T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK SAYILAR VE HİPERBOLİK SAYI MATRİSLERİNİN CEBİRSEL VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Hasan ÇAKIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK SAYILAR VE HİPERBOLİK SAYI MATRİSLERİNİN CEBİRSEL VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Hasan ÇAKIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 09/08/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

HİPERBOLİK SAYILAR VE HİPERBOLİK SAYI MATRİSLERİNİN CEBİRSEL VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Hasan ÇAKIR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Ağustos 2017, 104 sayfa

Bu çalışmada hiperbolik sayılar ile elemanları hiperbolik sayı olan matrisler incelenmiştir. Öncelikle genelleştirilmiş kompleks sayılar tanıtılmış ve genelleştirilmiş kompleks sayıların özel bir alt kümesi olan hiperbolik sayılar üzerindeki temel işlemler incelenmiştir. Hiperbolik sayıların karakterizasyonuna göre, kutupsal, üstel ve matris formları gösterilmiştir. Ayrıca timelike, spacelike veya null bir hiperbolik sayının kökleri, hiperbolik sayılar için verilen De Moivre formülü yardımıyla ifade edilmiştir. Bunun yanında hiperbolik sayıların Lorentz düzlemindeki bazı geometrik uygulamaları da çalışılmıştır. Tezin ilerleyen kısımlarında, hiperbolik vektör kavramı verilerek, hermityen skaler ve vektörel çarpım verilmiştir ve hiperbolik üniter matrisleri tanımlanarak farklı yöntemlerle elde edilmiştir. En sonunda, hiperbolik matrislerin exponansiyelinin bazı cebirsel özellikleri verilmiştir. Hiperbolik üniter matrisleri hiperbolik matrislerin exponensiyeli yardımıyla elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Hiperbolik sayılar, Hiperbolik sayı matrisleri, Hiperbolik sayılarla dönme, Hiperbolik exponansiyel matrisi

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)
Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN
Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

ALGEBRAIC AND GEOMETRIC APPLICATIONS OF HYPERBOLIC NUMBERS AND HYPERBOLIC NUMBER MATRICES

Hasan ÇAKIR

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
August 2017, 104 pages

In this study, hyperbolic numbers and whose entries are hyperbolic numbers are investigated. Numbers are firstly introduced generalized complex numbers are introduced and basic operations on hyperbolic numbers, a special subset of generalized complex numbers, are examined. Polar, exponential and matrix forms of a hyperbolic number are represented with respect to characterization of hyperbolic number. Also, the roots of a timelike, spacelike or null hyperbolic number are expressed, using De Moivre formula given for hyperbolic numbers. Moreover, some algebraic properties of hyperbolic numbers are studied in the Lorentzian plane. In the later parts of the thesis, hermitian scalar product and hermitian cross product are given by using the hyperbolic vector notion. Also, hyperbolic unitary matrices are defined and obtained with different methods. At last, some algebraic properties of exponential of matrices with hyperbolic numbers are studied.

KEYWORDS: Hyperbolic number, Hyperbolic number matrices, Rotation with hyperbolic numbers, Hyperbolic exponential matrix.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Supervisor)
Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN
Asst. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Bu tezde hiperbolik sayılar ile ilgili temel çalışmalar derlenmiş ve hiperbolik sayıların geometrik yorumları sınıflandırılmak suretiyle ayrı ayrı verilmiştir. Ayrıca hiperbolik sayı matrisleri ve 2×2 hiperbolik sayı matrislerinin exponansiyeli hesaplanmış, üniter hiperbolik matrisler incelenmiştir.

Tez konumun belirlenmesinde ve hazırlanmasında, her türlü yardım ve fedakarlığı esirgemeyen, bilgisi, tecrübesi ve destekleriyle çalışmam için bana yol gösteren, değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR ’e en kalbi duygularla teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmamı, hayatım boyunca beni destekleyerek cesaretlendiren, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme ithaf ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$\mathbf{i}$	Genelleştirilmiş kompleks sayı birimi
$\mathbb{C}_{p,q}$	Genelleştirilmiş kompleks sayılar kümesi
x, y vb	Reel sayı
$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vb	Hiperbolik, dual veya kompleks sayı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{D}$	Dual sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbf{z}^{-1}$	$\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y$ genelleştirilmiş kompleks sayısının tersi
$\overline{\mathbf{z}}$	$\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y$ genelleştirilmiş kompleks sayısının eşleniği
$\|\mathbf{z}\|$	$\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y$ genelleştirilmiş kompleks sayısının normu
D	$\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y$ genelleştirilmiş kompleks sayısının karakteristik determinantı
Δ	Karakteristik determinantın diskriminantı
C_i	Cisim özellikleri
$\mathbb{P}$	Hiperbolik sayılar kümesi
$\lvert\mathbf{z}\rvert$	$\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ hiperbolik sayısının mutlak değeri(modülü)
H_i	Halka özellikleri
$\mathbf{h}$	Hiperbolik birim
$\mathrm{Re}\,(\mathbf{z})$	$\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ sayısının reel kısmı
$\mathrm{Hip}(\mathbf{z})$	$\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ sayısının hiperbolik kısmı
B	Bilineer form
$\mathbb{M}_{m\times n}$	$m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$\mathbb{M}_{m\times n}\,(\mathbb{P})$	Elemanları hiperbolik sayı olan $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$\mathbb{M}_{m\times n}\,(\mathbb{R})$	Elemanları reel sayı olan $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
Q	Kuadratik form
$Cl(V, Q)$	Q kuadratik formu ile V vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiri
$Cl_{p,q}(\mathbb{R}^{p+q})$	(p, q) işaretli kuadratik form ile $\mathbb{R}^{p+q}$ tarafından üretilen Clifford cebiri
B_Q	Q kuadratik formu ile elde edilen bilineer form
$boy\,(\mathbb{V})$	$\mathbb{V}$ vektör uzayının boyutu
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonlar kümesi
$\widehat{\mathbb{H}}$	Split kuaterniyonlar kümesi
$\varepsilon\,(\mathbf{z})$	$\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının reel ve hiperbolik kısımlarının toplamının işareti
sgn	İşaret fonksiyonu
$\mathrm{argh}(\mathbf{z})$	$\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının argümenti
$\mathbf{z}_+$	$\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının reel ve hiperbolik kısımlarının toplamı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{M}$	Hiperbolik sayılara karşılık gelen matrislerin kümesi
$\mathbf{SP}\,(1,1)$	Birim hiperbolik sayılar grubu
$GL\,(2,\mathbb{R})$	Girdileri reel sayı olan 2×2 matrislerin genel lineer grubu
$\mathbf{O}\,(1,1)$	Hiperbolik dönme matrislerinin kümesi
$\mathbf{P}^1_{sp}\,(1)$	Birim spacelike hiperbolik sayıların kümesi
$\mathbf{P}^1_{tm}\,(1)$	Birim timelike hiperbolik sayıların kümesi
$\mathbf{SO}^+$	Birim spacelike hiperbolik sayı matrislerinin kümesi

R_θ	Dönme matrisi
$\mathbb{P}^n$	n boyutlu hiperbolik sayılar kümesi
$\mathbf{U}, \mathbf{V}$ vb	Hiperbolik, dual veya kompleks vektör
G_i	Grup özellikleri
M_i	Modül özellikleri
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{P}}$	$\mathbb{P}^n$ vektör modülünde standart skaler çarpım
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{h\mathbb{P}}$	$\mathbb{P}^n$ vektör modülünde hermityen skaler çarpım
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{L\mathbb{P}}$	$\mathbb{P}^n$ vektör modülünde standart Lorentziyen skaler çarpım
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{Lh\mathbb{P}}$	$\mathbb{P}^n$ vektör modülünde hermityen Lorentziyen skaler çarpım
$\times_{\mathbb{P}}$	$\mathbb{P}^n$ vektör modülünde vektörel çarpım
$\Vert\cdot\Vert_{h\mathbb{P}}$	$\mathbb{P}^n$ vektör modülünde norm
$diag$	Köşegen matrisi
A^{-1}	A matrisinin tersi
$ek\,(A)$	A matrisinin adjointi
$\det A$	A matrisinin determinantı
A^t	A matrisinin transpozu
$\overline{A}$	A matrisinin eşleniği
A^*	A matrisinin eşlenik transpozu
izA	A matrisinin asal köşegen üzerindeki elemanlarının toplamı
$\square$	İspat bitti

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Kompleks sayılar, kübik denklemleri çözme ihtiyacından ortaya çıkmıştır. 16. yüzyılın İtalyan matematikçilerinden G. Cardan (1501–1576) kompleks sayılar için $a+\sqrt{-b}$ ifadesini kullandı. Yine 16. yüzyılın İtalyan matematikçilerinden Rafael Bombelli (1526–1572) "piú di meno" diye nitelediği üç ciltten oluşan "l'Algebra" kitabında kompleks sayılardan bahsederken $\sqrt{-1}$ ifadesini kullandı. Fransız filozof René Descartes (1596-1650) uzaydaki bir noktayı, bir sayılar seti olarak işaretleyebilmeyi ve cebirsel denklemleri iki boyutlu koordinat sisteminde geometrik şekiller olarak göstermeyi sağlayan kartezyen koordinat sistemini geliştirdi. Ayrıca yazmış olduğu "La Géométrie" (1637) adlı kitabında ilk kez karmaşık sayılar için "imaginery" terimini kullanmış ve negatif bir sayının karekökünü "sanal" olarak nitelemiştir. Leonard Euler (1707–1783) ilk kez kompleks sayılar için $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$ ifadesini kullandı ve kompleks sayıları dik koordinat sisteminde nokta olarak gösterdi (Mandic ve Goh 2009, Wikipedia 2017). Daha sonra Euler

$$x+\mathbf{i}y=r(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)$$

formülünü kullandı ve $\mathbf{z}^n=1$ denkleminin köklerini normal bir çokgenin köşeleri olarak gösterdi. Ayrıca kompleks üstel tanımlayarak

$$e^{\mathbf{i}\theta}=\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta$$

özdeşliğini kanıtladı. Abraham de Moivre (1667–1754) kendi adıyla bilinen

$$(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+\mathbf{i}\sin(n\theta)$$

formülünü kullandı. Carl Friedrich Gauss (1789-1857), kompleks sayıları bir düzlem üzerindeki noktalar şeklinde düşünerek matematiğin "kompleks analiz" denilen dalının temellerini attı. 1837 yılında William R. Hamilton, Gauss'un çalışmalarını geliştirerek kompleks sayıları (x,y) koordinatları ile belirledi ve bu sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinin yolunu açtı (Mandic ve Goh 2009). Kompleks sayıların geometriye birçok uygulaması bulunmaktadır. Bunlarla ilgili bazı kaynaklar şunlardır: (Andreescu ve Andrica 2014, Deaux 1956, Yaglom 1968).

Bu tezde, Öklid uzayı ile kompleks sayılar arasındaki ilişkiye benzer şekilde, Lorentz uzayı ile ilişkili olan hiperbolik sayı sisteminin cebirsel yapısı üzerinde durulmuştur. Hiperbolik sayılar cebirsel ve geometrik yönleriyle incelenmiştir. Hiperbolik sayı kavramı 1848 de James Cockle ile birlikte kullanılmaya başlanmış, daha sonra William Kingdon Clifford tarafından kullanılmıştır (Cockle 1849). Özellikle son 30 yıl içinde bu konu üzerinde bir çok önemli çalışma yayımlanmıştır. Bunların en önemlilerinden biri, 1995 yılında Sobczyk, G. tarafından yazılan "Hyperbolic Number Plane" isimli makaledir ki, bu makalede hiperbolik sayılar, geometrik yorumlarıyla birlikte verilmiştir (Sobczyk 1995). Ayrıca, A.Harkin ve J. Harkin tarafından 2004 yılında yazılan "Geometry of Generalized Complex Numbers" isimli çalışma da bu konuda yapılan kapsamlı bir makaledir (Harkin 2004). Genelleştirilmiş trigonometri ve hiperbolik trigonometri bu çalışmada bulunabilir. Bu konuda yapılan en kapsamlı araştırmaları, 2008 yılında D. Boccaletti, E. Nichelatti,

F. Catoni, R. Cannata, V. Catoni ve P. Zampetti tarafından yazılan "The Mathematics of Minkowski Space-Time" adlı kitapta bulmakta mümkündür (Catoni vd 2008).

Bu tezde ikinci bölümde iki boyutlu genelleştirilmiş sayı sistemi başlığı altında iki boyutlu genelleştirilmiş sayı sistemleri incelenecek ve temel kavramlar verilecektir. Daha sonra iki boyutlu genelleştirilmiş sayı sistemlerinin bir alt kümesi olan ve tezin ana konusu olan hiperbolik sayıların temel cebirsel özellikleri verilecektir ve Clifford cebiri olarak, hiperbolik sayılar ayrıca ele alınacaktır. Üçüncü bölümde ise, hiperbolik sayıların sınıflandırılması ve buna bağlı olarak kutupsal, üstel ve matris gösterimleri üzerinde durulacaktır. Ayrıca bu bölümde, hiperbolik sayılar için De Moivre formülü verilerek, bir hiperbolik sayının kökleri incelencektir. Daha sonra hiperbolik sayıların Lorentziyen düzlem geometrisiyle ilişkisi incelenecek. Hiperbolik sayılarla, Lorentziyen dönme matrisleri arasındaki ilişki uygulamalarla birlikte verilecektir. Hiperbolik vektör modülü tanımlanarak, hiperbolik vektörler verilip, hiperbolik modül uzayında iç çarpım ve vektörel çarpım özellikleriyle birlikte verilecektir. Hiperbolik sayı matrisleri verilip, bir hiperbolik sayı matrisinin exponansiyeli tanımlanacak, ve elemanları hiperbolik sayı olan üniter matrisleri elde edilecektir. Son bölümde ise bu çalışmanın sonuçları özetlenecektir.

2. KURUMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. İki Boyutlu Genelleştirilmiş Sayı Sistemi

Hiperbolik sayılar iki boyutlu bir sayı sistemidir. Hiperbolik sayıları tanımlamadan evvel iki boyutlu genelleştirilmiş sayı sistemlerinden bahsedilecektir. Bu bölümde, iki boyutlu genelleştirilmiş sayı sistemleri ile bu iki boyutlu genelleştirilmiş sayı sistemlerinin cebirsel özellikleri incelenmiştir.

Tanım 2.1. $\mathbb{C}_{p,q} = \{\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y : x, y \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{i}q + p$ ve $q, p \in \mathbb{R}\}$ kümesi üzerinde sırasıyla eşitlik, toplama ve çarpma diye adlandırılan işlemler,

i. $x_1 + \mathbf{i}y_1 = x_2 + \mathbf{i}y_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2,$

ii. $+ : \mathbb{C}_{p,q} \times \mathbb{C}_{p,q} \to \mathbb{C}_{p,q}$

$(x_1 + \mathbf{i}y_1) + (x_2 + \mathbf{i}y_2) = x_1 + x_2 + \mathbf{i}(y_1 + y_2),$

iii. $\cdot : \mathbb{C}_{p,q} \times \mathbb{C}_{p,q} \to \mathbb{C}_{p,q}$

$(x_1 + \mathbf{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathbf{i}y_2) = x_1x_2 + py_1y_2 + \mathbf{i}(x_1y_2 + y_1x_2 + qy_1y_2)$

biçiminde tanımlanmış olsun. $\mathbb{C}_{p,q}$ kümesi, üzerindeki bu işlemlerle birlikte düşünüldüğünde $\mathbb{C}_{p,q}$ kümesine genelleştirilmiş kompleks sayılar kümesi denir (Catoni vd 2008).

Özel olarak,

$\mathbf{i}^2 = -1\ (q = 0,\ p = -1)$ için $\mathbb{C}_{p,q}$ kümesine karmaşık sayılar kümesi,

$\mathbf{i}^2 = 0\ (q = 0,\ p = 0)$ için $\mathbb{C}_{p,q}$ kümesine dual sayılar kümesi,

$\mathbf{i}^2 = 1\ (q = 0,\ p = 1)$ için $\mathbb{C}_{p,q}$ kümesine hiperbolik sayılar kümesi,

denir ve karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{-1,0}$ ile, dual sayılar kümesi $\mathbb{D} = \mathbb{C}_{0,0}$ ile, hiperbolik sayılar kümesi ise $\mathbb{P} = \mathbb{C}_{1,0}$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1983, Yaglom 1979).

Tanım 2.2. $\mathbf{z} = 1 + \mathbf{i}0 \in \mathbb{C}_{p,q}$ sayısına, $\mathbb{C}_{p,q}$ kümesinin birim elemanı denir.

Not. $\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}_{p,q}$ için $\mathbf{z}^{-1}$ her zaman yoktur (Catoni vd 2008). $\mathbf{z}^{-1}$ genelleştirilmiş kompleks sayısının tanımlı olması için gerek ve yeter koşul bulunabilir.

$\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y$ hiperbolik sayısının tersi $a + \mathbf{i}b$ olsun. O halde ters öge tanımından

$$(x + \mathbf{i}y)(a + \mathbf{i}b) = 1$$

olur. Buradan

$$\left\{\begin{array}{c} xa+pyb=1 \\ xb+ya+qyb=0 \end{array}\right.$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Bu iki denklemin a ve b 'ye göre bir tek çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. Yani

$$\begin{vmatrix} x & py \\ y & x+qy \end{vmatrix} = x^2-py^2+qxy \neq 0$$

olmalıdır.

Sonuç olarak $\mathbf{z}=x+\mathbf{i}y\in\mathbb{C}_{p,q}$ sayısının tersinin olması için gerek ve yeter koşul

$$x^2-py^2+qxy\neq 0$$

olmasıdır.

Teorem 2.3. *Herhangi bir $\mathbf{z}=x+\mathbf{i}y\in\mathbb{C}_{p,q}$ genelleştirilmiş kompleks sayısının çarpma işlemine göre tersi*

$$\mathbf{z}^{-1}=\frac{x+qy-\mathbf{i}y}{x^2-py^2+qxy}$$

şeklinde tanımlanır (Catoni vd 2008).

İspat. $\mathbf{z}=x+\mathbf{i}y\in\mathbb{C}_{p,q}$ genelleştirilmiş kompleks sayısının çarpma işlemine göre tersi $\mathbf{z}_1=x_1+\mathbf{i}y_1$ ise, $\mathbf{z}\cdot\mathbf{z}_1=1+\mathbf{i}0$ olması gerekir. Yani

$$(x+\mathbf{i}y)(x_1+\mathbf{i}y_1)=xx_1+pyy_1+\mathbf{i}(xy_1+yx_1+qyy_1)=1+\mathbf{i}0$$

olması gerekir. Buradan

$$\left\{\begin{array}{c} xx_1+pyy_1=1 \\ xy_1+yx_1+qyy_1=0 \end{array}\right.$$

olur. Cramer kuralı kullanılarak bu iki denklemin x_1 'e ve y_1 'e göre ortak çözümü yapılırsa

$$\begin{vmatrix} x & py \\ y & x+qy \end{vmatrix} = x^2-py^2+qxy \neq 0$$

olduğundan

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & py \\ 0 & x+qy \end{vmatrix}}{x^2-py^2+qxy}=\frac{x+qy}{x^2-py^2+qxy}$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix}}{x^2 - py^2 + qxy} = \frac{-y}{x^2 - py^2 + qxy}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1 &= \frac{x + qy}{x^2 - py^2 + qxy} - \mathbf{i}\frac{y}{x^2 - py^2 + qxy} \\ &= \frac{x + qy - \mathbf{i}y}{x^2 - py^2 + qxy}\end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Örnek. $\mathbb{C}_{0,1}$ *kümesinde* $\mathbf{z} = 1 + 2\mathbf{i}$ *genelleştirilmiş kompleks sayısının tersi nedir?*

Çözüm. $\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}_{p,q}$ için

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{x + qy - \mathbf{i}y}{x^2 - py^2 + qxy}$$

olduğundan $\mathbb{C}_{0,1}$ kümesinde $\mathbf{z} = 1 + 2\mathbf{i}$ sayısının tersi

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{1 + 1 \cdot 2 - 2\mathbf{i}}{1^2 - 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{3 - 2\mathbf{i}}{3}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.4. Herhangi bir $\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}_{p,q}$ genelleştirilmiş kompleks sayısının eşleniği $\overline{\mathbf{z}}$ ile gösterilir ve

$$\overline{\mathbf{z}} = x + qy - \mathbf{i}y$$

olarak tanımlanır (Catoni vd 2008).

Örnek. $\mathbb{C}_{0,-1}$ *kümesinde* $\mathbf{z} = 2 - \mathbf{i}$ *genelleştirilmiş kompleks sayısının eşleniği nedir?*

Çözüm. $\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}_{p,q}$ için

$$\overline{\mathbf{z}} = x + qy - \mathbf{i}y$$

olduğundan $\mathbb{C}_{0,-1}$ kümesinde $\mathbf{z} = 2 - \mathbf{i}$ genelleştirilmiş kompleks sayısının eşleniği

$$\overline{\mathbf{z}} = 2 + (-1) \cdot (-1) - \mathbf{i}\,(-1) = 3 + \mathbf{i}$$

olarak bulunur.

Önerme 2.5. *Her* $\mathbf{z},\mathbf{w}\in\mathbb{C}_{p,q}$ *için aşağıdakiler sağlanır (Catoni vd 2008).*

1. $\mathbf{z}\in\mathbb{C}_{p,q}$ *için* $\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}\in\mathbb{R}$ *'dir.*
2. $\mathbf{z}\in\mathbb{C}_{p,q}$ *için* $\overline{(\overline{\mathbf{z}})}=\mathbf{z}$ *'dir.*
3. $\mathbf{z},\mathbf{w}\in\mathbb{C}_{p,q}$ *için* $\overline{\mathbf{z}+\mathbf{w}}=\overline{\mathbf{z}}+\overline{\mathbf{w}}$ *'dir.*
4. $\mathbf{z},\mathbf{w}\in\mathbb{C}_{p,q}$ *için* $\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}}=\overline{\mathbf{z}}\cdot\overline{\mathbf{w}}$ *'dir.*
5. $\mathbf{z},\mathbf{w}\in\mathbb{C}_{p,q}$ *ve* $\mathbf{w}\neq 0$ *için* $\overline{\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}}\right)}=\frac{\overline{\mathbf{z}}}{\overline{\mathbf{w}}}$ *'dir.*

İspat. **1.** $\mathbf{z}=x+\mathbf{i}y\in\mathbb{C}_{p,q}$ için $\overline{\mathbf{z}}=x+qy-\mathbf{i}y$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}&=(x+\mathbf{i}y)(x+qy-\mathbf{i}y)\\&=x^2+qxy-\mathbf{i}xy+\mathbf{i}xy+\mathbf{i}qy^2-\mathbf{i}^2y^2\\&=x^2+qxy+\mathbf{i}qy^2-\mathbf{i}qy^2-py^2\\&=x^2-py^2+qxy\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2. $\mathbf{z}=x+\mathbf{i}y\in\mathbb{C}_{p,q}$ için $\overline{\mathbf{z}}=x+qy-\mathbf{i}y$ olduğundan

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{\mathbf{z}})}&=\overline{(x+qy-\mathbf{i}y)}=x+qy-qy-(-\mathbf{i}y)\\&=x+\mathbf{i}y\\&=\mathbf{z}\end{aligned}$$

olur.

3. $\mathbf{z}=x_1+\mathbf{i}y_1\in\mathbb{C}_{p,q}$ ve $\mathbf{w}=x_2+\mathbf{i}y_2\in\mathbb{C}_{p,q}$ için

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{z}+\mathbf{w}}&=\overline{(x_1+x_2+\mathbf{i}(y_1+y_2))}=x_1+x_2+q(y_1+y_2)-\mathbf{i}(y_1+y_2)\\&=x_1+qy_1-\mathbf{i}y_1+x_2+qy_2-\mathbf{i}y_2=\overline{\mathbf{z}}+\overline{\mathbf{w}}\end{aligned}$$

bulunur.

4. $\mathbf{z}=x_1+\mathbf{i}y_1\in\mathbb{C}_{p,q}$ ve $\mathbf{w}=x_2+\mathbf{i}y_2\in\mathbb{C}_{p,q}$ için

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}}&=\overline{((x_1+\mathbf{i}y_1)\cdot(x_2+\mathbf{i}y_2))}=\overline{x_1x_2+py_1y_2+\mathbf{i}(x_1y_2+y_1x_2+qy_1y_2)}\\&=x_1x_2+py_1y_2+q(x_1y_2+y_1x_2+qy_1y_2)-\mathbf{i}(x_1y_2+y_1x_2+qy_1y_2)\\\overline{\mathbf{z}}\cdot\overline{\mathbf{w}}&=(x_1+qy_1-\mathbf{i}y_1)\cdot(x_2+qy_2-\mathbf{i}y_2)\\&=x_1x_2+qx_1y_2-\mathbf{i}x_1y_2+qx_2y_1+q^2y_1y_2\\&-\mathbf{i}qy_1y_2-\mathbf{i}x_2y_1-\mathbf{i}qy_1y_2+\underbrace{\mathbf{i}^2}_{\mathbf{i}q+p}y_1y_2\\&=x_1x_2+py_1y_2+q(x_1y_2+y_1x_2+qy_1y_2)-\mathbf{i}(x_1y_2+y_1x_2+qy_1y_2)\end{aligned}$$

olduğundan $\overline{\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{z}}\cdot\overline{\mathbf{w}}$ olur.

