 3.2 (ii) özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\left|K^{(l)}_{\alpha}\left(\eta\right)\right|\omega\left(\eta\right)d\eta \\
&= \int_0^{1}\left|K^{(l)}_{\alpha}\left(\eta\right)\right|\omega\left(\eta\right)d\eta+\int_1^{\infty}\left|K^{(l)}_{\alpha}\left(\eta\right)\right|\omega\left(\eta\right)d\eta \\
&\leq c_6+c_7\int_1^{\infty}\frac{\omega\left(\eta\right)}{1+\eta^2}d\eta=c_8<\infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan, $\eta \to \infty$ için $K_{\alpha}^{(l)}(\eta) = O(\eta^{\alpha-l-1})$ asimptotiği ve $l > \alpha + 1$ koşulu göz önüne alınırsa,

$$\int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \eta d\eta = \int_0^1 \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \eta d\eta + \int_1^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \eta d\eta \le c_9$$

bulunur.

Böylece istenen sonuç elde edilmiş olur:

$$\|\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi - \varphi\|_p \le c\mu(\varepsilon), \varepsilon \to 0^+.$$

(Burada $c$, $\varepsilon$ 'dan bağımsızdır). □

**Teorem 3.20.** *$\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n), (1 \le p < \infty)$ fonksiyonu $L_p$-anlamında $\mu$-pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun, yani $(3.21)$ koşulu sağlansın. Ayrıca, $\mu(r)$ fonksiyonu, $\varphi$'nin bir $a > 0$ için $\mu(r) \ge ar, (0 \le r \le \rho)$ koşulunu sağlayan $L_p$-süreklilik modulü olsun. $\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha$ ve $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha$ operatörleri de $(2.17) - (2.18)$'de tanımlandığı gibi olsun ve $l \in \mathbb{N}$ parametresi $l > \frac{\alpha}{2} + 1$ koşulunu sağlasın.Bu durumda $\varepsilon \to 0^+$ için*

$$(a)\ \|\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi - \varphi\|_p = O\left(\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right), \tag{3.30}$$

$$(b)\ \|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha \varphi - \varphi\|_p = O\left(\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right) \tag{3.31}$$

*sağlanır.*

*İspat.* (a) $(3.18)$ formülü, Lemma 3.2 (i) ve Minkowski eşitsizliği kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha I^\alpha \varphi - \varphi\|_p &= \left\| \int_0^\infty K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta) (U\varphi)(\cdot, \varepsilon\eta)\, d\eta - \varphi(\cdot) \right\|_p \\
&= \left\| \int_0^\infty K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta) (U\varphi)(\cdot, \varepsilon\eta)\, d\eta - \int_0^\infty K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)\, \varphi(\cdot)\, d\eta \right\|_p \\
&= \left\| \int_0^\infty K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta) \left((U\varphi)(\cdot, \varepsilon\eta) - \varphi(\cdot)\right) d\eta \right\|_p \\
&\le \int_0^\infty \left| K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta) \right| \|(U\varphi)(\cdot, \varepsilon\eta) - \varphi(\cdot)\|_p\, d\eta
\end{aligned} \tag{3.32}$$

elde edilir. Ayrıca, Gauss-Weierstrass çekirdeğinin integrali $\int_{\mathbb{R}^n} W(y;t)\, dy = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\|(U\varphi)(\cdot, \varepsilon\eta) - \varphi(\cdot)\|_p \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} W(y; \varepsilon\eta)\, \varphi(t-y)\, dy - \varphi(t) \right\|_p \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} W(y; \varepsilon\eta)\, \varphi(t-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} W(y; \varepsilon\eta)\, \varphi(t)\, dy \right\|_p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} W(y;\varepsilon\eta)\left[\varphi(t-y)-\varphi(t)\right]dy \right\|_p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} W(y;\varepsilon\eta)\left\|\varphi(t-y)-\varphi(t)\right\|_p dy \\
&= \int_{|y|\leq\rho} W(y;\varepsilon\eta)\left\|\varphi(t-y)-\varphi(t)\right\|_p dy \\
&+ \int_{|y|>\rho} W(y;\varepsilon\eta)\left\|\varphi(t-y)-\varphi(t)\right\|_p dy \\
&= i_1(\varepsilon\eta)+i_2(\varepsilon\eta)
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

olur. Şimdi, sırasıyla, $i_1(\varepsilon\eta)$ ve $i_2(\varepsilon\eta)$ ifadelerinin tahminleri elde edilecektir.

(3.24)'den, $i_1(\varepsilon\eta) \leq c_1\mu(\sqrt{\varepsilon\eta})$ olduğu görülür.

