T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK MODÜLLER ÜZERİNE

Murat YÜKSEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK MODÜLLER ÜZERİNE

Murat YÜKSEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../20... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Yrd. Doç. Dr. Sevda BARUT

Yrd. Doç. Dr. Zafer Şanlı

ÖZET

BULANIK MODÜLLER ÜZERİNE

Murat YÜKSEL

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Sevda BARUT
Ağustos 2017, 30 sayfa

Bulanık cebirsel yapıların modüller üzerine uygulanması ile ilgili olarak yapılan bu tez çalışmasında; öncelikle belirtisiz kümelerle ilgili temel bilgiler, belirtisiz eşitlik ve belirtisiz fonksiyon, bulanık ikili işlem, bulanık homomorfizm, bulanık grup ile bulanık altgrupların temel ve genelleştirilmiş tanımları ve tüm bunların bazı özelliklerine (Demirci 1999a, 1999b) yer verilmiştir.Ardından, bulanık halka, bulanık althalka ve bulanık ideal tanımları (Sezer 2003) verilerek bulanık modülün altyapısı oluşturulmuştur.

Tezin son bölümünde ise bulanık modül, bulanık altmodül, bulanık modül homomorfizmi ve izomorfizminin tanımları yapılmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Belirtisiz küme, belirtisiz fonksiyon, bulanık grup, bulanık homomorfizm, bulanık halka, bulanık modül, bulanık altmodül, bulanık modül homomorfizmi, bulanık modül izomorfizmi

JÜRİ: Prof. Dr. Gabil ADİLOV
Yrd. Doç. Dr. Sevda BARUT (Danışman)
Yrd. Doç. Dr. Zafer Şanlı

ABSTRACT

ON THE VAGUE MODULES

Murat YÜKSEL

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Sevda BARUT
August 2017, 30 pages

In this thesis work about adaptation of modules on vague algebraic structures, firstly fundamental informations about fuzzy sets; immediately after, basic and general definitions and some features of fuzzy equations and fuzzy function, vague binary operation, vague homomorphism, vague group and vague subgroup (Demirci 1999a, 1999b) are given. After that, substructure of the vague module is constituted by definitions of vague ring, vague subring and vague ideal (Sezer 2003) are given.

Finally at the last chapter of the thesis, the concepts of vague module, vague submodule, vague module homomorphism and isomorphism are defined and some properties of these concepts are investigated.

KEYWORDS: Fuzzy sets, fuzzy function, vague group, vague subgroup, vague homomorphism, vague ring, vague module, vague submodule, vague module homomorphism, vague module isomorphism

COMMITTEE: Prof. Dr. Gabil ADİLOV
Asst. Prof. Dr. Sevda BARUT (Supervisor)
Asst. Prof. Dr. Zafer Şanlı

ÖNSÖZ

Klasik cebirde modül ve modül yapıları üzerine yapılan çalışmaların bir hayli yoğun olduğu gerçeğinin karşısında, bulanık anlamda modüllerin üzerine yapılan çalışmalar da bir hayli seyrek görülmektedir. Bu çalışma ile bulanık yapıların temeliyle ilgili bir takım bilgiler vermeye çalışarak bu konuda ilerlemek isteyen araştırmacılara kaynak oluşturmayı, ayrıca bulanık modül yapılarını vererek bu alandaki çalışmaları varsıllaştırmayı umuyorum.

Bu konuda çalışmama öncülük eden, yoğunluklar arasında bana oldukça çok zaman ayırıp desteğini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Sevda Barut'a teşekkürlerimi bu fırsat aracılığıyla sunmaktan da ayrıca mutluluk duyarım. Tez çalışmalarım boyunca destek ve teşvikleri için ailem ve sıra arkadaşıma da ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$A \overset{b.g.}{\leq} B$	A, B'nin bulanık altgrubu
$A \overset{b.h.}{\leq} B$	A, B'nin bulanık althalkası
$A \overset{b.i.}{\leq} B$	A, B'nin bulanık ideali
$A \underset{R}{\overset{b.m.}{\leq}} B$	A, B'nin bulanık R-modülü
$\tilde{\circ}$ ve $\circ$	Bulanık ikili işlem ve klasik cebirdeki karşılığı
μ_A	A'nın üyelik fonksiyonu
$\mu_{\tilde{\circ}}$	$\tilde{\circ}$ bulanık ikili işlemini tanımlayan üyelik fonksiyonu
A^t	A kümesinin tümleyeni
$\wedge$	Minimum işlemi
$\vee$	Maksimum işlemi
E_X	X üzerindeki belirtisiz eşitlik fonksiyonu
E_X^*	X üzerindeki klasik cebirdeki eşitlik fonksiyonu
$f : A \rightsquigarrow B$	A'dan B'ye f belirtisiz fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

İnsanlar günlük yaşamlarında düşüncelerini çoğu zaman net olmayan kavram ve yargılarla belirtirler. Örneğin; bahar aylarında hava için "hafif serin", piyasaların ani yükselişi için "piyasalar uçtu" gibi kesin olmayan ifadeler kullanırlar. Dahası, insanlar kararlarını verirken birden çok kesin sınırları olmayan etkeni net olmayan bir biçimde değerlendirip, yine kesin olmayan nedenlerle bir seçime varırlar; ancak çoğunlukla varılmak istenen noktaya odaklanırlar, trafikte araba kullanmak bunun için örnek gösterilebilir. Buna karşın uzun yıllar boyunca insanlar, bilimsel yöntem ve düşünüşlerde verilerin, girdi ve çıktıların olabildiğince kesin olması gerektiğini savunmuş, bu kesinliğe dayanarak bilginin kalitesini ölçmüştür. Ancak günümüzde bu kesinliklerden daha ötesine, otomatikleşme ve ekonomikleşme için daha karmaşık ve kesin olmayan girdi-çıktıların işlenmesine gereksinim duyulmaktadır. Otomatikleşme ve ekonomikleşmeye, araçlar için geliştirilmeye çalışılan otomatik pilotlar, kullanışlılığı ve kolaylaştırıcılığı sağlayan yapay zekalar örnek gösterilebilir.

Sıfır ve bir, doğru ve yanlış, sıcak ve soğuk gibi kesin yargıların olduğu klasik mantığın aksine belirtisiz mantık, bu yargıların daha insani sezgilere uygun hallerini sunar. Klasik mantıkta karşılığı olmayan serin, ılık, sıkışık, verimsiz gibi yargılar belirtisiz mantıkta tanımlanabilir durumdadır. Böylece belirtisiz mantıkla yazılan yazılımlarla işleyen bilgisayarlar, çağdaş betimiyle daha "akıllı" olacaktır. Bu yaklaşım günümüz dünyasında da bilgisayar yazılımcılığından makine üretimine, tıptan hukuka birçok alanda uygulanmaktadır.

Bulanık küme teorisi ilk olarak A. Lotfi Zadeh (1965) tarafından tanıtılmıştır. Zadeh'in belirtisiz (bulanık, fuzzy) kümeler teorisi olarak adlandırdığı teorisinde, bulanık kümeler, kesin sınırları belirli olmayan olayları tanımlamak ve matematiksel olarak modellemek amacıyla kullanılır. Bilgisayar sistemleri, kontrol mühendisliği gibi matematiksel otomasyon gerektiren modellemelerde bulanık kavramlara gereksinim duyulmuştur.

Zadeh'in (1965)'te tanıttığı bulanık küme kuramı birçok bilim insanının çalışmalarına ışık tutmuştur ve bu da kuramın gelişmesine katkıda bulunmuştur. Rosenfeld (1971)'de bulanık kümeler kuramını gruplar kuramına uyarlamıştır. Daha sonra Sasaki (1993) tarafından tanımlanan belirtisiz fonksiyondan yararlanılarak Demirci (1999b) tarafından bulanık (vague) ikili işlemlerle birlikte bulanık (vague) grup kavramı tanıtılmıştır.

Bulanık halkalara geçişin ilk adımı ise, ilk olarak bulanık halka homomorfizmi tanımını 1992 yılında veren Malik ve Mordeson tarafından atılmıştır. Tüm bu tanımlar ve teoriler ışığında Sezer (2003) bulanık halka kavramını tanımlamış ve bu kavramın sağladığı temel özellikleri incelemiştir.

"Bulanık Modüller Üzerine" yapılan bu tez çalışmasında da belirtisiz kümelerin cebirsel uygulamaları temel alınmakta ve aşağıdaki kavramlara yer verilmektedir.

Tezin birinci bölümünde giriş kısmına yer verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde; belirtisiz kümeler hakkında genel bilgiler ve özelliklere yer verilmiş, belirtisiz denklik bağıntısı, belirtisiz eşitlik ve belirtisiz fonksiyon kavramlarının tanımları verilerek, bunların sağladığı bazı özellikler incelenmiştir. Sonrasında, Demirci'nin (1999b) bulanık grup, bulanık altgrup, bulanık homomorfizm tanımlarına ve verdiği bazı özelliklere yer verilmiştir. Ayrıca, yine Demirci'nin (1999b) bulanık altgrup için verdiği genelleştirilmiş bulanık altgrup tanımına ve bu kavramın özelliklerine yer verilmiştir. Bunların ardından Sezer'in (2003) tanımladığı bulanık halka, bulanık althalka ve bulanık ideal kavramlarının tanımları ve bu kavramların sağladığı bazı özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, tezin ana konusunu oluşturan bulanık modül, bulanık altmodül, bulanık modül homomorfizmi ve bulanık modül izomorfizmi kavramları tanımlanmış; bu tanımlar aracılığıyla çeşitli teorem, önerme ve sonuçlar elde edilmiş, kanıtları verilmiş ve bu kavramlar örneklerle pekiştirilmiştir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Belirtisiz Kümelerle İlgili Genel Bilgiler

2.1.1. Belirtisiz kümeler

Bu bölümde belirtisiz küme kavramının ne olduğu açıklanacak ve belirtisiz kümelerle ilgili bazı temel özelliklere yer verilecektir. Bu çalışma boyunca "X bir küme" denildiğinde, X'in boş kümeden ayrı bir klasik küme olduğu anlaşılacaktır.

Tanım 2.1. *X bir küme ve A, X'in bir altkümesi olmak üzere*

$$\mu_A : X \to \{0,1\}, \quad \mu_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

*biçiminde tanımlı μ_A fonksiyonuna A**'nın üyelik (karakteristik) fonksiyonu** denir.*

Yukarıdaki tanımdan da anlaşılacağı üzere A'nın üyelik fonksiyonu; A kümesine üye olan ya da olmayan $x \in X$ ögelerinin A'ya üyeliğini düzeylendirir. Bu durumda $x \in X$ için $\mu_A(x) = 1$ eşitliği x'in A'ya kesin olarak üye olduğunu, $\mu_A(x) = 0$ eşitliğiyse x'in A'ya kesin olarak üye olmadığını belirtir. Ancak günlük yaşamda her zaman bu kadar kesin üyeliklerle karşılaşılmayabilir. Karşılaşıldığında ise ögenin bir kümeye üyeliği hakkında kesin bir karar verilemeyebilir. Örneğin;

$$\begin{aligned} Sıcak &: = \{s : s\text{ , }20^oC \text{ ile } 60^oC \text{ arasında olan hava sıcaklığı değeri}\}, \\ Buzgibi &: = \{s : s\text{ , }15^oC\text{'nin çok altında olan hava sıcaklığı değeri}\} \end{aligned}$$

olarak tanımlandığında herhangi bir sıcaklığın $Sıcak$ kümesine üye olup olmadığının doğrudan belirlenebilmesine karşın, bu sıcaklığın $Buzgibi$ kümesine üyeliği hakkında kesin bir yargıya kolaylıkla varılamaz. Bu yüzden; verilen sıcaklığın $Buzgibi$ kümesine üyeliğinin kesinliğine bakmak yerine bu sıcaklığın $Buzgibi$ kümesine belirli bir düzeyde üye olmasını belirtmek, sezgisel olarak kavramak açısından çok daha kolaydır. Bu düşünceden yola çıkılarak, aşağıda tanımlanan belirtisiz küme kavramı ortaya çıkmıştır.