5. $\mathbf{z} = x_1 + \mathbf{i}y_1 \in \mathbb{C}_{p,q}$ ve $\mathbf{w} = x_2 + \mathbf{i}y_2 \in \mathbb{C}_{p,q}$ ve $\mathbf{w} \neq 0$ için

$$\overline{\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}}\right)} = \overline{\left(\mathbf{z}\mathbf{w}^{-1}\right)} = \overline{\left((x_1 + \mathbf{i}y_1)\cdot\left(\frac{x_2 + qy_2 - \mathbf{i}y_2}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2}\right)\right)}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}\mathbf{w}^{-1} &= (x_1 + \mathbf{i}y_1)\cdot\left(\frac{x_2 + qy_2 - \mathbf{i}y_2}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2}\right)\\
&= \frac{x_1(x_2 + qy_2)}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2} - \frac{py_1y_2}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2}\\
&\quad + \mathbf{i}\left(-\frac{x_1y_2}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2} + \frac{y_1(x_2 + qy_2)}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2} - \frac{qy_1y_2}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2}\right)\\
&= \frac{x_1(x_2 + qy_2) - py_1y_2}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2} + \mathbf{i}\left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\mathbf{z}\mathbf{w}^{-1}\right)} &= \frac{x_1(x_2 + qy_2) - py_1y_2}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2} + \frac{q(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2} - \frac{\mathbf{i}(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2}\\
&= \frac{x_1x_2 - py_1y_2 + qy_1x_2}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2} - \frac{\mathbf{i}(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2}
\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{z}}\overline{\mathbf{w}}^{-1} &= (x_1 + qy_1 - \mathbf{i}y_1)(x_2 + qy_2 - \mathbf{i}y_2)^{-1}\\
&= (x_1 + qy_1 - \mathbf{i}y_1)\left(\frac{x_2 + \mathbf{i}y_2}{(x_2 + qy_2)^2 - py_2^2 - q(x_2 + qy_2)y_2}\right)\\
&= (x_1 + qy_1 - \mathbf{i}y_1)\frac{(x_2 + \mathbf{i}y_2)}{qx_2y_2 + x_2^2 - py_2^2}\\
&= \frac{(x_1 + qy_1)x_2}{qx_2y_2 + x_2^2 - py_2^2} - \frac{py_1y_2}{qx_2y_2 + x_2^2 - py_2^2}\\
&\quad + \mathbf{i}\left(\frac{(x_1 + qy_1)y_2}{qx_2y_2 + x_2^2 - py_2^2} - \frac{y_1x_2}{qx_2y_2 + x_2^2 - py_2^2} - \frac{qy_1y_2}{qx_2y_2 + x_2^2 - py_2^2}\right)\\
&= \frac{x_1x_2 + qy_1x_2 - py_1y_2}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2} + \frac{\mathbf{i}(x_1y_2 - y_1x_2)}{x_2^2 - py_2^2 + qx_2y_2}
\end{aligned}$$

olur. Bu iki ifade eşit olduğundan $\overline{\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}}\right)} = \frac{\overline{\mathbf{z}}}{\overline{\mathbf{w}}}$ bulunur. □

Tanım 2.6. Herhangi bir $\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}_{p,q}$ genelleştirilmiş kompleks sayısının normu

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{|\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}|} = \sqrt{|x^2 - py^2 + qxy|}$$

ile bulunur (Catoni vd 2008).

Örnek. $\mathbb{C}_{1,-1}$ *kümesinde* $\mathbf{z} = 2 - 3\mathbf{i}$ *genelleştirilmiş kompleks sayısının normu nedir?*

Çözüm. $\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}_{p,q}$ için

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{|x^2 - py^2 + qxy|}$$

olduğundan $\mathbf{z} = 2 - 3\mathbf{i}$ genelleştirilmiş kompleks sayısının normu

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\left|2^2 - 1 \cdot (-3)^2 + (-1) \cdot 2 \cdot (-3)\right|} = 1$$

olur.

Tanım 2.7. $\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}_{p,q}$ genelleştirilmiş kompleks sayısı için

$$D = x^2 - py^2 + qxy$$

ifadesine $\mathbf{z}$ genelleştirilmiş kompleks sayısının karakteristik determinantı denir (Catoni vd 2008).

Not. $D = x^2 - py^2 + qxy$ karakteristik determinantının işaretine göre, $\mathbf{z}$ genelleştirilmiş kompleks sayısına timelike, spacelike veya null denir.

i. $D = x^2 - py^2 + qxy = 0$ ise $\mathbf{z}$ genelleştirilmiş kompleks sayısına null,

ii. $D = x^2 - py^2 + qxy > 0$ ise $\mathbf{z}$ genelleştirilmiş kompleks sayısına spacelike,

iii. $D = x^2 - py^2 + qxy < 0$ ise $\mathbf{z}$ genelleştirilmiş kompleks sayısına timelike denir.

Özel durumlarda,

$\mathbf{i}^2 = -1\ (q = 0,\ p = -1)$ için $D = \mathbf{z}\overline{\mathbf{z}} = x^2 + y^2 > 0$ olduğundan $\mathbb{C}_{-1,0} = \mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesinin elemanları spacelike olur. Benzer şekilde $\mathbf{i}^2 = 0\ (q = 0,\ p = 0)$ için $D = \mathbf{z}\overline{\mathbf{z}} = x^2 > 0$ olduğundan $\mathbb{C}_{0,0} = \mathbb{D}$ dual sayılar kümesinin elemanları da spacelike olur. Fakat $\mathbf{i}^2 = 1\ (q = 0,\ p = 1)$ için $D = \mathbf{z}\overline{\mathbf{z}} = x^2 - y^2$ olduğundan $\mathbb{C}_{1,0} = \mathbb{P}$ hiperbolik sayılar kümesinin elemanları timelike, spacelike veya null olabilir.

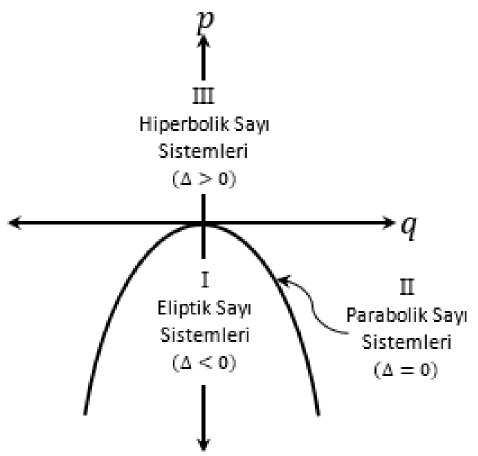
$\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}_{p,q}$ genelleştirilmiş kompleks sayısının karakteristik determinantı

$$D = x^2 - py^2 + qxy$$

için diskriminant

$$\Delta = q^2 + 4p$$

olduğundan, Şekil 2.1 'de $\Delta = q^2 + 4p = 0$ alarak (q, p) düzleminde $p = -\dfrac{q^2}{4}$ parabolü gösterilmiştir. Bu düzlemdeki $p = -\dfrac{q^2}{4}$ parabolünün I diye adlandırılan iç bölgesi$(\Delta < 0)$ eliptik sayı sistemlerini, II diye adlandırılan parabolün üzerindeki noktalar kümesi$(\Delta = 0)$ parabolik sayı sistemlerini, III diye adlandırılan parabolün dış bölgesi$(\Delta > 0)$ ise hiperbolik sayı sistemlerini oluşturmaktadır.



Şekil 2.1. İki boyutlu genelleştirilmiş sayı sistemi

Ayrıca, $\Delta = 0$ durumunda tersi olmayan elemanlar

$$\frac{x}{y} = -\frac{q}{2} \Rightarrow x = -\frac{qy}{2}$$

eşitliğini sağlayan $x + \mathbf{i}y$ genelleştirilmiş kompleks sayılarıdır.

$\Delta > 0$ durumunda ise tersi olmayan elemanlar

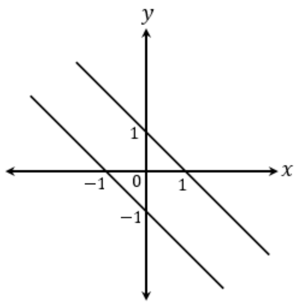
$$x = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p}}{2} y$$

veya

$$x = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p}}{2} y$$

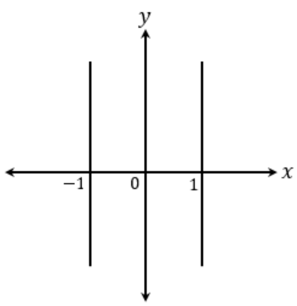
eşitliğini sağlayan $x + \mathbf{i}y$ genelleştirilmiş kompleks sayılarıdır. Genelleştirilmiş kompleks sayılarda birim çemberler $|x^2 - py^2 + qxy| = 1$ olarak tanımlanır.

Örnek. $\mathbb{C}_{-1,2} = \{x + \mathbf{i}y : \ \mathbf{i}^2 = 2\mathbf{i} - 1, \ x, y \in \mathbb{R}\}$ *kümesi bir parabolik sayı kümesidir. Bu kümede tersi olmayan elemanlar* $x - \mathbf{i}x$ *formundaki genelleştirilmiş kompleks sayılardır. Ayrıca* $\mathbb{C}_{-1,2}$ *kümesinde birim çember* $|x^2 + y^2 + 2xy| = 1$ *'dır. Birim çemberin grafiği ise Şekil 2.2 'de gösterilmiştir.*



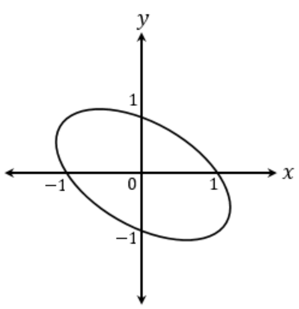
Şekil 2.2. $\mathbb{C}_{-1,2}$ kümesinde birim çember

Örnek. $\mathbb{C}_{0,0} = \{x + \mathbf{i}y : \ \mathbf{i}^2 = 0, \ x, y \in \mathbb{R}\}$ *sayılar kümesine dual sayılar kümesi denir. Bu kümede tersi olmayan elemanlar* $0 + \mathbf{i}y$ *formundaki genelleştirilmiş kompleks sayılardır. Bu küme parabolik sayı kümesidir. Bu kümede birim çember* $|x^2| = 1$ *şeklindedir ve birim çemberin grafiği Şekil 2.3 'te gösterilmiştir.*



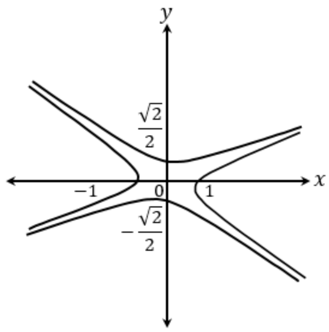
Şekil 2.3. $\mathbb{C}_{0,0}$ kümesinde birim çember

Örnek. $\mathbb{C}_{-1,1} = \{x + \mathbf{i}y : \ \mathbf{i}^2 = \mathbf{i} - 1, \ x, y \in \mathbb{R}\}$ *sayılar kümesi bir eliptik sayı kümesidir. Çünkü* $q^2 + 4p < 0$ *'dır. Bu kümede her elemanın tersi vardır. Bu kümede birim çember* $|x^2 + y^2 + xy| = 1$ *şeklindedir ve birim çemberin grafiği Şekil 2.4 'de gösterilmiştir.*



Şekil 2.4. $\mathbb{C}_{-1,1}$ kümesinde birim çember

Örnek. $\mathbb{C}_{2,-1} = \{x + \mathbf{i}y : \ \mathbf{i}^2 = -\mathbf{i} + 2, \ x, y \in \mathbb{R}\}$ *sayılar kümesi* $q^2 + 4p < 0$ *olduğundan bir hiperbolik sayı kümesidir. Bu kümede tersi olmayan elemanlar* $2x + \mathbf{i}x$ *veya* $4x + \mathbf{i}x$ *formundaki genelleştirilmiş kompleks sayılardır. Birim çemberin denklemi* $|x^2 - 2y^2 - xy| = 1$ *ile verilir.*



Şekil 2.5. $\mathbb{C}_{2,-1}$ kümesinde birim çember

şeklindeki hiperboldür. $y = \dfrac{x}{2}$ ve $y = \dfrac{x}{4}$ doğruları asimptottur yani bu kümede tersi olmayan elemanlar asimptotlar üzerindeki noktalardır.

Teorem 2.8. $\mathbb{C}_{p,q} = \{\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y : x, y \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{i}q + p$ *ve* $q, p \in \mathbb{R}\}$ *genelleştirilmiş kompleks sayı kümesinin cisim olması için gerek ve yeter koşul* $q^2 + 4p < 0$ *olmasıdır.*

İspat. $(\Rightarrow)$: $\mathbb{C}_{p,q}$ cisim olsun $q^2 + 4p < 0$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathbb{C}_{p,q}$ cisim olduğundan $\mathbb{C}_{p,q}$ kümesinde sıfırdan farklı her elemanın tersi vardır. O halde

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{x + qy - \mathbf{i}y}{x^2 - py^2 + qxy}$$

olduğundan

$$x^2 - py^2 + qxy \neq 0$$

olur. Sıfırdan farklı her $\mathbf{z} = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}_{p,q}$ için $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olduğundan

$$x^2 - py^2 + qxy = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + q\left(\frac{x}{y}\right) - p \neq 0$$

olur. Buradan da

$$\Delta = q^2 + 4p < 0$$

bulunur.

$(\Leftarrow)$: $q^2 + 4p < 0$ olsun $(\mathbb{C}_{p,q}, +, \cdot)$ üçlüsünün bir cisim olduğu gösterilebilir.

C_1 : Toplama işleminin tanımından kapalılık özelliği görülebilir.

C_2 : Toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

Gerçekten her $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{i}y_1$, $\mathbf{y} = x_2 + \mathbf{i}y_2$, $\mathbf{z} = x_3 + \mathbf{i}y_3$ için

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \mathbf{z} &= [(x_1 + \mathbf{i}y_1) + (x_2 + \mathbf{i}y_2)] + (x_3 + \mathbf{i}y_3)\\ &= [(x_1 + x_2) + \mathbf{i}\,(y_1 + y_2)] + (x_3 + \mathbf{i}y_3)\\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + \mathbf{i}\,(y_1 + y_2 + y_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + (\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= (x_1 + \mathbf{i}y_1) + [(x_2 + \mathbf{i}y_2) + (x_3 + \mathbf{i}y_3)]\\ &= (x_1 + \mathbf{i}y_1) + [(x_2 + x_3) + \mathbf{i}\,(y_2 + y_3)]\\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + \mathbf{i}\,(y_1 + y_2 + y_3)\end{aligned}$$

eşit olduklarından $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y}+\mathbf{z})$ olur.

C_3 : Toplama işlemine göre $\mathbb{C}_{p,q}$ 'de bir $\mathbf{0}$ etkisiz elemanı vardır. Gerçekten her $\mathbf{x} \in \mathbb{C}_{p,q}$ için

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{0}$ etkisiz elemanına $\mathbf{0} = a + \mathbf{i}b$ denirse tanımdan yararlanarak bir tek

$$a = 0 \; ve \; b = 0; \;\; \mathbf{0} = (0,0) \in \mathbb{C}_{p,q}$$

etkisiz elemanı elde edilir.

C_4 : Toplama işlemine göre her $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{i}x_2 \in \mathbb{C}_{p,q}$ için

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

olacak şekilde bir tek $\mathbf{y} \in \mathbb{C}_{p,q}$ ters elemanı vardır. Gerçekten toplama ve eşitlik tanımından $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{i}x_2 \in \mathbb{C}_{p,q}$ için

$$\mathbf{y} = -x_1 - \mathbf{i}x_2 \in \mathbb{C}_{p,q}$$

olduğu görülür.

C_5 : Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}_{p,q}$ için toplama ve eşitlik tanımı kullanılarak

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

olduğu kolayca görülür. Bu yüzden $(\mathbb{C}_{p,q}, +)$ ikilisi aynı zamanda bir abel grubudur.

C_6 : Çarpma işlemi $\cdot : \mathbb{C}_{p,q} \times \mathbb{C}_{p,q} \to \mathbb{C}_{p,q}$ şeklinde tanımlandığından $\cdot$ işlemine göre $\mathbb{C}_{p,q}$ kümesi kapalıdır.

C_7 : Her $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{i}y_1, \mathbf{y} = x_2 + \mathbf{i}y_2, \mathbf{z} = x_3 + \mathbf{i}y_3 \in \mathbb{C}_{p,q}$ için

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= \left[(x_1 + \mathbf{i}y_1)(x_2 + \mathbf{i}y_2)\right](x_3 + \mathbf{i}y_3) \\
&= \left[x_1x_2 + py_1y_2 + \mathbf{i}(x_1y_2 + y_1x_2 + qy_1y_2)\right](x_3 + \mathbf{i}y_3) \\
&= x_1x_2x_3 + py_1y_2x_3 + px_1y_2y_3 + py_1x_2y_3 + pqy_1y_2y_3 \\
&+ \mathbf{i}(x_1x_2y_3 + py_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + qy_1y_2x_3 \\
&+ qx_1y_2y_3 + qy_1x_2y_3 + q^2y_1y_2y_3) \\
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) &= (x_1 + \mathbf{i}y_1)\left[(x_2 + \mathbf{i}y_2)(x_3 + \mathbf{i}y_3)\right] \\
&= (x_1 + \mathbf{i}y_1)\left[x_2x_3 + py_2y_3 + \mathbf{i}(x_2y_3 + y_2x_3 + qy_2y_3)\right] \\
&= x_1x_2x_3 + px_1y_2y_3 + py_1x_2y_3 + py_1y_2x_3 + pqy_1y_2y_3 \\
&+ \mathbf{i}(x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + qx_1y_2y_3 + y_1x_2x_3 + py_1y_2y_3 \\
&+ qy_1x_2y_3 + qy_1y_2x_3 + q^2y_1y_2y_3)
\end{aligned}$$

olur ve bu iki ifade eşit olduklarından $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$ elde edilir.

C_8 : Her $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{i}y_1, \mathbf{y} = x_2 + \mathbf{i}y_2, \mathbf{z} = x_3 + \mathbf{i}y_3 \in \mathbb{C}_{p,q}$ için

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= \left[(x_1 + \mathbf{i}y_1) + (x_2 + \mathbf{i}y_2)\right](x_3 + \mathbf{i}y_3) \\
&= (x_1 + x_2 + \mathbf{i}(y_1 + y_2))(x_3 + \mathbf{i}y_3) \\
&= x_1x_3 + x_2x_3 + py_1y_3 + py_2y_3 \\
&+ \mathbf{i}(x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 + y_2x_3 + qy_1y_3 + qy_2y_3) \\
&= \left[x_1x_3 + py_1y_3 + \mathbf{i}(x_1y_3 + y_1x_3 + qy_1y_3)\right] \\
&+ \left[x_2x_3 + py_2y_3 + \mathbf{i}(x_2y_3 + y_2x_3 + qy_2y_3)\right] \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (x_1 + \mathbf{i}y_1)\left[(x_2 + \mathbf{i}y_2) + (x_3 + \mathbf{i}y_3)\right] \\
&= (x_1 + \mathbf{i}y_1)(x_2 + x_3 + \mathbf{i}(y_2 + y_3)) \\
&= x_1x_2 + x_1x_3 + py_1y_2 + py_1y_3 \\
&+ \mathbf{i}(x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3 + qy_1y_2 + qy_1y_3) \\
&= \left[x_1x_2 + py_1y_2 + \mathbf{i}(x_1y_2 + y_1x_2 + qy_1y_2)\right] \\
&+ \left[x_1x_3 + py_1y_3 + \mathbf{i}(x_1y_3 + y_1x_3 + qy_1y_3)\right] \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

O halde $(\mathbb{C}_{p,q}, +, \cdot)$ üçlüsü bir halkadır.

C_9 : Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}_{p,q}$ için çarpma ve eşitlik tanımı gereğince $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ olduğundan $(\mathbb{C}_{p,q}, +, \cdot)$ halkası bir değişmeli halkadır.

C_{10} : Çarpma işlemi için $1+\mathbf{i}0$ bir etkisiz elemandır. Gerçekten çarpma tanımından her $\mathbf{x}\in\mathbb{C}_{p,q}$ için

$$(1+\mathbf{i}0)\,\mathbf{x}=\mathbf{x}\,(1+\mathbf{i}0)=\mathbf{x}$$

olur. O halde $(\mathbb{C}_{p,q},+,\cdot)$ halkası bir birimli halkadır.

Buradan $(\mathbb{C}_{p,q},+,\cdot)$ üçlüsü bir birimli ve değişmeli halkadır.

C_{11} : Sıfırdan farklı keyfi $\mathbf{x}=x_1+\mathbf{i}y_1\in\mathbb{C}_{p,q}$ için $\mathbf{y}=x_2+\mathbf{i}y_2\in\mathbb{C}_{p,q}$ vardır öyle ki $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=1+\mathbf{i}0$ 'dır.

$\mathbf{x}=x_1+\mathbf{i}y_1$ ve $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ olduğundan $x_1\neq 0$ ve $y_1\neq 0$ 'dır. O halde

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=(x_1+\mathbf{i}y_1)\,(x_2+\mathbf{i}y_2)=x_1x_2+py_1y_2+\mathbf{i}\,(x_1y_2+y_1x_2+qy_1y_2)=1+\mathbf{i}0$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} x_1x_2+py_1y_2=1 \\ x_1y_2+y_1x_2+qy_1y_2=0 \end{cases}$$

bulunur. Cramer kuralı kullanılarak bu iki denklemin x_2 'e ve y_2 'e göre ortak çözümü yapılırsa

$$\begin{vmatrix} x_1 & py_1 \\ y_1 & x_1+qy_1 \end{vmatrix}=x_1^2-py_1^2+qx_1y_1=\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2+q\left(\frac{x_1}{y_1}\right)-p$$

ve $q^2+4p<0$ olduğundan $x_1^2-py_1^2+qx_1y_1=\left(\dfrac{x_1}{y_1}\right)^2+q\left(\dfrac{x_1}{y_1}\right)-p\neq 0$ olur. Böylece

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & py_1 \\ 0 & x_1+qy_1 \end{vmatrix}}{x_1^2-py_1^2+qx_1y_1}=\frac{x_1+qy_1}{x_1^2-py_1^2+qx_1y_1}$$

$$y_2=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ y_1 & 0 \end{vmatrix}}{x_1^2-py_1^2+qx_1y_1}=\frac{-y_1}{x_1^2-py_1^2+qx_1y_1}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\mathbf{y}&=\frac{x_1+qy_1}{x_1^2-py_1^2+qx_1y_1}-\mathbf{i}\frac{y_1}{x_1^2-py_1^2+qx_1y_1}\\&=\frac{x_1+qy_1-\mathbf{i}y_1}{x_1^2-py_1^2+qx_1y_1}\in\mathbb{C}_{p,q}\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $(\mathbb{C}_{p,q},+,\cdot)$ üçlüsü bir cisimdir. □

2.2. Hiperbolik Sayılar

Hiperbolik sayı olarak adlandırılan sayılar çeşitli kaynaklarda "perplex sayı", "spacetime sayı", "split karmaşık sayı" veya "double sayı" olarak adlandırılır (Borota vd 2000, Fjelstad 1986, Kisil 2013, Poodiack ve LeClair 2009, Rochon ve Shapiro 2004, Şimşek ve Özdemir 2016, Yaglom 1968).

Split karmaşık sayılar ilk kez James Cockle' nın 1848 yılındaki çalışmasında kullanılmıştır. Daha sonra Willam Kingdom Clifford split karmaşık sayıları çalışmalarında kullanmıştır (Wikipedia 2017).

1995 'de G. Sobczyk yaptığı çalışmada Hiperbolik sayılar için modül, iç-çarpım, matris gösterimi ve grafikleri hakkında bilgi sundu. Hiperbolik sayıların hiperbolik fonksiyonlar yardımıyla gösteriminin ifadesini yaptı (Sobczyk 1995).

2000 'de N. Borota ve T. Osler, spacetime sayı olarak adlandırdıkları, hiperbolik sayıların özelliklerini vermişler ve 2002'de hiperbolik sayı değişkenli fonksiyonları incelemişlerdir (Borota vd 2000, Borota ve Osler 2002).

2004 'de F. Catoni, R. Cannata, V. Catoni, P. Zampetti yaptıkları çalışmada Hiperbolik sayılarla Lorentzian trigonometriyi incelediler (Catoni vd 2004).

2008 'de D. Boccaletti, E. Nichelatti, F. Catoni, R. Cannata, V. Catoni ve P. Zampetti yazdıkları kitapta Hiperbolik sayılar hakkında geniş bilgi sundular. Hiperbolik sayılar ile ilgili bilgi çalışmalarında da verilmektedir (Catoni vd 2008).

2009 'da R. Poodiack ve K. Leclair, hiperbolik sayıların bazı cebirsel özelliklerini vererek, cebirin temel teoremlerini hiperbolik sayılar için kanıtlamışlar ve hiperbolik sayı değişkenli polinomların köklerini incelemişlerdir (Poodiack ve LeClair 2009).

Hiperbolik sayıların matematiksel analizi, fiziksel uygulamaları ve farklı lineer cebir uygulamaları da son yıllarda gelişen alanlardan biridir. Bunlarla ilgili çalışmalardan bazıları şunlardır: (Bracken ve Hayes 2002, Callahan 2000, Catoni vd 2005, 2011, Catoni ve Zampetti 2012, Erdoğdu ve Özdemir 2016, Fjelstad 1986, Khrennikov 2003, Khrennikov ve Segre 2005, Khrennikov 2008, Kisil 2013, Motter ve Rosa 1998).

2.2.1. Hiperbolik sayıların cebirsel özellikleri

Bu kısımda hiperbolik sayılar ile ilgili temel kavramlar verilip, hiperbolik sayıların cebirsel ve geometrik özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 2.9. $\mathbb{P} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\}$ sıralı çiftlerinin kümesi üzerinde sırasıyla eşitlik, toplama ve çarpma diye adlandırılan işlemler,

i. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2,$

ii. $+ : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,

iii. $\cdot : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

biçiminde tanımlanmış olsun. $\mathbb{P}$ kümesi, üzerindeki bu işlemlerle birlikte düşünüldüğünde $\mathbb{P}$ kümesine hiperbolik sayılar kümesi denir.

Teorem 2.10. $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ *üçlüsü birimli ve değişmeli halkadır.*

İspat. H_1 : Toplama işlemi $+ : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ şeklinde tanımlandığından $\mathbb{P}$ kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

H_2 : Toplama işleminin birleşme özelliği vardır. Gerçekten her $\mathbf{x} = (x_1, y_1) \in \mathbb{P}$, $\mathbf{y} = (x_2, y_2) \in \mathbb{P}$, $\mathbf{z} = (x_3, y_3) \in \mathbb{P}$ için

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} &= [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) \\ &= [(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)] + (x_3, y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)\end{aligned}$$

eşit olduklarından $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ 'dir.

H_3 : Toplama işlemine göre $\mathbb{P}$ 'de bir $\mathbf{0}$ etkisiz elemanı vardır. Gerçekten her $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ için

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{0}$ etkisiz elemanına $\mathbf{0} = (a, b)$ denirse tanımdan yararlanarak bir tek

$$a = 0 \; ve \; b = 0; \; \mathbf{0} = (0, 0) \in \mathbb{P}$$

etkisiz elemanı elde edilir.