Diğer yandan, $n$-boyutlu birim kürenin, yani, $S^{n-1}$'in, yüzey elemanı $d\sigma(\theta)$ ile gösterilirse,

$$
\begin{aligned}
i_2(\varepsilon\eta) &= \int_{|y|>\rho} W(y;\varepsilon\eta)\left\|\varphi(t-y)-\varphi(t)\right\|_p dy \\
&\leq 2\left\|\varphi\right\|_p \int_{|y|>\rho} W(y;\varepsilon\eta)\,dy \\
&\overset{(2.9)}{=} 2\left\|\varphi\right\|_p \int_{|y|>\rho} (4\pi\varepsilon\eta)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon\eta}} dy, \ (t>0) \\
&\left( \begin{array}{c} y=r\theta, \rho<r<\infty, \theta\in S^{n-1}; \\ dy=r^{n-1}drd\sigma(\theta) \ \text{değişken değiştirmesi yapılırsa} \end{array} \right) \\
&= c_1(\varepsilon\eta)^{-\frac{n}{2}} \int_{\rho}^{\infty} r^{n-1}e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon\eta}}dr \\
&= c_2 \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{\varepsilon\eta}}}^{\infty} t^{n-1}e^{-t^2}dt = c_2 \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{\varepsilon\eta}}}^{\infty} t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
&\leq c_3 e^{-\frac{\rho^2}{8\varepsilon\eta}}.
\end{aligned}
$$

elde edilir. Amacımız, $i_2(\varepsilon\eta) \leq c\varepsilon\eta$ şeklinde bir eşitsizlik elde etmektir. Bunun için, önce

$$
\inf_{\tau>0}\left(\tau e^{\frac{\delta}{\tau}}\right) = e\delta
$$

olduğu gösterilecektir. $f(\tau) = \tau e^{\frac{\delta}{\tau}}$ denilirse, $f'(\delta) = 0$ olur. Gerçekten;

$$
f'(\tau) = \left(\tau e^{\frac{\delta}{\tau}}\right)' = e^{\frac{\delta}{\tau}} - \tau e^{\frac{\delta}{\tau}}\frac{\delta}{\tau^2} = e^{\frac{\delta}{\tau}} - e^{\frac{\delta}{\tau}}\frac{\delta}{\tau}
$$

olduğundan $f'(\delta) = 0$'dır. Böylece $\tau = \delta$ kritik noktadır. Bu noktanın maksimum ya da minimum noktası olduğunu belirlemek için ikinci türev alınırsa

$$\begin{aligned} f''(\tau) &= \left(e^{\frac{\delta}{\tau}} - e^{\frac{\delta}{\tau}}\frac{\delta}{\tau}\right)' = e^{\frac{\delta}{\tau}}\left(-\frac{\delta}{\tau^2}\right) - \left(-e^{\frac{\delta}{\tau}}\frac{\delta^2}{\tau^3} - e^{\frac{\delta}{\tau}}\frac{\delta}{\tau^2}\right) \\ &= e^{\frac{\delta}{\tau}}\frac{\delta^2}{\tau^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\tau = \delta$ için $f''(\delta) > 0$ olur. Yani, $\tau = \delta$ noktası minimum noktasıdır. Böylece,

$$\inf_{\tau>0}\left(\tau e^{\frac{\delta}{\tau}}\right) = e\delta$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu eşitlik göz önünde bulundurularak, $0 < \tau < \infty$ için

$$\tau e^{\frac{\delta}{\tau}} \geq e\delta$$

eşitsizliği yazılabilir ve buradan da

$$e^{-\frac{\delta}{\tau}} \leq \frac{1}{e\delta}\tau$$

sağlanır. Böylece,

$$i_2(\varepsilon\eta) \leq c_4\varepsilon\eta$$

tahmini elde edilir. Burada, $c_4$ sayısı, $\varepsilon$ ve $\eta$ 'ya bağlı değildir. Buradan,

$$\|(U\varphi)(\cdot,\varepsilon\eta) - \varphi(\cdot)\|_p \overset{(3.33)}{\leq} c_1\mu(\sqrt{\varepsilon\eta})) + c_4\varepsilon\eta \tag{3.34}$$

olduğu görülür ve böylece,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha I^\alpha\varphi - \varphi\|_p &\overset{(3.32)}{\leq} \int_0^\infty \left|K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)\right| (c\mu(\sqrt{\varepsilon\eta}) + c_4\varepsilon\eta)\, d\eta \\ (\ \mu(\sqrt{\varepsilon\eta}) \leq (1+\sqrt{\eta})\,\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right) &\ \text{eşitsizliği kullanılırsa}\ ) \\ &\leq c_5\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\int_0^\infty \left|K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)\right| (\eta + \sqrt{\eta} + 1)\, d\eta \end{aligned} \tag{3.35}$$

olur. Son olarak, $l > \frac{\alpha}{2} + 1$ koşulu kullanılırsa ve $K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)$ fonksiyonunun $\eta \to \infty$ için asimptotik davranışı göz öünde bulundurulursa (bakınız: Lemma 3.2 (ii)), (3.35)'in sağ tarafındaki integral yakınsak olur. Buradan da, $\varepsilon \to 0^+$ için

$$\|\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha I^\alpha\varphi - \varphi\|_p = O\left(\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right)$$

sonucu elde edilir. Böylece, (a) kısmının ispatı tamamlanmış olur.

(b) (3.31)'in ispatı için de benzer yol izlenecektir.