Tanım 2.2. *(Zadeh 1965) X bir küme olmak üzere, X üzerindeki bir A belirtisiz (fuzzy) kümesi $\mu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilir.*

X üzerindeki bir A belirtisiz kümesi için bir $x \in X$ ögesinin A'ya üyelik düzeyi $\mu_A(x) \in [0,1]$ gerçel sayısı ile gösterilir. Burada;

- $\mu_A(x) = 1$ olması x'in A'ya kesin olarak üye olduğu,
- $\mu_A(x) = 0$ olması x'in A'ya kesin olarak üye olmadığı,
- $\mu_A(x) \in (0,1)$ olması da x'in A'ya üyeliğinden kesin olarak söz edilemeyeceği, ancak x'in A'ya üyeliğinin $\mu_A(x)$ düzeyinde olduğu

anlamlarına gelir.

Bu bilgilerin ışığında herhangi bir klasik kümenin bir belirtisiz küme olduğu, yani belirtisiz kümelerin klasik kümelerin bir genellemesi olduğu kolayca görülür.

X ve $\emptyset$ belirtisiz kümeleri, sırasıyla, her $x \in X$ için $\mu_X(x) = 1$ ve $\mu_\emptyset(x) = 0$ fonksiyonları ile belirtilir.

$A,\ X$ üzerinde bir belirtisiz küme ise

$$A := \{(\mu_A(x), x) : x \in X\}$$

ile gösterilir. Ayrıca; $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ bir sayılabilir küme ise, A belirtisiz kümesi

$$A := \sum_{x_i \in X} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + ... + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} + ...$$

ile gösterilir, burada $\mu_A(x_j) = 0$ ise ilgili terim yazılmaz. Eğer X sayılamaz bir küme ise de A belirtisiz kümesi $A := \int\limits_X \frac{\mu_A(x)}{x}$ ile gösterilir. Burada "$\int$" ve "$\sum$" sembolleri yalnızca gösterim olarak kullanılır, bilinen toplam ve integral sembollerini ifade etmezler.

Tanım 2.3. *(Zadeh 1965) X bir küme, A ve B bu küme üzerinde belirtisiz kümeler olsun.*

a) *Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise A'ya B'nin bir* ***belirtisiz altkümesi*** *denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.*

b) *A ve B'nin kesişimi $A \cap B$ ile gösterilen bir belirtisiz kümedir ve*

$$\mu_{A\cap B}(x) := \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

olarak tanımlanır.

c) *A ve B'nin birleşimi $A \cup B$ ile gösterilen bir belirtisiz kümedir ve*

$$\mu_{A\cup B}(x) := \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

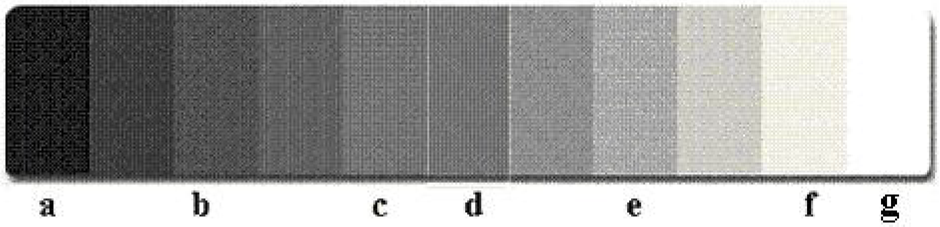
olarak tanımlanır.

d) *A'nın tümleyeni A^t ile gösterilen bir belirtisiz kümedir ve bu belirtisiz kümenin üyelik fonksiyonu*

$$\mu_{A^t}(x) := 1 - \mu_A(x)$$

ile tanımlanır.

Belirtisiz kümelerle ilgili olarak yukarıda tanımlanan *altküme, kesişim, birleşim* ve *tümleyen* kavramlarının, klasikte bunlara karşılık gelen kavramların bir genellemesi olduğu kolayca görülebilir.



Şekil 2.1. Siyah-Beyaz Renk Geçişi

Örnek 2.4. *Şekil 2.1'deki siyahtan beyaza doğru renklerin geçişi dizisinden birkaç tanesini keyfi olarak seçelim. Bu seçilen renklerin kümesine $R = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ diyelim. Bu küme üzerindeki S ve B belirtisiz kümeleri sırasıyla;*

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a} + \frac{0,8}{b} + \frac{0,6}{c} + \frac{0,5}{d} + \frac{0,3}{e} + \frac{0,1}{f} \\ B &= \frac{1}{g} + \frac{0,9}{f} + \frac{0,7}{e} + \frac{0,5}{d} + \frac{0,4}{c} + \frac{0,2}{b} \end{aligned}$$

olarak alınsın. Bu durumda; $S \cap B$, $S \cup B$, $S \cap S^t$ ve $B \cup B^t$ belirtisiz kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} S \cap B &= \frac{0,2}{b} + \frac{0,4}{c} + \frac{0,5}{d} + \frac{0,3}{e} + \frac{0,1}{f} \\ S \cup B &= \frac{1}{a} + \frac{0,8}{b} + \frac{0,6}{c} + \frac{0,5}{d} + \frac{0,7}{e} + \frac{0,9}{f} + \frac{1}{g} \\ S^t &= \frac{0,2}{b} + \frac{0,4}{c} + \frac{0,5}{d} + \frac{0,7}{e} + \frac{0,9}{f} + \frac{1}{g} = B \\ B^t &= \frac{1}{a} + \frac{0,8}{b} + \frac{0,6}{c} + \frac{0,5}{d} + \frac{0,3}{e} + \frac{0,1}{f} = S \\ S \cap S^t &= S \cap B \neq \emptyset \quad \textit{ve} \quad B \cup B^t = S \cup B \neq R\,. \end{aligned}$$

Eğer yukarıdaki örnekte S ve B kümeleri klasik kümeler (yani $\forall x \in R$ için $\mu_S(x), \mu_B(x) \in \{0, 1\}$) olsaydı, $S \cap S^t = \emptyset$ ve $B \cup B^t = R$ olacaktı. Bu da; belirtisiz kümelerin klasik kümelerden farklı olduğu durumlarda farklı özelliklere, yani daha zengin bir yapıya sahip olduğunu gösterir.

Belirtisiz kümelerin sağladığı bazı özellikler aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.5. *(Dubois ve Prade 1980) X bir küme; A,B ve C de X üzerinde belirtisiz kümeler olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*

a) $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$ ***(Değişme özelliği)***

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ***(Birleşme özelliği)***

c) $A \cup A = A,\ A \cap A = A$ ***(İdempotentlik)***

d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

e) $A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$

f) $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t,\ (A \cap B)^t = A^t \cup B^t$ ***(De Morgan özelliği)***

g) $(A^t)^t = A$

h) $(A^t \cup B) \cap (A \cup B^t) = (A^t \cap B^t) \cup (A \cap B)$

i) $(A^t \cap B) \cup (A \cap B^t) = (A^t \cup B^t) \cap (A \cup B)$

j) $A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cup X = X$

k) $A \cup \emptyset = A,\ A \cap X = A$

l) *A bir klasik küme ise $A \cap A^t = \emptyset$ ve $A \cup A^t = X$ olur. A klasik kümeden ayrı bir belirtisiz küme ise, $A \cap A^t \neq \emptyset$ ve $A \cup A^t \neq X$'tir.*

2.1.2. Belirtisiz denklik bağıntıları

Tanım 2.6. *(Zadeh 1965)$X_1, X_2, ..., X_n$ boş olmayan klasik kümeler ve $A_1, A_2, ..., A_n$ sırasıyla $X_1, X_2, ..., X_n$ üzerinde belirtisiz kümeler olsun. Bu belirtisiz kümelerin $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ biçiminde gösterilen kartezyen çarpımı, $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ klasik kümesinin bir belirtisiz kümesidir ve bu belirtisiz kümenin üyelik fonksiyonu her $(x_1, x_2, ...x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ için*

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times ... \times A_n}((x_1, x_2, ...x_n)) := \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ...\mu_{A_n}(x_n)\}$$

olarak tanımlanır.

Klasikte, X ve Y birer küme olmak üzere, $X \times Y$'nin herhangi bir altkümesine X'ten Y'ye bir bağıntı denir. Bu tanımın bir genellemesi olarak belirtisiz bağıntı aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tanım 2.7. *(Zadeh 1965) $X \times Y$ üzerindeki bir R belirtisiz kümesine X'ten Y'ye bir* ***belirtisiz bağıntı*** *denir. Eğer bu R belirtisiz bağıntısı $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\mu_R(x, y) = \alpha$ ise x, y'ye α düzeyinde bağlıdır, denir.*

Tanım 2.8. *(Zadeh 1965) X bir küme olmak üzere, R, X'ten X'e, yani X üzerinde bir belirtisiz bağıntı olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için*

i) $\mu_R(x, x) = 1$ ***(Yansıma),***

ii) $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ ***(Simetri),***

iii) $\min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)\} \leq \mu_R(x, z)$ ***(Geçişme)***

*koşulları sağlanıyorsa, R belirtisiz bağıntısına X üzerinde bir **belirtisiz denklik bağıntısı** denir.*

X üzerindeki bir belirtisiz denklik bağıntısına X'in ögeleri arasında bir belirtisiz benzerlik bağıntısı da denir. R, X üzerinde bir belirtisiz denklik (benzerlik) bağıntısı olmak üzere; $x, y \in X$ için $\mu_R(x, y)$ gerçel sayısına x'in y'ye **denk** (benzer) **olma düzeyi** denir. Ayrıca, $x \in X$ için x'in R'ye göre belirtisiz denklik sınıfı $R[x]$ biçiminde gösterilen X üzerinde bir belirtisiz kümedir ve bu belirtisiz kümenin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{R[x]} : X \to [0, 1], \quad \forall z \in X \text{ için } \mu_{R[x]}(z) := \mu_R(x, z)$$

olarak tanımlanır.

2.1.3. Belirtisiz eşitlik ve belirtisiz fonksiyonlar

Tanım 2.9. *(Demirci 1999b) X bir küme olsun. Eğer $E_X : X \times X \to [0, 1]$ fonksiyonu için $x, y, z \in X$ olmak üzere,*

1) $E_X(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$,

2) $E_X(x, y) = E_X(y, x)$,

3) $\min\{E_X(x, y), E_X(y, z)\} \leq E_X(x, z)$

*koşulları sağlanıyorsa E_X fonksiyonuna X üzerinde bir **belirtisiz eşitlik,** $E_X(x, y)$ değerine de x'in y'ye **eşit olma düzeyi** denir.*

Bundan sonraki gösterimlerimizde "E_X bir belirtisiz eşitlik olsun" denildiğinde E_X'in X üzerinde bir belirtisiz eşitlik olduğu anlaşılacaktır. Ayrıca; $\wedge$ ve $\vee$ gösterimleri, sırasıyla, gerçel sayılardaki *minimum* ve *maksimum* işlemleri yerine kullanılacaktır. Örneğin; $0,77 \wedge 0,2 = 0,2$ ve $0,2017 \vee 0,12 = 0,2017$ gibi.

$E_X^* : X \times X \to [0, 1]$ fonksiyonu

$$E_X^* := \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ 0 & , \quad x \neq y \end{cases}$$

biçiminde X'in ögeleri üzerinde klasik bir eşitlik fonksiyonu olarak tanımlandığında, aslında E_X^*'ın X üzerinde bir belirtisiz eşitlik olduğu kolayca görülebilir. Bu fonksiyon, X üzerindeki **klasik belirtisiz eşitlik fonksiyonu** olarak da adlandırılır.