H_4 : Toplama işlemine göre her $\mathbf{x} = (x_1, y_1) \in \mathbb{P}$ için

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

olacak şekilde bir tek $\mathbf{y} \in \mathbb{P}$ ters elemanı vardır. Gerçekten toplama ve eşitlik tanımından

$\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ için

$$\mathbf{y} = (-x_1, -y_1) \in \mathbb{P}$$

olduğu görülür.

H_5 : Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ için toplama ve eşitlik tanımı kullanılarak

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

olduğu kolayca görülür. Bu yüzden $(\mathbb{P}, +)$ ikilisi aynı zamanda bir abel grubudur.

H_6 : Çarpma işlemi $\cdot : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ şeklinde tanımlandığından $\cdot$ işlemine göre $\mathbb{P}$ kümesi kapalıdır.

H_7 : Her $\mathbf{x} = (x_1, y_1) \in \mathbb{P}$, $\mathbf{y} = (x_2, y_2) \in \mathbb{P}$, $\mathbf{z} = (x_3, y_3) \in \mathbb{P}$ için

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= [(x_1, y_1)(x_2, y_2)](x_3, y_3) \\
&= (x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)(x_3, y_3) \\
&= (x_1x_2x_3 + y_1y_2x_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3, \\
&\quad x_1x_2y_3 + y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3) \\
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) &= (x_1, y_1)[(x_2, y_2)(x_3, y_3)] \\
&= (x_1, y_1)(x_2x_3 + y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) \\
&= (x_1x_2x_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3, \\
&\quad x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + y_1y_2y_3)
\end{aligned}$$

olur ve bu iki ifade eşit olduklarından $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$ elde edilir.

H_8 : Her $\mathbf{x} = (x_1, y_1) \in \mathbb{P}$, $\mathbf{y} = (x_2, y_2) \in \mathbb{P}$, $\mathbf{z} = (x_3, y_3) \in \mathbb{P}$ için

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)](x_3, y_3) \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)(x_3, y_3) \\
&= (x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_3 + y_2y_3, x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 + y_2x_3) \\
&= (x_1x_3 + y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) + (x_2x_3 + y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (x_1, y_1)[(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] \\
&= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3) \\
&= (x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 + y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

O halde $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ üçlüsü bir halkadır.

H_9 : Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ için çarpma ve eşitlik tanımı gereğince $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ olduğundan $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ halkası bir değişmeli halkadır.

H_{10} : Çarpma işlemi için $(1, 0)$ elemanı bir etkisiz elemandır. Gerçekten çarpma tanımından her $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ için

$$(1,0)\,\mathbf{x} = \mathbf{x}\,(1,0) = \mathbf{x}$$

olur. O halde $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ halkası bir birimli halkadır.

Buradan $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ üçlüsü bir birimli ve değişmeli halkadır. □

Teorem 2.11. $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ *üçlüsü bir cisim değildir.*

İspat. Eğer $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ üçlüsü bir cisim ise, sıfırdan farklı her $\mathbf{x} = (x_1, y_1) \in \mathbb{P}$ için

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = (1,0)$$

olacak şekilde $\mathbf{y} = (x_2, y_2) \in \mathbb{P}$ olması gerekir. Şimdi $\mathbf{x} = (x_1, x_1) \in \mathbb{P}$ için böyle $\mathbf{y} = (x_2, y_2) \in \mathbb{P}$ olmadığını gösterelim. Kabul edelim ki $\mathbf{x} = (x_1, x_1) \in \mathbb{P}$ için böyle bir $\mathbf{y} = (x_2, y_2) \in \mathbb{P}$ olsun.

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, x_1)\,(x_2, y_2) = (x_1x_2 + x_1y_2, x_1y_2 + x_1x_2) = (1, 0)$ eşitliğinden

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_1y_2 = 1 \\ x_1y_2 + x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

yazılır bu ise bir çelişkidir. O halde $\mathbf{y} = (x_2, y_2) \in \mathbb{P}$ yoktur.

Dolayısıyla $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ üçlüsü bir cisim değildir.

Hiperbolik sayılar kümesi $\mathbb{R}[x] \,/ < x^2 - 1 >$ bölüm halkasına izomorftur. □

Teorem 2.12. $\mathbb{P}$ *hiperbolik sayılar halkası* $\mathbb{R}$ *reel sayılar cismine izomorf bir alt kümeyi alt cisim olarak kapsar.*

İspat. $\mathbb{P}_1 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}$ olsun. Öncelikle $(\mathbb{P}_1, +, \cdot)$ üçlüsünün bir cisim olduğunu gösterilmelidir.

$C_1 : + : \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ her $\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{P}_1$, $\mathbf{y} = (x_2, 0) \in \mathbb{P}_1$ için

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in \mathbb{P}_1$ kapalıdır.

C_2 : Her $\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{P}_1$, $\mathbf{y} = (x_2, 0) \in \mathbb{P}_1$, $\mathbf{z} = (x_3, 0) \in \mathbb{P}_1$ için

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} &= [(x_1,0)+(x_2,0)]+(x_3,0)\\ &= (x_1+x_2,0)+(x_3,0)\\ &= (x_1+x_2+x_3,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= (x_1,0)+[(x_2,0)+(x_3,0)]\\ &= (x_1,0)+(x_2+x_3,0)\\ &= (x_1+x_2+x_3,0)\end{aligned}$$

eşit olduklarından $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ 'dir.

C_3 : Toplama işlemine göre her $\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{P}_1$ için

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

olacak şekilde bir tek $\mathbf{y} \in \mathbb{P}_1$ ters elemanı vardır. Gerçekten toplama ve eşitlik tanımından $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_1$ için

$$\mathbf{y} = (-x_1, 0) \in \mathbb{P}_1$$

olduğu görülür.

C_4 : Toplama işlemine göre $\mathbb{P}_1$ 'de bir $\mathbf{0}$ etkisiz elemanı vardır. Gerçekten her $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_1$ için

$$\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{0}$ etkisiz elemanına $\mathbf{0} = (a, 0)$ denirse tanımdan yararlanarak bir tek

$$a = 0\ ;\ \mathbf{0} = (0,0) \in \mathbb{P}_1$$

etkisiz elemanı elde edilir.

C_5 : Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}_1$ için toplama ve eşitlik tanımı kullanılarak

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$$

olduğu kolayca görülür.

C_6 : $\cdot : \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ her $\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{P}_1$, $\mathbf{y} = (x_2, 0) \in \mathbb{P}_1$ için

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \in \mathbb{P}_1$ kapalıdır.

C_7 : Her $\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{P}_1$, $\mathbf{y} = (x_2, 0) \in \mathbb{P}_1$, $\mathbf{z} = (x_3, 0) \in \mathbb{P}_1$ için

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= [(x_1, 0)\,(x_2, 0)]\,(x_3, 0) \\
&= (x_1 x_2, 0)\,(x_3, 0) \\
&= (x_1 x_2 x_3, 0) \\
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) &= (x_1, 0)\,[(x_2, 0)\,(x_3, 0)] \\
&= (x_1, 0)\,(x_2 x_3, 0) \\
&= (x_1 x_2 x_3, 0)
\end{aligned}$$

iki ifade eşit olduklarından $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$ ’dir.

C_8 : Her $\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{P}_1$, $\mathbf{y} = (x_2, 0) \in \mathbb{P}_1$, $\mathbf{z} = (x_3, 0) \in \mathbb{P}_1$ için

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= [(x_1, 0) + (x_2, 0)]\,(x_3, 0) \\
&= (x_1 + x_2, 0)\,(x_3, 0) \\
&= (x_1 x_3 + x_2 x_3, 0) \\
\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} &= [(x_1, 0)\,(x_3, 0)] + [(x_2, 0)\,(x_3, 0)] \\
&= (x_1 x_3, 0) + (x_2 x_3, 0) \\
&= (x_1 x_3 + x_2 x_3, 0)
\end{aligned}$$

olduğundan $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (x_1, 0)\,[(x_2, 0) + (x_3, 0)] \\
&= (x_1, 0)\,(x_2 + x_3, 0) \\
&= (x_1 x_2 + x_1 x_3, 0) \\
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} &= [(x_1, 0)\,(x_2, 0)] + [(x_1, 0)\,(x_3, 0)] \\
&= (x_1 x_2, 0) + (x_1 x_3, 0) \\
&= (x_1 x_2 + x_1 x_3, 0)
\end{aligned}$$

$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$ olduğu görülür.

O halde $(\mathbb{P}_1, +, \cdot)$ üçlüsü bir halkadır.

C_9 : Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}_1$ için çarpma ve eşitlik tanımı gereğince $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ olduğundan $(\mathbb{P}_1, +, \cdot)$ halkası bir değişmeli halkadır.

C_{10} : Çarpma işlemi için $(1, 0)$ bir etkisiz elemandır. Gerçekten çarpma tanımından her $\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{P}_1$ için

$$(1, 0)\,\mathbf{x} = (1, 0)\,(x_1, 0) = (1 \cdot x_1, 0) = (x_1, 0) = \mathbf{x}$$

olur.

Buradan $(\mathbb{P}_1, +, \cdot)$ üçlüsü bir birimli ve değişmeli halkadır.

C_{11} : Sıfırdan farklı keyfi $\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{P}_1$ için $\mathbf{y} = (x_2, 0) \in \mathbb{P}_1$ vardır öyle ki, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (1, 0)$ olur.

$\mathbf{x} = (x_1, 0)$ ve $\mathbf{x} \neq (0, 0)$ olduğundan $x_1 \neq 0$ 'dır.

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (1, 0) \Rightarrow (x_1, 0)(x_2, 0) = (1, 0) \Rightarrow (x_1 x_2, 0) = (1, 0)$

$\Rightarrow x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{x_2}$ bulunur. $x^{-1} = \left(\dfrac{1}{x_2}, 0\right) \in \mathbb{P}_1$ elde edilir.

Buradan $(\mathbb{P}_1, +, \cdot)$ üçlüsü bir cisimdir.

O halde $\mathbb{P}_1$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye bir f fonksiyonu tanımlayarak f 'nin bir izomorfizm olduğu gösterilebilir.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{R} \\ f(a) &= a \end{aligned}$$

olsun. f 'nin lineer olduğu açıktır.

$\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{P}_1$ ve $\mathbf{y} = (x_2, 0) \in \mathbb{P}_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f((x_1, 0) + (x_2, 0)) \\ &= f((x_1 + x_2, 0)) = x_1 + x_2 \\ &= f((x_1, 0)) + f((x_2, 0)) \\ &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{xy}) &= f((x_1, 0)(x_2, 0)) \\ &= f((x_1 x_2, 0)) = x_1 x_2 \\ &= f((x_1, 0)) f((x_2, 0)) \\ &= f(\mathbf{x}) f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

f birebirdir:

$\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{P}_1$ ve $\mathbf{y} = (x_2, 0) \in \mathbb{P}_1$ olsun. $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ için $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$ olur. Gerçekten,

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow (x_1, 0) \neq (x_2, 0) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

$$\Rightarrow f((x_1, 0)) \neq f((x_2, 0)) \Rightarrow f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$$

olur. Buradan f 'nin birebir olduğu görülür.

f örtendir:

Her $x_1 \in \mathbb{R}$ için $x_1 = f(x)$ olacak şekilde $\mathbf{x} \in \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{R}$ vardır. $\mathbf{x} = (x_1, 0)$ olarak seçilirse $f((x_1, 0)) = x_1$ olur. Buradan f bir lineer izomorfizmdir.

O halde $\mathbb{P}$ hiperbolik sayılar halkası $\mathbb{R}$ reel sayılar cismine izomorf bir alt kümeyi alt cisim olarak kapsar. $\square$

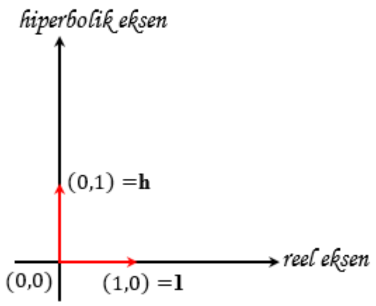
Sonuç 2.13. *f fonksiyonu bir izomorfizm olduğundan, $(x, 0) \in \mathbb{P}$ hiperbolik sayısı, izomorfu olan "x" reel sayısı ile gösterilebilir.*

Tanım 2.14. Bir $\mathbf{z} = (x, y) \in \mathbb{P}$ hiperbolik sayısında x reel sayısına $\mathbf{z}$ 'nin reel kısmı, y reel sayısına ise $\mathbf{z}$ 'nin hiperbolik kısmı denir ve $Re(\mathbf{z}) = x$, Hip$(\mathbf{z}) = y$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.15. $(0, 1)$ hiperbolik sayısı $\mathbf{h}$ ile gösterilecektir yani; $(0, 1) = \mathbf{h}$ alınacak ve hiperbolik birim olarak adlandırılacaktır.

Sonuç 2.16. $\mathrm{h}^2 = 1$ *'dir.*

İspat. $\mathbf{h}^2 = \mathbf{hh} = (0, 1)(0, 1) = (0 + 1, 0 + 0) = (1, 0) = 1$ elde edilir. $\square$



Şekil 2.6. Hiperbolik düzlem

Teorem 2.17. *Bir $\mathbf{z} = (x, y) \in \mathbb{P}$ hiperbolik sayısı $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ şeklinde tek türlü yazılabilir yani; $(x, y) = x + \mathbf{h}y$ 'ye eşittir.*

İspat. $\mathbf{z} = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + \mathbf{h}y$ elde edilir. $\square$

O halde, $\mathbb{P}$ hiperbolik sayılar kümesi $\mathbb{P} = \{\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y : x, y \in \mathbb{R}, \mathbf{h}^2 = 1\}$ şeklinde tanımlanabilir. $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{h}y_1 \in \mathbb{P}$, $\mathbf{y} = x_2 + \mathbf{h}y_2 \in \mathbb{P}$ için sırasıyla eşitlik, toplama ve çarpma işlemleri

i. $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_1 + \mathbf{h}y_1 = x_2 + \mathbf{h}y_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$,

ii. $+ : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$

$(x_1 + \mathbf{h}y_1) + (x_2 + \mathbf{h}y_2) = x_1 + x_2 + \mathbf{h}(y_1 + y_2)$,

iii. $\cdot : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$

$(x_1 + \mathbf{h}y_1) \cdot (x_2 + \mathbf{h}y_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + \mathbf{h}\,(x_1y_2 + y_1x_2)$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.18. Herhangi bir $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y \in \mathbb{P}$ hiperbolik sayısı için, $x - \mathbf{h}y \in \mathbb{P}$ hiperbolik sayısına, $\mathbf{z}$ sayısının eşleniği denir ve $\overline{\mathbf{z}}$ ile gösterilir. $\mathbf{z}$ ve $\overline{\mathbf{z}}$ sayıları x-eksenine göre simetriktir (Sobczyk 1995).

Önerme 2.19.

i. $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ *ise* $\overline{\mathbf{x}}$ *'nin eşleniği* $\mathbf{x}$ *'dir. Yani* $\overline{(\overline{\mathbf{x}})} = \mathbf{x}$ *'dir.*

ii. *Her* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ *için* $\overline{\mathbf{x} + \mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}$ *'dir.*

iii. *Her* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ *için* $\overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}}$ *'dir ve* $\mathbf{y} \neq 0$ *olmak üzere* $\overline{\left(\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right)} = \dfrac{\overline{\mathbf{x}}}{\overline{\mathbf{y}}}$ *'dir.*

iv. *Her* $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ *için* $\mathbf{x}\overline{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|^2$ *'dir.*

v. $\mathbf{x} + \overline{\mathbf{x}} = 2\,\mathrm{Re}\,(\mathbf{x})\,,\ \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}} = 2\mathrm{Hip}(\mathbf{x})$ *ve* $\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}$ *ise* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ *'dir.*

Tanım 2.20. Herhangi bir $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y \in \mathbb{P}$ hiperbolik sayısının modülü(mutlak değeri),

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

şeklinde tanımlanır (Borota vd 2000, Sobczyk 1995).

Tanım 2.21. Herhangi bir $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y \in \mathbb{P}$ hiperbolik sayısının tersi, $x^2 - y^2 \neq 0$ durumunda tanımlıdır ve

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{z}}}{|\mathbf{z}|^2}$$

ile bulunur (Borota vd 2000, Sobczyk 1995).

Örnek. $\mathbf{z} = 2 + 3\mathbf{h}$ *sayısının tersi nedir?*

Çözüm. $\mathbf{z}^{-1} = \dfrac{\overline{\mathbf{z}}}{|\mathbf{z}|^2}$ eşitliğinden,

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{2 - 3\mathbf{h}}{4 - 9} = \frac{-2}{5} + \frac{3}{5}\mathbf{h}$$

bulunur.

2.2.2. Clifford cebiri olarak hiperbolik sayılar

Kompleks sayılar cismi, kuaterniyonlar halkası, split kuaterniyonlar halkası ve matrisler cebiri gibi önemli sayı kümelerinin her biri, bir Clifford cebiridir. Bunun yanında, hiperbolik sayılar halkası da bir clifford cebiridir. Bu kısımda hiperbolik sayıların hangi Clifford cebirine izomorf olduğu gösterilecektir. Bunun için öncelikle, Clifford cebirinin temel özellikleri ve oluşturulması verilecektir.

Bilineer form

Tanım 2.22. $\mathbb{V}$, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere,

$$B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathcal{F}$$

dönüşümü, her $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$ ve $\lambda \in \mathcal{F}$ için

i. $B(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

ii. $B(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{x}, \mathbf{z})$

iii. $B(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \lambda B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

özelliklerini sağlıyorsa B dönüşümüne bilineer form denir. Herhangi bir bilineer form $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathcal{F})$ olmak üzere, her $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ için

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{y} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ için $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ise B 'ye simetrik bilineer form, $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -B(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ise B 'ye ters simetrik bilineer form denir.

Tanım 2.23. $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathcal{F}$ bilineer formuna,

i. Sıfırdan farklı her $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ için $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ ise pozitif tanımlı bilineer form

ii. Sıfırdan farklı her $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ için $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$ ise negatif tanımlı bilineer form

iii. Sıfırdan farklı her $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ için $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ olması $\mathbf{y} = 0$ olmasını gerektiriyorsa yani bir başka deyişle sıfırdan farklı her vektöre dik olan tek vektör sıfır vektörü ise B 'ye nondegenere bilineer form denir.

Örnek. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ *olsun ve* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *olmak üzere*

$$B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1y_1 - x_2y_2$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bilineer formdur ve

$$B_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^t A \mathbf{y}$$

şeklinde yazılabilir. Burada A matrisi simetrik olduğundan B_2 dönüşümü de simetriktir ve her $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$B_2(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 < 0$$

olduğundan B_2 negatif tanımlı bilineer formdur.

Örnek. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ *olsun ve* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *olmak üzere*

$$B_3(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bilineer formdur ve

$$B_3(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^t A \mathbf{y}$$

şeklinde yazılabilir. Burada A matrisi simetrik olduğundan B_3 dönüşümü de simetriktir ve her $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$B_3(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 < 0$$

olduğundan B_3 ne pozitif ne de negatif tanımlıdır.

Kuadratik form

Tanım 2.24. $\mathbb{V}$ bir vektör uzayı ve $\mathcal{F}$ bir cisim olmak üzere $Q : \mathbb{V} \to \mathcal{F}$ dönüşümü, her $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ ve $\lambda \in \mathcal{F}$ için

$$Q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x})$$

eşitliğini sağlıyorsa Q dönüşümüne kuadratik form denir.

Örnek. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ *olsun ve* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, *olmak üzere*

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm kuadratik formdur. Gerçekten, her $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} Q(\lambda \mathbf{x}) &= (\lambda x_1)^2 - 2(\lambda x_1)(\lambda x_2) + (\lambda x_2)^2 \\ &= \lambda^2 \left(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2\right) = \lambda^2 Q(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

olur.

Bir kuadratik formu, bir bilineer form yardımıyla tanımlamak mümkündür. Buna göre,

$$B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathcal{F}$$

bir simetrik bilineer form olmak üzere

$$Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

şeklinde tanımlanan $Q : \mathbb{V} \to \mathcal{F}$ dönüşümü bir B bilineer form yardımıyla elde edilen kuadratik formdur. Tersine bir kuadratik form verildiğinde, bu kuadratik form kullanılarak bir bilineer form elde edilebilir. $Q : \mathbb{V} \to \mathcal{F}$ bir kuadratik form olmak üzere

$$B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})\right)$$

şeklinde tanımlanan

$$B_Q : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathcal{F}$$

dönüşümü Q kuadratik formuyla elde edilen bilineer formdur.

Örnek. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ *olsun ve* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *olmak üzere*

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

şeklinde tanımlanan bilineer form yardımıyla üretilen kuadratik form

$$Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$$

olur.

Örnek. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ *olsun.* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *ve* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ *olmak üzere*

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1 x_2$$

şeklinde tanımlanan kuadratik form tarafindan üretilen bilineer form,

$$\begin{aligned} B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2}\left(Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[(x_1+y_1)^2 + 2(x_2+y_2)^2 + 3(x_3+y_3)^2 + 2(x_1+y_1)(x_2+y_2)\right. \\ &\left. - \left(x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2\right) - \left(y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 + 2y_1y_2\right)\right] \\ &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 \end{aligned}$$

olarak bulunur ve

$$B_Q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^t A \mathbf{y}$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 2.25. Bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde $\mathbb{V}$ vektör uzayı verilsin.

$$\bullet : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$$

ikili işlemi, her $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$ ve $\lambda \in \mathcal{F}$ için

i. $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$; (birleşme)

ii. $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$;

$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$; (dağılma)

iii. $\lambda (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda \mathbf{x}) \mathbf{y} = \mathbf{x} (\lambda \mathbf{y})$ (skalerle çarpma)

özellikleri sağlıyorsa, bu işlemle birlikte $\mathbb{V}$ 'ye $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir cebir denir (Erdoğdu 2013).

Açıklama 2.26. *Bazı kaynaklarda birleşme özelliği cebir tanımına dahil edilmemiştir. Birleşme özelliğini sağlayan cebirler ise birleşmeli cebir olarak adlandırılmıştır.*

Örnek. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ *vektörel çarpma işlemiyle birlikte bir cebirdir.*

Örnek. $\mathbb{V} = \mathbb{H}$ *kuaterniyonlar, kuaterniyon çarpımıyla birlikte bir cebirdir.*

Tanım 2.27. Bir Q kuadratik formuyla donatılmış bir $\mathbb{V}$ vektör uzayı tarafından, her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ için

$$\mathbf{y}^2 = Q(\mathbf{y}) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 2B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanarak üretilen (birleşmeli) cebire Clifford cebiri denir ve $C\ell(\mathbb{V}, Q)$ ile gösterilir. Ayrıca (2.2) eşitliği temel Clifford özdeşliği olarak adlandırılır (Aragón vd 1997, Erdoğdu 2013, Lundholm ve Svensson 2009).

$\mathbb{V}$, n boyutlu bir vektör uzayı ve $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ $\mathbb{V}$ 'nin bir tabanı ise $C\ell(\mathbb{V}, Q)$ cebiri

$$\{1\} \cup \{\mathbf{e}_{i_1} \cdot \mathbf{e}_{i_2} \cdot ... \cdot \mathbf{e}_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$$

kümesi tarafından üretilir ve $boy\,(C\ell(\mathbb{V}, Q)) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ 'dir.

Örnek. *Bir Q kuadratik formuyla donatılmış bir $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ vektör uzayı için $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bir taban olmak üzere, $C\ell\,(\mathbb{V}, Q)$ Clifford cebiri*

$$\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}$$

kümesi tarafından üretilir ve boy $(C\ell\,(\mathbb{V}, Q)) = 2^3$ 'tür.

Açıklama 2.28. *Bir Q nondegenere kuadratik formuyla donatılmış bir $\mathbb{V}$ vektör uzayı için*

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$$

bir ortogonal taban ise $i \neq j$ için $B_Q\,(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ olacaktır. Bu durumda temel Clifford özdeşliği

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 0, \ \ (i \neq j)$$

olur.

Örnek. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$*, olmak üzere* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$*, için*

$$Q\,(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

şeklinde tanımlanan bir kuadratik form olsun. Bu kuadratik form ile donatılmış $\mathbb{R}^2$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebirini bulalım.

Çözüm. $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0)\,, \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ $\mathbb{R}^2$ 'nin bir ortogonal tabanı olmak üzere $C\ell\,(\mathbb{R}^2, Q)$

$$\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$$

kümesi tarafından (2.1) ve (2.2) özelliklerini kullanarak üretilir. O halde

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1^2 &= Q\,((1, 0)) = 1 \\
\mathbf{e}_2^2 &= Q\,((0, 1)) = 1 \\
\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 &= 2B_Q\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\
&= Q\,(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - Q\,(\mathbf{e}_1) - Q\,(\mathbf{e}_2) \\
&= Q\,((1, 1)) - Q\,((1, 0)) - Q\,((0, 1)) \\
&= 1 + 1 + 1 - 1 - 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve birleşme özelliğini kullanarak aşağıdaki çarpım tablosu üretilebilir.

Yani, $C\ell\left(\mathbb{R}^2, Q\right)$ cebiri

$\bullet$	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$1-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	1	$\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	1

işlem tablosu ile üretilen birleşmeli cebirdir ve

$$\begin{aligned} C\ell\left(\mathbb{R}^2, Q\right) = \{ & a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 : \ a_i \in \mathbb{R} \ (i = 0,1,2,3), \\ & \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 1 \} \end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir. $boy\left(C\ell\left(\mathbb{R}^2, Q\right)\right) = 2^2 = 4$ 'tür. Ayrıca bu cebir nondegenere değildir. Gerçekten, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2}\left(Q\left((x_1+y_1, x_2+y_2)\right) - Q\left((x_1,x_2)\right) - Q\left((y_1,y_2)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((x_1+y_1)^2 + (x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_2+y_2)^2\right. \\ & \left. -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - y_1^2 - y_1y_2 - y_2^2\right) \\ &= x_1\left(y_1 + \frac{y_2}{2}\right) + x_2\left(\frac{y_1}{2} - y_2\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sıfırdan farklı her $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için $B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ olsun. Bu durum

$$\mathbf{y} = \left(\frac{4}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_1, \frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2\right) \neq 0$$

iken sağlandığından, bu cebir nondegenere değildir.