Yine, $(3.19)$ formülü, Lemma 3.2 (i) ve Minkowski eşitsizliği kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{D}_{\varepsilon}^{\alpha} J^{\alpha}\varphi - \varphi\|_p &= \left\| \int_0^{\infty} K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)\,(U_M\varphi)(\cdot,\varepsilon\eta)\,d\eta - \varphi(\cdot) \right\|_p \\
&= \left\| \int_0^{\infty} K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)\,(U_M\varphi)(\cdot,\varepsilon\eta)\,d\eta - \int_0^{\infty} K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)\,\varphi(\cdot)\,d\eta \right\|_p \\
&= \left\| \int_0^{\infty} K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)\,((U_M\varphi)(\cdot,\varepsilon\eta) - \varphi(\cdot))\,d\eta \right\|_p \\
&\le \int_0^{\infty} \left| K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta) \right| \|(U_M\varphi)(\cdot,\varepsilon\eta) - \varphi(\cdot)\|_p\,d\eta. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
& \|(U_M\varphi)(\cdot,\varepsilon\eta) - \varphi(\cdot)\|_p \overset{(2.13)}{=} \left\| e^{-\varepsilon\eta}(U\varphi)(\cdot,\varepsilon\eta) - \varphi(\cdot) \right\|_p \\
= \;& \left\| e^{-\varepsilon\eta}(U\varphi)(\cdot,\varepsilon\eta) - \varphi(\cdot) - (U\varphi)(\cdot;\varepsilon\eta) + (U\varphi)(\cdot;\varepsilon\eta) \right\|_p \\
\le \;& (1 - e^{-\varepsilon\eta})\|(U\varphi)(\cdot;\varepsilon\eta)\|_p + \|(U\varphi)(\cdot;\varepsilon\eta) - \varphi(\cdot)\|_p \\
\equiv \;& i_1 + i_2
\end{aligned}$$

olur. $i_1$'i tahmin etmek için aşağıdaki özellikler kullanılacaktır:

$$(1 - e^{-\varepsilon\eta}) \le \varepsilon\eta \text{ ve } \|(U\varphi)(\cdot,\varepsilon\eta)\|_p \overset{(2.10)}{\le} \|\varphi\|_p\,.$$

Bu özellikler göz önüne alınırsa, $i_1 \le c_1\varepsilon\eta$ olur.

$$i_2 = \|(U\varphi)(\cdot;\varepsilon\eta) - \varphi(\cdot)\|_p$$

nin tahmini için de (3.34) eşitsizliğine bakılırsa,

$$i_2 \le c_2\mu\left(\sqrt{\varepsilon\eta}\right)) + c_3\varepsilon\eta$$

olduğu görülür ve böylece,

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{D}_{\varepsilon}^{\alpha} J^{\alpha}\varphi - \varphi\|_p \overset{(3.36)}{\le} \int_0^{\infty} \left| K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta) \right| \left(c_1\varepsilon\eta + c_2\mu\left(\sqrt{\varepsilon\eta}\right) + c_3\varepsilon\eta\right) d\eta \\
& \left(\mu\left(\sqrt{\varepsilon\eta}\right) \le (1 + \sqrt{\eta})\,\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \text{ eşitsizliği kullanılırsa}\right) \\
& \le c_4\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \int_0^{\infty} \left| K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta) \right| (\eta + \sqrt{\eta} + 1)\,d\eta. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

olur. Son olarak, yine (a) kısmının ispatının son kısmına benzer şekilde, $l > \frac{\alpha}{2} + 1$ koşulu kullanılırsa ve $K_{\frac{\alpha}{2}}^{(l)}(\eta)$ fonksiyonunun $\eta \to \infty$ için asimptotik davranışı göz öünde bulundurulursa (Lemma 3.2 (ii)), (3.37)'nin sağ tarafındaki integral yakınsak olur ve buradan da, $\varepsilon \to 0^{+}$ için

$$\left\| \mathbb{D}_{\varepsilon}^{\alpha} J^{\alpha} \varphi - \varphi \right\|_{p} = O\left(\mu\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right)$$

sonucu elde edilir. Böylece, (b) kısmının ispatı da tamamlanmış olur. □

**Not 3.21.** *Daha önce, Aliev ve Shafiev (1992) ve Shafiev (2000) çalışmalarında bu teoremin çok özel bir hali olan $\mu(\varepsilon) = \varepsilon^{\beta}, (0 < \beta < 1)$ durumu incelenmiştir.*

### 3.3. Laplace-Bessel Diferansiyel Operatörünün Doğurduğu Riesz Potansiyellerinin Yaklaşık Terslerinin Noktasal Yakınsama Hızlarının İncelenmesi

Bu bölümde, Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu Riesz potansiyellerinin terslerini bulmak için oluşturulan kesikli hipersingüler integral operatörlerin yakınsama hızları incelenecektir. Bunun için, öncelikle gerekli bilgi ve kavramlar tanıtılacaktır.

$\mathbb{R}_{+}^{n} = \{x \mid x = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^{n}, x_n > 0\}$ olmak üzere, $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ile, $x_n$ değişkenine göre çift olan Schwartz test fonksiyonlarının $\mathbb{R}_{+}^{n}$'ya kısıtlanışı gösterilsin.

Bu uzayın, $\nu > 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\|f\|_{p,\nu} = \left( \int_{\mathbb{R}_{+}^{n}} |f(x)|^{p} x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}}, (1 \leq p < \infty)$$

normuna göre kapanışı $L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ile gösterilsin.

Burada, $dx = dx_1 ... dx_{n-1} dx_n$'dir.

$$B_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\nu}{t} \cdot \frac{d}{dt}, (0 < t < \infty)$$

singüler Bessel diferensiyel operatörü olmak üzere, Laplace-Bessel diferensiyel operatörü şöyle tanımlanır:

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + B_{x_n}.$$

İlk $n-1$ değişkene göre klasik (Euclid) kayması (ötelemesi) ve n. değişkene göre de yukarıdaki Bessel diferensiyel operatörü ile ilişkilendirilen Bessel kaymasının bileşkesinden ortaya çıkan ve genelleşmiş kayma olarak adlandırılacak kayma operatörü şöyle tanımlanır:

$$T^{y}\varphi\left(x\right)=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\pi}\varphi\left(x'-y';\sqrt{x_{n}^{2}-2x_{n}y_{n}\cos\alpha+y_{n}^{2}}\right)\sin^{2\nu-1}\alpha d\alpha$$

(Burada, $\Gamma$, Euler'in Gamma fonksiyonu olup, $x'=(x_1,...,x_{n-1})$'dir.)