Tanım 2.10. *(Demirci 1999b) X ve Y iki klasik küme, E_X ve E_Y sırasıyla X ve Y üzerinde belirtisiz eşitlikler olsun. Eğer $\tilde{\circ}$, $X \times Y$ üzerinde*

(F.1) *Her $x \in X$ için öyle bir $y \in Y$ vardır ki $\mu_{\tilde{\circ}}(x, y) > 0$*

(F.2) *Her $x_1, x_2 \in X$ ve her $y_1, y_2 \in Y$ için*

$$\mu_{\tilde{o}}(x_1, y_1) \wedge \mu_{\tilde{o}}(x_2, y_2) \wedge E_X(x_1, x_2) \leq E_Y(y_1, y_2)$$

*koşullarını sağlayan bir belirtisiz küme (yani belirtisiz bağıntı) ise, $\tilde{o}$'ya, E_X ve E_Y belirtisiz eşitliklerine göre X'ten Y'ye bir **belirtisiz fonksiyon** denir ve $\tilde{o} : X \rightsquigarrow Y$ ile gösterilir.*

Ek olarak, eğer $\tilde{o}$ belirtisiz fonksiyonu

(F.3) *Her $x \in X$ için öyle bir $y \in Y$ vardır ki $\mu_{\tilde{o}}(x, y) = 1$*

*koşulunu da sağlıyorsa, $\tilde{o}$'ya X'ten Y'ye bir **kuvvetli (strong) belirtisiz fonksiyon** denir.*

$E_X = E_X^*$, $E_Y = E_Y^*$ ve $\mu_{\tilde{o}}(X \times Y) \subseteq \{0, 1\}$ olarak seçilirse, belirtisiz $\tilde{o}$ fonksiyonu bire-bir olarak bir klasik fonksiyona karşılık gelir.

Aşağıdaki örnekten de anlaşılacağı gibi, klasik bir fonksiyondan yararlanılarak sonsuz çoklukta kuvvetli belirtisiz fonksiyon tanımlanabilir:

Örnek 2.11. *(Sezer 2003) X ve Y klasik kümeler, $f : X \to Y$ klasik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sayıları $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma < 1$ olmak üzere*

$$E_X \; : \; X \times X \to [0, 1] \,, \; E_X(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & , \; x_1 = x_2 \\ \beta & , \; x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

$$E_Y \; : \; Y \times Y \to [0, 1] \,, \; E_Y(y_1, y_2) := \begin{cases} 1 & , \; y_1 = y_2 \\ \gamma & , \; y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{o}} \; : \; X \times Y \to [0, 1] \,, \; \mu_{\tilde{o}}(x, y) := \begin{cases} 1 & , \; f(x) = y \\ \alpha & , \; f(x) \neq y \end{cases}$$

*tanımlandığında, **(F.2)** ve **(F.3)** (dolayısıyla da **(F.1)**) koşulları sağlandığı için $\tilde{o}$, X'ten Y'ye bir kuvvetli belirtisiz fonksiyon olur.*

2.2. Bulanık Gruplar ve Bulanık Altgruplar

Zadeh tarafından 1965'te *"Belirtisiz Küme"* kavramı tanımlandıktan sonra, bu kavramın üzerine ayrı matematik dallarında birçok yapılandırmalar gerçekleşti. Bu tezin esas konusunu oluşturan *"Bulanık Modül"* kavramını tanımlamak için bu bölümde sırasıyla bulanık grup, bulanık altgrup, bulanık halka kavramlarının tanımlarına ve bu kavramların sahip olduğu bazı özelliklere yer verilecektir.

2.2.1. Bulanık gruplar

Belirtisiz kümeler üzerindeki ilk grup tanımlarından biri Rosenfeld tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tanım 2.12. *(Rosenfeld 1971) $< G, . >$ bir grup, $\mu : G \to [0, 1]$ fonksiyonu her $x, y \in G$*

için

$$\mu(x.y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \quad ve \quad \mu(x) = \mu(x^{-1})$$

ise, μ'ye G'nin bir ***belirtisiz altgrubu*** *(fuzzy subgroup) denir.*

Bu kavramın tanımlanması üzerine bu tanım temel alınıp, üzerine belirtisiz normal altgrup, belirtisiz halka, belirtisiz ideal gibi diğer belirtisiz cebirsel yapılar tanımlanmıştır; hatta günümüzde bile bu tanımın üzerine başka yapılar tanımlanıp özellikleri incelenmektedir. Belirtisiz gruplar üzerine Akgül (1988), Anthony ve Sherwood (1979); belirtisiz altgruplar üzerine Kim (1997), Bhattacarya (1987), Sherwood (1983), Zhang (2001); belirtisiz idealler üzerine de Kumar (1993) tarafından çalışmalar bulunmaktadır.

Rosenfeld'in (1971) tanımında klasik bir ikili işlemle kurulmuş bir belirtisiz altgrup vardır. Buna karşın Demirci (1999a) "klasik bir ikili işlem" yerine, belirtisiz eşitlik ve belirtisiz fonksiyonlar yardımıyla *"bulanık ikili işlem (vague binary operation)"* kavramını tanımlayarak, klasik bir küme üzerinde *bulanık grup (vague group)* adını verdiği bir grup yapısı oluşturmuştur.

Bu grubun tanımı verilmeden önce; aşağıda bulanık ikili işlem, bulanık kapalılık ve geçişlilik kavramlarının tanımlarına yer verilecektir:

Tanım 2.13. *(Demirci 1999b , 2002)* ***(i)*** *$\tilde{\circ}$, X üzerinde $E_{X\times X}$ ve E_X belirtisiz eşitliklerine göre bir kuvvetli belirtisiz fonksiyon ise, $\tilde{\circ}$'ya $E_{X\times X}$ ve E_X'e göre X üzerinde bir* ***bulanık ikili işlem*** *denir ve bu yapı $< X, \tilde{\circ}, E_{X\times X}, E_X >$ ile gösterilir.*

(ii) *Bir küme üzerinde bir veya daha çok bulanık ikili işlem tanımlanmış ise, bu ikili işlemlerle birlikte bu kümeye bir* ***bulanık cebirsel yapı*** *denir.*

(iii) *$\tilde{\circ}$, X üzerinde bir bulanık ikili işlem; A, X'in klasik bir altkümesi olsun. Eğer her $a, b \in A$ ve her $c \in X$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c) = 1$ iken $c \in A$ ise A'ya $\tilde{\circ}$ işlemine göre* ***bulanık kapalı*** *denir.*

(iv) *$\tilde{\circ}$, X üzerinde bir bulanık ikili işlem ve her $a, b, c, d \in X$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c) \wedge E_X(c, d) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a, b, d)$ ise $\tilde{\circ}$ bulanık ikili işlemine* ***birinci girdide geçişli*** *denir.*

(v) *$\tilde{\circ}$, X üzerinde bir bulanık ikili işlem ve her $a, b, c, d \in X$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c) \wedge E_X(b, d) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a, d, c)$ ise $\tilde{\circ}$ bulanık ikili işlemine* ***ikinci girdide geçişli*** *denir.*

(vi) *$\tilde{\circ}$, X üzerinde bir bulanık ikili işlem ve her $a, b, c, d \in X$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c) \wedge E_X(a, d) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(d, b, c)$ ise $\tilde{\circ}$ bulanık ikili işlemine* ***üçüncü girdide geçişli*** *denir. Eğer $\tilde{\circ}$ üçüncü girdide geçişli ise $\tilde{\circ}$ bulanık ikili işlemine E_X**'e göre genişleyebilir** de denir.*

(vii) *$\tilde{\circ}$, X üzerinde bir bulanık ikili işlem ve her $a, b, c, a', b' \in X$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c) \wedge E_{X\times X}((a, b), (a', b')) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a', b', c)$ ise $\tilde{\circ}$ bulanık ikili işlemine $E_{X\times X}$**'e göre genişleyebilir** denir.*

X üzerindeki herhangi bir $\tilde{\circ} : X \times X \to X$ klasik fonksiyonu, $E^*_{X\times X}$ ve E^*_X'a göre bir bulanık ikili işlem olarak düşünülebileceğinden; bu bulanık ikili işlem hem birinci, hem ikinci, hem de üçüncü girdide geçişlidir.

Aşağıda bulanık yarıgrup, bulanık monoid, bulanık grup ve değişmeli (Abelyen, Abel) bulanık grup tanımlarına yer verilmiştir:

Tanım 2.14. *(Demirci 1999b) G bir küme ve $\tilde{\circ}$, G üzerinde bir bulanık ikili işlem olsun. Bu durumda,*

(i) (BG.1) *$\forall a, b, c, d, m, q, w \in G$ için*

$$\mu_{\tilde{\circ}}(b, c, d) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a, d, m) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a, b, q) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(q, c, w) \leq E_G(m, w)$$

ise, $< G, \tilde{\circ}, E_{G\times G}, E_G >$'ye bir ***bulanık yarıgrup*** *(vague semigroup) denir.*

(ii) *$< G, \tilde{\circ}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık yarıgrup ve*

(BG.2) *$\forall a \in G$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(e, a, a) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a, e, a) = 1$ olacak biçimde bir $e \in G$ (birim) elemanı varsa, $< G, \tilde{\circ}, E_{G\times G}, E_G >$'ye bir* ***bulanık monoid*** *denir.*

(iii) *$< G, \tilde{\circ}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık monoid ve*

(BG.3) *$\forall a \in G$'nin $\mu_{\tilde{\circ}}(a^{-1}, a, e) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a, a^{-1}, e) = 1$ olacak biçimde bir $a^{-1} \in G$ (ters) elemanı varsa, $< G, \tilde{\circ}, E_{G\times G}, E_G >$'ye bir* ***bulanık grup*** *(vague group) denir.*

(iv) *$< G, \tilde{\circ}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık grup ve*

(BG.4) *$\forall a, b, m, w \in G$ için*

$$\mu_{\tilde{\circ}}(a, b, m) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(b, a, w) \leq E_G(m, w)$$

ise, $< G, \tilde{\circ}, E_{G\times G}, E_G >$'ye bir ***değişmeli (Abelyen, Abel) bulanık grup*** *(Abelian vague group) denir.*

Bundan sonraki gösterimlerde *"$< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık gruptur"* denildiğinde, *"$< G, \tilde{\circ}, E_{G\times G}, E_G >$ bulanık grubu"* anlaşılacaktır.

Eğer, $\tilde{\circ}$ işlemi $E^*_{G\times G}$ ve E^*_G klasik eşitsizlikleriyle birlikte $\mu_{\tilde{\circ}}(G\times G\times G) \subseteq \{0, 1\}$ olan bir bulanık ikili işlem ise, $< G, \tilde{\circ} >$ bulanık grubu klasik durumdaki bir gruba bire-bir olarak karşılık gelir. Bu bulanık gruba *klasik grup* da denir.

Aşağıdaki örnek, verilen bir $< G, \circ >$ klasik grubundan yararlanılarak sonsuz sayıda bulanık grubun tanımlanabileceğini göstermektedir.

Örnek 2.15. *(Demirci 1999b) $< G, \circ >$ bir klasik grup; $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sayıları da*

$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma < 1$ *eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca,*

$$E_G \;:\; G \times G \to [0,1]\ ,\ E_G(x,y) := \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ \gamma & , \quad x \neq y \end{cases}$$

$$E_{G\times G} \;:\; (G \times G) \times (G \times G) \to [0,1],$$

$$E_{G\times G}((x,y),(z,w)) \;:\; = \begin{cases} 1 & , \quad (x,y) = (z,w) \\ \beta & , \quad (x,y) \neq (z,w) \end{cases}$$

$$\tilde{\circ} : G \times G \rightsquigarrow G\ ,\ \mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z) := \begin{cases} 1 & , \quad z = x \circ y \\ \alpha & , \quad z \neq x \circ y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Kolayca görülebileceği gibi $< G, \tilde{\circ} >$ *bir bulanık yarıgruptur; ayrıca* $< G, \tilde{\circ} >$*'nın birim elemanı* $< G, \circ >$*'nun birim elemanı ve* $< G, \tilde{\circ} >$*'daki bir* a *ögesinin tersi* $< G, \circ >$*'daki* a *ögesinin tersiyle aynıdır. Böylece,* $< G, \tilde{\circ} >$ *bir bulanık gruptur. Ayrıca* $< G, \circ >$ *değişmeli ise* $< G, \tilde{\circ} >$ *da değişmelidir. Eğer* $\alpha = \beta = \gamma$ *ise,* $\tilde{\circ}$ *hem birinci, hem ikinci, hem de üçüncü girdide geçişlidir; ancak* $\alpha < \gamma$ *ise* $\tilde{\circ}$ *ne birinci, ne ikinci, ne de üçüncü girdide geçişlidir.*

Önerme 2.16. *(Demirci 1999b)* $< G, \tilde{\circ} >$ *bir bulanık grup olsun. Bu durumda* $< G, \circ >$*'nun bir klasik grup olmasını sağlayacak biçimde* G *üzerinde bir "*$\circ$*" ikili işlemi vardır.*

Önerme 2.16'te sözü edilen $\circ : G \times G \to G$ ikili işlemi

$$a \circ b := c \Longleftrightarrow \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) = 1$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada elde edilen $< G, \circ >$ grubuna $< G, \tilde{\circ} >$'nın *indirgenmiş klasik grubu* adı verilir. Bundan sonra $< G, \tilde{\circ} >$ bulanık grubunun indirgenmiş klasik grubu $< G, \circ >$ ile gösterilecektir. Ayrıca bu indirgenmiş klasik grupta, **(F.2)** özelliği gereği, $a, b, c \in G$ için

$$\mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) = \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,a \circ b) \wedge E_{G\times G}((a,b),(a,b)) \leq E_G(c, a \circ b)$$

olduğundan

$$\mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) \leq E_G(a \circ b, c) \tag{2.1}$$

eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır.

$< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık yarıgrup ise, (Demirci 2002)'deki Teorem 5.10.(ii) gereğince $< G, \circ >$ bir yarıgruptur. Aşağıdaki önerme ve (Demirci 2002)'deki Teorem 6.1, bu ifadenin tersinin hangi koşullar altında doğru olacağı konusunda bilgi vermektedir.

Önerme 2.17. *(Sezer 2003) $\tilde{\circ}$, G üzerinde ikinci ve üçüncü girdide geçişli bir bulanık ikili işlem ve $< G, \circ >$ bir yarıgrup ise, $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık yarıgruptur.*

$\tilde{\circ}$, G üzerinde ikinci ve üçüncü girdide geçişli olmayan bir bulanık ikili işlem ve $< G, \circ >$ bir yarıgrup ise, $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık yarıgrup olmayabilir. Bu durum, aşağıdaki örnekle daha iyi anlaşılacaktır:

Örnek 2.18. *$G := \{1, 2, 3\}$, $E_{G\times G} := E^*_{G\times G}$ ve i'ler tablodaki satırları, j'ler de tablodaki sütunları taramak üzere*

$E_G(i,j)$	1	2	3
1	1	.2018	.2017
2	.2018	1	.2017
3	.2017	.2017	1

$\mu_{\tilde{\circ}}(1,i,j)$	1	2	3
1	1	.2018	.2017
2	.2018	1	.2017
3	.2017	.2017	1

$\mu_{\tilde{\circ}}(2,i,j)$	1	2	3
1	.2016	1	.2014
2	.2009	.2009	1
3	1	.2009	.2013

$\mu_{\tilde{\circ}}(3,i,j)$	1	2	3
1	.2016	.2016	1
2	1	.2013	.2009
3	.2013	1	.2013

olsun. Bu durumda

$\circ$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

olarak elde edilir. Burada, $\tilde{\circ}$'nın G üzerinde bir bulanık ikili işlem olduğu ve $< G, \circ >$'nun bir yarıgrup olduğu, biraz hesaplamayla, kolayca görülebilir. Diğer yandan,

$$\mu_{\tilde{\circ}}(2,1,2) \wedge E_G(1,2) = 1 \wedge .2018 = .2018 \nleq \mu_{\tilde{\circ}}(2,2,2) = .2009$$

ve

$$\mu_{\tilde{\circ}}(1,1,1) \wedge E_G(1,2) = 1 \wedge .2018 = .2018 \nleq \mu_{\tilde{\circ}}(2,1,1) = .2016$$

olduğundan, $\tilde{\circ}$, G üzerinde ikinci ve üçüncü girdide geçişli değildir. Ayrıca,

$$\mu_{\tilde{\circ}}(1,2,1) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(1,1,1) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(1,1,2) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(2,2,3) = .2018 \nleq E_G(1,3) = .2017$$

olduğundan $< G, \tilde{\circ} >$ bir yarıgrup olamaz.

Klasik cebirden bilindiği üzere; $< G, * >$ bir klasik grup ise, her $a, b, c, d \in G$ için $a * b = a * d \iff b = d$ ve $a * b = d * b \iff a = d$'dir. Bulanık Kısaltma Kuralı olarak adlandırılan aşağıdaki teorem, bu önermenin bir benzerinin bulanık cebirde de geçerli olduğunu belirtmektedir:

Teorem 2.19. *(Demirci 1999b)* $< G, \tilde{\circ} >$ *bir bulanık grup olsun. Bu takdirde,*

(i) $\mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a,d,c) \leq E_G(b,d) \quad (\forall a,b,c,d \in G)$

(ii) $\mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(d,b,c) \leq E_G(a,d) \quad (\forall a,b,c,d \in G)$

Teorem 2.20. *(Demirci 1999b)* $< G, \tilde{\circ} >$ *bir bulanık grup olsun. Bu takdirde,*

(i) *Eğer,* $\tilde{\circ}$ *bulanık ikili işlemi ikinci girdide geçişli ise, her* $a,b \in G$ *için* $E_G(a,b) = E_G(a^{-1}, b^{-1})$*'dir*

(ii) *Her* $a,b,u,v \in G$ *için* $\mu_{\tilde{\circ}}(b^{-1}, a^{-1}, u) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,v) \leq E_G(u, v^{-1}) \wedge E_G(v, u^{-1})$*'dir.*

Teorem 2.21. *(Demirci 1999b)* $< G, \tilde{\circ} >$ *bir buanık yarıgrup olsun. Bu durumda,* $< G, \tilde{\circ} >$*'nın bir bulanık grup olması için gerek ve yeter koşul, her* $a,b \in G$ *için öyle* $x,y \in G$ *vardır ki,* $\mu_{\tilde{\circ}}(a,x,b) = \mu_{\tilde{\circ}}(y,a,b) = 1$*'dir.*

Teorem 2.22. *(Demirci 2000)* $< G, \tilde{\circ} >$ *bir bulanık grup olsun. Eğer,* $\tilde{\circ}$ *bulanık ikili işlemi birinci girdide geçişli ise,* $E_G(a \circ b, c) = \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c)$*'dir.*

Teorem 2.23. *(Sezer 2005)* $< G, \tilde{\circ} >$ *bir bulanık grup ve* e_G*,* $< G, \tilde{\circ} >$*'nın birim elemanı olmak üzere,*

1) *Eğer* $\tilde{\circ}$ *bulanık ikili işlemi üçüncü girdide geçişli ise, her* $a,b,x \in G$ *için,*

(i) $E_G(x \circ a, b) = E_G(x, b \circ a^{-1})$ *ve özel olarak,* $E_G(x \circ a, e_G) = E_G(x, a^{-1})$,

(ii) $E_G(a,b) = E_G(a \circ x, b \circ x)$.

2) *Eğer* $\tilde{\circ}$ *bulanık ikili işlemi ikinci girdide geçişli ise, her* $a,b,y \in G$ *için,*

(i) $E_G(a \circ y, b) = E_G(y, a^{-1} \circ b)$ *ve özel olarak,* $E_G(a \circ y, e_G) = E_G(y, a^{-1})$,

(ii) $E_G(a,b) = E_G(y \circ a, y \circ b)$.

3) *Eğer* $\tilde{\circ}$ *bulanık ikili işlemi hem ikinci hem de üçüncü girdide geçişli ise, her* $a,b,c,d \in G$ *için* $E_G(a,b) \wedge E_G(c,d) \leq E_G(a \circ c, b \circ d)$*'dir.*

2.2.2. Bulanık altgruplar

$< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olmak üzere, bundan sonraki gösterimlerimizde her $a, b, c, d \in A$ için

$$E_A : A \times A \to [0,1] \quad \text{ve } E_{A\times A} : (A \times A) \times (A \times A) \to [0,1]$$

belirtisiz eşitlikleri, sırasıyla,

$$E_A(a,b) := E_G(a,b) \quad \text{ve } E_{A\times A}((a,b),(c,d)) := E_{G\times G}((a,b),(c,d))$$

ve $\mu_{\tilde{\circ}|_{A\times A\times A}}(a,b,c) := \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c)$ olarak kabul edilecektir (eğer herhangi bir karışıklığa neden olmayacaksa da, $\mu_{\tilde{\circ}|_{A\times A\times A}}$ gösterimi yerine kısaca $\mu_{\tilde{\circ}}$ gösterimi kullanılacaktır).

Bu bilgilerin ışığında, aşağıda bulanık altgrup tanımına ve bu tanımın sağladığı bazı önemli özelliklere yer verilmektedir:

Tanım 2.24. *(Demirci 1999b) $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Eğer A, $\tilde{\circ}$ bulanık ikili işlemine göre bulanık kapalı ve $< A, \tilde{\circ}|_{A\times A\times A} >$ bir bulanık grup ise, A'ya G'nin bir* ***bulanık altgrubu*** *denir.*

Önerme 2.25. *(Sezer 2003) $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) *$\tilde{\circ}|_{A\times A\times A}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlemdir.*

(ii) *A, $\tilde{\circ}$ işlemine göre bulanık kapalıdır.*

Teorem 2.26. *(Demirci 1999b) $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) *A, G'nin bir bulanık altgrubudur.*

(ii) *$\forall a, b \in A$ ve $\forall c \in G$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(a, b^{-1}, c) = 1$ ise $c \in A$'dır.*

Teorem 2.27. *(Demirci 1999b) $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) *A, G'nin bir bulanık altgrubudur.*

(ii) *A, $\tilde{\circ}$ işlemine göre bulanık kapalı ve her $a \in A$ için $a^{-1} \in A$'dır.*

Sonuç 2.28. *(Sezer 2003) $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) *A, G'nin bir bulanık altgrubudur.*

(ii) *$\tilde{\circ}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlem ve her $a \in A$ için $a^{-1} \in A$'dır.*

Tanım 2.29. *(Demirci 1999b) $< G, \tilde{\circ} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ iki bulanık yarıgrup, $\Phi : G \to H$ bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$\mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\star}}(\Phi(a), \Phi(b), \Phi(c)) \, , \forall a,b,c \in G$$

ise Φ fonksiyonuna $< G, \tilde{\circ} >$'dan $< H, \tilde{\star} >$'ya bir ***bulanık homomorfizm*** *denir.*

Önerme 2.30. *(Demirci 2002) $< G, \tilde{\circ} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ bulanık gruplar, Φ, $< G, \tilde{\circ} >$'dan $< H, \tilde{\star} >$'ya bir bulanık homomorfizm ise Φ, $< G, \circ >$'dan $< H, \star >$'a bir homomorfizmdir.*

Aşağıdaki örnek, Önerme 2.30'daki ifadenin tersinin her zaman doğru olmayabileceğini göstermektedir:

Örnek 2.31. *$< G, \tilde{\circ} >$ Örnek 2.15'de tanımlandığı gibi, $< G, \tilde{\star} >$ da aynı örnekte α yerine $\frac{\alpha}{2017}$ alınarak elde edilen bulanık gruplar olarak tanımlansın ve $\Phi : G \to G$ bir birim fonksiyon olsun. Bu durumda Φ bir klasik homomorfizm olur, ancak uygun $a, b, c \in G$ için*

$$\alpha = \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) \nleq \mu_{\tilde{\star}}(\Phi(a), \Phi(b), \Phi(c)) = \mu_{\tilde{\star}}(a,b,c) = \frac{\alpha}{2017}$$

olacağından, Φ bir bulanık homomorfizm olamaz.

Önerme 2.32. *(Demirci 1999b) $< G, \tilde{\circ} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ iki bulanık grup, $\Phi : G \to H$ bir bulanık homomorfizm olsun. Bu durumda:*

(i) *e_G ve e_H sırasıyla $< G, \tilde{\circ} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$'nin birim elemanları ise $\Phi(e_G) = e_H$'dir.*

(ii) *Her $a \in G$ için $\Phi(a)^{-1} = \Phi(a^{-1})$'dir.*

Tanım 2.33. *(Demirci 1999b) $< G, \tilde{\circ} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ iki bulanık grup olsun.*

(i) *$\Phi : G \to H$ bir bulanık homomorfizm olmak üzere $\{g \in G : \Phi(g) = e_H\}$ klasik kümesine Φ'nin* ***bulanık çekirdeği*** *denir ve bu küme $Cek_b\Phi$ ile gösterilir.*

(ii) *$f : G \to H$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer her $a, b \in G$ için $E_H(f(a), f(b)) \leq E_G(a,b)$ ise f fonksiyonuna, E_G ve E_H'ye göre,* ***bulanık bire-bir (vague injective) fonksiyon*** *denir.*

Klasik durumda, bir bulanık bire-bir fonksiyonun bir klasik bire-bir fonksiyon olduğu kolayca görülebilir.