Nondegenere kuadratik formlar

$p+q$ boyutlu reel vektör uzayında $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, ...x_p, x_{p+1}, ..., x_{p+q}\right)$ olmak üzere

$$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - ... - x_p^2 + x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + ... + x_{p+q}^2$$

bir nondegenere kuadratik formdur. Burada (p, q) ikilisine kuadratik formun işareti denir. Bu kuadratik form ile birlikte reel vektör uzayı $\mathbb{R}_p^{p+q}$ ile gösterilir. Bu vektör uzayının ürettiği Clifford cebiri ise

$$C\ell\left(\mathbb{R}_p^{p+q}, Q\right) = C\ell_{p.q}\left(\mathbb{R}_p^{p+q}\right) = C\ell\left(\mathbb{R}_p^{p+q}\right)$$

ile gösterilebilir. Bu şekildeki kuadratik formlar için

$$B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1y_1 - x_2y_2 - ... - x_py_p + x_{p+1}y_{p+1} + ... + x_{p+q}y_{p+q}$$

olur ve $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_{p+q}\}$ $\mathbb{R}^{p+q}$ için bir ortogonal taban olmak üzere

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 2B_Q(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0; (i \neq j) \text{ için}$$

olur. Böylece $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_{p+q}\}$ ortogonal tabanına ve (p, q) işaretine sahip $\mathbb{R}_p^{p+q}$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiri

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^2 &= -1; \ \ (i = 1, 2, ..., p) \\ \mathbf{e}_j^2 &= 1; \ \ (j = p+1, ..., p+q) \\ \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i &= 0; (i \neq j) \end{aligned}$$

bağıntılarını sağlayan birleşmeli cebirdir (Aragón vd 1997, Kisil 2010, Miller 2013).

Örnek. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^5$ *ve* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ *için*

$$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$$

kuadratik formu $(2, 3)$ *işaretine sahiptir. Bu kuadratik form ile birlikte reel vektör uzayı* $\mathbb{R}_2^5$ *ile gösterilir ve*

$$B_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5$$

olur. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$, $\mathbb{R}_2^5$ *için bir ortogonal taban olmak üzere,* $\mathbb{R}_2^5$ *vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiri*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^2 &= -1; \ \ (i = 1, 2) \\ \mathbf{e}_j^2 &= 1; \ \ (j = 3, 4, 5) \\ \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i &= 0; (i \neq j) \end{aligned}$$

bağıntılarını sağlayan birleşmeli cebirdir.

En önemli Clifford cebirleri

En önemli Clifford cebirleri, nondegenere kuadratik formlarla donatılmış reel ve kompleks vektör uzayları tarafından üretilen Clifford cebirleridir.

1. Kompleks Sayılar : $C\ell_{1,0}(\mathbb{R}_1^1)$, $\mathbf{x} = x_1 \in \mathbb{R}$ için

$$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2$$

kuadratik formuyla donatılmış $\mathbb{V} = \mathbb{R}$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiridir. $\{1, \mathbf{e}_1\}$ kümesi ile

$$\mathbf{e}_1^2 = Q(\mathbf{e}_1) = -1$$

şeklinde tanımlanarak üretilir. Böylece

$$C\ell_{1,0}\left(\mathbb{R}_1^1\right)=\left\{\mathbf{z}=a+\mathbf{e}_1 b:\ a,b\in\mathbb{R},\ \mathbf{e}_1^2=-1\right\}\cong\mathbb{C}$$

olur.

2. Hiperbolik Sayılar : $C\ell_{0,1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x}=x_1\in\mathbb{R}$ için

$$Q(\mathbf{x})=x_1^2$$

kuadratik formuyla donatılmış $\mathbb{V}=\mathbb{R}$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiridir. $\{1,\mathbf{e}_1\}$ kümesi ile

$$\mathbf{e}_1^2=Q(\mathbf{e}_1)=1$$

şeklinde tanımlanarak üretilir. Böylece

$$C\ell_{0,1}(\mathbb{R})=\left\{\mathbf{z}=a+\mathbf{e}_1 b:\ a,b\in\mathbb{R},\ \mathbf{e}_1^2=1\right\}\cong\mathbb{P}$$

olur. Bu cebir $\mathbb{P}$ hiperbolik sayılar cebirini temsil etmektedir. Genellikle $\mathbf{e}_1=\mathbf{h}$ veya $\mathbf{e}_1=\mathbf{j}$ ile gösterilir (Ulrych 2008).

3. 2×2 Matris Cebiri : $C\ell_{0,2}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ için

$$Q(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2$$

kuadratik formuyla donatılmış $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiridir. $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ 'nin ortogonal tabanı olmak üzere, $\{1,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$ kümesi tarafından

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1^2&=Q(\mathbf{e}_1)=1\\ \mathbf{e}_2^2&=Q(\mathbf{e}_2)=1\\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1&=0\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanarak üretilir. Birleşme özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2&=\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2\\&=\mathbf{e}_1(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2\\&=-\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2\\&=-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2\\&(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1=(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1=-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^2=-\mathbf{e}_2\\&\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_2(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)=-\mathbf{e}_2^2\mathbf{e}_1=-\mathbf{e}_1\\&(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^2=\mathbf{e}_1\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $C\ell_{0,2}(\mathbb{R}^2)$ Clifford cebiri

$\bullet$	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

işlem tablosu ile üretilen birleşmeli cebirdir ve

$$\begin{aligned}C\ell_{0,2}\left(\mathbb{R}^2\right) = \{&a + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 : \ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1,\\ &(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = -1,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0\}\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca

$$1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

eşleşmeleriyle $C\ell_{0,2}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ olur.

4. Kuaterniyonlar : $C\ell_{2,0}(\mathbb{R}^2_2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2$$

kuadratik formuyla donatılmış $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiridir. Bu cebir, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ 'nin ortogonal tabanı olmak üzere, $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$ kümesi tarafından

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1^2 &= Q(\mathbf{e}_1) = -1\\ \mathbf{e}_2^2 &= Q(\mathbf{e}_2) = -1\\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 &= 0\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanarak üretilir. Birleşme özelliğinden faydalanarak

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 &= \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2\\ &= \mathbf{e}_1(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2\\ &= -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2\\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\\ &(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 = (-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2\\ &\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2^2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\\ &(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^2 = -\mathbf{e}_1\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda $C\ell_{2,0}\left(\mathbb{R}_2^2\right)$ Clifford cebiri

$\bullet$	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	-1	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	-1

işlem tablosu ile üretilen birleşmeli cebirdir ve

$$\begin{aligned} C\ell_{2,0}\left(\mathbb{R}_2^2\right) = \{ & a + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 : \ a,b,c,d \in \mathbb{R}, \\ & \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right)^2 = -1,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0 \big\} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bunun yanında

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\to \mathbf{i} \\ \mathbf{e}_2 &\to \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &\to \mathbf{k} \end{aligned}$$

eşleşmeleriyle $C\ell_{2,0}\left(\mathbb{R}_2^2\right) \cong \mathbb{H}$ 'dur. Burada $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar cebirini göstermektedir.

5. Split Kuaterniyonlar : $C\ell_{1,1}\left(\mathbb{R}_1^2\right)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 + x_2^2$$

kuadratik formuyla donatılmış $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiridir. Bu cebir, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ 'nin ortogonal tabanı olmak üzere, $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$ kümesi tarafından

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 &= Q(\mathbf{e}_1) = -1 \\ \mathbf{e}_2^2 &= Q(\mathbf{e}_2) = 1 \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanarak üretilir. Birleşme özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right)^2 &= \mathbf{e}_1\left(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\right)\mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{e}_1\left(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right)\mathbf{e}_2 \\ &= -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_1\left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right) = \mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \\ & \left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right)\mathbf{e}_1 = \left(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\right)\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2 \\ & \mathbf{e}_2\left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right) = \mathbf{e}_2\left(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\right) = -\mathbf{e}_2^2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \\ & \left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $C\ell_{1,1}\left(\mathbb{R}_1^2\right)$ Clifford cebiri

$\bullet$	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	1

işlem tablosu ile üretilen birleşmeli cebirdir ve

$$\begin{aligned} C\ell_{1,1}\left(\mathbb{R}_1^2\right) = \big\{ & a + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 : \ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}_1^2 = -1, \\ & \mathbf{e}_2^2 = \left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right)^2 = 1,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0 \big\} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\to \mathbf{i}, \\ \mathbf{e}_2 &\to \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &\to \mathbf{k} \end{aligned}$$

eşleşmeleriyle $C\ell_{1,1}\left(\mathbb{R}_1^2\right) \cong \widehat{\mathbb{H}}$ olur. Burada $\widehat{\mathbb{H}}$ split kuaterniyonlar cebirini temsil etmektedir (Özdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.29. $C\ell\left(\mathbb{V}, Q\right)$ cebirinin çift çarpımlı üreteçleri de bir cebir oluşturur. Bu cebire $C\ell\left(\mathbb{V}, Q\right)$ 'nun çift alt cebiri denir ve $C\ell^{+}\left(\mathbb{V}, Q\right)$ ile gösterilir.

Örnek. $C\ell_{3,0}\left(\mathbb{R}^3\right)$, $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{R}^3$ *için*

$$Q\left(\mathbf{x}\right) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

kuadratik formuyla donatılmış $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ *vektör uzayı tarafından üretilen Clifford cebiridir. Bu cebir,* $\left\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\right\}$ $\mathbb{R}^3$ *'ün ortogonal tabanı olmak üzere,*

$$\left\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\right\}$$

kümesi tarafından üretilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 &= Q\left(\mathbf{e}_1\right) = -1 \\ \mathbf{e}_2^2 &= Q\left(\mathbf{e}_2\right) = -1 \\ \mathbf{e}_3^2 &= Q\left(\mathbf{e}_3\right) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 &= 0 \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 &= 0 \\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri ve birleşme özelliğini kullanarak

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)^2 = (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 = -1$$

olduğu görülür.

$$\{1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}$$

kümesi ile üretilen cebir, $C\ell_{3,0}(\mathbb{R}^3)$ *Clifford cebirinin bir alt cebiridir. ve bu küme de yine kuaterniyonlar kümesine izomorftur. Bu cebir,* $C\ell^+_{3,0}(\mathbb{R}^3)$ *ile gösterilir ve*

$$C\ell^+_{3,0}\left(\mathbb{R}^3\right) = \big\{a + b\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 : \ (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = -1, \\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3\}$$

şeklinde ifade edilir. $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \to \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \to \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \to \mathbf{k}$ *izomorfzimi ile* $C\ell^+_{3,0}(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H}$ *olur.*

Hiperbolik cayılar ve Clifford cebiri

Sonuç olarak, hiperbolik sayılar kümesi,

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2$$

kuadratik formuyla donatılmış $\mathbb{V} = \mathbb{R}$ vektör uzayı tarafından üretilen

$$C\ell_{0,1}(\mathbb{R}) = \big\{\mathbf{z} = a + \mathbf{e}_1 b : \ a, b \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}_1^2 = 1\big\}$$

Clifford cebirine izomorftur. Ayrıca, hiperbolik sayılar kümesi,

$$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 + x_1^2$$

kuadratik formuyla donatılmış $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ vektör uzayı tarafından üretilen,

$$C\ell_{1,1}\left(\mathbb{R}^2_1\right) = \big\{a + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 : \ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}_1^2 = -1, \\ \mathbf{e}_2^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = 1,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0\big\}$$

split kuaterniyonlar cebirinin bir alt cebiridir. Yani,

$$C\ell^+_{1,1}\left(\mathbb{R}^2_1\right) = \big\{a + b\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 : \ (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = 1,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0,\ a, b \in \mathbb{R}\big\}$$

cebirine izomorftur. O halde,

$$\mathbb{P} \cong C\ell_{0,1}(\mathbb{R}) \cong C\ell^+_{1,1}\left(\mathbb{R}^2_1\right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Hiperbolik Sayıların Sınıflandırılması

3.1.1. Hiperbolik sayılar kümesinde iç çarpım

Tanım 3.1. Hiperbolik sayılar kümesinde iç çarpım $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{P}$ için,

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle &: \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{R} \\ \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle &= |\mathbf{z}|\,|\mathbf{w}| \cosh\theta = \operatorname{Re}(\overline{\mathbf{z}}\mathbf{w}) = \operatorname{Re}(\mathbf{z}\overline{\mathbf{w}}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\mathbf{z} = z_1 + \mathbf{h}z_2 \text{ ve } \mathbf{w} = w_1 + \mathbf{h}w_2$$

ise

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = w_1 z_1 - w_2 z_2$$

ve

$$\cosh\theta = \frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{z}|\,|\mathbf{w}|} = \frac{\operatorname{Re}(\overline{\mathbf{z}}\mathbf{w})}{|\mathbf{z}|\,|\mathbf{w}|} = \frac{w_1 z_1 - w_2 z_2}{\sqrt{z_1^2 - z_2^2}\sqrt{w_1^2 - w_2^2}}$$

olur. Bu tanımın pozitif tanımlı olmadığı açıktır, dolayısıyla da bu çarpım bir Öklid iç çarpımı değildir. Fakat bu çarpım nondegenere, simetrik bilineer formdur ve Lorentz düzlemindeki skaler çarpım olarak bilinir ve Lorentz iç çarpımı denilir.

Tanım 3.2. $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{P}$ için,

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \operatorname{Re}(\overline{\mathbf{z}}\mathbf{w}) = \operatorname{Re}(\mathbf{z}\overline{\mathbf{w}}) = 0$$

ise, bu sayılara ortoganaldir denir ve $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}$ ile gösterilir.

3.1.2. Hiperbolik sayıların karakterizasyonu

Tanım 3.3. Hiperbolik sayılar kümesinde tanımlanan skaler çarpımın pozitif tanımlı olmaması, hiperbolik sayıları sınıflandırmamızı gerektirecektir. Buna göre,

$$\mathbf{z} = a + \mathbf{h}b$$

hiperbolik sayısını aşağıdaki sağladığı koşullara göre, spacelike, timelike veya null olarak adlandırılacaktır (Borota vd 2000).

$$\begin{cases} \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \overline{\mathbf{z}}\mathbf{z} > 0 & \text{ise, Spacelike hiperbolik sayı} \\ \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \overline{\mathbf{z}}\mathbf{z} < 0 & \text{ise, Timelike hiperbolik sayı} \\ \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \overline{\mathbf{z}}\mathbf{z} = 0 & \text{ise, Null veya Lightlike hiperbolik sayı} \end{cases}$$

Hiperbolik sayılara split(bölünmüş) kompleks sayı denilmesinin nedeni de bu parçalanıştır. Bu ifade,

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \overline{\mathbf{z}}\mathbf{z} = a^2 - b^2$$

olacağından, daha kısa ifade edilebilir.

$$\begin{cases} |a| > |b| & \text{ise Spacelike hiperbolik sayı} \\ |a| < |b| & \text{ise Timelike hiperbolik sayı} \\ a = \pm b & \text{ise Null veya Lightlike hiperbolik sayı} \end{cases}$$

Görüldüğü gibi, null hiperbolik sayıların tersi yoktur.

Teorem 3.4. *Hiperbolik düzlemde, iki ortogonal hiperbolik sayıdan biri timelike ise, diğeri ise spacelike olur.*

İspat. $\mathbf{z} = a + \mathbf{h}b$ timelike olsun. Bu durumda, $|a| < |b|$ olur. $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}$ olacak şekilde bir $\mathbf{w} = x + \mathbf{h}y$ sayısını göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\mathrm{Re}\left(\overline{\mathbf{z}}\mathbf{w}\right) = \mathrm{Re}\left(a - \mathbf{h}b\right)\left(x + \mathbf{h}y\right) = \mathrm{Re}\left(ax - by\right) = 0$$

ise, $ax = by$ eşitliğinden,

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{|y|}{|x|} < 1$$

elde edilir. $\mathbf{w} = x + \mathbf{h}y$ sayısında, $|y| < |x|$ olması, $\mathbf{w}$ sayısının spacelike olduğunu gösterir. □

Teorem 3.5. *Herhangi iki hiperbolik sayının çarpımı, hiperbolik sayının karekterine göre aşağıdaki şekilde olur (Borota vd 2000).*

Çarpma	***Spacelike***	***Timelike***	***Lightlike***
Spacelike	*Spacelike*	*Timelike*	*Lightlike*
Timelike	*Timelike*	*Spacelike*	*Lightlike*
Lightlike	*Lightlike*	*Lightlike*	*Lightlike*

İspat. $\mathbf{z}_1 = a_1 + \mathbf{h}b_1$ ve $\mathbf{z}_2 = a_2 + \mathbf{h}b_2$ iki hiperbolik sayı olsun.

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + \mathbf{h}\left(a_1b_2 + a_2b_1\right)$$

çarpımında,

$$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 - (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = \left(a_2^2 - b_2^2\right)\left(a_1^2 - b_1^2\right)$$

olduğundan, $\mathbf{z}_1$ veya $\mathbf{z}_2$ sayılarından herhangi birinin lightlike olması durumunda, $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2$ sayısının da lightlike olacağı açıktır. Diğer yandan, $\mathbf{z}_1$ veya $\mathbf{z}_2$ sayılarından sadece biri timelike ise, $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2$ timelike, aksi halde yani, ikisinin de timelike veya spacelike olması durumunda, $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2$ çarpımı spacelike olacaktır. □

3.1.3. Hiperbolik sayının pozitif veya negatif olması

$\mathbf{z} = a + \mathbf{h}b$ bir hiperbolik sayı olmak üzere,

$$\varepsilon(\mathbf{z}) = sgn(a + b)$$

işaretine bağlı olarak, $\mathbf{z}$ sayısına pozitif veya negatiftir denir. $a + b > 0$ ise $\mathbf{z}$ pozitif, $a + b < 0$ ise negatiftir. Yani,

$$\varepsilon(\mathbf{z}) = \begin{cases} +1 & a + b > 0 \\ -1 & a + b < 0 \\ 0 & a + b = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir 2015). Bu tanıma göre, hiperbolik düzlemde,

$$y = -x$$

doğrusu üzerinde bulunan tüm hiperbolik sayıların işareti sıfırdır. $\mathbf{z} = a - a\mathbf{h}$ formundaki sayılar, hiperbolik sayılar kümesinde sıfıra eşdeğer kabul edilir. Literatürde, $\mathbf{z}$ pozitif sayısının pozitif olması, Lorentz uzayında future pointing (geleceğe yönelmiş), negatif olması ise past pointing (geçmişe yönelmiş) olarak tanımlanmaktadır (Ergin 1989). Örneğin,

$\mathbf{z} = -2 + 3\mathbf{h}$, pozitif bir timelike hiperbolik sayı,

$\mathbf{z} = -4 + 3\mathbf{h}$, negatif bir spacelike hiperbolik sayı,

$\mathbf{z} = 2 + 2\mathbf{h}$, pozitif bir null hiperbolik sayı,

$\mathbf{z} = 2 - 2\mathbf{h}$, işaretsiz, yani 0 'a eşdeğer bir null hiperbolik sayıdır.

Teorem 3.6. *İki hiperbolik sayının çarpımının işareti, hiperbolik sayılarının işaretlerinin çarpımına eşittir. Yani,* $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{P}$ *için,*

$$\varepsilon(\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2) = \varepsilon(\mathbf{z}_1)\,\varepsilon(\mathbf{z}_2)$$

eşitliği sağlanır (Özdemir 2015).

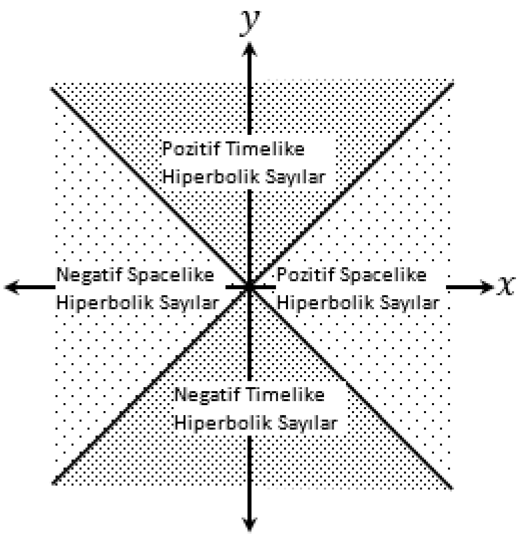
İspat. $\mathbf{z}_1 = a_1 + \mathbf{h}b_1$ ve $\mathbf{z}_2 = a_2 + \mathbf{h}b_2$ hiperbolik sayıları için,

$$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (a_1 + \mathbf{h}b_1)(a_2 + \mathbf{h}b_2) = (a_1a_2 + b_1b_2) + \mathbf{h}(a_1b_2 + a_2b_1)$$

ifadesinde,

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2) &= sgn(a_1a_2 + b_1b_2 + a_1b_2 + a_2b_1)\\ &= sgn((a_2 + b_2)(a_1 + b_1))\\ &= sgn(a_2 + b_2)\, sgn(a_1 + b_1)\\ &= \varepsilon(\mathbf{z}_1)\,\varepsilon(\mathbf{z}_2)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, çarpılan sayılardan biri $y = -x$ doğrusu üzerinde bulunan, sıfıra eşdeğer bir hiperbolik sayı ise, çarpım da, $y = -x$ doğrusu üzerinde bulunan sıfıra eşdeğer bir hiperbolik sayı olacaktır. □



Şekil 3.1. Pozitif, negatif hiperbolik sayılar

Lemma 3.7. *Pozitif bir hiperbolik sayının tersi de, pozitiftir.*

İspat. $\mathbf{z} = a + \mathbf{h}b > 0$ ise $a + b > 0$ olacaktır.

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{z}}}{|\mathbf{z}|^2} = \frac{a - \mathbf{h}b}{a^2 - b^2} = \frac{a}{a^2 - b^2} - \frac{\mathbf{h}b}{a^2 - b^2}$$

olduğundan,

$$\frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{-b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a + b} > 0$$

olur ki, bu $\mathbf{z}^{-1}$ sayısının da pozitif olması demektir. □

3.1.4. Hiperbolik sayılar kümesinde vektörel çarpım

Tanım 3.8. $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{P}$ için, $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ hiperbolik sayılarının vektörel çarpımı

$$\mathbf{z} \times \mathbf{w} = (|\mathbf{z}|\,|\mathbf{w}| \sinh\theta)\,\mathbf{h} = \mathrm{Hip}\,(\overline{\mathbf{z}}\mathbf{w})\,\mathbf{h}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$|\mathbf{z} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{z}|\,|\mathbf{w}| \sinh\theta$$

olur ki, $\mathbf{z} = z_1 + \mathbf{h}z_2$ ve $\mathbf{w} = w_1 + \mathbf{h}w_2$ için,

$$\mathbf{z} \times \mathbf{w} = (z_1 w_2 - w_1 z_2)\,\mathbf{h}$$

ve

$$|\mathbf{z} \times \mathbf{w}| = |z_1 w_2 - w_1 z_2|$$

bulunur. Ayrıca,

$$\sinh\theta = \frac{|\mathbf{z} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{z}|\,|\mathbf{w}|} = \frac{|z_1 w_2 - w_1 z_2|}{\sqrt{z_1^2 - z_2^2}\sqrt{w_1^2 - w_2^2}}$$

elde edilir. Buradan da

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = \frac{(w_1 z_1 - w_2 z_2)^2 - (z_1 w_2 - w_1 z_2)^2}{(z_1^2 - z_2^2)(w_1^2 - w_2^2)} = 1$$

eşitliğinin sağlandığı görülebilir.

3.1.5. Hiperbolik sayılarda vektörel çarpımın bazı özellikleri

i. Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ için

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$$

olur (Vektörel çarpımın değişme özelliği yoktur).

İspat. $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{h}x_2,\ \mathbf{y} = y_1 + \mathbf{h}y_2 \in \mathbb{P}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \mathrm{Hip}\,(\overline{\mathbf{x}}\mathbf{y})\,\mathbf{h} = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\mathbf{h} \\ &= -(-x_1 y_2 + x_2 y_1)\,\mathbf{h} = -\mathrm{Hip}\,(\overline{\mathbf{y}}\mathbf{x})\,\mathbf{h} \\ &= -\mathbf{y} \times \mathbf{x}\end{aligned}$$

bulunur. □

ii. Her $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ için

$$\mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0$$

olur (Bir hiperbolik sayının kendisiyle vektörel çarpımı 0 'dır).

İspat. $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{h}x_2 \in \mathbb{P}$ olsun. O halde

$$\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \text{Hip}\left(\overline{\mathbf{x}}\mathbf{x}\right)\mathbf{h} = \left(x_1 x_2 - x_2 x_1\right)\mathbf{h} = 0\mathbf{h} = 0$$

olur. □

iii. Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \lambda\left(\mathbf{x} \times \mathbf{y}\right)$$

olur.

İspat. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}(\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} &= \text{Hip}\left(\overline{\lambda \mathbf{x}}\mathbf{y}\right)\mathbf{h} = \text{Hip}\left(\overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}\mathbf{y}\right)\mathbf{h} = \text{Hip}\left(\lambda\overline{\mathbf{x}}\mathbf{y}\right)\mathbf{h} \\ &= \lambda\text{Hip}\left(\overline{\mathbf{x}}\mathbf{y}\right)\mathbf{h} = \lambda\left(\mathbf{x} \times \mathbf{y}\right)\end{aligned}$$

bulunur. □

iv. Herhangi bir hiperbolik sayının $\mathbf{0}$ ile vektörel çarpımı $\mathbf{0}$ 'dır. Yani her $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ için

$$\mathbf{0} \times \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

olur.

İspat. $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\mathbf{0} \times \mathbf{x} &= \text{Hip}\left(\overline{\mathbf{0}} \cdot \mathbf{x}\right)\mathbf{h} = \text{Hip}\left(\mathbf{0} \cdot \mathbf{x}\right)\mathbf{h} = \mathbf{0}\mathbf{h} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{0} &= \text{Hip}\left(\overline{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{0}\right)\mathbf{h} = \text{Hip}\left(\mathbf{0}\right)\mathbf{h} = \mathbf{0}\mathbf{h} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

olur. □

v. Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$$

olur. Yani $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörü paralel ise vektörel çarpım $\mathbf{0}$ olur.

İspat. $(\Rightarrow)$: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = 0$ olsun. O halde

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\text{Hip}\left(\overline{\mathbf{x}}\mathbf{y}\right)\mathbf{h}=\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\mathbf{h}=\mathbf{0}$$

olur. Buradan

$$x_1y_2-x_2y_1=0\Rightarrow\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\lambda\Rightarrow\begin{cases}x_1=\lambda y_1\\x_2=\lambda y_2\end{cases}$$

olur ki, böylece $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}$ yazılabilir.