Bu kaymaya uygun genelleşmiş girişim (konvolusyon) şöyle tanımlanır:

$$\left(\varphi*\psi\right)\left(x\right)=\int_{\mathbb{R}_{+}^{n}}\varphi\left(\xi\right)T^{\xi}\psi\left(x\right)\xi_{n}^{2\nu}d\xi.$$

Marcinkiewicz interpolasyon teoremi kullanılarak, bu girişim için Young eşitsizliğinin benzeri:

$$\left\|\varphi*\psi\right\|_{r,\nu}\leq\left\|\varphi\right\|_{p,\nu}\left\|\psi\right\|_{q,\nu}\ ,\left(1\leq p,q,r\leq\infty;\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1\right)$$

kanıtlanabilir.

Yukarıda tanımlanmış olan girişim işlemini, noktasal çarpma işlemine dönüştüren Fourier-Bessel dönüşümü şöyle tanımlanır:

$$\left(F_{\nu}\varphi\right)\left(y\right)=\int_{\mathbb{R}_{+}^{n}}\varphi\left(x\right)e^{-ix'\cdot y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_{n}y_{n}\right)x_{n}^{2\nu}dx.$$

Ters Fourier-Bessel dönüşümü ise

$$\left(F_{\nu}^{-1}\varphi\right)\left(y\right)=c_{\nu}\left(n\right)\left(F_{\nu}\varphi\right)\left(-y';y_{n}\right)$$

ile tanımlanır. Burada, $\varphi\in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ , $x'\cdot y'=x_1y_1+...+x_{n-1}y_{n-1}$ ve

$$c_{\nu}\left(n\right)=\left[\left(2\pi\right)^{n-1}2^{2\nu-1}\Gamma^{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}$$

olup, $j_s\left(t\right)\left(t>0,s>-\frac{1}{2}\right)$ normalleştirilmiş Bessel fonksiyonudur:

$$j_{s}\left(t\right)=\frac{2^{s}\Gamma\left(p+1\right)J_{s}\left(t\right)}{t^{s}};$$

burada $J_s\left(t\right)$ , I.tip Bessel fonksiyonudur.

Klasik halde olduğu gibi, Fourier-Bessel Harmonik Analizinde de $\varphi,\psi\in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$

için

$$F_\nu(\varphi * \psi) = F_\nu(\varphi) . F_\nu(\psi)$$

eşitliği sağlanır.

Fourier-Bessel Harmonik Analizinin temel kavramları ile daha ayrıntılı bilgiler Kipriyanov (1967) makalesinde bulunabilir. (İlave olarak, Gadjiev ve Aliev (1988) ve Aliev ve Bayrakci (1998) makalelerine bakılabilir.)

Yukarıda tanımlanan Laplace-Bessel diferensiyel operatörünün negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanan ve Fourier-Bessel dönüşümü dilinde

$$I_\nu^\alpha f = F_\nu^{-1}\left(|\xi|^{-\alpha} F_\nu f\right), \left(f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_+^n\right), 0 < \alpha < n + 2\nu; |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}\right)$$

ile tanımlanan genelleşmiş Riesz potansiyelleri, Bessel girişimi olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir (Gadjiev ve Aliev 1988, Aliev ve Bayrakci 1998, Aliev ve Rubin 2005):

$$(I_\nu^\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_{n,\nu}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_+^n} |y|^{\alpha - n - 2\nu} T^y f(x) y_n^{2\nu} dy.$$

Burada,

$$\gamma_{n,\nu}(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2\nu-\alpha}{2}\right)}, (0 < \alpha < n + 2\nu)$$

dir. Bu Riesz potansiyeli operatörünün,

$$1 < p < \frac{n+2\nu}{\alpha} \text{ ve } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2\nu}$$

olmak üzere, $L_{p,\nu}$ 'den $L_{q,\nu}$ 'ye sınırlı operatör olduğu ve

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2\nu}$$

olmak üzere, $(1, q)$-zayıf tipli olduğu bilinmektedir. Bu, Hardy-Littlewood-Sobolev teoreminin genelleşmiş Riesz potansiyeli için bilinen versiyonudur (Gadjiev ve Aliev 1988).

$e^{-t|x|}$, $\left(t > 0, x \in \mathbb{R}_+^n\right)$ fonksiyonunun ters Fourier-Bessel dönüşümü $p_\nu(y;t)$ ile gösterilsin (Aliev ve Bayrakci 1998, Aliev ve Rubin 2005) :

$$p_\nu(y;t) = F_\nu^{-1}\left(e^{-t|x|}\right)(y) = \frac{2}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)} \frac{t}{\left(|y|^2 + t^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}},$$

$p_\nu(y;t)$ fonksiyonuna genelleşmiş (modifiye edilmiş) Poisson çekirdeği denir.