Önerme 2.34. *(Demirci 1999b)* $< G, \tilde{\circ} >$ *ve* $< H, \tilde{\star} >$ *iki bulanık grup,* $\Phi : G \to H$ *bir bulanık homomorfizm ve* e_G *de* $< G, \tilde{\circ} >$*'nın birim elemanı olsun. Bu takdirde,*

(i) Φ *bire-bir* $\Longleftrightarrow Cek_b\Phi = \{e_G\}$.

(ii) $\tilde{\circ}$ *bulanık ikili işlemi birinci girdide geçişli,* Φ *bulanık bire-bir ve örten bir fonksiyon ise,* $\Phi^{-1} : H \to G$ *bir bulanık homomorfizmdir.*

Tanım 2.35. $< G, \tilde{\circ} >$ *ve* $< H, \tilde{\star} >$ *bulanık yargruplar ve* $\Phi : G \to H$ *bir bulanık homomorfizm olsun. Eğer,* Φ *bulanık bire-bir ve örten,* $\Phi^{-1} : H \to G$ *de bir bulanık homomorfizm ise,* $\Phi : G \to H$ *dönüşümüne bir* ***bulanık izomorfizm*** *denir.*

Tanım gereği, $\Phi : G \to H$ bir bulanık izomorfizm ise, Önerme 2.30'dan Φ bir homomorfizmdir ve örtendir. Ayrıca Tanım 2.33 gereği Φ bir bire-bir fonksiyon olduğundan $\Phi : G \to H$ bir izomorfizmdir.

Aşağıdaki önermede, klasik bir izomorfizmin hangi koşullar altında bir bulanık izomorfizm olacağı incelenmiştir:

Önerme 2.36. *(Sezer 2003)* $< G, \tilde{\circ} >$ *ve* $< H, \tilde{\star} >$ *iki bulanık grup,* $\tilde{\circ}$ *ve* $\tilde{\star}$ *da sırasıyla* G *ve* H *üzerinde birinci girdide geçişli bulanık ikili işlemler olsun. Eğer,* $\Phi : G \to H$ *, her* $a, b \in G$ *için* $E_G(a, b) = E_H(\Phi(a), \Phi(b))$ *olan örten bir homomorfizm ise,* $\Phi : G \to H$ *bir bulanık izomorfizmdir.*

Sonuç 2.37. *(Sezer 2003)* $< G, \tilde{\circ} >$ *ve* $< H, \tilde{\star} >$ *iki bulanık grup,* $\Phi : G \to H$ *bulanık bire-bir ve örten bir bulanık homomorfizm,* $\tilde{\circ}$ *bulanık ikili işlemi de birinci girdide geçişli ise,* Φ *bir bulanık izomorfizmdir.*

Teorem 2.38. *(Demirci 1999b)* $< G, \tilde{\circ} >$ *ve* $< H, \tilde{\star} >$ *iki bulanık grup ve* $\Phi : G \to H$ *bir bulanık homomorfizm olsun. Bu durumda:*

(i) $Cek_b\Phi$ *kümesi* G*'nin bir bulanık altgrubudur.*

(ii) A*,* G*'nin bir bulanık altgrubu ise,* $\Phi(A)$ *da* H*'nin bir bulanık altgrubudur.*

(iii) B*,* H*'nin bir bulanık altgrubu ise,* $\Phi^{-1}(B)$ *de* G*'nin bir bulanık altgrubudur.*

Sonraki tanımda, Tanım 2.24'un bir genellemesi olan ve bundan sonraki tanımları dayandıracağımız ikinci bir bulanık altgrup kavramı verilmiştir:

Tanım 2.39. *(Sezer 2003)* $< G, \tilde{\circ} >$ *bir bulanık grup,* $\emptyset \neq A \subseteq G$ *ve* $\tilde{\odot}$*,* A *üzerinde bir bulanık ikili işlem olsun. Eğer her* $a, b, c \in A$ *için* $\mu_{\tilde{\odot}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c)$ *ve* $< A, \tilde{\odot}, E_{A \times A}, E_A >$ *bir bulanık grup ise,* $< A, \tilde{\odot} >$*'ya* $< G, \tilde{\circ} >$*'nın bir* ***bulanık altgrubu*** *denir ve bu durum* $< A, \tilde{\odot} > \overset{b.g.}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.24'a göre eğer A, $< G, \tilde{\circ} >$'nın bir bulanık altgrubu ise, $< A, \tilde{\circ} > \overset{b.g.}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ olacağından; Tanım 2.39'in Tanım 2.24'un bir genellemesi olduğu elde edilir.

$< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve $< A, \tilde{\odot} > \overset{b.g.}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ ise, $< A, \odot > = < A, \circ >$ ve dolayısıyla $< A, \odot >$'nın $< G, \circ >$'nın bir klasik altgrubu, yani $< A, \odot > \leq < G, \circ >$ olacağı açıktır. Sonuç olarak, bulanık altgruplar klasik gruplara indirgendiğinde, bulanık altgrup kavramıyla klasik altgrup kavramının birbirine karşılık geldiği görülmektedir.

$< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve $< A, \tilde{\odot} > \overset{b.g.}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ ise, e_A ve e_G, sırasıyla, $< A, \tilde{\odot} >$ ve $< G, \tilde{\circ} >$'nın birim elemanları olmak üzere $e_A = e_G$'dir. Ayrıca $x \in A$ için x_A^{-1} ve x_G^{-1}, sırasıyla, x'in $< A, \tilde{\odot} >$ ve $< G, \tilde{\circ} >$'daki tersleri olmak üzere $x_A^{-1} = x_G^{-1}$'dir.

Örnek 2.40. *$G := \mathbb{R}$, $A := \mathbb{Q}$ ve $\delta, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$ için $0 \leq \delta \leq \gamma \leq \theta < 1$ olsun.*

$$E_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,1] \ , \ E_{\mathbb{R}}(u,v) := \begin{cases} 1 & , \quad u = v \\ \theta & , \quad u \neq v \end{cases}$$

ve $E_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} := E^*_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$,

$$E_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to [0,1] \ , E_{\mathbb{Q}}(k,l) := E_{\mathbb{R}}(k,l)$$

ve $E_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} := E^*_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$ olmak üzere; $\forall m, n, r \in \mathbb{R}$ için

$$\mu_{\tilde{\circ}}(m,n,r) := \begin{cases} 1 & , \quad m + n = r \\ \gamma & , \quad m + n \neq r \end{cases}$$

ve $\forall m, n, r \in \mathbb{Q}$ için

$$\mu_{\tilde{\odot}}(m,n,r) := \begin{cases} 1 & , \quad m + n = r \\ \delta & , \quad m + n \neq r \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ve her $x, y, z \in \mathbb{Q}$ için $\mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z)$ olacağından, $< \mathbb{Q}, \tilde{\odot} > \overset{b.g.}{\leq} < \mathbb{R}, \tilde{\circ} >$ olması için $< \mathbb{Q}, \tilde{\odot} >$ ve $< \mathbb{R}, \tilde{\circ} >$'nın birer bulanık grup olduğunu göstermek yeterlidir. $d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ olarak alınırsa, $E_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}((d,e),(g,h)) = 1$ ve $f \neq i$ için ya $\mu_{\tilde{\circ}}(d,e,f) \neq 1$ ya da $\mu_{\tilde{\circ}}(g,h,i) \neq 1$'dir. Bundan dolayı,

$$\mu_{\tilde{\circ}}(d,e,f) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(g,h,i) \wedge E_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}((d,e),(g,h)) \leq \gamma \leq \theta \leq E_{\mathbb{R}}(f,i)$$

ve $\mu_{\tilde{\circ}}(d,e,d+e) = 1$ olduğundan $\tilde{\circ}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir bulanık ikili işlemdir. Ayrıca, $\forall x, y, z, r, u, k, q \in \mathbb{R}$ ve $u \neq q$ için $y + z = r$, $x + r = u$, $x + y = k$ ve $k + z = q$ eşitliklerinden en az birisi sağlanmayacağından

$$\mu_{\tilde{\circ}}(y,z,r) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(x,r,u) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(x,y,k) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(k,z,q) \leq \gamma \leq \theta \leq E_{\mathbb{R}}(u,q)$$

olmalıdır. Dolayısıyla $<\mathbb{R},\tilde{\circ}>$ *bir bulanık yarıgruptur.*
$\forall m\in\mathbb{R}$ *için* $\mu_{\tilde{\circ}}(m,0,m)=1=\mu_{\tilde{\circ}}(0,m,m)$ *ve* $\mu_{\tilde{\circ}}(m,-m,0)=1=\mu_{\tilde{\circ}}(-m,m,0)$ *olduğu için* $<\mathbb{R},\tilde{\circ}>$ *bir bulanık gruptur.*
Benzer biçimde $<\mathbb{Q},\tilde{\odot}>$*'nın bir bulanık grup olduğu ve dolayısıyla da* $<\mathbb{Q},\tilde{\odot}>\overset{b.g.}{\leq}<\mathbb{R},\tilde{\circ}>$ *olduğu görülebilir.*

Önerme 2.41. *(Sezer 2003)* $<G,\tilde{\circ}>$ *bir bulanık grup,* $<A,\tilde{\odot}>\overset{b.g.}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ *ve* $<B,\tilde{\bullet}>\overset{b.g.}{\leq}<A,\tilde{\odot}>$ *olsun. Bu durumda,* $<B,\tilde{\bullet}>\overset{b.g.}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$*'dır.*

Önerme 2.42. *(Sezer 2003)* $<G,\tilde{\circ}>$ *bir bulanık grup,* $<A,\tilde{\odot}>\overset{b.g.}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$, $<B,\tilde{\bullet}>\overset{b.g.}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ *ve* $\tilde{\star}$*,* $A\cup B$ *üzerinde bir bulanık ikili işlem olsun. Bu durumda*

$$<A\cup B,\tilde{\star}>\overset{b.g.}{\leq}<G,\tilde{\circ}>\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \textit{(i)} & \mu_{\tilde{\star}}(x,y,z)\leq\mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z)\,,\ \forall x,y,z\in A\cup B\,, \\ \textit{(ii)} & A\subseteq B \text{ veya } B\subseteq A\,. \end{array}$$

Sonuç 2.43. *(Sezer 2003)* $<G,\tilde{\circ}>$ *bir bulanık grup,* $<A,\tilde{\odot}>\overset{b.g.}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ *ve* $<B,\tilde{\bullet}>\overset{b.g.}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ *olsun. Bu durumda*

$$<A\cup B,\tilde{\circ}>\overset{b.g.}{\leq}<G,\tilde{\circ}>\Longleftrightarrow A\subseteq B \text{ veya } B\subseteq A\,.$$

Önerme 2.44. *(Sezer 2003)* $<G,\tilde{\circ}>$ *bir bulanık grup,* $\emptyset\neq A\subseteq G$ *ve* $\tilde{\odot}$*,* A *üzerinde bir bulanık ikili işlem olsun. Bu durumda aşağıdaki denklik sağlanır:*

$$<A,\tilde{\odot}>\overset{b.g.}{\leq}<G,\tilde{\circ}>\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \textit{(i)} & \mu_{\tilde{\circ}}(x,y^{-1},z)=1\Rightarrow z\in A\,,\ \forall x,y\in A\,,\ \forall z\in G\,, \\ \textit{(ii)} & \mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z)\leq\mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z)\,,\ \forall a,b,c\in A \end{array}$$

Önerme 2.45. *(Sezer 2003)* $<G,\tilde{\circ}>$ *bir bulanık grup,* $<A,\tilde{\odot}>\overset{b.g.}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$, $<B,\tilde{\bullet}>\overset{b.g.}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ *ve* $\tilde{\star}$*,* $A\cap B$ *üzerinde bir bulanık ikili işlem olsun. Eğer, her* $x,y,z\in A\cap B$ *için* $\mu_{\tilde{\star}}(x,y,z)\leq\mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,z)\wedge\mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z)$ *ise,* $<A\cap B,\tilde{\star}>\overset{b.g.}{\leq}<A,\tilde{\odot}>$ *ve* $<A\cap B,\tilde{\star}>\overset{b.g.}{\leq}<B,\tilde{\bullet}>$*'dır.*

2.3. Bulanık Halkalar ve Bulanık İdealler

2.3.1. Bulanık halkalar

Bu bölüm ve sonrasındaki gösterimlerimizde $<H,\tilde{\circ},\tilde{\bullet},E_{H\times H},E_H>$ sıralı beşlisi ile, H'nin bir küme olduğu, $\tilde{\circ}$ ve $\tilde{\bullet}$'nın ise H üzerinde $E_{H\times H}$ ve E_H belirtisiz eşitliklerine göre bulanık ikili işlemler olduğu, ifade edilecektir.