$(\Leftarrow)$: $\mathbf{x}=x_1+\mathbf{h}x_2$, $\mathbf{y}=y_1+\mathbf{h}y_2\in\mathbb{P}$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ için $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}$ olsun. Buradan

$$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}\Rightarrow x_1+\mathbf{h}x_2=\lambda\left(y_1+\mathbf{h}y_2\right)\Rightarrow x_1=\lambda y_1\text{ ve }x_2=\lambda y_2$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\lambda&\Rightarrow x_1y_2-x_2y_1=0\\&\Rightarrow\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\mathbf{h}=\mathbf{0}\\&\Rightarrow\text{Hip}\left(\overline{\mathbf{x}}\mathbf{y}\right)\mathbf{h}=\mathbf{0}\\&\Rightarrow\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

bulunur. □

vi. Her $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{P}$ için

$$\mathbf{x}\times\left(\mathbf{y}+\mathbf{z}\right)=\left(\mathbf{x}\times\mathbf{y}\right)+\left(\mathbf{x}\times\mathbf{z}\right)$$

olur.

İspat. $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{P}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\times\left(\mathbf{y}+\mathbf{z}\right)&=\text{Hip}\left(\overline{\mathbf{x}}\left(\mathbf{y}+\mathbf{z}\right)\right)\mathbf{h}=\text{Hip}\left(\overline{\mathbf{x}}\mathbf{y}+\overline{\mathbf{x}}\mathbf{z}\right)\mathbf{h}\\&=\text{Hip}\left(\overline{\mathbf{x}}\mathbf{y}\right)\mathbf{h}+\text{Hip}\left(\overline{\mathbf{x}}\mathbf{z}\right)\mathbf{h}=\left(\mathbf{x}\times\mathbf{y}\right)+\left(\mathbf{x}\times\mathbf{z}\right)\end{aligned}$$

bulunur. □

3.1.6. İki hiperbolik sayının hermityen iç çarpımının iç çarpım ve vektörel çarpımla ifadesi

Herhangi iki $\mathbf{z}=z_1+\mathbf{h}z_2$ ve $\mathbf{w}=w_1+\mathbf{h}w_2$ hiperbolik sayılarının Hermityen iç çarpımının cebirsel çarpımı,

$$\begin{aligned}\mathbf{z}\overline{\mathbf{w}}&=\left(z_1+\mathbf{h}z_2\right)\cdot\left(w_1-\mathbf{h}w_2\right)\\&=w_1z_1-w_2z_2-\mathbf{h}\left(z_1w_2+w_1z_2\right)=\langle\mathbf{z},\mathbf{w}\rangle-\left(\mathbf{z}\times\mathbf{w}\right)\end{aligned}$$

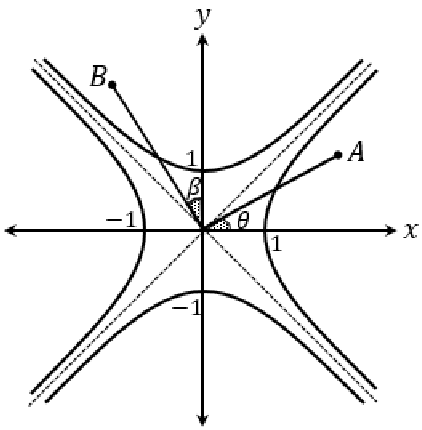
biçiminde yazılabilir.

3.2. Hiperbolik Sayıların Gösterimi

Bu bölümde, kompleks sayıların kutupsal, üstel ve matris gösterimlerine benzer şekilde, hiperbolik sayıların kutupsal, üstel ve matris gösterimleri verilecektir. Fakat, bu gösterimler kompleks sayılardaki gibi tek türlü değildir ve hiperbolik sayının türüne göre değişmektedir.

3.2.1. Hiperbolik sayıların kutupsal gösterimi

Tanım 3.9. Herhangi null olmayan $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ hiperbolik sayısının konum vektörünün asal eksenle yaptığı açıya, $\mathbf{z}$ sayısının hiperbolik argümenti denir ve $\mathrm{argh}(\mathbf{z})$ ile gösterilir (Özdemir 2015).



Şekil 3.2. Hiperbolik argüment

Eğer, $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısı $x^2 - y^2 = \rho^2$ yatay hiperbolü üzerinde ise, yani $\mathbf{z}$ bir spacelike hiperbolik sayı ise, $\cosh\theta > 1$ olduğu göz önüne alınarak

$$\mathbf{z} = \mp\rho\left(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\right)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{cases} x = \mp\rho\cosh\theta \\ y = \mp\rho\sinh\theta \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir ki, bu eşitliklerden

$$\tanh\theta = \frac{y}{x}$$

olur. Böylece

$$\theta = \arg\left(x + \mathbf{h}y\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

elde edilir.

$x = \mp\rho\cosh\theta$ ve $y = \mp\rho\sinh\theta$ olmak üzere

$$\frac{x}{\rho} = \mp\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \text{ ve } \frac{y}{\rho} = \mp\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

eşitliklerinden

$$e^{\theta} = \mp\left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{\rho}\right)$$

ve buradan da

$$\theta = \ln\left|\frac{x+y}{\rho}\right|$$

elde edilir. **z** spacelike hiperbolik sayısının

$$\mathbf{z} = \mp\rho\left(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\right)$$

formundaki yazılışına kutupsal gösterimi denir. Eğer **z** birim ise $\rho = 1$ olacağından kutupsal gösterim

$$\mathbf{z} = \mp\left(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\right)$$

şeklinde olur. Benzer şekilde, **z** hiperbolik sayısı, $y^2 - x^2 = \rho^2$ dikey hiperbolü üzerinde ise, yani **z** bir timelike hiperbolik sayı ise, $\cosh\theta > 1$ olduğu göz önüne alınarak

$$\mathbf{z} = \mp\rho\left(\sinh\theta + \mathbf{h}\cosh\theta\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{cases} x = \mp\rho\sinh\theta \\ y = \mp\rho\cosh\theta \end{cases}$$

eşitliklerinden

$$\tanh\theta = \frac{x}{y}$$

olur ki buradan

$$\theta = \arg\left(x + \mathbf{h}y\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\mathbf{zh} = \mp\rho\left(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\right)$$

olarak da yazılabilir.

$$\left(\frac{x}{\rho}+\frac{y}{\rho}\right)=\mp e^{\theta}$$

olduğundan

$$\theta=\ln\left|\frac{x+y}{\rho}\right|$$

elde edilir. Sonuç olarak bir hiperbolik sayının hiperbolik argümenti

$$\theta(\mathbf{z})=\arg(x+\mathbf{h}y)=\begin{cases}\tanh^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\ln\left|\dfrac{x+y}{\rho}\right| & \text{, } \mathbf{z} \text{ spacelike } (x^2>y^2)\\ \tanh^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln\left|\dfrac{x+y}{\rho}\right| & \text{, } \mathbf{z} \text{ timelike } (x^2<y^2)\end{cases}$$

şeklinde, bir hiperbolik sayının kutupsal gösterimi de

$$\mathbf{z}=\begin{cases}\mp\rho(\cosh\theta+\mathbf{h}\sinh\theta) & \text{, } \mathbf{z} \text{ spacelike}\\ \mp\rho(\sinh\theta+\mathbf{h}\cosh\theta) & \text{, } \mathbf{z} \text{ timelike}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.10. *Herhangi null olmayan bir $\mathbf{z}=x+\mathbf{h}y$ hiperbolik sayısı*

$$\rho=\sqrt{|x^2-y^2|} \text{ ve } \theta=\ln\left|\frac{x+y}{\rho}\right|$$

olmak üzere, $k\in\{1,-1,\mathbf{h},-\mathbf{h}\}$ için,

$$\mathbf{z}=k\rho(\cosh\theta+\mathbf{h}\sinh\theta) \tag{3.1}$$

formunda yazılabilir. Burada,

$$k=\begin{cases}1 & \mathbf{z} \text{ pozitif spacelike ise}\\ -1 & \mathbf{z} \text{ negatif spacelike ise}\\ \mathbf{h} & \mathbf{z} \text{ pozitif timelike ise}\\ -\mathbf{h} & \mathbf{z} \text{ negatif timelike ise}\end{cases} \tag{3.2}$$

olarak seçilir (Özdemir 2015).

Örnek. *Aşağıdaki hiperbolik sayıların türünü, argümentini ve kutupsal gösterimlerini bulunuz.*

a) $\mathbf{z}_1=2+\mathbf{h}$ **b)** $\mathbf{z}_2=1-2\mathbf{h}$

c) $\mathbf{z}_3=1+2\mathbf{h}$ **d)** $\mathbf{z}_4=-3+2\mathbf{h}$

Çözüm. $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ hiperbolik sayısı için

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_+ &= x + y > 0 \text{ ise } \mathbf{z} \text{ pozitif} \\ \mathbf{z}_+ &= x + y < 0 \text{ ise } \mathbf{z} \text{ negatif} \end{aligned}$$

ve

$$k = \begin{cases} 1 & \mathbf{z} \text{ pozitif spacelike ise} \\ -1 & \mathbf{z} \text{ negatif spacelike ise} \\ \mathbf{h} & \mathbf{z} \text{ pozitif timelike ise} \\ -\mathbf{h} & \mathbf{z} \text{ negatif timelike ise} \end{cases}$$

olduğu kullanılacaktır. O halde,

a) $\mathbf{z}_1 = 2 + \mathbf{h}$ hiperbolik sayısı pozitif spacelike olduğundan $k = 1$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{|2^2 - 1^2|} = \sqrt{3} \\ \theta_1 &= \arg(\mathbf{z}_1) = \tanh^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left|\frac{x+y}{\rho}\right| \\ &= \tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= k\rho_1\left(\cosh\theta_1 + \mathbf{h}\sinh\theta_1\right) \\ &= \sqrt{3}\left(\cosh\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\right) + \mathbf{h}\sinh\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

b) $\mathbf{z}_2 = 1 - 2\mathbf{h}$ hiperbolik sayısı negatif timelike olduğundan $k = -\mathbf{h}$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \sqrt{\left|1^2 - (-2)^2\right|} = \sqrt{3} \\ \theta_2 &= \arg(\mathbf{z}_2) = \tanh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left|\frac{x+y}{\rho}\right| = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_2 &= k\rho_2\left(\cosh\theta_2 + \mathbf{h}\sinh\theta_2\right) \\ &= -\mathbf{h}\sqrt{3}\left(\cosh\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \mathbf{h}\sinh\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right) \\ &= -\sqrt{3}\left(\sinh\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \mathbf{h}\cosh\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

c) $\mathbf{z}_3 = 1 + 2\mathbf{h}$ hiperbolik sayısı pozitif timelike olduğundan $k = \mathbf{h}$ olur. O halde

$$\rho_3 = \sqrt{|1^2 - 2^2|} = \sqrt{3}$$
$$\theta_3 = \arg(\mathbf{z}_3) = \tanh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left|\frac{x+y}{\rho}\right| = \ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_3 &= k\rho_3(\cosh\theta_3 + \mathbf{h}\sinh\theta_3)\\ &= \mathbf{h}\sqrt{3}\left(\cosh\left(\ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\right) + \mathbf{h}\sinh\left(\ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)\\ &= \sqrt{3}\left(\sinh\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\right) + \mathbf{h}\cosh\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

d) $\mathbf{z}_4 = -3 + 2\mathbf{h}$ hiperbolik sayısı negatif spacelike olduğundan $k = -1$ olur.

$$\rho_4 = \sqrt{\left|(-3)^2 - 2^2\right|} = \sqrt{5}$$
$$\theta_4 = \arg(\mathbf{z}_4) = \tanh^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left|\frac{x+y}{\rho}\right| = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_4 &= k\rho_4(\cosh\theta_4 + \mathbf{h}\sinh\theta_4)\\ &= -\sqrt{5}\left(\cosh\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) + \mathbf{h}\sinh\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Hiperbolik sayılarda herhangi bir $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ hiperbolik sayının modülü

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

formunda olduğundan hiperbolik sayılarda birim çemberin denklemi

$$|\mathbf{z}| = \left|x^2 - y^2\right| = 1$$

şeklindedir. O halde hiperbolik sayılarda birim çember

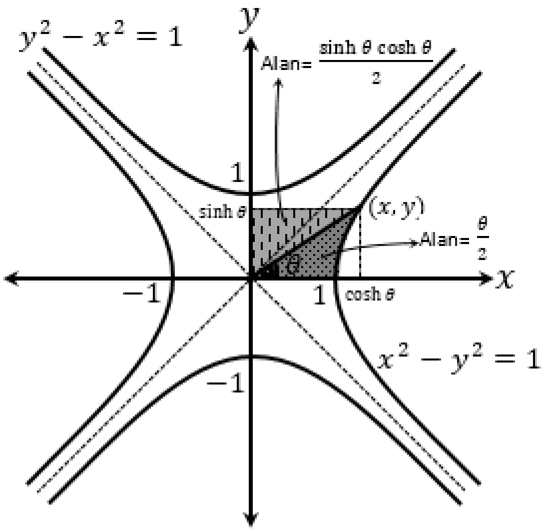
$$x^2 - y^2 = 1 \text{ ve } y^2 - x^2 = 1$$

hiperbollerinden oluşur ve bu hiperbollerin asimptotları

$$y = x \text{ ve } y = -x$$

doğrularıdır.

Hiperbolik sayılarda, birim çember üzerinde θ açısıyla verilen bölgenin alanı $\dfrac{\theta}{2}$ olur. θ açısıyla verilen bölgenin alanını hesaplamak için birim çemberi oluşturan hiperbollerden herhangi birinde bunu göstermek yeterlidir. Asal ekseni x-ekseni olan hiperbol üzerinde θ açısıyla verilen bölgenin alanının $\dfrac{\theta}{2}$ olduğu gösterilebilir. Bunu göstermek için önce hiperbolün y ekseniyle arasında kalan bölgenin alanını hesaplayıp, bu alandan çember ile y ekseni arasında kalan üçgenin alanı çıkarılırsa θ açısıyla verilen bölgenin alanı hesaplanmış olur.



Şekil 3.3. Hiperbolik sayılar ve alan

Asal ekseni x-ekseni olan hiperbolün denklemi $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x = \mp\sqrt{1+y^2}$ olduğundan θ açısıyla verilen bölgenin alanı,

$$\text{Alan} = \int_0^y \sqrt{1+y^2}dy - \frac{\sinh\theta\cosh\theta}{2}$$

olur. $y = \sinh u$ dönüşümü yapılırsa $dy = \cosh u du$ ve sınırlar 0 ’dan θ ’ya olur.

$$\begin{aligned}
\text{Alan} &= \int_0^\theta \sqrt{1+\sinh^2 u}\cosh u du - \frac{\sinh\theta\cosh\theta}{2} = \int_0^\theta \cos u \cos u du - \frac{\sinh 2\theta}{4} \\
&= \int_0^\theta \cosh^2 u du - \frac{\sinh 2\theta}{4} = \int_0^\theta \frac{1+\cosh 2u}{2} du - \frac{\sinh(2\theta)}{4} \\
&= \frac{u}{2} + \frac{\sinh 2u}{4}\bigg|_0^\theta - \frac{\sinh 2\theta}{4} = \frac{\theta}{2} + \frac{\sinh 2\theta}{4} - \frac{\sinh 2\theta}{4} = \frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.2.2. Hiperbolik sayıların üstel gösterimi

Teorem 3.11. *Herhangi* $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ *hiperbolik sayısı,* $\rho = \sqrt{|x^2 - y^2|}$, $\theta = \arg h\mathbf{z}$ *ve* $k \in \{1, -1, \mathbf{h}, -\mathbf{h}\}$ *olmak üzere*

$$\mathbf{z} = k\rho e^{\mathbf{h}\theta}$$

formunda gösterilebilir (Özdemir 2015).

İspat. $e^{\mathbf{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{z}^n}{n!}$ seri açılımına göre,

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{h}\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{h}\theta)^n}{n!} = 1 + \mathbf{h}\theta + \frac{(\mathbf{h}\theta)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{h}\theta)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{h}\theta)^4}{4!} + \frac{(\mathbf{h}\theta)^5}{5!} + ... \\ &= 1 + \mathbf{h}\theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\mathbf{h}\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\mathbf{h}\theta^5}{5!} + ... \\ &= \left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + ...\right) + \mathbf{h}\left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + ...\right) \\ &= \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta \end{aligned}$$

olur. Ayrıca herhangi bir $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ hiperbolik sayısı $\rho = \sqrt{|x^2 - y^2|}$, $\theta = \arg h\mathbf{z}$ ve $k \in \{1, -1, \mathbf{h}, -\mathbf{h}\}$ için

$$\mathbf{z} = k\rho\left(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\right)$$

formunda yazılabildiğinden

$$\mathbf{z} = k\rho\underbrace{(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta)}_{e^{\mathbf{h}\theta}} = k\rho e^{\mathbf{h}\theta}$$

formunda gösterilebilir. □

3.2.3. Hiperbolik sayılarda logaritma

Herhangi bir $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ hiperbolik sayısının $\rho = \sqrt{|x^2 - y^2|}$, $\theta = \arg h\mathbf{z}$ ve $k \in \{1, -1, \mathbf{h}, -\mathbf{h}\}$ olmak üzere

$$\mathbf{z} = k\rho\left(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\right)$$

formunda yazılabilir.

O halde $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} d\mathbf{z} &= k\left[(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta)\, d\rho + \rho\,(\sinh\theta + \mathbf{h}\cosh\theta)\, d\theta\right] \\ &= \frac{k\rho\,(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta)\, d\rho}{\rho} + \mathbf{h}k\rho\,(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta)\, d\theta \\ &= \frac{\mathbf{z}d\rho}{\rho} + \mathbf{hz}d\theta \\ &= \mathbf{z}\left(\frac{d\rho}{\rho} + \mathbf{h}d\theta\right) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\int \frac{d\mathbf{z}}{\mathbf{z}} = \int \frac{d\rho}{\rho} + \mathbf{h}\int d\theta \Rightarrow \ln\mathbf{z} = \ln\rho + \mathbf{h}\theta$$

elde edilir. Böylece logaritma fonksiyonu

$$\ln\mathbf{z} = \ln|\mathbf{z}| + \mathbf{h}\theta$$

şeklinde tanımlanır.

3.2.4. Hiperbolik sayılar için De Moivre formülü

Teorem 3.12. *Herhangi null olmayan bir $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ hiperbolik sayısı, $\rho = \sqrt{|x^2 - y^2|}$ $\theta = \arg h\mathbf{z}$ ve $k \in \{1, -1, \mathbf{h}, -\mathbf{h}\}$ olmak üzere*

$$\mathbf{z} = k\rho\,(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta)$$

formunda gösterilebileceğinden $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\mathbf{z}^n = k^n\rho^n\,(\cosh(n\theta) + \mathbf{h}\sinh(n\theta))$$

olur (Özdemir 2015).

İspat. Öncelikle $n \in \mathbb{N}$ için ifadenin doğru olduğu tümevarımla gösterilebilir. $n = 1$ için

$$\mathbf{z} = k\rho\,(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta)$$

olur. $n = m$ için verilen eşitlik doğru olsun. Yani

$$\mathbf{z}^m = k^m\rho^m\,(\cosh(m\theta) + \mathbf{h}\sinh(m\theta))$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{m+1} &= \mathbf{z}^m\mathbf{z} = k^m\rho^m\,(\cosh(m\theta) + \mathbf{h}\sinh(m\theta))\, k\rho\,(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta) \\ &= k^{m+1}\rho^{m+1}\left[(\cosh(m\theta) + \mathbf{h}\sinh(m\theta))\,(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta)\right] \\ &= k^{m+1}\rho^{m+1}\,(\cosh(m+1)\,\theta + \mathbf{h}\sinh(m+1)\,\theta) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\mathbf{z} = k\rho\left(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\right) \text{ için } \mathbf{z}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{z}} = k^{-1}\rho^{-1}\left(\cosh\theta - \mathbf{h}\sinh\theta\right)$$

olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^{-n} &= \left(\mathbf{z}^{-1}\right)^{n} = k^{-n}\rho^{-n}\left(\cosh\theta - \mathbf{h}\sinh\theta\right)\\ &= k^{-n}\rho^{-n}\left(\cosh\left(-n\theta\right) + \mathbf{h}\sinh\left(-n\theta\right)\right)\end{aligned}$$

olduğundan her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\mathbf{z}^{n} = k^{n}\rho^{n}\left(\cosh\left(n\theta\right) + \mathbf{h}\sinh\left(n\theta\right)\right)$$

olduğu görülür. □

Teorem 3.13. $n \in \mathbb{N}$ *için* $\sinh(n\theta)$ *ve* $\cosh(n\theta)$ *ifadeleri,*

$$\begin{aligned}\cosh\left(n\theta\right) &= \tbinom{n}{0}\cosh^{n}\theta + \tbinom{n}{2}\cosh^{n-2}\theta\sinh^{2}\theta + ...\\ \sinh\left(n\theta\right) &= \tbinom{n}{1}\cosh^{n-1}\theta\sinh^{1}\theta + \tbinom{n}{3}\cosh^{n-3}\theta\sinh^{3}\theta + ...\end{aligned}$$

şeklinde $\sinh\theta$ *ve* $\cosh\theta$ *cinsinden ifade edilebilir (Özdemir 2015).*

İspat. De Moivre formülü ve binom açılımından

$$\begin{aligned}\cosh\left(n\theta\right) + \mathbf{h}\sinh\left(n\theta\right) &= \left(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\right)^{n}\\ &= \tbinom{n}{0}\cosh^{n}\theta + \tbinom{n}{1}\cosh^{n-1}\theta\sinh^{1}\theta\mathbf{h}\\ &+ \tbinom{n}{2}\cosh^{n-2}\theta\sinh^{2}\theta + \tbinom{n}{3}\cosh^{n-3}\theta\sinh^{3}\theta\mathbf{h} + ...\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece hiperbolik sayıların eşitliğinden de $\sinh(n\theta)$ ve $\cosh(n\theta)$

$$\begin{aligned}\cosh\left(n\theta\right) &= \tbinom{n}{0}\cosh^{n}\theta + \tbinom{n}{2}\cosh^{n-2}\theta\sinh^{2}\theta + ...\\ \sinh\left(n\theta\right) &= \tbinom{n}{1}\cosh^{n-1}\theta\sinh^{1}\theta + \tbinom{n}{3}\cosh^{n-3}\theta\sinh^{3}\theta + ...\end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Örnek. $\sinh(5\theta)$ *ve* $\cosh(5\theta)$ *ifadelerini* $\sinh\theta$ *ve* $\cosh\theta$ *cinsinden yazınız.*

$$\begin{aligned}\cosh\left(5\theta\right) &= \tbinom{5}{0}\cosh^{5}\theta + \tbinom{5}{2}\cosh^{3}\theta\sinh^{2}\theta + \tbinom{5}{4}\cosh\theta\sinh^{4}\theta\\ &= \cosh^{5}\theta + 10\cosh^{3}\theta\sinh^{2}\theta + 5\cosh\theta\sinh^{4}\theta\\ \sinh\left(5\theta\right) &= \tbinom{5}{1}\cosh^{4}\theta\sinh\theta + \tbinom{5}{3}\cosh^{2}\theta\sinh^{3}\theta + \tbinom{5}{5}\sinh^{5}\theta\\ &= 5\cosh^{4}\theta\sinh\theta + 10\cosh^{2}\theta\sinh^{3}\theta + \sinh^{5}\theta\end{aligned}$$

Örnek. $S = \binom{n}{1}\sinh\theta + \binom{n}{2}\sinh(2\theta) + \cdots + \binom{n}{n}\sinh(n\theta)$ *toplamının değerinin*

$$2^n \cosh^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sinh\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

ifadesine eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\mathbf{z} = \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta$ olsun.

$$\begin{aligned}(1+\mathbf{z})^n = 1 &+ \binom{n}{1}(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta) + \binom{n}{2}(\cosh(2\theta) + \mathbf{h}\sinh(2\theta)) + ...\\ &... + \binom{n}{n}(\cosh(n\theta) + \mathbf{h}\sinh(n\theta))\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$\binom{n}{1}\cosh\theta + \binom{n}{2}\cosh(2\theta) + ... + \binom{n}{n}\cosh(n\theta) = C$$

ve

$$\binom{n}{1}\sinh\theta + \binom{n}{2}\sinh(2\theta) + ... + \binom{n}{n}\sinh(n\theta) = S$$

olmak üzere,

$$(1+\mathbf{z})^n = 1 + C + \mathbf{h}S \tag{3.3}$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}1+\mathbf{z} &= 1 + \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\\ &= 2\cosh^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{h}2\sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ &= 2\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{h}\sinh\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

olduğundan

$$(1+\mathbf{z})^n = 2^n\cosh^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cosh\left(\frac{n\theta}{2}\right) + \mathbf{h}\sinh\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right] \tag{3.4}$$

olur. (3.3) ve (3.4)'den, hiperbolik kısımların eşitliğinden

$$S = 2^n\cosh^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sinh\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

elde edilir.

3.2.5. Bir hiperbolik sayının köklerinin bulunması

Tanım 3.14. $\mathbf{w} \in \mathbb{P}$ ve n bir pozitif tamsayı olmak üzere, $\mathbf{z}^n = \mathbf{w}$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{z}$ hiperbolik sayılarına $\mathbf{w}$ hiperbolik sayısının n-inci dereceden kökleri denir.

Teorem 3.15. $\rho = \sqrt{|x^2 - y^2|}$, $\theta = \ln\left|\dfrac{x+y}{\rho}\right|$ *ve* $k \in \{1, -1, \mathbf{h}, -\mathbf{h}\}$ *olmak üzere,*

$$\mathbf{w} = x + \mathbf{h}y = kr\left(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\right)$$

hiperbolik sayısının n-inci dereceden kökleri

$$\mathbf{z} = \sqrt[n]{k}\,\sqrt[n]{\rho}\left(\cosh\frac{\theta}{n} + \mathbf{h}\sinh\frac{\theta}{n}\right) \tag{3.5}$$

biçimindedir (Özdemir 2015).