$f$ fonksiyonu ile $p_\nu(y;t)$'nin genelleşmiş girişimi $V_t f(x)$ ile gösterilsin:

$$V_t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} p_\nu(y;t)\, T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy, (t > 0),$$

$V_t f(x)$ fonksiyonuna, $f$ fonksiyonunun genelleşmiş Poisson integrali denir.

Genelleşmiş Poisson çekirdeği $p_\nu(y;t)$ ve genelleşmiş Poisson integrali $V_t f(x)$'e ait önemli özellikler aşağıdaki lemmada verilmiştir.

**Lemma 3.22.** *(Aliev vd 2008, Sezer ve Aliev 2010, Aliev ve Sağlık 2016)*

*$x, y \in \mathbb{R}_+^n$ ve $0 < t < \infty$ olsun. Bu durumda*

*i)* $p_\nu(\lambda|y|;\lambda t) = \lambda^{-n+2\nu} p_\nu(|y|;t), (\lambda > 0)$.

*Özel olarak $\lambda = \frac{1}{t}$ için $p_\nu(|y|;t) = t^{-n+2\nu} p_\nu(t^{-1}|y|;1)$ olur;*

*ii) $\forall y \in \mathbb{R}_+^n$ ve $t > 0$ için $p_\nu(|y|;t) > 0$'dır;*

*iii) $\forall t > 0$ için $\int_{\mathbb{R}_+^n} p_\nu(|y|;t)\, y_n^{2\nu} dy = 1$'dir;*

*iv) $f \in L_{p,\nu}, 1 \le p \le \infty$ olsun. O zaman, $\|V_t f(x)\|_{p,\nu} \le \|f\|_{p,\nu}$;*

*v) $f \in L_{p,\nu}, 1 \le p \le \infty$ olsun. O zaman, $\sup\limits_{t>0} |V_t f(x)| \le c(M_\nu f)(x)$'tir.*

*Burada $M_\nu f$, genelleştirilmiş Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur (Aliev ve Bayrakci 1998, Guliev 1998, 2003):*

$$(M_\nu f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+2\nu}\omega(n;\nu)} \int_{B_r^+} |T^x f(y)|\, y_n^{2\nu} dy,$$

*Burada, $B_r^+ = \left\{x : x \in \mathbb{R}_+^n, |x| \le r\right\}$ ve $\omega(n;\nu) = \int_{B_1^+} x_n^{2\nu} dx$'dir;*

*vi) $1 \le p < \infty$ için $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+^n} |V_t f(x)| \le c t^{-\frac{n+2\nu}{p}} \|f\|_{p,\nu}$;*

*vii) $f \in L_{p,\nu}$ olsun. $\forall t, \tau \in (0,\infty)$ için $V_t(V_\tau f) = V_{t+\tau} f$, (yarıgrup özelliği) sağlanır.*

Genelleşmiş Riesz potansiyeli, $V_t f, (t > 0)$ operatörler ailesi kullanılarak, tek katlı bir integral yardımıyla ifade edilebilir (Aliev ve Bayrakci 1998) :

$$(I_\nu^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} V_t f(x)\, dt. \tag{3.38}$$

(Klasik (Euclid) kayması durumunda, bu formül E.Stein formülü olarak bilinir.)

Çalışmanın bu bölümünün ana sonucunu ifade etmek için bir tanıma daha ihtiyaç vardır:

**Tanım 3.23.** $\alpha > 0$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$(D_\varepsilon^\alpha g)(x) = \frac{1}{\varkappa(\alpha; l)} \int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha} \left[\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} V_{kt} g(x)\right] \frac{dt}{t}, (\varepsilon > 0), \tag{3.39}$$

ifadesine $g$ fonksiyonunun $\alpha$ mertebeden Balakrishnan-Rubin tipli $\varepsilon$-kesirsel türevi denir. Burada, $l > \alpha + 1$ ve

$$\varkappa(\alpha; l) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-t}\right)^l t^{-1-\alpha} dt$$

normalleştirici çarpandır.

Aliev ve Bayrakci (1998) makalesinde, $0 < \alpha < \frac{n+2\nu}{p}, 1 < p < \infty$ olmak üzere, $D_\varepsilon^\alpha I_\nu^\alpha f$ ifadesinin $\varepsilon \to 0$ için $f \in L_{p,\nu}$ fonksiyonuna $L_{p,\nu}$ normunda yakınsadığı ve yine, $(D_\varepsilon^\alpha I_\nu^\alpha f)(x)$ ifadesinin hhh $x \in \mathbb{R}_+^n$ için $f(x)$'e yakınsadığı ispatlanmıştır.

Doğal olarak şöyle bir soru ortaya çıkar:

Bir $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ noktası $f \in L_{p,\nu}$ fonksiyonunun bir "pürüzsüzlük" noktası ise bu noktada, $(D_\varepsilon^\alpha I_\nu^\alpha f)(x_0)$ ifadesinin $f(x_0)$'a yakınsama hızını, "pürüzsüzlük göstergesine" göre tahmin etmek mümkün müdür?

Tezin bu bölmünde bu soruya çözüm aranacaktır.