Tanım 2.46. *(Sezer 2003)* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet}, E_{H\times H}, E_H >$ *bulanık cebirsel yapısı verilmiş olsun. Eğer her* $x, y, z, t, a, b, c, d \in H$ *için*

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(x, y, a) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(x, z, b) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(y, z, d) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(x, d, t) \leq E_H(t, c)$$

ise, $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *sıralı üçlüsünün* ***sol dağılma özelliği*** *vardır denir. Eğer*

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(x, z, a) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(y, z, b) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(x, y, d) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(d, z, t) \leq E_H(t, c)$$

ise, $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *sıralı üçlüsünün* ***sağ dağılma özelliği*** *vardır, denir.*

Aşağıda bulanık halka tanımına yer verilmektedir.

Tanım 2.47. *(Sezer 2003)* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet}, E_{H\times H}, E_H >$ *bulanık cebirsel yapısı aşağıdaki üç özelliği sağlıyorsa* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$*'ya* $E_{H\times H}$ *ve* E_H *belirtisiz eşitliklerine göre bir* ***bulanık halka*** *denir:*

(BH 1) $< H, \tilde{\circ} >$ *bir Abelyen bulanık grup,*

(BH 2) $< H, \tilde{\bullet} >$ *bir bulanık yarıgrup,*

(BH 3) $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$*'nın sol ve sağ dağılma özelliği var.*

Eğer $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *bir bulanık halka ve*

(BH 4) $\forall x \in H$ *için* $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, e_{\tilde{\bullet}}, x) = 1 = \mu_{\tilde{\bullet}}(e_{\tilde{\bullet}}, x, x)$

olacak biçimde $e_{\tilde{\bullet}} \in H$ *varsa* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$*'ya* ***birimli bulanık halka,***

(BH 5) $\forall x, y, s, t \in H$ *için* $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, y, s) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(y, x, t) \leq E_H(s, t)$

ise de $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$*'ya* ***değişmeli bulanık halka*** *denir.*

Bundan sonra $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bulanık halkası için $< H, \tilde{\circ} >$'nın birim elemanı 0_H veya 0 ile, $< H, \tilde{\bullet} >$'nın birim elemanı ise 1_H veya 1 ile gösterilecektir. Ayrıca $x \in H$ için, $-x$ ile x'in $< H, \tilde{\circ} >$'daki tersi, x^{-1} ile de x'in (eğer varsa) $< H, \tilde{\bullet} >$'daki tersi belirtilecektir.

Önerme 2.48. *(Demirci 2002, 2003)* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *bir (birimli, değişmeli) bulanık halka ise* $< H, \circ, \bullet >$ *bir (birimli, değişmeli) halkadır.*

Tanım 2.49. *(Sezer 2003)* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *bir bulanık halka olsun.* $A \subseteq H$ *ve her* $a, b, c \in A$ *için* $\mu_{\tilde{\oplus}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c)$ *ve* $\mu_{\tilde{\odot}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a, b, c)$ *ve* $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$ *bir bulanık halka ise* $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$*'ya* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$*'nın bir* ***bulanık althalkası*** *denir ve bu durum* $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{b.h.}{\leq} < H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *ile gösterilir.*

Aşağıdaki önerme, tanımdaki tüm koşullara bakmak yerine daha az sayıda koşulla bir altkümenin bir bulanık althalka olup olmadığını incelenebildiğini göstermektedir:

Önerme 2.50. *(Sezer 2003)* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *bir bulanık halka,* $A \subseteq H$ *ve* $\tilde{\oplus}$ *ile* $\tilde{\odot}$*,* A *üzerinde bulanık ikili işlemler olsun. Bu durumda aşağıdaki denklik sağlanır:*

$$< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{b.h.}{\leq} < H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} > \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \textbf{(i)} & < A, \tilde{\oplus} > \overset{b.g.}{\leq} < H, \tilde{\circ} > \\ \textbf{(ii)} & \mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c)\ ,\ \forall a,b,c \in A\ . \end{array}$$

Sonuç 2.51. *(Sezer 2003)* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *bir bulanık halka ve* $\tilde{\oplus}$ *ile* $\tilde{\odot}$*,* H *üzerinde* $\mu_{\tilde{\oplus}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c)$ *ve* $\mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c)$ *eşitsizliklerini sağlayan bulanık ikili işlemler olsun. Bu durumda şu özellikler sağlanır:*

(a) $< \{0\}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} > \overset{b.h.}{\leq} < H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$

(b) $< H, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{b.h.}{\leq} < H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$

Önerme 2.52. *(Sezer 2003)* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *bir bulanık halka olsun. Bu durumda her* $x, y, z, m, n, w \in H$ *için,*

(1) $\mu_{\tilde{\bullet}}(x,0,m) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(0,x,n) \leq E_H(m,n)$,

(2) $\mu_{\tilde{\bullet}}(x,-y,m) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(-x,y,n) \leq E_H(m,n)$.

Ayrıca $\tilde{\circ}$ *ikinci girdide geçişli ise,*

$$\begin{array}{rcl} \mu_{\tilde{\bullet}}(x,-y,m) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,n) & \leq & E_H(m,-n) \\ \mu_{\tilde{\bullet}}(-x,y,m) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,n) & \leq & E_H(m,-n) \end{array}$$

olur.

(3) $\mu_{\tilde{\bullet}}(-x,-y,m) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,n) \leq E_H(m,n)$.

(4) $\tilde{\circ}$*, ikinci ve üçüncü girdide geçişli olsun.*

(i) *Eğer* $\tilde{\bullet}$ *işlemi üçüncü girdide geçişliyse,*$\forall x, y, z, t, u, v, m, n \in H$ *için*

$$\mu_{\tilde{\circ}}(x,-y,u) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(u,z,m) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(x,z,v) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(y,z,t) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(v,-t,n) \leq E_H(m,n).$$

(ii) *Eğer* $\tilde{\bullet}$ *işlemi ikinci girdide geçişliyse,*

$$\mu_{\tilde{\circ}}(y,-z,u) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(x,u,m) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,v) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(x,z,t) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(v,-t,n) \leq E_H(m,n).$$

(5) $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *bir birimli bulanık halka ise* $\mu_{\tilde{\bullet}}(-1,a,-a) = 1 = \mu_{\tilde{\bullet}}(-1,-1,1)$*'dir.*

2.3.2. Bulanık idealler

Tanım 2.53. *(Sezer 2003)* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *bir bulanık halka ve* $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{b.h.}{\leq} < H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *olsun. Eğer* $\forall a \in A$ *ve* $\forall h, t, s \in H$ *için*

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(a, h, t) = 1 \Rightarrow t \in A \text{ ve } \mu_{\tilde{\bullet}}(h, a, s) = 1 \Rightarrow s \in A$$

ise $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$*'ya* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$*'nın bir* ***bulanık ideali*** *denir ve bu durum* $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{b.i.}{\leq} < H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *ile gösterilir.*

Önerme 2.54. *(Sezer 2003)* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *bir bulanık halka,* $A \subseteq H$ *ve* $\tilde{\oplus}$ *ile* $\tilde{\odot}$*,* A *üzerinde bulanık ikili işlemler olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

$$< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{b.i.}{\leq} < H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} > \Longleftrightarrow \begin{cases} \textbf{\textit{(i)}} & < A, \tilde{\oplus} > \overset{b.g.}{\leq} < H, \tilde{\circ} > \\ \textbf{\textit{(ii)}} & \mu_{\tilde{\odot}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a, b, c), \forall a, b, c \in A \\ \textbf{\textit{(iii)}} & \mu_{\tilde{\bullet}}(a, h, t) = 1 \Rightarrow t \in A, (\forall a \in A, \forall t \in H) \\ \textbf{\textit{(iv)}} & \mu_{\tilde{\bullet}}(h, a, s) = 1 \Rightarrow s \in A, (\forall a \in A, \forall s \in H). \end{cases}$$

Önerme 2.55. *(Sezer 2003)* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *bir bulanık halka olmak üzere, eğer* $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{b.i.}{\leq} < H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *ise* $< A, \oplus, \odot >$*,* $< H, \circ, \bullet >$*'nın bir idealidir.*

Önerme 2.56. *(Sezer 2003)* $< H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *bir bulanık halka ise* $< \{0\}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} > \overset{b.i.}{\leq} < H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ *ve* $< H, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{b.i.}{\leq} < H, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$*'dir. Burada* $\tilde{\oplus}$ *ve* $\tilde{\odot}$*,* H *üzerinde* $\forall a, b, c \in H$ *için* $\mu_{\tilde{\oplus}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c)$ *ve* $\mu_{\tilde{\odot}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a, b, c)$ *eşitsizliklerini sağlayan bulanık ikili işlemlerdir.*

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Bulanık Modül Yapıları

3.1.1. Bulanık modül

Tanım 3.1. $< R, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot}, E_{R\times R}, E_R >$ *bir bulanık halka,* $< A, \tilde{+}, E_{A\times A}, E_A >$ *bir Abelyen bulanık grup,* $a, a_1, a_2, a_1', a_2', u, v, w \in A$ *ve* $r, r', r_1, r_2 \in R$ *olsun.*

(1). *Eğer bir* $f : R \times A \rightsquigarrow A$ *belirtisiz fonksiyonuyla birlikte*

(BM 1) $\mu_{\tilde{+}}(a_1, a_2, u) \wedge \mu_f(r, u, v) \wedge \mu_f(r, a_1, a_1') \wedge \mu_f(r, a_2, a_2') \wedge \mu_{\tilde{+}}(a_1', a_2', w) \leq E_A(v, w)$

(BM 2) $\mu_{\tilde{\oplus}}(r_1, r_2, r) \wedge \mu_f(r, a, v) \wedge \mu_f(r_1, a, a_1) \wedge \mu_f(r_2, a, a_2) \wedge \mu_{\tilde{+}}(a_1, a_2, w) \leq E_A(v, w)$

(BM 3) $\mu_{\tilde{\odot}}(r_1, r_2, r') \wedge \mu_f(r', a, v) \wedge \mu_f(r_2, a, u) \wedge \mu_f(r_1, u, w) \leq E_A(v, w)$

ise $< A, \tilde{+}, E_{A\times A}, E_A >$ *bulanık grubuna bir* ***bulanık sol R-modül*** *denir.*

(2). *Benzer biçimde, bir* $g : A \times R \rightsquigarrow A$ *belirtisiz fonksiyonuyla birlikte*

(BM 1′) $\mu_{\tilde{+}}(a_1, a_2, u) \wedge \mu_g(u, r, v) \wedge \mu_g(a_1, r, a_1') \wedge \mu_g(a_2, r, a_2') \wedge \mu_{\tilde{\oplus}}(a_1', a_2', w) \leq E_A(v, w)$

(BM 2′) $\mu_{\tilde{\oplus}}(r_1, r_2, r) \wedge \mu_g(a, r, v) \wedge \mu_g(a, r_1, a_1) \wedge \mu_g(a, r_2, a_2) \wedge \mu_{\tilde{+}}(a_1, a_2, w) \leq E_A(v, w)$

(BM 3′) $\mu_{\tilde{\odot}}(r_1, r_2, r') \wedge \mu_g(a, r', v) \wedge \mu_g(a, r_1, u) \wedge \mu_g(u, r_2, w) \leq E_A(v, w)$

ise $< A, \tilde{+}, E_{A\times A}, E_A >$ *bulanık grubuna bir* ***bulanık sağ R-modül*** *denir.*

(3). *Hem sağ hem de sol bulanık R-modül olan* $< A, \tilde{+}, E_{A\times A}, E_A >$ *bulanık grubuna bir* ***bulanık R-modül*** *denir.*

(4). *R bir birimli bulanık halka* ($1_R \in R$) *olsun.*

a) *Eğer* $< A, \tilde{+}, E_{A\times A}, E_A >$ *bir bulanık sol R-modül,* $\forall a, s \in A$ *için*

$$\mu_f(1_R, a, s) \leq E_A(s, a)$$

ise A*'ya bir* ***bulanık birimcil sol R-modül*** *denir.*

b) *Eğer* $< A, \tilde{+}, E_{A\times A}, E_A >$ *bir bulanık sağ R-modül,* $\forall a, t \in A$ *için*

$$\mu_g(a, 1_R, t) \leq E_A(a, t)$$

ise A*'ya* ***bulanık birimcil sağ R-modül*** *denir.*

c) *Eğer* $< A, \tilde{+}, E_{A\times A}, E_A >$ *hem bulanık birimcil sol R-modül hem de bulanık birimcil sağ R-modül ise* A*'ya* ***birimcil bulanık R-modül*** *denir.*

Eğer $< A, \tilde{+}, E_{A\times A}, E_A >$ bulanık R-modülü için bütün belirtisiz eşitlikler klasik eşitlikler (yani $E_{R\times R} = E^*_{R\times R}$, $E_R = E^*_R$, $E_{A\times A} = E^*_{A\times A}, E_A = E^*_A$) ve belirtisiz fonksiyonlar ($\mu_{\tilde{\oplus}}, \mu_f$ vb.) klasik fonksiyon olarak alınırsa, A bulanık R-modülünün klasik bir R-modül olduğu kolayca görülebilir.