İspat. $\mathbf{z} = k_1\rho_1\left(\cosh\theta_1 + \mathbf{h}\sinh\theta_1\right)$ hiperbolik sayısı, $\mathbf{w} = k\rho\left(\cosh\theta + i\sinh\theta\right)$ hiperbolik sayısının n-inci dereceden bir kökü olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{z}^n = k_1^n\rho_1^n\left(\cosh n\theta_1 + \mathbf{h}\sinh n\theta_1\right) = k\rho\left(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\right)$$

eşitliğine göre, reel ve imajiner kısımlar eşit olması gerektiğinden,

$$k_1^n\rho_1^n = \rho k \text{ ve } \theta_1 = \frac{\theta}{n}$$

olur. Şimdi, n değerinin tek veya çift olmasına göre inceleyelim.

i) n çift ise, $\mathbf{z}^n$ daima bir pozitif spacelike hiperbolik sayıdır. Yani, $\mathbf{z}^n = \mathbf{w}$ olduğundan, $\mathbf{w}$ hiperbolik sayısı pozitif spacelike ise, n-inci dereceden kökünden söz edilebilir. Aksi halde, n çift iken bir hiperbolik sayının kökü olmayacaktır. Buna göre, $\mathbf{w}$ sayısı pozitif spacelike iken, $\mathbf{z}^n = \mathbf{w}$ olacak şekilde,

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_1 &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cosh\theta/n + \mathbf{h}\sinh\theta/n\right), \\
\mathbf{z}_2 &= -\sqrt[n]{\rho}\left(\cosh\theta/n + \mathbf{h}\sinh\theta/n\right), \\
\mathbf{z}_3 &= \mathbf{h}\sqrt[n]{\rho}\left(\cosh\theta/n + \mathbf{h}\sinh\theta/n\right), \\
\mathbf{z}_4 &= -\mathbf{h}\sqrt[n]{\rho}\left(\cosh\theta/n + \mathbf{h}\sinh\theta/n\right),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

biçiminde tanımlanan 4 farklı kök elde edilir.

ii) n tek ise, $\mathbf{z}^n$ herhangi bir null olmayan hiperbolik sayı olabilir. Fakat, $\mathbf{z}^n = \mathbf{w}$ olduğundan dolayı, $\mathbf{w}$ sayısı hangi türden ise, $\mathbf{z}^n$ ve dolayısıyla da $\mathbf{z}$ sayısı da o türden olmalıdır. O halde, $\mathbf{z}^n = \mathbf{w}$ eşitliğinde, $\mathbf{z}$ sayısı, $\mathbf{w}$ ile aynı türdendir ve $\mathbf{w}$ sayısının n tek iken,

n-inci dereceden kökü sadece 1 tanedir. Bu durumda tek kök :

$$\mathbf{z} = k\sqrt[n]{\rho}\left(\cosh\frac{\theta}{n} + \mathbf{h}\sinh\frac{\theta}{n}\right) \tag{3.7}$$

olacaktır. □

Teorem 3.16. $\mathbf{z} = x + y\mathbf{h}$ *hiperbolik sayısının karekökü*

$$\sqrt{x + y\mathbf{h}} = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{2} + \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}{2}\mathbf{h} \tag{3.8}$$

ile bulunur.

İspat. $\sqrt{x + y\mathbf{h}} = a + b\mathbf{h}$ olsun. Buna göre,

$$(a + b\mathbf{h})(a + b\mathbf{h}) = a^2 + b^2 + 2ab\mathbf{h} = x + y\mathbf{h}$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= x, \\ 2ab &= y \end{aligned}$$

olacaktır. Buna göre,

$$\begin{aligned} a + b &= \pm\sqrt{x+y} \\ a - b &= \pm\sqrt{x-y} \end{aligned}$$

eşitliklerinden, taraf tarafa toplanarak,

$$a = \frac{\pm\sqrt{x+y} \pm \sqrt{x-y}}{2}$$

ve taraf tarafa çıkarılarak,

$$b = \frac{\pm\sqrt{x+y} \mp \sqrt{x-y}}{2}$$

elde edilir. O halde,

$$\sqrt{x + y\mathbf{h}} = \frac{\pm\sqrt{x+y} \pm \sqrt{x-y}}{2} + \frac{\pm\sqrt{x+y} \mp \sqrt{x-y}}{2}\mathbf{h}$$

olacaktır. □

Sonuç 3.17. $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ *sayısı bir null hiperbolik sayı ise,* $x = \pm y$ *olacağından,* (*3.8*) *eşitliğine göre,*

$$x = y \text{ iken, } \sqrt{x + y\mathbf{h}} = \frac{\sqrt{2x}}{2}(1 + \mathbf{h})$$
$$x = -y \text{ iken, } \sqrt{x + y\mathbf{h}} = \frac{\sqrt{2x}}{2}(1 - \mathbf{h})$$

olacaktır.

Sonuç 3.18. *Lightlike olmayan bir hiperbolik sayının karekökünü olması için gerek ve yeter koşul sayının pozitif spacelike olmasıdır.*

İspat. (3.8) eşitliğine göre, null olmayan bir hiperbolik sayının kökünün olması için $x + y > 0$ ve $x - y > 0$ olması gerekir. $x + y > 0$ olması, $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının pozitif olması, $x^2 - y^2 > 0$ olması ise, $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının spacelike olması anlamına gelir. □

Örnek. $\mathbf{z} = 13 - 12\mathbf{h}$ *sayısının karekökü nedir?*

Çözüm. 1. Yol. $\mathbf{z} = 13 - 12\mathbf{h}$ pozitif spacelike bir hiperbolik sayı olduğundan, $k = 1$'dir.

$$\rho = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ ve } \theta = \ln\left|\frac{x + y}{\rho}\right| = \ln\frac{\sqrt{5}}{5}$$

olduğundan (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden,

$$\mathbf{z} = 13 - 12\mathbf{h} = 5\left(\cosh\left(\ln\frac{1}{5}\right) + \mathbf{h}\sinh\left(\ln\frac{1}{5}\right)\right)$$

yazılabilir. Böylece, (3.6) eşitliklerinden,

$$\mathbf{z}_1 = \sqrt{5}\left(\cosh\left(\ln\left(1/\sqrt{5}\right)\right) + \mathbf{h}\sinh\left(\ln\left(1/\sqrt{5}\right)\right)\right) = 3 - 2\mathbf{h},$$
$$\mathbf{z}_2 = -\sqrt{5}\left(\cosh\left(\ln\left(1/\sqrt{5}\right)\right) + \mathbf{h}\sinh\left(\ln\left(1/\sqrt{5}\right)\right)\right) = -3 + 2\mathbf{h},$$
$$\mathbf{z}_3 = \sqrt{5}\mathbf{h}\left(\cosh\left(\ln\left(1/\sqrt{5}\right)\right) + \mathbf{h}\sinh\left(\ln\left(1/\sqrt{5}\right)\right)\right) = -2 + 3\mathbf{h},$$
$$\mathbf{z}_4 = -\sqrt{5}\mathbf{h}\left(\cosh\left(\ln\left(1/\sqrt{5}\right)\right) + \mathbf{h}\sinh\left(\ln\left(1/\sqrt{5}\right)\right)\right) = 2 - 3\mathbf{h}$$

olarak bulunur.

2. Yol. (3.8) eşitliğine göre,

$$\sqrt{13 - 12\mathbf{h}} = \frac{\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{25}}{2} + \frac{\pm\sqrt{1} \mp \sqrt{25}}{2}\mathbf{h}$$

olacağından, $\mathbf{z} = 13 - 12\mathbf{h}$ sayısının kökleri, $3 - 2\mathbf{h}$, $2 - 3\mathbf{h}$, $-3 + 2\mathbf{h}$, $-2 + 3\mathbf{h}$ olacaktır.

Örnek. $\mathbf{z} = 6 - 10\mathbf{h}$ *sayısının karekökü nedir?*

Çözüm. 1. Yol. Teorem 3.16. göz önüne alınırsa, $\mathbf{z} = 6 - 10\mathbf{h}$ negatif bir hiperbolik sayı olduğundan karekökü yoktur.

2. Yol. $\mathbf{z} = 6 - 10\mathbf{h}$ sayısı negatif timelike bir hiperbolik sayıdır ve $k = -\mathbf{h}$ alınmalıdır. Diğer yandan, (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden,

$$\rho = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ ve } \theta = \ln\left|\frac{x+y}{\rho}\right| = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\mathbf{z} = 6 - 10\mathbf{h} &= -8h\left(\cosh\left(-\ln 2\right) + \mathbf{h}\sinh\left(-\ln 2\right)\right)\\ &= -8\left(\sinh\left(-\ln 2\right) + \mathbf{h}\cosh\left(-\ln 2\right)\right)\end{aligned}$$

olacaktır. Teorem 3.15 göz önüne alınırsa, bu sayının karekökünün olmadığı görülür.

Örnek. $2 - 2\mathbf{h}$ *sayısının karekökü nedir?*

Çözüm. Bu sayı bir null hiperbolik sayı olduğundan, karekökü Sonuç 3.17 gereği,

$$\frac{\sqrt{2\cdot 2}}{2}\left(1 - \mathbf{h}\right) = 1 - \mathbf{h}$$

olarak bulunur.

3.2.6. Hiperbolik sayıların matris gösterimi

$\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y \in \mathbb{P}$ olmak üzere, $\mathbf{z}$ sayısını,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$$

formundaki matrislerle ifade edebiliriz. Öncelikle,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$$

formundaki matrisler kümesinin birimli ve değişmeli halka olduğu gösterilebilir. Daha sonra da bu halkanın, $\mathbb{P}$ hiperbolik sayılar halkasına izomorf olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.19. $\mathbb{M} = \left\{ A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ *formundaki matrislerin kümesi, matrislerdeki toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte düşünüldüğünde birimli ve değişmeli halkadır ve* $\mathbb{P}$ *hiperbolik sayılar halkasına izomorftur.*

İspat. H_1 : Matrislerde toplama işlemi $+ : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ şeklinde tanımlandığından her $X, Y \in \mathbb{M}$ için

$$X + Y = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}$$

olur, $\mathbb{M}$ kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

H_2 : Toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

Gerçekten, her $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}$ için

$$\begin{aligned} (X + Y) + Z &= \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & y_1 + y_2 + y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 & x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X + (Y + Z) &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + x_3 & y_2 + y_3 \\ y_2 + y_3 & x_2 + x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & y_1 + y_2 + y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 & x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eşit olduklarından $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ 'dir.

H_3 : Toplama işlemine göre $\mathbb{M}$ 'de bir $\mathbf{0}$ etkisiz elemanı vardır. Gerçekten her $X \in \mathbb{M}$ için

$$X + \mathbf{0} = \mathbf{0} + X = X$$

olacak şekilde bir **0** etkisiz elemanına $\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ denirse, tanımdan yararlanarak bir tek

$$x = 0 \text{ ve } y = 0; \ \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}$$

etkisiz elemanı elde edilir.

H_4 : $+$ işlemine göre her $X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{M}$ için

$$X + Y = Y + X = \mathbf{0}$$

olacak şekilde bir tek $Y \in \mathbb{M}$ ters elemanı vardır. Gerçekten toplama ve eşitlik tanımından $X \in \mathbb{M}$ için

$$Y = \begin{bmatrix} -x & -y \\ -y & -x \end{bmatrix} \in \mathbb{M}$$

olduğu görülür.

H_5 : Her $X, Y \in \mathbb{M}$ için

$$\begin{aligned} X + Y &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} = Y + X \end{aligned}$$

olduğundan $(\mathbb{M}, +)$ ikilisi aynı zamanda bir abel grubudur.

H_6 : Çarpma işlemi $\cdot : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ şeklinde tanımlandığından $\cdot$ işlemine göre $\mathbb{M}$ kümesi kapalıdır.

H_7 : Her $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}$ için

$$\begin{aligned} (X \cdot Y) \cdot Z =& \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} x_1x_2 + y_1y_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 + y_1y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} x_1x_2x_3 + y_1y_2x_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 & x_1x_2y_3 + y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 \\ x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + x_1x_2y_3 + y_1y_2y_3 & x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + x_1x_2x_3 + y_1y_2x_3 \end{bmatrix} \\ X \cdot (Y \cdot Z) =& \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \right) \\ =& \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2x_3 + y_2y_3 & y_2x_3 + x_2y_3 \\ y_2x_3 + x_2y_3 & x_2x_3 + y_2y_3 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} x_1x_2x_3 + x_1y_2y_3 + y_1y_2x_3 + y_1x_2y_3 & x_1y_2x_3 + x_1x_2y_3 + y_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 \\ y_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + x_1x_2y_3 & y_1y_2x_3 + y_1x_2y_3 + x_1x_2x_3 + x_1y_2y_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

iki ifade eşit olduklarından $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ 'dir.

H_8 : Her $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}$ için

$$\begin{aligned}
(X+Y)\cdot Z =& \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ y_1+y_2 & x_1+x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} x_1x_3+x_2x_3+y_1y_3+y_2y_3 & x_1y_3+x_2y_3+y_1x_3+y_2x_3 \\ y_1x_3+y_2x_3+x_1y_3+x_2y_3 & y_1y_3+y_2y_3+x_1x_3+x_2x_3 \end{bmatrix} \\
X\cdot Z + Y\cdot Z =& \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} x_1x_3+y_1y_3 & x_1y_3+y_1x_3 \\ y_1x_3+x_1y_3 & y_1y_3+x_1x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2x_3+y_2y_3 & x_2y_3+y_2x_3 \\ y_2x_3+x_2y_3 & y_2y_3+x_2x_3 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} x_1x_3+y_1y_3+x_2x_3+y_2y_3 & x_1y_3+y_1x_3+x_2y_3+y_2x_3 \\ y_1x_3+x_1y_3+y_2x_3+x_2y_3 & y_1y_3+x_1x_3+y_2y_3+x_2x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

bu iki ifade eşit olduklarından $(X+Y)\cdot Z = X\cdot Z + Y\cdot Z$ olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
X\cdot(Y+Z) =& \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \right) \\
=& \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2+x_3 & y_2+y_3 \\ y_2+y_3 & x_2+x_3 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} x_1x_2+x_1x_3+y_1y_2+y_1y_3 & x_1y_2+x_1y_3+y_1x_2+y_1x_3 \\ y_1x_2+y_1x_3+x_1y_2+x_1y_3 & y_1y_2+y_1y_3+x_1x_2+x_1x_3 \end{bmatrix} \\
X\cdot Y + X\cdot Z =& \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ y_3 & x_3 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} x_1x_2+y_1y_2 & x_1y_2+y_1x_2 \\ y_1x_2+x_1y_2 & y_1y_2+x_1x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1x_3+y_1y_3 & x_1y_3+y_1x_3 \\ y_1x_3+x_1y_3 & y_1y_3+x_1x_3 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} x_1x_2+y_1y_2+x_1x_3+y_1y_3 & x_1y_2+y_1x_2+x_1y_3+y_1x_3 \\ y_1x_2+x_1y_2+y_1x_3+x_1y_3 & y_1y_2+x_1x_2+y_1y_3+x_1x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

bu iki ifade de eşit olduğundan $X\cdot(Y+Z) = X\cdot Y + X\cdot Z$ bulunur.

O halde $(\mathbb{M},+,\cdot)$ üçlüsü bir halkadır.

H_9 : Her $X, Y \in \mathbb{M}$ için

$$\begin{aligned}
X\cdot Y =& \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2+y_1y_2 & x_1y_2+y_1x_2 \\ y_1x_2+x_1y_2 & y_1y_2+x_1x_2 \end{bmatrix} \\
Y\cdot X =& \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2x_1+y_2y_1 & x_2y_1+y_2x_1 \\ y_2x_1+x_2y_1 & y_2y_1+x_2x_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olduğundan $X\cdot Y = Y\cdot X$ olur. Böylece $(\mathbb{M},+,\cdot)$ halkası bir değişmeli halkadır.

H_{10} : Çarpma işlemi için $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ bir etkisiz elemandır. Gerçekten çarpma tanımından her $X \in \mathbb{M}$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = X$$

olur. O halde $(\mathbb{M}, +, \cdot)$ halkası bir birimli halkadır.

Dolayısıyla $(\mathbb{M}, +, \cdot)$ üçlüsü bir birimli ve değişmeli halkadır.

$(\mathbb{M}, +, \cdot)$ birimli değişmeli halkasının $\mathbb{P}$ hiperbolik sayılar halkasına izomorf olduğu gösterilebilir.

f dönüşümü,

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{P} \to \mathbb{M} \\ \mathbf{z} \quad &\to \quad f(\mathbf{z}) = f(x + \mathbf{h}y) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa bu dönüşümün bir izomorfizm olduğu gösterilebilir.

i. f dönüşümünün lineer olduğunu göstermek için her $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{h}y_1$, $\mathbf{y} = x_2 + \mathbf{h}y_2 \in \mathbb{P}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y})$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) &= f(x_1 + \lambda x_2 + \mathbf{h}(y_1 + \lambda y_2)) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + \lambda x_2 & y_1 + \lambda y_2 \\ y_1 + \lambda y_2 & x_1 + \lambda x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \\ &= f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

olur.

ii. f birebir olduğunu göstermek için her $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{h}y_1$, $\mathbf{y} = x_2 + \mathbf{h}y_2 \in \mathbb{P}$ olmak üzere $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ iken $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ olduğu gösterilmelidir.

$f(x) = f(\mathbf{y})$ olsun.

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} = f(\mathbf{y}) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ olur.}$$

iii. f örtendir.

Her $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}$ için bir $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{h}y_1 \in \mathbb{P}$ vardır.

O halde $\mathbb{P}$ ile $\mathbb{M}$ izomorftur. □

3.3. Hiperbolik Sayılarla Lorentz Düzleminde Dönme

3.3.1. Hiperbolik sayılar ve lorentzian düzleminde hareket geometrisi

Lorentziyen düzlemdeki dönme dönüşümlerini, hiperbolik sayılardaki işlemlerin özelliklerini kullanarak, hiperbolik sayılar cinsinden ifade etmek mümkündür. Aşağıda, dönme dönüşümünün hiperbolik sayılar cinsinden nasıl tanımlandığı incelenecektir.

Hiperbolik dönme

Tanım 3.20. Spacelike hiperbolik sayılar kümesi hiperbolik çarpma işlemine göre kapalıdır ve bir grup oluşturur. Bu grup,

$$\mathbf{SP}\,(1,1)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{R},\ a^2-b^2>0\right\}$$

matris grubuna izomorftur. Bu grup, $GL\,(2,\mathbb{R})$ genel lineer grubunun bir alt grubudur. Bu gruba spacelike hiperbolik sayılar grubu denir. Timelike hiperbolik sayılar kümesi ise bir grup değildir (Özdemir 2015).

Spacelike hiperbolik sayılar kümesinin grup olduğu kolayca görülebilir. İki spacelike hiperbolik sayının bir spacelike hiperbolik sayı olduğu ifade edilmişti. Buna göre, kapalılık ve birleşme özelliğinin olduğu açıktır. $\mathbf{z}=1+0\mathbf{h}$ yani,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

birim elemandır. $\mathbf{z}=a+\mathbf{h}b$ kümesi bir spacelike hiperbolik sayı ise, $a^2-b^2>0$ olur. $\mathbf{z}$ sayısına karşılık gelen matris

$$Z=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

olur ve $a^2-b^2>0$ olduğundan, Z matrisinin tersinden söz edilebilir. Buna göre,

$$Z^{-1}=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

ve tersine karşılık gelen hiperbolik sayı da,

$$\mathbf{z}^{-1}=\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{b}{a^2-b^2}\mathbf{h}$$

olacaktır.

$$\left(\frac{a}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{b}{a^2-b^2}\right)^2=\frac{1}{(a^2-b^2)}>0$$

olduğundan, $Z^{-1} \in \mathbf{SP}(1,1)$ olur. Ayrıca özel olarak, birim hiperbolik sayılar grubu

$$\mathbf{O}(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a^2 - b^2 = \pm 1 \right\}$$

ile gösterilir. Timelike hiperbolik sayılar, hiperbolik çarpma işlemine göre kapalı değildir. Buna göre aşağıdaki teoremleri yazılabilir.

Teorem 3.21. *Tüm birim spacelike hiperbolik sayıların kümesi*

$$\mathbf{P}^1_{sp}(1) = \left\{ \mathbf{z} = a + \mathbf{h}b \in \mathbb{P} : a^2 - b^2 = 1 \right\}$$

hiperbolik çarpma işlemine göre bir değişmeli gruptur. Bu grup, hiperbolik dönme matrislerinin kümesi

$$\mathbf{SO}^+(1,1) = \left\{ R_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a^2 - b^2 = 1 \right\}$$
$$\mathbf{SO}^+(1,1) = \left\{ R_\theta = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

grubu ile izomorftur. Bu grup, $\mathbf{O}(1,1)$ *grubunun bir alt grubudur (Özdemir, 2015).*

Bu teoremin bir sonucu olarak, her

$$\mathbf{z} = \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta$$

birim spacelike hiperbolik sayısı,

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

hiperbolik dönme matrisine karşılık gelir ve bu dönme matrisi, herhangi bir $\mathbf{w}$ hiperbolik sayısının null, timelike ya da spacelike olma karakterini değiştirmez. Yani, $\mathbf{w} = x + \mathbf{h}y$ ve $R_\theta(\mathbf{w}) = x' + \mathbf{h}y'$ sayılarının karakteri aynıdır. Dönme ise,

$$(x')^2 - (y')^2 = x^2 - y^2$$

hiperbolü üzerinde gerçekleşir.

Ayrıca, $\mathbf{P}^1_{sp}(1) \cong \mathbf{SO}^+(1,1)$ dönme grubu, Lorentziyen düzlemdeki

$$\mathbf{SO}(1,1) = \left\{ R : R^t I^* R = I^*,\ \det R = 1,\ I^* = diag(1,-1) \right\}$$

grubuna izormoftur. Yani her bir birim spacelike hiperbolik sayı, Lorentziyen düzlemde bir dönme matrisine karşılık gelir.

Örnek. $\mathbf{z} = \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\mathbf{h}$ *hiperbolik sayısının belirttiği dönme matrisini bulunuz. Bu matrisi kullanarak, aşağıdaki hiperbolik sayılar için* $R_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{w}_{\boldsymbol{i}})$ *hiperbolik sayısını bulunuz ve* $\mathbf{w}_{\boldsymbol{i}}$ *hiperbolik sayısının, hangi hiperbolün, hangi kolunda hangi hiperbolik açıyla döndüğünü belirtiniz.*

a) $\mathbf{w}_1 = 2 + 3\mathbf{h}$

b) $\mathbf{w}_2 = -3 + 2\mathbf{h}$

c) $\mathbf{w}_3 = 2 + \mathbf{h}$

d) $\mathbf{w}_4 = -3 + 4\mathbf{h}$

e) $\mathbf{w}_5 = 1 - 3\mathbf{h}$

f) $\mathbf{w}_6 = 1 + \mathbf{h}$

Çözüm. $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısı spacelike olduğundan

$$\theta = \tanh^{-1} \frac{4}{5}$$

ve

$$\mathbf{z} = \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\mathbf{h} = \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta$$

olarak yazılabilir. Buradan $\mathbf{z}$ sayısına karşılık gelen dönme matrisi

$$R_\theta = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

olur. O halde,

a) $\mathbf{w}_1 = 2 + 3\mathbf{h}$ için,

$$R_\theta(\mathbf{w}_1) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 22 \\ 23 \end{bmatrix}$$

olduğundan, $R_\theta(\mathbf{w}_1) = \frac{22}{3} + \frac{23}{3}\mathbf{h}$ elde edilir. Dönmenin gerçekleştiği hiperbol kolu $y^2 - x^2 = 5$ dikey hiperbolünün üst koludur. Yani, dönme $\mathbf{P}_{tm}^{1+}(\sqrt{5})$ üzerinde gerçekleşir. Dönme açısı ise, $\theta = \tanh^{-1}\frac{4}{5}$ 'dir. Bu açının doğruluğu,

$$\cosh\theta = \frac{|\langle \mathbf{w}_1, R_\theta(\mathbf{w}_1)\rangle|}{\|\mathbf{w}_1\|\,\|R_\theta(\mathbf{w}_1)\|}$$

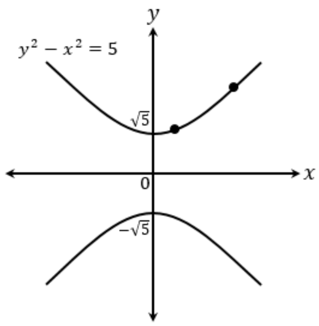
eşitliğinden de görülebilir. Gerçekten,

$$\cosh\theta = \frac{\left|2\cdot\frac{22}{3} - 3\cdot\frac{23}{3}\right|}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{5}{3}$$

ve

$$\sinh\theta = \frac{4}{3}$$

olduğundan, $\theta = \tanh^{-1}\frac{4}{5}$ olur.

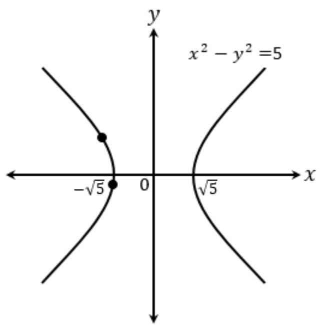


Şekil 3.4. $y^2 - x^2 = 5$ hiperbolünde $2 + 3\mathbf{h}$ 'ın dönmesi

b) $\mathbf{w}_2 = -3 + 2\mathbf{h}$ için,

$$R_\theta(\mathbf{w}_2) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olduğundan, $R_\theta(\mathbf{w}_2) = -\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\mathbf{h}$ elde edilir. Dönme, $x^2 - y^2 = 5$ yatay hiperbolünün sol kolunda gerçekleşir. Yani, $\mathbf{P}_{sp}^{1-}(\sqrt{5})$ üzerinde gerçekleşir. Böylece $\mathbf{w}_2 = -3 + 2\mathbf{h}$ hiperbolik sayısı $\theta = \tanh^{-1}\frac{4}{5}$ açısı kadar döndürülürse, $R_\theta(\mathbf{w}_2) = -\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\mathbf{h}$ elde edilir.