**Tanım 3.24.** $\rho \in (0,1)$ 'de sabit tutulmuş bir parametre olmak üzere, $\mu(r), (0 \le r \le \rho)$ fonksiyonu $[0,\rho]$ aralığında sürekli ve $\mu(0) = 0$ olup, bu aralıkta kesin artan olsun. Eğer $B_r^+ = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid |x| \le r\right\}$ olmak üzere bir $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$(\mathcal{M}_\mu \varphi)(x_0) = \sup_{0<r\le\rho} \frac{1}{r^{n+2\nu}\mu(r)} \int_{B_r^+} |T^x \varphi(x_0) - \varphi(x_0)|\, x_n^{2\nu} dx < \infty$$

sağlanırsa, $\varphi \in L_{p,\nu}$ fonksiyonu $x_0$ noktasında "$\mu$-pürüzsüzlük" özelliğine sahiptir denir.

**Not 3.25.** *Bundan sonra, bir $a > 0$ sabiti ve her $t \in [0,\rho]$ için $\mu(t) \ge at$ ve her $t \in [\rho,\infty)$ için $\mu(t) = \mu(\rho)$ sağlandığı varsayılacaktır. (Yani, $\mu(t)$ fonksiyonu, $[0,\rho]$ aralığından*

$[\rho,\infty)$ *aralığına sabit olarak devam ettirilmiştir).*

Şimdi, çalışmanın bu kısmının ana sonuçları ifade edilecektir.

**Teorem 3.26.** *$D_\varepsilon^\alpha$ ve $I_\nu^\alpha$ operatörleri (3.38) ve (3.39)'daki gibi tanımlansın. $\mu(r)$ fonksiyonu yukarıdaki koşulları sağlasın ve ek olarak, bir lokal sınırlı $\omega(t)>0$ fonksiyonu için aşağıdakiler sağlansın:*

$$\mu(\varepsilon t)\le\mu(\varepsilon)\,\omega(t)\ \text{ve}\ \int_0^\infty\frac{\omega(t)}{1+t^2}dt<\infty,\left(\forall\varepsilon\in(0,\rho)\ \text{ve}\ \forall t\in(0,\infty)\right).$$

*Eğer $x_0\in\mathbb{R}_+^n$ noktası, $\varphi\in L_{p,\nu}$ fonksiyonunun bir $\mu$-pürüzsüzlük noktası ise o halde, $\varepsilon\to0$ için*

$$\left|\left(D_\varepsilon^\alpha I_\nu^\alpha\varphi\right)(x_0)-\varphi(x_0)\right|=O\left(\mu(\varepsilon)\right)$$

*sağlanır.*

Bu teoremin ispatı, Bulgular-Tartışma kısmının birinci ve ikinci bölümlerindeki ana teoremlere ait teknikler kullanılarak, benzer şekilde yapılır.

Bunun için gereken teknik araçlar, Lemma 3.22'nin yanısıra, aşağıdaki lemmalardır:

**Lemma 3.27.** *(Aliev ve Bayrakci 1998)*

*$\varphi\in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right),0<\alpha<\frac{n+2\nu}{p},1\le p<\infty$ olsun. $(V_t\varphi),t\ge0$ ailesi Lemma 3.22'deki gibi tanımlansın. Ayrıca, $K_\alpha^{(l)}(\eta)$ fonksiyonu (3.3)'deki gibi tanımlansın. Bu takdirde, hhh $x\in\mathbb{R}_+^n$ için*

$$\left(D_\varepsilon^\alpha I_\nu^\alpha\varphi\right)(x)=\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\left(V_{\varepsilon\eta}\varphi\right)(x)\,d\eta$$

*sağlanır.*

**Lemma 3.28.** *$\varphi\in L_{p,\nu},(1\le p<\infty)$ olup, $x_0\in\mathbb{R}_+^n$ noktasında $\left(\mathcal{M}_\mu\varphi\right)(x_0)<\infty$ sağlansın, yani, $\varphi$ fonksiyonu $x_0$ noktasında "$\mu$-pürüzsüzlük" özelliğine sahip olsun. Ayrıca, $\psi(r),(0\le r<\rho)$ fonksiyonu $[0,\rho]$ aralığında azalan, negatif olmayan ve sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned}&\int_{B_r^+}\left|T^x\varphi(x_0)-\varphi(x_0)\right|\psi(|x|)\,x_n^{2\nu}dx\\ \le\ &\left(\mathcal{M}_\mu\varphi\right)(x_0)\left[\rho^{n+2\nu}\mu(\rho)\,\psi(\rho)+\int_0^\rho r^{n+2\nu}\mu(r)\left(-\psi'(r)\right)dr\right]\end{aligned}$$

*eşitsizliği sağlanır.*

**Sonuç 3.29.** $\gamma \in (0,1)$ *olmak üzere,* $\mu(t) = t^{\gamma}, (0 \leq t \leq \rho)$ *alınırsa ve* $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, *bir* $\varphi \in L_{p,\nu}$ *fonksiyonunun bir* $\mu$*-pürüzsüzlük noktası ise,* $\varepsilon \to 0$ *için*

$$|(D^{\alpha}_{\varepsilon} I^{\alpha}_{\nu} \varphi)(x_0) - \varphi(x_0)| = O(\varepsilon^{\gamma})$$

*olur.*

**Sonuç 3.30.** $0 < \gamma < 1, 0 < \beta < \infty$ *ve* $0 < t \leq \rho$ *olmak üzere,* $\mu(t) = t^{\gamma} |\log t|^{\beta}$ *alınırsa ve* $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, *bir* $\varphi \in L_{p,\nu}$ *fonksiyonunun bir* $\mu$*-pürüzsüzlük noktası ise, bu durumda* $\varepsilon \to 0$ *için*

$$|(D^{\alpha}_{\varepsilon} I^{\alpha}_{\nu} \varphi)(x_0) - \varphi(x_0)| = O\left(\varepsilon^{\gamma} |\log \varepsilon|^{\beta}\right)$$

*sağlanır.*

# 4. SONUÇ

İlk kısmı Giriş başlığı altında verilen ve bu kısım hariç 4 ana kısımdan oluşan bu tez çalışmasının ikinci kısmında, bütün bilimsel çalışmalarda olduğu gibi, kaynak taraması yapılarak, tez boyunca kullanılacak önemli tanım, teorem ve özellikler ifade edilmiştir.