Gösterim 3.2. *Eğer A üzerinde $\tilde{+}$ bulanık ikili işlemi ve $E_{A\times A}, E_A$ belirtisiz eşitlikleri biliniyorsa,* "$< A, \tilde{+}, E_{A\times A}, E_A >$ bir bulanık sol(sağ) R-modüldür" *yerine, kısaca* "A bir bulanık sol(sağ) R-modüldür" *yazılacaktır. Ayrıca; bundan sonraki anlatımlarda A* bir bulanık R-modüldür *denildiğinde, A'nın* bir bulanık sol R-modül *olduğu anlaşılacaktır.*

Önerme 3.3. $< S, \tilde{+}, \tilde{\cdot} > \overset{v.h.}{\leq} < R, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$ *olsun.* $f : S \times R \rightsquigarrow R$ *bir belirtisiz fonksiyonu* $\forall s \in S$ *ve* $\forall r, r' \in R$ *için*

$$\mu_f(s, r, r') = \mu_{\tilde{\odot}}(s, r, r') \tag{3.1}$$

olarak tanımlanırsa R bir bulanık S-modül olur.

İspat. $< R, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$ bir bulanık halka olduğundan $< R, \tilde{\oplus} >$ bir Abelyen bulanık gruptur. R bir bulanık halka olduğundan sol dağılma özelliğini sağlar, yani $\forall r_1, r_2, r, r'_0, r'_1, r'_2, r' \in R$ ve $\forall s \in S$ için

$$\begin{aligned}
& \mu_{\tilde{\oplus}}(r_1, r_2, r) \wedge \mu_f(s, r, r') \wedge \mu_f(s, r_1, r'_1) \wedge \mu_f(s, r_2, r'_2) \wedge \mu_{\tilde{\oplus}}(r'_1, r'_2, r'_0) \\
= \; & \mu_{\tilde{\oplus}}(r_1, r_2, r) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s, r, r') \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s, r_1, r'_1) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s, r_2, r'_2) \wedge \mu_{\tilde{\oplus}}(r'_1, r'_2, r'_0) \\
\leq \; & E_R(r', r'_0)
\end{aligned}$$

olduğundan (BM 1) koşulu sağlanır. Bulanık althalka tanımı gereği

$$\mu_{\tilde{+}}(s_1, s_2, s) \leq \mu_{\tilde{\oplus}}(s_1, s_2, s)$$

olduğundan ve ayrıca R bulanık halkasının sağ dağılma özelliğinden

$$\begin{aligned}
& \mu_{\tilde{+}}(s_1, s_2, s) \wedge \mu_f(s, r, r') \wedge \mu_f(s_1, r, r_1) \wedge \mu_f(s_2, r, r_2) \wedge \mu_{\tilde{\oplus}}(r_1, r_2, r_0) \\
= \; & \mu_{\tilde{+}}(s_1, s_2, s) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s, r, r') \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s_1, r, r_1) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s_2, r, r_2) \wedge \mu_{\tilde{\oplus}}(r_1, r_2, r_0) \\
\leq \; & \mu_{\tilde{\oplus}}(s_1, s_2, s) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s, r, r') \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s_1, r, r_1) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s_2, r, r_2) \wedge \mu_{\tilde{\oplus}}(r_1, r_2, r_0) \\
\leq \; & E_R(r', r_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (BM 2) koşulu sağlanmış olur. Yine bulanık althalka tanımı gereği $\mu_{\tilde{\cdot}}(s_1, s_2, s') \leq \mu_{\tilde{\odot}}(s_1, s_2, s')$ ve $< R, \tilde{\odot} >$ bulanık yarıgrup olduğundan;

$$\begin{aligned}
& \mu_{\tilde{\cdot}}(s_1, s_2, s') \wedge \mu_f(s', r, r') \wedge \mu_f(s_1, r, r_0) \wedge \mu_f(r_0, s_2, r'_0) \\
= \; & \mu_{\tilde{\cdot}}(s_1, s_2, s') \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s', r, r') \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s_1, r, r_0) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(r_0, s_2, r'_0) \\
\leq \; & \mu_{\tilde{\odot}}(s_1, s_2, s') \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s', r, r') \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(s_1, r, r_0) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(r_0, s_2, r'_0)
\end{aligned}$$

$$\leq \quad E_S(r', r'_0)$$

bulunur ki, bu da (BM 3)'ün sağlandığını söyler. Dolayısıyla R'nin bir bulanık sol S-modül olduğu elde edilmiş olur. Benzer biçimde R'nin bir bulanık sağ S-modül, dolayısıyla da bir bulanık S-modül olduğu görülmüş olur. □

Sonuç 3.4. $< I, \tilde{+}, \tilde{\cdot} > \overset{b.i.}{\leq} < R, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$ *ise,* R *bir bulanık I-modüldür.*

İspat. $f : I \times R \rightsquigarrow R$ fonksiyonu $\mu_f(a, r, r') = \mu_{\tilde{\odot}}(a, r, r')$ olarak tanımlanırsa, Önerme 3.3'ten R'nın bir bulanık I-modül olduğu görülür. □

Önerme 3.5. $< I, \tilde{+}, \tilde{\cdot} > \overset{b.i.}{\leq} < R, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$ *ve* $f : R \times I \rightsquigarrow I$, $\mu_f(r, a, a') \leq \mu_{\tilde{\odot}}(r, a, a')$ *olacak biçimde bir belirtisiz fonksiyon olsun. Bu durumda* I *bir bulanık R-modüldür.*

İspat. $< I, \tilde{+}, \tilde{\cdot} >$ bir bulanık ideal olduğundan $< I, \tilde{+} >$ bir Abelyen bulanık guptur. Ayrıca $< R, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$'nın sağ ve sol dağılma özelliği olduğu için **(BM 1)** ve **(BM 2)** özellikleri sağlanır. Son olarak, $< R, \tilde{\odot} >$ bir bulanık yarıgrup olduğundan, elde edilen

$$\begin{aligned} & \mu_{\tilde{\odot}}(r_1, r_2, r') \wedge \mu_f(r', a, v) \wedge \mu_f(r_2, a, u) \wedge \mu_f(r, u, w) \\ = \; & \mu_{\tilde{\odot}}(r_1, r_2, r') \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(r', a, v) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(r_2, a, u) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(r, u, w) \\ \leq \; & E_R(v, w) \end{aligned}$$

ifadesi ile **(BM 3)** özelliğinin sağlandığı görülür. □

Örnek 3.6. $< R, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$ *bir bulanık halka ve* $< A, \tilde{+} >$ *bir Abelyen bulanık grup ve* $f : R \times A \rightsquigarrow A$ *belirtisiz fonksiyonu*

$$\mu_f(r, a, a') = \begin{cases} 1 & , \quad a' = e_A \\ 0 & , \quad a' \neq e_A \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa, A*'nın bir bulanık R-modül olduğu elde edilir. Gerçekten* μ_f *bir (kuvvetli) belirtisiz fonksiyondur; çünkü*

$$\mu_f(r, a, a') \wedge \mu_f(r, a, a'') \wedge E_{R\times A}((r, a), (r_1, a_1)) \leq E_A(a', a'') \tag{3.2}$$

*eşitsizliğinin, yani **(F.2)**'nin* $a' \neq e_A$ *veya* $a'' \neq e_A$ *için sağlanacağı açıktır (* $0 \leq E_A(a', a'')$ *). Karşıt olarak,* $a' = a'' = e_A$ *ise* $E_A(a', a'') = 1$ *olduğundan 3.2 eşitsizliği yine sağlanacaktır. Ayrıca* $\forall (r, a) \in R \times A$ *için* $\mu_f(r, a, e_A) = 1$ *olduğundan, yani **(F.3)** sağlandığından* $f : R \times A \rightsquigarrow A$ *bir kuvvetli belirtisiz fonksiyondur.*
Şimdi A*'nın bir bulanık R-modül olduğunu görelim: **(BM 1)**'de* $v = a'_1 = a'_2 = e_A$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \mu_{\tilde{+}}(a_1,a_2,u)\wedge\mu_f(r,u,v)\wedge\mu_f(r,a_1,a_1')\wedge\mu_f(r,a_2,a_2')\wedge\mu_{\tilde{+}}(a_1',a_2',w) \\ = \ & \mu_{\tilde{+}}(a_1,a_2,u)\wedge\mu_f(r,u,e_A)\wedge\mu_f(r,a_1,e_A)\wedge\mu_f(r,a_2,e_A)\wedge\mu_{\tilde{+}}(e_A,e_A,w) \\ = \ & \mu_{\tilde{+}}(a_1,a_2,u)\wedge\mu_{\tilde{+}}(e_A,e_A,w) \end{aligned}$$

bulunur ki $\mu_{\tilde{+}}(e_A,e_A,w)\leq E_A(e_A,w)$ *olduğundan*

$$\mu_{\tilde{+}}(a_1,a_2,u)\wedge E_A(e_A,w)\leq E_A(e_A,w)$$

eşitsizliği sağlanır. Yine ***(BM 2)****'de* $v=a_1=a_2=e_A$ *alınırsa,*

$$\begin{aligned} & \mu_{\tilde{\oplus}}(r_1,r_2,r)\wedge\mu_f(r,a,v)\wedge\mu_f(r_1,a,a_1)\wedge\mu_f(r_2,a,a_2)\wedge\mu_{\tilde{+}}(a_1,a_2,w) \\ = \ & \mu_{\tilde{\oplus}}(r_1,r_2,r)\wedge\mu_f(r,a,e_A)\wedge\mu_f(r_1,a,e_A)\wedge\mu_f(r_2,a,e_A)\wedge\mu_{\tilde{+}}(e_A,e_A,w) \\ = \ & \mu_{\tilde{\oplus}}(r_1,r_2,r)\wedge\mu_{\tilde{+}}(e_A,e_A,w) \\ \leq \ & E_A(e_A,w) \end{aligned}$$

olduğundan istenen eşitsizlik sağlanır. ***(BM 3)****'te* $v=u=w=e_A$ *alınırsa*

$$\begin{aligned} & \mu_{\tilde{\odot}}(r_1,r_2,r')\wedge\mu_f(r',a,v)\wedge\mu_f(r_2,a,u)\wedge\mu_f(r_1,u,w) \\ = \ & \mu_{\tilde{\odot}}(r_1,r_2,r')\wedge\mu_f(r',a,e_A)\wedge\mu_f(r_2,a,e_A)\wedge\mu_f(r_1,u,e_A) \\ \leq \ & E_A(e_A,e_A) \end{aligned}$$

bulunur ki $E_A(e_A,e_A)=1$ *olduğundan istenen eşitsizlik sağlanır. Dolayısıyla* A *bir bulanık R-modüldür.*

Ayrıca, burada A birimcil bulanık R-modül değildir; çünkü 1_R, R'nin birimi olmak üzere, $\forall s,a\in A$ için

$$\mu_f(1_R,a,s)\leq E_A(a,s)$$

eşitsizliği, $s=e_A\neq a$ iken

$$1=\mu_f(1_R,a,e_A)\leq E_A(a,e_A) \text{ ve } E_A(a,e_A)\neq 1$$

olduğundan sağlanmaz.