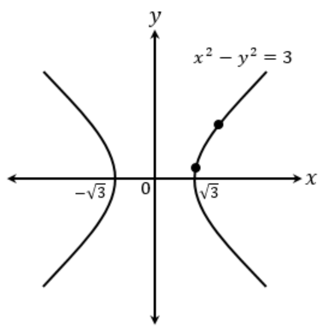


Şekil 3.5. $x^2 - y^2 = 5$ hiperbolünde $-3 + 2\mathbf{h}$ 'ın dönmesi

c) $\mathbf{w}_3 = 2 + \mathbf{h}$ için,

$$R_\theta(\mathbf{w}_3) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 14 \\ 13 \end{bmatrix}$$

olduğundan, $R_\theta(\mathbf{w}_3) = \dfrac{14}{3} + \dfrac{13}{3}\mathbf{h}$ olur. Dönmenin gerçekleştiği hiperbol kolu $x^2 - y^2 = 3$ yatay hiperbolünün, sağ koludur. Yani, dönme $\mathbf{P}_{sp}^{1+}(\sqrt{3})$ üzerinde gerçekleşir. O halde, $\mathbf{w}_3 = 2 + \mathbf{h}$ hiperbolik sayısı $\theta = \tanh^{-1}\dfrac{4}{5}$ kadar döndürülürse, $R_\theta(\mathbf{w}_3) = \dfrac{14}{3} + \dfrac{13}{3}\mathbf{h}$ elde edilir.

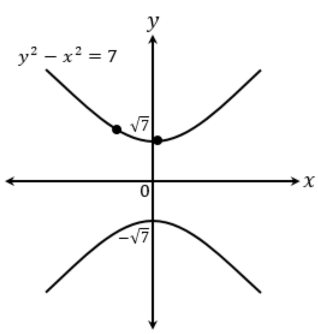


Şekil 3.6. $x^2 - y^2 = 3$ hiperbolünde $2 + \mathbf{h}$ 'ın dönmesi

d) $\mathbf{w}_4 = -3 + 4\mathbf{h}$ için,

$$R_\theta(\mathbf{w}_4) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

olduğundan, $R_\theta(\mathbf{w}_4) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{3}\mathbf{h}$ olarak bulunur. Dönmenin gerçekleştiği hiperbol kolu $y^2 - x^2 = 7$ dikey hiperbolünün, üst koludur. Yani, dönme $\mathbf{P}_{tm}^{1+}(\sqrt{7})$ üzerinde gerçekleşir. $\mathbf{w}_4 = -3 + 4\mathbf{h}$ hiperbolik sayısı $\theta = \tanh^{-1}\dfrac{4}{5}$ kadar döndürülürse, $R_\theta(\mathbf{w}_4) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{3}\mathbf{h}$ elde edilir.

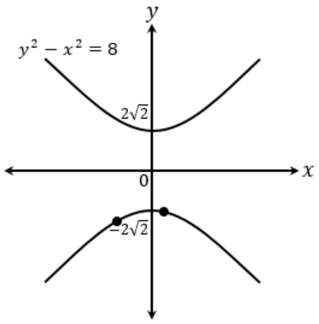


Şekil 3.7. $y^2 - x^2 = 7$ hiperbolünde $-3 + 4\mathbf{h}$ 'ın dönmesi

e) $\mathbf{w}_5 = 1 - 3\mathbf{h}$ için,

$$R_\theta(\mathbf{w}_5) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

olduğundan, $R_\theta(\mathbf{w}_5) = -\dfrac{7}{3} - \dfrac{11}{3}\mathbf{h}$ elde edilir. Dönmenin gerçekleştiği hiperbol kolu $y^2 - x^2 = 8$ yatay hiperbolünün, alt koludur. Yani, dönme $\mathbf{P}_{tm}^{1-}(2\sqrt{2})$ üzerinde gerçekleşir. Dolayısıyla $\mathbf{w}_5 = 1 - 3\mathbf{h}$ hiperbolik sayısı $\theta = \tanh^{-1}\dfrac{4}{5}$ açısı kadar döndürülürse, $R_\theta(\mathbf{w}_5) = -\dfrac{7}{3} - \dfrac{11}{3}\mathbf{h}$ elde edilir.

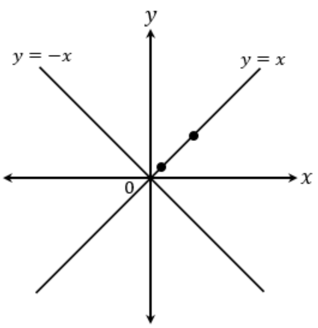


Şekil 3.8. $y^2 - x^2 = 8$ hiperbolünde $1 - 3\mathbf{h}$ 'ın dönmesi

f) $\mathbf{w}_6 = 1 + \mathbf{h}$ için,

$$R_\theta(\mathbf{w}_5) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olduğundan, $R_\theta(\mathbf{w}_6) = 3 + 3\mathbf{h}$ elde edilir. Dönme, $y = x$ doğrusu üzerinde gerçekleşir. Dönme sonucunda bir null hiperbolik sayı yine bir null hiperbolik sayıya dönüşür. Sadece, **z** hiperbolik sayısına bağlı olarak, dönme hareketi null hiperbolik sayısının $y = x$ üzerindeki koordinatını değiştirmiştir.



Şekil 3.9. $y = x$ doğrusunda $1 + \mathbf{h}$ 'ın dönmesi

3.4. Hiperbolik Vektörler

Kompleks sayılar kümesi cisim olduğundan ve iyi bilinen bir sayı kümesi olduğundan literatürde kompleks vektörler çok geniş şekilde incelenmiştir. Bunun yanında çeşitli fiziksel uygulamaları da çeşitli kaynaklarda verilmiştir (Deschamps 1972, Lindell 1983, Muralidhar 2015, Saleh-Anaraki 2010). Hiperbolik sayılar kümesi cisim olmadığı için, bir vektör uzayı yerine bir modül elde edilir.

Tanım 3.22. H birimli bir halka ve G değişmeli bir grup olmak üzere, G üzerindeki

$$\begin{aligned} &H \times G \to G \\ &(\lambda, \mathbf{x}) \to \lambda \mathbf{x} \end{aligned}$$

dış işlemi her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$ ve $\alpha, \beta \in H$ için

$M_1 : \alpha (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}$

$M_2 : (\alpha + \beta) \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x}$

$M_3 : (\alpha \cdot \beta) \mathbf{x} = \alpha (\beta \cdot \mathbf{x})$

$M_4 : 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

özelliklerini sağlıyorsa, bu dış işlem ile birlikte G değişmeli grubu H halkası üzerinde bir modüldür denir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 3.23. $\mathbb{P}^n = \{\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_n) : \mathbf{z}_i \in \mathbb{P},\ i = 1, 2, ..., n\}$ *kümesi* $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde bir modüldür.*

İspat. Öncelikle $\mathbb{P}^n$ kümesinin değişmeli bir grup olduğu gösterilmelidir.

G_1 : Toplama işlemi $+ : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ şeklinde tanımlandığından $\mathbb{P}^n$ kümesi $+$ işlemine göre kapalıdır.

G_2 : Her $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \in \mathbb{P}^n$, $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n) \in \mathbb{P}^n$ ve $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_n) \in \mathbb{P}^n$ için

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \mathbf{Z} &= [(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) + (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n)] + (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_n) \\ &= (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) + (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_n) \\ &= (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n + \mathbf{z}_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} + (\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) + [(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n) + (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_n)] \\ &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) + (\mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_1, \mathbf{y}_2 + \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{y}_n + \mathbf{z}_n) \\ &= (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n + \mathbf{z}_n) \end{aligned}$$

eşit olduklarından $(\mathbf{X}+\mathbf{Y})+\mathbf{Z} = \mathbf{X}+(\mathbf{Y}+\mathbf{Z})$ 'dir. Böylece $+$ işleminin birleşme özelliği vardır.

G_3 : Her $\mathbf{X} \in \mathbb{P}^n$ için

$$\mathbf{X}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{X}=\mathbf{X}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{0}$ etkisiz elemanına $\mathbf{0}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_n)$ denirse tanımdan yararlanarak bir tek

$$\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2=...=\mathbf{a}_n=\mathbf{0};\ \mathbf{0}=(\mathbf{0},\mathbf{0},...,\mathbf{0})\in\mathbb{P}^n$$

etkisiz elemanı elde edilir. Buradan $+$ işlemine göre $\mathbb{P}^n$ kümesinde bir $\mathbf{0}$ etkisiz elemanı vardır.

G_4 : $+$ işlemine göre her $\mathbf{X}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n)\in\mathbb{P}^n$ için

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{Y}+\mathbf{X}=\mathbf{0}$$

olacak şekilde bir tek $\mathbf{Y}\in\mathbb{P}^n$ ters elemanı vardır. Gerçekten toplama ve eşitlik tanımından $\mathbf{X}\in\mathbb{P}^n$ için

$$\mathbf{Y}=(-\mathbf{x}_1,-\mathbf{x}_2,...,-\mathbf{x}_n)\in\mathbb{P}^n$$

olduğu görülür.

G_5 : Her $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in\mathbb{P}^n$ için toplama ve eşitlik tanımı kullanılarak

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{Y}+\mathbf{X}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece $(\mathbb{P}^n,+)$ ikilisi değişmeli bir gruptur.

Şimdi $\mathbb{P}^n$ uzayının bir modül olduğu gösterilebilir. $\mathbb{P}$ birimli değişmeli bir halka ve $\mathbb{P}^n$ değişmeli bir grup olduğundan

M_1 : Her $\mathbf{X}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n)\in\mathbb{P}^n$, $\mathbf{Y}=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,...,\mathbf{y}_n)\in\mathbb{P}^n$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) &= \alpha((\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n)+(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,...,\mathbf{y}_n))\\ &= \alpha(\mathbf{x}_1+\mathbf{y}_1,\mathbf{x}_2+\mathbf{y}_2,...,\mathbf{x}_n+\mathbf{y}_n)\\ &= (\alpha\mathbf{x}_1+\alpha\mathbf{y}_1,\alpha\mathbf{x}_2+\alpha\mathbf{y}_2,...,\alpha\mathbf{x}_n+\alpha\mathbf{y}_n)\\ &= (\alpha\mathbf{x}_1,\alpha\mathbf{x}_2,...,\alpha\mathbf{x}_n)+(\alpha\mathbf{y}_1,\alpha\mathbf{y}_2,...,\alpha\mathbf{y}_n)\\ &= \alpha\mathbf{X}+\alpha\mathbf{Y}\end{aligned}$$

olur.

M_2 : Her $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \in \mathbb{P}^n$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\mathbf{X} &= (\alpha+\beta)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)\\ &= ((\alpha+\beta)\mathbf{x}_1, (\alpha+\beta)\mathbf{x}_2, ..., (\alpha+\beta)\mathbf{x}_n)\\ &= (\alpha\mathbf{x}_1+\beta\mathbf{x}_1, \alpha\mathbf{x}_2+\beta\mathbf{x}_2, ..., \alpha\mathbf{x}_n+\beta\mathbf{x}_n)\\ &= (\alpha\mathbf{x}_1, \alpha\mathbf{x}_2, ..., \alpha\mathbf{x}_n)+(\beta\mathbf{x}_1, \beta\mathbf{x}_2, ..., \beta\mathbf{x}_n)\\ &= \alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{X}\end{aligned}$$

olur.

M_3 : Her $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \in \mathbb{P}^n$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot\beta)\mathbf{X} &= (\alpha\cdot\beta)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)\\ &= (\alpha\beta\mathbf{x}_1, \alpha\beta\mathbf{x}_2, ..., \alpha\beta\mathbf{x}_n)\\ &= \alpha(\beta\mathbf{x}_1, \beta\mathbf{x}_2, ..., \beta\mathbf{x}_n)\\ &= \alpha(\beta\cdot\mathbf{X})\end{aligned}$$

olur.

M_4 : Her $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \in \mathbb{P}^n$ için

$$1\cdot\mathbf{X} = \mathbf{X}$$

olacak şekilde $1 \in \mathbb{R}$ vardır. □

3.4.1. $\mathbb{P}^n$ uzayında skaler çarpımlar

$\mathbb{P}^n$ uzayında tanımlanabilecek en önemli dört skaler çarpım aşağıdaki gibidir.

1. Standart Skaler Çarpım : $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$,

2. Hermityen Skaler Çarpım : $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_h$,

3. Standart Lorentziyen Skaler Çarpım : $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_L$,

4. Hermityen Lorentziyen Skaler Çarpım : $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_{Lh}$.

Bu tezde, ikinci sırada belirtilen hermityen iç çarpım üzerinde durulacak. Diğerleri ele alınmayacaktır. Bu iç çarpımlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.24. $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n) \in\mathbb{P}^n$, $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n) \in\mathbb{P}^n$ olmak üzere, $\mathbb{P}^n$ vektör modülünde standart skaler çarpım, Hermityen skaler çarpım, Standart Lorentziyen skaler çarpım ve Hermityen Lorentziyen skaler çarpım sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} \\
&(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \to \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{P}} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i = \mathbf{U}^t \mathbf{V} , \\
&(\mathbf{U}, \mathbf{V})_h \to \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{h\mathbb{P}} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{u}_i \overline{\mathbf{v}_i} = \mathbf{U}^t \overline{\mathbf{V}} , \\
&(\mathbf{U}, \mathbf{V})_L \to \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{L\mathbb{P}} = -\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{i,j=2}^{n} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i = \mathbf{U}^t I^* \mathbf{V} , \\
&(\mathbf{U}, \mathbf{V})_{Lh} \to \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{Lh\mathbb{P}} = -\mathbf{u}_1 \overline{\mathbf{v}_1} + \sum_{i,j=2}^{n} \mathbf{u}_i \overline{\mathbf{v}_i} = \mathbf{U}^t I^* \overline{\mathbf{V}} ,
\end{aligned}$$

$I^* = diag\,(-1, 1, 1, ..., 1)$ şeklinde tanımlanır. Bu skaler çarpımlardan, sadece hermityen olanlarda,

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle \in \mathbb{R}$$

olacaktır. Buna göre de, bir $\mathbf{U}$ hiperbolik vektörü, $\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle > 0$ ise spacelike, $\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle = 0$ ise null ve $\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle < 0$ ise timelike olarak adlandırılacaktır. Bu tezde, sadece

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_h \to \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{h\mathbb{P}} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{u}_i \overline{\mathbf{v}_i} = \mathbf{U}^t \overline{\mathbf{V}}$$

hermityen skaler çarpımı ele alınacaktır.

Örnek. $\mathbf{U} = (1 + \mathbf{h}, 2 - \mathbf{h}, -1 + 2\mathbf{h}) \in \mathbb{P}^3$ *ve* $\mathbf{V} = (3 - 2\mathbf{h}, 1 + \mathbf{h}, 2 - \mathbf{h}) \in \mathbb{P}^3$ *için* $\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{h\mathbb{P}}$ *iç çarpımı nedir?* $\mathbf{U}$ *ve* $\mathbf{V}$ *vektörlerinin türü nedir?*

Çözüm.

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{h\mathbb{P}} &= \langle (1 + \mathbf{h}, 2 - \mathbf{h}, -1 + 2\mathbf{h}) , (3 - 2\mathbf{h}, 1 + \mathbf{h}, 2 - \mathbf{h}) \rangle_{\mathbb{P}} \\
&= (1 + \mathbf{h}) (3 + 2\mathbf{h}) + (2 - \mathbf{h}) (1 - \mathbf{h}) + (-1 + 2\mathbf{h}) (2 + \mathbf{h}) \\
&= 8 + 5\mathbf{h}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan,

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{h\mathbb{P}} = (1 + \mathbf{h}) (1 - \mathbf{h}) + (2 - \mathbf{h}) (2 + \mathbf{h}) + (-1 + 2\mathbf{h}) (-1 - 2\mathbf{h}) = 0$$

olduğundan, $\mathbf{U}$ vektörü bir null hiperbolik sayı vektörüdür.

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle_{h\mathbb{P}} = (3 - 2\mathbf{h}) (3 + 2\mathbf{h}) + (1 + \mathbf{h}) (1 - \mathbf{h}) + (2 - \mathbf{h}) (2 + \mathbf{h}) = 8 > 0$$

olduğundan, $\mathbf{V}$ vektörü ise spacelike bir hiperbolik sayı vektörüdür.

3.4.2. $\mathbb{P}^3$ uzayında vektörel çarpım

Tanım 3.25. $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in \mathbb{P}^3$, ve $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) \in \mathbb{P}^3$ olmak üzere $\mathbb{P}^3$ uzayında vektörel çarpım

$$\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y} = \overline{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}} = \overline{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \\ \overline{\mathbf{y}_1} & \overline{\mathbf{y}_2} & \overline{\mathbf{y}_3} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek. $\mathbf{X} = (1, 1+\mathbf{h}, -1)$ *ve* $\mathbf{Y} = (-\mathbf{h}, \mathbf{h}, 1)$ *olmak üzere* $\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y}$ *nedir?*

$$\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1-\mathbf{h} & -1 \\ \mathbf{h} & -\mathbf{h} & 1 \end{vmatrix} = (1-2\mathbf{h}, -1-\mathbf{h}, 1-2\mathbf{h})$$

3.4.3. $\mathbb{P}^3$ uzayında vektörel çarpımın bazı özellikleri

i. $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{P}^3$ için

$$\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y} = -\mathbf{Y} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{X}$$

olur (Vektörel çarpımın değişme özelliği yoktur).

İspat. $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in \mathbb{P}^3$, ve $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) \in \mathbb{P}^3$ olmak üzere

$$\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \\ \overline{\mathbf{y}_1} & \overline{\mathbf{y}_2} & \overline{\mathbf{y}_3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \overline{\mathbf{y}_1} & \overline{\mathbf{y}_2} & \overline{\mathbf{y}_3} \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \end{vmatrix} = -\mathbf{Y} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{X}$$

olur. □

ii. $\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3$ için

$$\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

olur (Bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı $\mathbf{0}$ vektörüdür).

İspat. Herhangi iki satırı aynı olan matrisin determinantı $\mathbf{0}$ olduğundan,

$$\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

olur. □

iii. $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{P}^3$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(\lambda\mathbf{X}) \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y} = \lambda (\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y})$$

olur.

İspat. $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in \mathbb{P}^3$, ve $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) \in \mathbb{P}^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\lambda\mathbf{X}) \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \overline{\lambda\mathbf{x}_1} & \overline{\lambda\mathbf{x}_2} & \overline{\lambda\mathbf{x}_3} \\ \overline{\mathbf{y}_1} & \overline{\mathbf{y}_2} & \overline{\mathbf{y}_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \lambda\overline{\mathbf{x}_1} & \lambda\overline{\mathbf{x}_2} & \lambda\overline{\mathbf{x}_3} \\ \overline{\mathbf{y}_1} & \overline{\mathbf{y}_2} & \overline{\mathbf{y}_3} \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \\ \overline{\mathbf{y}_1} & \overline{\mathbf{y}_2} & \overline{\mathbf{y}_3} \end{vmatrix} \\
&= \lambda (\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y})
\end{aligned}$$

□

iv. $\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3$ için

$$\mathbf{0} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{X} = \mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

olur.

İspat. Herhangi bir satırı $\mathbf{0}$ vektörü olan matrisin determinantı $\mathbf{0}$ olduğundan,

$$\mathbf{0} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \end{vmatrix} = \mathbf{0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{0}$$

olur. □

v. $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{P}^3$ olmak üzere

$$\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ için } \mathbf{X} = \lambda\mathbf{Y}$$

olur (Yani $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ vektörü paralel ise vektörel çarpım $\mathbf{0}$ vektörüdür).

İspat. $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in \mathbb{P}^3$, ve $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) \in \mathbb{P}^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \\ \overline{\mathbf{y}_1} & \overline{\mathbf{y}_2} & \overline{\mathbf{y}_3} \end{vmatrix} \\
&= (\overline{\mathbf{x}_2\mathbf{y}_3} - \overline{\mathbf{y}_2\mathbf{x}_3}, -\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{y}_3} + \overline{\mathbf{y}_1\mathbf{x}_3}, \overline{\mathbf{x}_1\mathbf{y}_2} - \overline{\mathbf{y}_1\mathbf{x}_2}) \\
&= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \mathbf{x}_2\mathbf{y}_3 &= \mathbf{y}_2\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_3\mathbf{y}_1 &= \mathbf{y}_3\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1\mathbf{y}_2 &= \mathbf{y}_1\mathbf{x}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \mathbf{y}_2\underbrace{\mathbf{x}_3\mathbf{y}_3^{-1}}_{\lambda} \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{y}_3\underbrace{\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^{-1}}_{\lambda} \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{y}_1\underbrace{\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2^{-1}}_{\lambda} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \lambda\mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_3 &= \lambda\mathbf{y}_3 \\ \mathbf{x}_1 &= \lambda\mathbf{y}_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$$

olur. □

vi. $\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} (\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y}) + (\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Z})$ ’dir.

İspat. $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in \mathbb{P}^3$, ve $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) \in \mathbb{P}^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} (\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \\ \overline{\mathbf{y}_1} + \overline{z_1} & \overline{\mathbf{y}_2} + \overline{z_2} & \overline{\mathbf{y}_3} + \overline{z_3} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \\ \overline{\mathbf{y}_1} & \overline{\mathbf{y}_2} & \overline{\mathbf{y}_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \overline{\mathbf{x}_1} & \overline{\mathbf{x}_2} & \overline{\mathbf{x}_3} \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix} \\ &= (\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Y}) + (\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

3.4.4. $\mathbb{P}^n$ uzayında bir vektörün normu

Tanım 3.26. $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_n) \in \mathbb{P}^n$, ve $\mathbf{z}_i = x_i + \mathbf{h}y_i \;\; (i = 1, 2, ..., n)$ olmak üzere bir z hiperbolik vektörünün normu

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{h\mathbb{P}} &: \mathbb{P}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ \mathbf{Z} &\to \|\mathbf{Z}\|_{h\mathbb{P}} = \sqrt{|\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle_{h\mathbb{P}}|} \\ &= \sqrt{|\mathbf{x}_1^2 - \mathbf{y}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 - \mathbf{y}_2^2 + ... + \mathbf{x}_n^2 - \mathbf{y}_n^2|} = \left(\left|\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^2 - \mathbf{y}_i^2\right|\right)^{\dfrac{1}{2}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

3.5. Hiperbolik Sayı Matrisleri

Elemanları kompleks sayı olan matris cebiri lineer cebir, geometri ve mühendislikte sıkça karşılaşılan ve bu nedenle çok geniş şekilde ele alınmış bir cebirdir. Yine üniter, hermityen ve skew-hermityen matrisler de sıkça karşılaşılan matrislerdir (Bernstein 1990, Bernstein ve So 1993, Chung ve Yan 1997, Ozols 2009, Smoktunowicz ve Tadej 2008, Tapp 2016). Bu bölümde, elemanları hiperbolik sayılar olan matrisler ele alınacaktır. Bu matrislerin terslerinin, özdeğer ve özvektörlerinin varlığı incelenecek. Hermityen, skew hermityen ve hiperbolik üniter matrisleri tanımlanarak, vektörel çarpım ve exponensiyel dönüşüm yardımıyla bir hiperbolik sayı değişkenli dönme matrisleri üretilecektir.

Tanım 3.27. Elemenları hiperbolik sayı olan matrislere hiperbolik matris denir ve hiperbolik matrislerin kümesi $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{P})$ ile gösterilir. Yani, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ için,

$$Z = [\mathbf{z}_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{P}) \ , \ \mathbf{z}_{ij} = x_{ij} + \mathbf{h}y_{ij}, \ \mathbf{z}_{ij} \in \mathbb{P}, \ x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{R}$$

olmak üzere Z matrisine, m satırlı n sütunlu bir hiperbolik matris veya kısaca $m \times n$ tipinden hiperbolik matris denir. Bir Z hiperbolik matrisi

$$\begin{aligned}
Z = [\mathbf{z}_{ij}]_{m\times n} &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} & \cdots & \mathbf{z}_{1n} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} & \cdots & \mathbf{z}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{z}_{m1} & \mathbf{z}_{m2} & \cdots & \mathbf{z}_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \\
&= \begin{bmatrix} x_{11} + \mathbf{h}\mathbf{y}_{11} & x_{12} + \mathbf{h}\mathbf{y}_{12} & \cdots & x_{1n} + \mathbf{h}\mathbf{y}_{1n} \\ x_{21} + \mathbf{h}\mathbf{y}_{21} & x_{22} + \mathbf{h}y_{22} & \cdots & x_{2n} + \mathbf{h}y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} + \mathbf{h}y_{m1} & x_{m2} + \mathbf{h}y_{m2} & \cdots & x_{mn} + \mathbf{h}y_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}}_{X} + \mathbf{h} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}}_{Y} \\
&= X + \mathbf{h}Y
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Yani, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ olmak üzere,

$$Z = [\mathbf{z}_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{P}), X = [x_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

$$Y = [y_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

olacaktır.

Tanım 3.28. Z ve W elemanları hiperbolik sayı olan bir kare matris olsun.

$$ZW = WZ = I$$

eşitliği var ise, W matrisine Z matrisinin tersi denir. Reel sayı matrislerinde olduğu gibi,

$$Z^{-1} = \frac{ek\,(Z)}{\det Z}$$

ile bulunabilir. Fakat, Z matrisinin determinantı null hiperbolik sayı ise, bu matrisin tersi yoktur.

Sonuç 3.29. *Bir matrisin herhangi bir satır ya da sütunu bir null sayının katı olarak yazılabiliyorsa, bu matrisin tersi yoktur.*

İspat. Bir A matrisinin bir satırı, $1 \pm \mathbf{h}$ çarpanına sahip ise, determinant tanımından dolayı, bu matrisin determinatı $1 \pm \mathbf{h}$ null sayısının bir katı olacaktır. Yani determinant bir nul sayı olduğundan, tersi yoktur. Yani $\dfrac{1}{\det A}$ tanımlı olmadığından tersi yoktur. $\square$

Not. Bir matrisin herhangi bir satırı ya da sütunu bir null vektör olsa bile, bu matrisin determinantı null olmayabilir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 + 2\mathbf{h} & \mathbf{h} \\ 2 + \mathbf{h} & \mathbf{h} + 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin, birinci kolonu $\mathbf{u} = (1 + 2\mathbf{h}, 2 + \mathbf{h})$ vektörü, hermityen iç çarpıma göre bir null vektördür. Bu matrisin determinantı ise $4 - 5\mathbf{h}$ null olmayan bir sayıdır.

3.5.1. Hiperbolik hermityen, hiperbolik skew hermityen ve hiperbolik üniter matrisler

Kompleks üniter matrislere benzer şekilde, hiperbolik üniter matrisler tanımlanabilir. Kompleks üniter matrisler için detaylı bilgi Zhang'ın (2011) kitabında bulunabilir..