Üçüncü kısım üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, klasik Riesz potansiyellerinin terslerini bulmak için kurulan, Poisson yarıgrubunun doğurduğu ve bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı kesikli hipersingüler integral ailesinin, $\varepsilon$ sıfıra giderken noktasal yaklaşım hızı, potansiyel operatörün etki ettiği fonksiyonun $\mu$-pürüzsüzlük derecesine bağlı olarak incelenmiştir ve gerekli tahminler elde edilmiştir. Yine bu bölümde, benzer sonuçlar, klasik Bessel potansiyellerinin terslerini bulmak için kurulan, metaharmonik yarıgrubunun doğurduğu ve bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı kesikli hipersingüler integral operatörler ailesi için de elde edilmiştir.

İkinci bölümde, klasik Riesz potansiyelleri için kurulan, Poisson yarıgrubunun doğurduğu kesikli hipersingüler integral operatörler ailesi ve klasik Bessel potansiyelleri için kurulan, metaharmonik yarıgrubun doğurduğu kesikli hipersingüler integral operatörler ailesinin $L_p$-uzayının normundaki yakınsama hızları, potansiyellerin etki ettiği fonksiyonların $L_p$ anlamında pürüzsüzlük göstergesi göz önünde bulundurularak incelenmiş ve istenen tahminler elde edilmiştir. Yine, benzer şekilde, klasik Riesz potansiyelleri için kurulan, Gauss-Weierstrass yarıgrubunun doğurduğu kesikli hipersingüler integral ailesi ve klasik Bessel potansiyelleri için kurulan, modifiye edilmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubunun doğurduğu kesikli hipersingüler integral ailesi için $L_p$-uzayının normunda, benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu Riesz potansiyellerinin terslerini bulmak için oluşturulan kesikli hipersingüler integral operatörlerin yakınsama hızları, bir "pürüzsüzlük göstergesine" bağlı olarak incelenmiş ve birinci ve ikinci bölümlerdeki sonuçlara benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışma, klasik Harmonik Analizde, Laplace-Bessel Harmonik Analizinin çeşitli alanlarında, Fonksiyonel Uzaylarda ve zayıf tekilliğe sahip çekirdekli integral denklemler alanında çalışan matematikçiler için yardımcı kaynak rolünü oynayabilir.

Bu tez çalışmasından elde edilen sonuçların bir kısmı Aliev ve Çobanoğlu (2014) makalesinde yayınlanmıştır, bir kısmı Eryigit ve Çobanoğlu (2017) makalesinde yayınlanmak üzere kabul edilmiştir ve çeşitli ulusal ve uluslararası sempozyumlarda (Aliev ve Çobanoğlu 2015, Çobanoğlu ve Aliev 2013, 2016) sunulmuştur.

## 5. KAYNAKLAR


ALIEV, I.A. and SHAFIEV, M.F. 1992. On rate of convergence of truncated hypersingular integrals of Balakrishnan-Rubin type. *Dep. VINITI*, No.1398-B92, (Moscow).

ALIEV, I.A. and BAYRAKCI, S. 1998. On inversion of B-elliptic potentials by the method of Balakrishnan-Rubin. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Vol.1, No:4, 365-384.

ALIEV, I.A. 1999. On the Bochner-Riesz summability and restoration of $\mu$-smooth functions by means of their Fourier transforms. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **2**, No.3 265-277.

ALIEV, I.A. and BAYRAKCI, S. 2002. On inversion of Bessel potentials associated with the Laplace-Bessel differential operator. Acta Math. Hungar., 95, (1-2),125-145.

ALIEV, I. A. and RUBIN, B. 2005. Wavelet-like transforms for admissible semi-groups; inversion formulas for potentials and Radon transforms. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 11(3), 333-352.

ALIEV, I.A., RUBIN, B., UYHAN, S. and SEZER, S. 2008. Composite Wavelet Transforms: Applications and Perspectives, Radon Transforms, Geometry, and Wavelets; Book Series: *Contemporary Mathematics. Amer. Math. Soc.*, Vol.: 464, 1-25; Providence, RI.

ALIEV, I.A. 2009. Bi-parametric potentials, relevant function spaces and wavelet-like transforms. *Integral Equations and Operator Theory*, 65, 151-167.

ALIEV, I.A. and ERYIGIT, M. 2013. On a rate of convergence of truncated hypersingular integrals associated to Riesz and Bessel potentials. *J. Math. Anal. Appl.*, 406, 352-359.

ALIEV, I.A. and ÇOBANOĞLU, S. 2014. The rate of convergence of truncated hypersingular integrals generated by the Poisson and metaharmonic semigroups. *Integral Transforms and Special Functions*, Vol. 25, No. 12, 943–954.