3.1.2. Bulanık altmodül

Tanım 3.7. *$< R, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot}, E_{R\times R}, E_R >$ bir bulanık halka, $< A, \tilde{+}, E_{A\times A}, E_A >$ bir bulanık R-modül, $< B, \tilde{+}' > \underset{b.g.}{\leq} < A, \tilde{+} >$ ve $f : R \times A \rightsquigarrow A$ bir belirtisiz fonksiyon olsun. $\forall r \in R$ ve $\forall b \in B$ için $\mu_f(r, b, b') = 1$ iken $b' \in B$ oluyorsa, B'ye A'nın bir* ***bulanık R-altmodülü*** *denir ve $B \overset{b.m.}{\underset{R}{\leq}} A$ ile gösterilir.*

Önerme 3.8. *$< A, \tilde{+} >$ bir bulanık R-modül, $f : R \times A \rightsquigarrow A$ bir belirtisiz fonksiyon, $B \subseteq A$ ve $\tilde{+}'$, B üzerinde bir belirtisiz ikili işlem olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:*

1. $< B, \tilde{+}' > \overset{b.m.}{\underset{R}{\leq}} < A, \tilde{+} >$

2. *e_A, A'nın birimi olmak üzere*

- ***(a)*** $e_A \in B$
- ***(b)*** *$\forall b_1, b_2 \in B$ için $\exists b' \in B$ vardır ki* $\mu_{\tilde{+}'}(b_1, b_2^{-1}, b') \leq E_B(b_1 +' b_2^{-1}, b')$
- ***(c)*** *$\forall r \in R$ ve $\forall b \in B$ için* $\mu_f(r, b, b') = 1 \Rightarrow b' \in B$.

İspat. B'nin bulanık altmodül olması nedeniyle bu üç koşulun sağlandığı kolayca görülür. Karşıt olarak (a) ve (b) koşulları bulanık altgrup, (c) koşulu ise bulanık altgrubun bulanık altmodül olmasını sağlayan koşul olduğundan B, A'nın bir bulanık R-altmodülüdür. □

Tanım 3.9. *$< A, \tilde{+} >, < B, \tilde{+}' >$ iki bulanık R-modül ve $h : A \to B$ bir fonksiyon olsun. $f_A : R \times A \rightsquigarrow A$, $f_B : R \times B \rightsquigarrow B$ belirtisiz fonksiyonları $\forall r \in R$ ve $\forall a, a', b, c \in A$ için*

1. $\mu_{\tilde{+}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{+}'}(h(a), h(b), h(c))$

2. $\mu_{f_A}(r, a, a') \leq \mu_{f_B}(r, h(a), h(a'))$

koşullarını sağlayan bir h fonksiyonuna A'dan B 'ye bir ***bulanık R-modül homomorfizmi*** *denir.*

- Eğer $h : A \to B$ bulanık R-modül homomorfizmi, $\forall a, b \in A$ için $E_B(h(a), h(b)) \leq E_A(a, b)$ ise h'ye **bulanık R-modül monomorfizmi** denir.
- Eğer $h : A \to B$ bulanık R-modül monomorfizmi örten ve $h^{-1} : B \to A$ bir bulanık homomorfizm ise h'ye **bulanık R-modül izomorfizmi** denir.

Önerme 3.10. *$< A, \tilde{+} >$ ve $< B, \tilde{+}' >$ bulanık R-modüller, $\tilde{+}'$ bulanık ikili işlemi birinci girdide geçişli, $f_B : R \times B \rightsquigarrow B$ belirtisiz fonksiyon ve $h : A \to B$ bir bulanık R-modül homomorfizmi olsun. Bu durumda $< A, \tilde{+} >$'nın $< Cek_b(h), \tilde{\star} >$ bulanık altgrubu A'nın bir bulanık R-altmodülüdür.*

İspat. $< Cek_b(h), \tilde{\star} > \overset{b.g.}{\leq} < A, \tilde{+} >$ olduğundan, Önerme 3.8 gereği, $\forall r \in R$ ve $\forall a \in Cek_b(h)$ için $\mu_{f_A}(r, a, a') = 1$ olduğunda $a' \in Cek_b(h)$'nin sağlandığını göstermek yeterlidir.
h bulanık R-modül homomorfizmi olduğundan $\forall r \in R$, $\forall a \in Cek_b(h)$ için

$$1 = \mu_{f_A}(r, a, a') \leq \mu_{f_B}(r, h(a), h(a')) = \mu_{f_B}(r, e_B, h(a'))$$

yani

$$\mu_{f_B}(r, e_B, h(a')) = 1 \tag{3.3}$$

elde edilir. Ayrıca; $\tilde{+}$, B üzerinde bir belirtisiz fonksiyon olduğu için $\mu_{\tilde{+}}(h(a'), h(a'), s) = 1$ olacak biçimde $s \in B$'nin var olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$\begin{aligned} 1 = \mu_{\tilde{+}'}(e_B, e_B, e_B) \wedge \mu_{f_B}(r, e_B, h(a')) \wedge \mu_{f_B}(r, e_B, h(a')) \\ \wedge \mu_{f_B}(r, e_B, h(a')) \wedge \mu_{\tilde{+}'}(h(a'), h(a'), s) \leq E_B(h(a'), s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$E_B(h(a'), s) = 1 \tag{3.4}$$

elde edilir. $\tilde{+}'$, birinci girdide geçişli olduğundan, 3.3 ve 3.4 eşitlikleriyle

$$1 = \mu_{\tilde{+}'}(h(a'), h(a'), s) \wedge E_B(h(a'), s) \leq \mu_{\tilde{+}'}(h(a'), h(a'), h(a'))$$

yani

$$\mu_{\tilde{+}'}(h(a'), h(a'), h(a')) = 1$$

bulunur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} 1 = \mu_{\tilde{+}'}(h(a'), h(a'), h(a')) \wedge \mu_{\tilde{+}'}(h(a')^{-1}, h(a'), e_B) \wedge \\ \mu_{\tilde{+}'}(h(a')^{-1}, h(a'), e_B) \wedge \mu_{\tilde{+}'}(e_B, h(a'), h(a')) \leq E_B(e_B, h(a')) \end{aligned}$$

olduğundan

$$E_B(e_B, h(a')) = 1 \tag{3.5}$$

yani $h(a') = e_B$ elde edilir ki, bu da $a' \in Cek_b(h)$ olması demektir. □

Ek olarak eğer μ_{f_B} birinci girdide geçişli ise, 3.3 ve 3.5 ile birlikte

$$1 = \mu_{f_B}(r, e_B, h(a')) \wedge E_B(e_B, h(a')) \leq \mu_{f_B}(r, e_B, e_B)$$

yani

$$\mu_{f_B}(r, e_B, e_B) = 1$$

olduğu elde edilir.

Önerme 3.11. *$< A, \tilde{+} >$ ve $< B, \tilde{+}' >$ bulanık R-modüller, $f_A : R \times A \rightsquigarrow A$ ve $f_B : R \times B \rightsquigarrow B$ belirtisiz fonksiyonlar ve $h : A \to B$, $h(a) = e_B$ olmak üzere h, A'dan B'ye bir bulanık R-modül homomorfizmidir.*

İspat. $\forall r \in R$ ve $\forall a, b, c \in A$ için

$$\mu_{\tilde{+}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{+}'}(h(a), h(b), h(c)) = \mu_{\tilde{+}'}(e_B, e_B, e_B) = 1$$

ve $k \in B$ için $\mu_{f_B}(r, e_B, k) = 1$ olsun. Bu durumda B bulanık R-modül olduğundan **(BM 1)'**i sağlar; yani,

$$1 = \mu_{f_B}(r, e_B, k) \wedge \mu_{f_B}(r, e_B, k) \wedge \mu_{f_B}(r, e_B, k) \wedge \mu_{\tilde{+}'}(k, k, k+'k) \leq E_B(k, k+'k)\ .$$

Buradan da $E_B(k, k +' k) = 1$ olduğundan $k = k +' k$, yani $k = e_B$ olduğu, dolayısıyla da $\mu_{f_B}(r, e_B, e_B) = 1$ elde edilir. Bu nedenle, bulanık R-modül homomorfizminin ikinci koşulu olan

$$\mu_{f_A}(r, a, b) \leq \mu_{f_B}(r, h(a), h(b)) = \mu_{f_B}(r, e_B, e_B) = 1$$

sağlanmış olur. □

4. SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak belirtisiz kümeler ve üzerindeki denklik bağıntıları ile belirtisiz fonksiyon kavramlarının tanımları verilerek üst yapılara hazırlık yapıldı. Sonrasında ise; bulanık gruplar, bulanık halkalar ve bu kavramların bazı özelliklerine yer verildi.

Tezin son bölümünde bulanık modül, bulanık altmodül, bulanık modül homomorfizmi ve izomorfizmi kavramları tanımlanarak bu kavramların sağladığı bazı temel özellikleri incelendi.

Tezde bulanık halkaların, bulanık althalkaları ve bunun sonucu olarak bulanık idealleri üzerinde bulanık modül oldukları görüldü. Ayrıca, bulanık ideallerin de bulanık halkaları üzerinde bulanık modül olduğu elde edildi. Son olarak, bulanık modül olan bir bulanık grubun bir bulanık homomorfizm altındaki çekirdek kümesinin de o bulanık grubun bulanık altmodülü olduğu incelendi.

5. KAYNAKLAR

AKGÜL, M. 1988. Some properties of fuzzy groups. *JMAA*, 133, 93-100.

ANTHONY, J.M. and SHERWOOD, H. 1979. Fuzzy groups redefined. *JMAA*, 69, 124-130.

BHATTACARYA, P. 1987. Fuzzy subgroups: Some characterizations. *JMAA*, 128, 241-252.

DEMİRCİ, M. 1999a. Fuzzy functions and their fundamental properties. *FSS*, 106, 239-246

DEMİRCİ, M. 1999b. Vague groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 230, 142–156.

DEMİRCİ, M. 2000. Fuzzy functions and their applications. *JMAA*, 252, 495-517

DEMİRCİ, M. 2002. Fundamentals of M-vague algebra and M-vague arithmetic operations. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 10, 25-75

DUBOIS, D. and PRADE, H. 1980. Fuzzy Sets and Systems. Academic Press, New York.

MALIK, D.S. and MORDESON, J.N. 1992. Fuzzy homomorphisms of rings. *Fuzzy Sets and Systems*, 46, 139-146.

KIM, J.G. 1997. Some characterizations of fuzzy subgroups. *FSS*, 87, 243-249.

KUMAR, S. 1993. Vague Ideals of Po-Γ-Semigroups. *Matematica Aeterna*, Vol. 1, 05, 263-277.

ROSENFELD, A. 1971. Fuzzy Groups. *JMAA*, 35, 512-517.

SASAKI, M. 1993. Fuzzy functions. *Fuzzy Sets and Systems,* 55, 295-301.

SEZER, S. 2003. Bulanık Cebirsel Yapılar Üzerine. Doktora tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya.

SEZER, S. 2005. Vague groups and generalized vague subgroups on the basis of ([0, 1], $\leq$, $\wedge$). *Information Sciences,* 123–142

SHERWOOD, H. 1983. Products of fuzzy subgroups. *FSS*, 11, 79-89.

ZADEH, L.A. 1965. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 338-353.

ZHANG, Y. 2001. Some properties of subgroups. *FSS*, 119, 427-438.

ÖZGEÇMİŞ

Murat Yüksel, 1991 yılında Malatya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2013 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Şubat 2014'te Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimini sürdürmektedir.