ALIEV, I.A. ve ÇOBANOĞLU, S. 2015. Metaharmonik yarıgrubun doğurduğu bir kesikli hipersingüler integral ailesinin $L_p$ uzayında yakınsama hızının incelenmesi. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, 7-9 Eylül 2015, s.43-44, Antalya, TÜRKİYE.

ALIEV, I.A. and SAĞLIK, E. 2016. Generalized Riesz Potential Spaces and Their Characterization via Wavelet-Type Transform. *Filomat*, 30(10):2809-2823.

ÇOBANOĞLU, S. and ALIEV, I.A. 2013. The rate of convergence of truncated hypersingular integrals generated by the Poisson semigroup. Algerian-Turkish International Days on Mathematics, 12-14 September 2013, s. 48, Istanbul, TURKEY.

ÇOBANOĞLU, S. ve ALIEV, I.A. 2016. Genelleşmiş Riesz potansiyellerinin yaklaşık terslerinin noktasal yaklaşım hızı üzerine. 29. Ulusal Matematik Sempozyumu, Mersin, TÜRKİYE.

DEVORE, R.A. and LORENTZ, G.G. 1993. Constructive Approximation. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

ERYIGIT, M. and ÇOBANOĞLU, S. On the rate of $L_p$-convergence of Balakrishnan-Rubin type hypersingular integrals associated to Gauss-Weierstrass semigroup. *Turkish Journal of Mathematics*, (yayına kabul edildi).

FISHER, M. J. 1971. Singular integrals and fractional powers of operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 161, No:2, 307-326.

FOLLAND, G.B. 1984. Real Analysis, Modern Techniquies and Their Applications. 549 pp., USA.

GADJIEV, A.D. and ALIEV, I. A. 1988. Riesz and Bessel potentials generated by a generalized translation and their inverses. Proc. IV.All-Union Winter Conf. *Theory of.Functions and Approximation*, 47-53, Saratov(Russia).

GULIEV, V.S. 1998. Sobolev's theorem for Riesz B-potentials. *Dokl. Rus. Akad. Nauk* ,358, No:4, 450-451.

GULIEV, V.S. 2003. On maximal function and fractional integral associated with the Bessel differential operator. *Mathematical Inequalities and Applications*, 6, 317-330.

KIPRIYANOV, I.A. 1967. The Fourier-Bessel transformation and embedding theorems for weighted classes. *Trudy Mat. Inst.*, 89,130-213, AN SSSR.

KIPRIYANOV, I.A. 1997. Singular elliptic boundary problems. Fizmatlit, Nauka, Mirovozrenie Zhizn Moskow.

LANDKOF, N.S. 1972. Foundations of Modern Potential Theory. Transleted from Russian by A.P. Doohovskoy,Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarst Band, 180, Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

LIZORKIN, P.I. 1964. The functions of Hirshman type and relations between the spaces $B_p^r(E_n)$ and $L_p^r(\mathbb{R}^n)$. *Mat. Sb.*, 63(4), 505-535 (Russian).

RUBIN, B. 1986. A method of characterization and inversion of Bessel and Riesz potentials. *Sov. Math. (Iz. VUZ)*, 30 (5),78-89.

RUBIN, B. 1987. Inversion of potentials on $\mathbb{R}^n$ with the aid of Gauss-Weierstrass integrals. *Math. Notes*, 41 (1-2), 22-27. English translation from *Math. Zametki* 41 (1) (1987) 34-42.

RUBIN, B. 1996. Fractional integrals and potentials. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Longman, Harlow.

SADOSKY, C. 1979. Interpolation of Operators and Singular Integrals. Marcel Dekker, INC. New York and Basel.

SAMKO, S.G. 1977. Spaces $L_{p,r}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ and hypersingular integrals. *Studia Math.*, 61, No:3, 193-230.

SAMKO, S.G., KILBAS, A.A. and MARICHEV, O.I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach, Sci. Publ., London, New York.

SAMKO, S.G. 2002. Hypersingular Integrals and Their Applications, in: Ser.: Analytical Methods and Special Functions. Taylor and Francis, London.

SEZER, S. and ALIEV, I.A. 2010. A new characterization of the Riesz potentials spaces with the aid of composite wavelet transform. *J. Math. Anal. Appl.*, 372, 549-558.

SEZER, S. and ALIEV, I.A. 2011. On the Gauss Weierstrass Summability of Multiple Trigonometric Series at $\mu$-smoothness points. *Acta Mathematica Sinica, English series*, Vol.27, No:4, 741-746.

SHAFIEV, M.F. 2000. On the convergence rate of truncated hypersingular integrals in characteristic points and in the norm of the space $L_p(\mathbb{R}^n)$. *Proceedings of IMM Azerbaijan AS*, Vol. XII (XX), 123-128.

STEIN, E. and WEISS, G. 1960. On the theory of harmonic functions of several variables, I; The theory of $H^p$ spaces. *Acta Math*, 103(1-2), 25-62.

STEIN, E. 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, Princeton New Jersey.

STEIN, E. and WEISS, G. 1971. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton Univ. Press, Princeton NJ.

**ÖZGEÇMİŞ**

Selim ÇOBANOĞLU 1988 yılında Antalya'nın Finike ilçesinde doğdu. Lise öğrenimini Finike'de tamamladı. 2006 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2010 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 2010-Haziran 2012 yılları arasında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimini tamamladı ve aynı yıl Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora öğrenimine başladı. 2014 yılından beri Şanlıurfa Hilvan Ahi Evran Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.