Tanım 3.30. i. R matrisinin hiperbolik üniter matris olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{P}^n$ için $\langle R\mathbf{X}, R\mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}} = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}}$ olmasıdır.

ii. S matrisinin hiperbolik hermityen matris olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{P}^n$ için $\langle S\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}} = \langle \mathbf{X}, S\mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}}$ olmasıdır.

iii. T matrisinin hiperbolik skew-hermityen matris olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{P}^n$ için $\langle T\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}} = -\langle \mathbf{X}, T\mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}}$ olmasıdır.

Teorem 3.31. *Hiperbolik bir A matrisinin eşlenik transpozesi $\overline{A}^t = A^*$ olmak üzere $\mathbb{P}^n$ uzayında standart iç çarpım göz önüne alınırsa*

i. *R matrisinin hiperbolik üniter matris olması için gerek ve yeter koşul $R^* = R^{-1}$ olmasıdır.*
ii. *S matrisinin hiperbolik hermityen matris olması için gerek ve yeter koşul $S^* = S$ olmasıdır.*
iii. *T matrisinin hiperbolik skew-hermityen matris olması için gerek ve yeter koşul $T^* = -T$ olmasıdır.*

İspat. $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{P}^n$ olmak üzere hermityen skaler çarpımı göz önüne alalım. Yani

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbb{P}} = \mathbf{U}^t A \overline{\mathbf{V}} = \mathbf{U}^t I \overline{\mathbf{V}} = \mathbf{U}^T \overline{\mathbf{V}}$$

olsun.

i.

$$\begin{aligned}
\langle R\mathbf{X}, R\mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}} = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}} &\Leftrightarrow (R\mathbf{X})^t\, \overline{R\mathbf{Y}} = \mathbf{X}^t \overline{\mathbf{Y}} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{X}^t R^t \overline{R\mathbf{Y}} = \mathbf{X}^t \overline{\mathbf{Y}} \Leftrightarrow R^t \overline{R} = I \\
&\Leftrightarrow \overline{R}^t = R^{-1} \\
&\Leftrightarrow R^* = R^{-1}
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\langle S\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}} = \langle \mathbf{X}, S\mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}} &\Leftrightarrow (S\mathbf{X})^t\, \overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}^t \overline{S\mathbf{Y}} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{X}^t S^t \overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}^t \overline{S\mathbf{Y}} \Leftrightarrow S^t = \overline{S} \\
&\Leftrightarrow \overline{S}^t = S \\
&\Leftrightarrow S^* = S
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
\langle T\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}} = -\langle \mathbf{X}, T\mathbf{Y} \rangle_{h\mathbb{P}} &\Leftrightarrow (T\mathbf{X})^t\, \overline{\mathbf{Y}} = -\mathbf{X}^t \overline{T\mathbf{Y}} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{X}^t T^t \overline{\mathbf{Y}} = -\mathbf{X}^t \overline{T\mathbf{Y}} \Leftrightarrow T^t = -\overline{T} \\
&\Leftrightarrow \overline{T}^t = -T \\
&\Leftrightarrow T^* = -T
\end{aligned}$$

□

Teorem 3.32. *A matrisi hiperbolik hermityen matris ise özdeğerleri reeldir.*

İspat. A matrisi hiperbolik hermityen matris olmak üzere, A matrisinin özdeğeri λ olsun. O halde $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{P}^n$ için

$$A\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U} \text{ ve } \langle A\mathbf{U}, \mathbf{v}\rangle_{h\mathbb{P}} = \langle \mathbf{U}, A\mathbf{v}\rangle_{h\mathbb{P}}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\lambda \langle \mathbf{U}, \mathbf{U}\rangle_{h\mathbb{P}} &= \langle \lambda\mathbf{U}, \mathbf{U}\rangle_{h\mathbb{P}} = \langle A\mathbf{U}, \mathbf{U}\rangle_{h\mathbb{P}} = \langle \mathbf{U}, A\mathbf{U}\rangle_{h\mathbb{P}} \\ &= \langle \mathbf{U}, \lambda\mathbf{U}\rangle_{h\mathbb{P}} = \overline{\lambda} \langle \mathbf{U}, \mathbf{U}\rangle_{h\mathbb{P}} \\ &\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Teorem 3.33. *Hiperbolik üniter bir matrisin determinantının modülü 1'dir.*

İspat. R hiperbolik üniter ise, $\overline{R}^t = R^{-1}$ olacaktır. Buna göre, $\overline{R}^t R = I$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\det\left(\overline{R}^t R\right) = 1 &\Rightarrow \det \overline{R}^t \det R = 1 \\ &\Rightarrow \det \overline{R} \det R = 1 \\ &\Rightarrow \overline{\det R} \det R = 1 \\ &\Rightarrow |\det R|^2 = 1\end{aligned}$$

eşitliğinden, $|\det R| = 1$ bulunur. □

Örnek. $R = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\mathbf{h} + 1 & \sqrt{2}\mathbf{h} + 2 \\ \sqrt{2}\mathbf{h} + 2 & \sqrt{2}\mathbf{h} + 1 \end{bmatrix}$ *bir hiperbolik üniter matristir. Gerçekten,*

$$\overline{R}^t R = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2}\mathbf{h} & 2 - \sqrt{2}\mathbf{h} \\ 2 - \sqrt{2}\mathbf{h} & 1 - \sqrt{2}\mathbf{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2}\mathbf{h} & 2 + \sqrt{2}\mathbf{h} \\ 2 + \sqrt{2}\mathbf{h} & 1 + \sqrt{2}\mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca,

$$\det R = -3 - 2\sqrt{2}\mathbf{h}$$

ve $|\det R| = \sqrt{9-8} = 1$ *olur.*

Teorem 3.34. 2×2 *türünden* $R = \begin{bmatrix} \mathbf{z} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{z} \end{bmatrix}$ *formundaki hiperbolik üniter matrisler,* $\mathbf{z} = a + \mathbf{h}b$ *timelike birim hiperbolik sayı ise,*

$$\begin{bmatrix} a + \mathbf{h}b & \pm b\sqrt{2} + \sqrt{2}a\mathbf{h} \\ \pm b\sqrt{2} + \sqrt{2}a\mathbf{h} & a + \mathbf{h}b \end{bmatrix}$$

formunda, spacelike birim hiperbolik sayı ise,

$$\begin{bmatrix} a+\mathbf{h}b & 0 \\ 0 & a+\mathbf{h}b \end{bmatrix}$$

formundadır.

İspat. R matrisinin hiperbolik üniter olması için, $\overline{R}^t R = I$ olmalıdır. Buradan, $\mathbf{z} = a+\mathbf{h}b$ ve $\mathbf{x} = m + \mathbf{h}n$ alınırsa,

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + m^2 - n^2 &= 1 \\ ma - nb &= 0 \end{aligned}$$

olması gerektiği görülür. Buradan,

$$\begin{aligned} ma - nb = 0 \Rightarrow m &= n\frac{b}{a} \\ \Rightarrow n &= \pm a\sqrt{\frac{1-a^2+b^2}{b^2-a^2}} \end{aligned}$$

olur. O halde,

$$\begin{bmatrix} a+\mathbf{h}b & \pm a\sqrt{\dfrac{1-a^2+b^2}{b^2-a^2}}\mathbf{h}\left(a+b\mathbf{h}\right) \\ \pm a\sqrt{\dfrac{1-a^2+b^2}{b^2-a^2}}\mathbf{h}\left(a+b\mathbf{h}\right) & a+\mathbf{h}b \end{bmatrix}$$

matrisi bir üniter matris olacaktır.

Eğer, $\mathbf{z} = a + \mathbf{h}b$ timelike birim hiperbolik sayı ise, $b^2 - a^2 = 1$ olacağından,

$$\begin{bmatrix} a+\mathbf{h}b & \pm\sqrt{2}h\left(a+b\mathbf{h}\right) \\ \pm\sqrt{2}h\left(a+b\mathbf{h}\right) & a+\mathbf{h}b \end{bmatrix}$$

ve spacelike birim hiperbolik sayı ise, $a^2 - b^2 = 1$ olacağından,

$$\begin{bmatrix} a+\mathbf{h}b & 0 \\ 0 & a+\mathbf{h}b \end{bmatrix}$$

elde edilir. □

Örnek. $\mathbf{z} = 2\sqrt{2} + 3\mathbf{h}$ *alınırsa,*

$$R_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+3\mathbf{h} & 3\sqrt{2}+4\mathbf{h} \\ 3\sqrt{2}+4\mathbf{h} & 2\sqrt{2}+3\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

hiperbolik üniter matrisi elde edilir. $\mathbf{z} = 3 + 2\sqrt{2}\mathbf{h}$ *alındığında ise,*

$$R_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}\mathbf{h} + 3 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}\mathbf{h} + 3 \end{bmatrix}$$

matrisi bulunur.

Yukarıdaki teoreme göre aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 3.35. *Her birim timelike hiperbolik sayıya,*

$$\begin{bmatrix} \sinh\theta + \mathbf{h}\cosh\theta & \sqrt{2}\left(\pm\sinh\theta + \cosh\theta\mathbf{h}\right) \\ \sqrt{2}\left(\pm\sinh\theta + \cosh\theta\mathbf{h}\right) & \sinh\theta + \mathbf{h}\cosh\theta \end{bmatrix}$$

biçiminde bir hiperbolik üniter matris, her birim spacelike hiperbolik sayıya da

$$\begin{bmatrix} \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta & 0 \\ 0 & \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta \end{bmatrix}$$

formunda bir hiperbolik üniter matris karşılık gelir.

3.5.2. $\mathbb{P}^3$ uzayında bir üniter matris örneği

Şimdi, $\mathbb{P}^3$ uzayında hermityen skaler çarpım ve vektörel çarpım kullanılarak, 3×3 türünden bir üniter matrisin nasıl elde edilecegi gösterilecektir. Bunun için, rastgele bir $\mathbf{U} \in \mathbb{P}^3$ birim hiperbolik vektörü alınır. Daha sonra,

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{h\mathbb{P}} = 0$$

olacak şekilde bir $\mathbf{V}$ birim hiperbolik vektörü belirlenir. $\mathbf{W} = \mathbf{U} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{V}$ ile üçüncü bir birim hiperbolik vektör bulunur. $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ vektörlerinin oluşturduğu

$$[\mathbf{U}\ \mathbf{V}\ \mathbf{W}]$$

hiperbolik değişkenli matris, bir üniter matristir.

Örnek. $\mathbf{U} = \left(\sqrt{2} + \mathbf{h}, \sqrt{2} - \mathbf{h}, 1 - \sqrt{2}\mathbf{h}\right)$ *vektörü verilsin.*

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle_{h\mathbb{P}} = 0$$

olacak şekilde, $V = \left(1 - \sqrt{2}\mathbf{h}, 1 - \sqrt{2}\mathbf{h}, a + b\mathbf{h}\right)$ *vektöründe* a *ve* b *belirlenebilir. Buna göre,*

$$\begin{cases} a + \sqrt{2}b = -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}a + b = 4 \end{cases}$$

denklem sisteminden, $a = 6\sqrt{2}$ *ve* $b = -8$ *bulunur. Böylece,*

$$\|V\| = -1 - 1 + 8 = 6$$

olduğundan,

$$V = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(1 - \sqrt{2}\mathbf{h}, 1 - \sqrt{2}\mathbf{h}, 6\sqrt{2} - 8\mathbf{h}\right)$$

alınır. Son olarak,

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} \times_{\mathbb{P}} \mathbf{V} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \sqrt{2} - \mathbf{h} & \sqrt{2} + \mathbf{h} & 1 + \sqrt{2}\mathbf{h} \\ 1 + \sqrt{2}\mathbf{h} & 1 + \sqrt{2}\mathbf{h} & 6\sqrt{2} + 8\mathbf{h} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(17 + 12\sqrt{2}\mathbf{h}, -1, -2\sqrt{2} - 2\mathbf{h}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$R = \frac{1}{\sqrt{6}}\det\begin{bmatrix} \sqrt{12} + \sqrt{6}\mathbf{h} & 1 - \sqrt{2}\mathbf{h} & 17 + 12\sqrt{2}\mathbf{h} \\ \sqrt{12} - \sqrt{6}\mathbf{h} & 1 - \sqrt{2}\mathbf{h} & -1 \\ \sqrt{6} - \sqrt{12}\mathbf{h} & 6\sqrt{2} - 8\mathbf{h} & -2\sqrt{2} - 2\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin determinantı 1 *'dir ve* $R^*R = I$ *koşulunu sağlar. Yani* R *matrisi bir hiperbolik üniter matristir.*

3.6. Hiperbolik Sayı Matrislerinin Exponansiyeli

Bu bölümde elemanları hiperbolik sayı olan 2×2 türünden matrislerin exponansiyeli hesaplanacaktır. Kompleks matrisler için, matrislerin exponansiyeli Bersntein ve So 'nun çalışmasında bulunabilir (Bernstein ve So 1993).

Tanım 3.36. Bir $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ hiperbolik sayısının exponansiyeli

$$e^{\mathbf{z}} = e^{x+\mathbf{h}y} = e^x e^{\mathbf{h}y} = e^x\left(\cosh y + \mathbf{h}\sinh y\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.37. Elemanları herhangi hiperbolik sayı olan $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin exponansiyeli, yani e^A matrisi

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $A = diag\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\right)$ ise yani köşegen matrisi ise, A matrisinin exponansiyeli $e^A = diag\left(e^{\mathbf{a}_1}, e^{\mathbf{a}_2}, ..., e^{\mathbf{a}_n}\right)$ olur. Gerçekten,

$$
\begin{aligned}
e^A &= I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ... \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{a}_1^2}{2!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{a}_2^2}{2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\mathbf{a}_n^2}{2!} \end{bmatrix} + ... \\
&= \begin{bmatrix} e^{\mathbf{a}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{a}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\mathbf{a}_n} \end{bmatrix} \\
&= diag\left(e^{a_1}, e^{a_2}, ..., e^{a_n}\right)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Köşegen olmayan matrisler için durum daha karmaşıktır. Fakat, bir A matrisi köşegenleştirilebilir ise, e^A matrisini hesaplamak için basit bir algoritma vardır. Bu algoritma, aşağıdaki lemmanın bir sonucudur.

Lemma 3.38. *A ve P matrisleri $n \times n$ tipinde hiperbolik matris olsun ve varsayalım ki P matrisinin tersi olsun.* $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$ *şeklindedir.*

İspat. Hatırlanacağı üzere tüm $m \geq 0$ tamsayıları için

$$\left(P^{-1}AP\right)^m = P^{-1}A^m P$$

olur. Bu veriler (3.9) formülünde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
e^{P^{-1}AP} &= I + P^{-1}AP + \frac{\left(P^{-1}AP\right)^2}{2!} + \frac{\left(P^{-1}AP\right)^3}{3!} + ... \\
&= I + P^{-1}AP + P^{-1}\frac{A^2}{2!}P + P^{-1}\frac{A^3}{3!}P + ... \\
&= P^{-1}\left(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ...\right)P \\
&= P^{-1}e^A P
\end{aligned}
$$

olur. Eğer bir A matrisi köşegenleştirilebilirse, bu durumda $A = PDP^{-1}$ olacak şekilde bir tersinir P matrisi vardır. Burada D matrisi, A matrisinin özdeğerlerinden oluşan köşegen matristir ve P matrisi, sütunları A matrisinin özvektörlerinden oluşan bir matristir. Bu durumda, $e^A = Pe^D P^{-1}$ olur. □

3.6.1. 2×2 hiperbolik matrislerin exponansiyeli

Lemma 3.39. *$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{P})$ olsun. O halde,*

i. $\mathbf{a} = \mathbf{d}$ ise $e^A = e^{\mathbf{a}} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$

ii. $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ise $e^A = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{a}} & \dfrac{\mathbf{b}\left(e^{\mathbf{a}} - e^{\mathbf{d}}\right)}{\mathbf{a} - \mathbf{d}} \\ \mathbf{0} & e^{\mathbf{d}} \end{bmatrix}$

İspat. $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{P})$ olmak üzere,

i. $\mathbf{a} = \mathbf{d}$ olsun. Tümevarım kullanılarak

$$A^n = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^n & n\mathbf{a}^{n-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^n \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilebilir.

$n = 1$ için

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

olur.

$n = 2$ için

$$A^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^2 & \mathbf{2ab} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^2 \end{bmatrix}$$

olur. Şimdi $n = k - 1$ için doğru olduğunu kabul edilirse $n = k$ için doğru olduğu gösterilebilir. O halde,

$n = k - 1$ için

$$A^{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{k-1} & (k-1)\,\mathbf{a}^{k-2}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^{k-1} \end{bmatrix}$$

olsun.

$n = k$ için

$$A^k = A^{k-1}A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{k-1} & (k-1)\,\mathbf{a}^{k-2}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{a}^k & \mathbf{b}\mathbf{a}^{k-1} + (k-1)\,\mathbf{a}^{k-2}\mathbf{b}\mathbf{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^k \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{a}^k & k\mathbf{a}^{k-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^k \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ...$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{a}^2}{2!} & \frac{2\mathbf{ab}}{2!} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{a}^2}{2!} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{a}^3}{3!} & \frac{3\mathbf{a}^2\mathbf{b}}{3!} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{a}^3}{3!} \end{bmatrix} + ...$$
$$= \begin{bmatrix} 1+\mathbf{a}+\frac{\mathbf{a}^2}{2!}+\frac{\mathbf{a}^3}{3!}+... & \mathbf{b}+\frac{2\mathbf{ab}}{2!}+\frac{3\mathbf{a}^2\mathbf{b}}{3!}+...+\frac{n\mathbf{a}^{n-1}\mathbf{b}}{n!}+... \\ \mathbf{0} & 1+\mathbf{a}+\frac{\mathbf{a}^2}{2!}+\frac{\mathbf{a}^3}{3!}+... \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e^{\mathbf{a}} & \mathbf{b}+\frac{2\mathbf{ab}}{2!}+\frac{3\mathbf{a}^2\mathbf{b}}{3!}+...+\frac{n\mathbf{a}^{n-1}\mathbf{b}}{n!}+... \\ \mathbf{0} & e^{a} \end{bmatrix}$$
$$= e^{\mathbf{a}} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

ii. $a \neq d$ olsun. Yine benzer şekilde tümevarım kullanarak

$$A^n = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^n & \dfrac{\mathbf{b}\,(\mathbf{a}^n+\mathbf{d}^n)}{\mathbf{a}-\mathbf{d}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}^n \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilebilir.

$n = 1$ için

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

olur.

$n = 2$ için

$$A^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^2 & \mathbf{b}\,(\mathbf{a}+\mathbf{d}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}^2 \end{bmatrix}$$

olur. Şimdi $n = k - 1$ için doğru olduğu kabul edilip $n = k$ için doğru olduğu gösterilmelidir. O halde, $n = k - 1$ için

$$A^{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{k-1} & \dfrac{\mathbf{b}\left(\mathbf{a}^{k-1}+\mathbf{d}^{k-1}\right)}{\mathbf{a}-\mathbf{d}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}^{k-1} \end{bmatrix}$$

olsun.

$n = k$ için de doğru olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} A^k = A^{k-1}A &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{k-1} & \dfrac{\mathbf{b}\left(\mathbf{a}^{k-1}+\mathbf{d}^{k-1}\right)}{\mathbf{a}-\mathbf{d}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{k} & \mathbf{a}^{k-1}\mathbf{b}+\dfrac{\mathbf{b}\left(\mathbf{a}^{k-1}+\mathbf{d}^{k-1}\right)}{\mathbf{a}-\mathbf{d}}\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}^{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{k} & \mathbf{b}\left(\mathbf{a}^{k-1}+\dfrac{\mathbf{d}\mathbf{a}^{k-1}+\mathbf{d}^{k}}{\mathbf{a}-\mathbf{d}}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}^{k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{k} & \mathbf{b}\left(\dfrac{\mathbf{a}^{k}-\mathbf{d}\mathbf{a}^{k-1}+\mathbf{d}\mathbf{a}^{k-1}+\mathbf{d}^{k}}{\mathbf{a}-\mathbf{d}}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}^{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{k} & \dfrac{\mathbf{b}\left(\mathbf{a}^{k}+\mathbf{d}^{k}\right)}{\mathbf{a}-\mathbf{d}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}^{k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ... \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{a}^2}{2!} & \frac{\mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{d})}{2!} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{d}\mathbf{a}^2}{2!} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{a}^3}{3!} & \frac{\mathbf{b}\left(\mathbf{a}^2+\mathbf{a}\mathbf{d}+\mathbf{d}^2\right)}{3!} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{d}^3}{3!} \end{bmatrix} + ... \\ &= \begin{bmatrix} 1+\mathbf{a}+\frac{\mathbf{a}^2}{2!}+\frac{\mathbf{a}^3}{3!}+... & \mathbf{b}+\frac{\mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{d})}{2!}+\frac{\mathbf{b}\left(\mathbf{a}^2+\mathbf{a}\mathbf{d}+\mathbf{d}^2\right)}{3!}+...+\frac{\mathbf{b}(\mathbf{a}^n+\mathbf{d}^n)}{(\mathbf{a}-\mathbf{d})(n+1)!}+... \\ \mathbf{0} & 1+\mathbf{d}+\frac{\mathbf{d}^2}{2!}+\frac{\mathbf{d}^3}{3!}+... \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+\mathbf{a}+\frac{\mathbf{a}^2}{2!}+\frac{\mathbf{a}^3}{3!}+... & \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}-\mathbf{d}}\left(\mathbf{a}\text{-}\mathbf{d}+\frac{\mathbf{a}^2-\mathbf{d}^2}{2!}+\frac{\mathbf{a}^3-\mathbf{d}^3}{3!}+...+\frac{\mathbf{a}^n-\mathbf{d}^n}{n!}+...\right) \\ \mathbf{0} & 1+\mathbf{d}+\frac{\mathbf{d}^2}{2!}+\frac{\mathbf{d}^3}{3!}+... \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\mathbf{a}} & \mathbf{b}\left(1+\frac{\mathbf{a}^2-\mathbf{d}^2}{(\mathbf{a}-\mathbf{d})2!}+\frac{\mathbf{a}^3-\mathbf{d}^3}{(\mathbf{a}-\mathbf{d})3!}+...+\frac{\mathbf{a}^n-\mathbf{d}^n}{(\mathbf{a}-\mathbf{d})n!}+...\right) \\ \mathbf{0} & e^{\mathbf{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{a}} & \dfrac{\mathbf{b}\left(e^{\mathbf{a}}\text{-}e^{\mathbf{d}}\right)}{\mathbf{a}\text{-}\mathbf{d}} \\ \mathbf{0} & e^{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\square$

Önerme 3.40. *A matrisi, $n \times n$ tipinde bir hiperbolik kare matris olsun.*

i. 0*, sıfır matrisini göstermek üzere $e^0 = I$ birim matristir.*

ii. *Tüm m tamsayıları için $A^m e^A = e^A A^m$ 'dır.*

iii. $\left(e^A\right)^t = e^{\left(A^t\right)}$

iv. *Eğer $AB = BA$ ise $Ae^B = e^B A$ ve $e^A e^B = e^B e^A$ 'dır.*

İspat. **i.** (3.9) formülünde A matrisi yerine 0 matrisi yazılırsa

$$e^0 = I + 0 + \frac{1}{2!}0^2 + \frac{1}{3!}0^3 + ... = I$$

olduğu görülür.

ii.

$$\begin{aligned} A^m e^A &= A^m \left(I{+}A{+}\frac{1}{2!}A^2{+}\frac{1}{3!}A^3{+}... \right) = A^m{+}A^{m+1}{+}\frac{A^{m+2}}{2!}{+}\frac{A^{m+3}}{3!}{+}... \\ &= \left(I{+}A{+}\frac{1}{2!}A^2{+}\frac{1}{3!}A^3{+}... \right) A^m = e^A A^m \end{aligned}$$

olur.

iii.

$$\begin{aligned} \left(e^A\right)^t &= \left(I{+}A{+}\frac{1}{2!}A^2{+}\frac{1}{3!}A^3{+}... \right)^t = I^t{+}A^t{+}\frac{1}{2!}\left(A^2\right)^t{+}\frac{1}{3!}\left(A^3\right)^t{+}... \\ &= I^t{+}A^t{+}\frac{1}{2!}\left(A^t\right)^2{+}\frac{1}{3!}\left(A^t\right)^3{+}... = e^{\left(A^t\right)} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

iv. $AB = BA$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} Ae^B &= A\left(I{+}B{+}\frac{1}{2!}B^2{+}\frac{1}{3!}B^3{+}... \right) = A{+}AB{+}\frac{AB^2}{2!}{+}\frac{AB^3}{3!}{+}... \\ &= A{+}BA{+}\frac{B^2A}{2!}{+}\frac{B^3A}{3!}{+}... = e^B A \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$e^A e^B = \left(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + ... \right) \left(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + ... \right)$$

eşitliğinde çarpma işlemi yapıldıktan sonra değişme özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(I + B + \frac{1}{2!}B^2 + ...\right)\left(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + ...\right) \\ &= e^B e^A \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Önerme 3.41. *A matrisi hiperbolik bir kare matris ve $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{P}$ olsun. O halde*

$$e^{A(\mathbf{u}+\mathbf{v})} = e^{A\mathbf{u}} e^{A\mathbf{v}} \tag{3.10}$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned} e^{A\mathbf{u}} e^{A\mathbf{v}} &= \left(I + A\mathbf{u} + \frac{A^2\mathbf{u}^2}{2!} + ...\right)\left(I + A\mathbf{v} + \frac{A^2\mathbf{v}^2}{2!} + ..\right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j \mathbf{u}^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \mathbf{v}^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{j+k}\mathbf{u}^j \mathbf{v}^k}{j!k!} \end{aligned} \tag{3.11}$$

$n = j + k$ olsun. Buradan $j = n - k$ olur. Bu eşitlikler (3.11) formülünde yerine yazılırsa, binom teoreminden

$$\begin{aligned} e^{A\mathbf{u}} e^{A\mathbf{v}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^n \mathbf{u}^{n-k}\mathbf{v}^k}{(n-k)!k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} \mathbf{u}^{n-k}\mathbf{v}^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (\mathbf{u}+\mathbf{v})^n}{n!} = e^{A(\mathbf{u}+\mathbf{v})} \end{aligned}$$

bulunur. □

Önerme 3.42. *A herhangi bir hiperbolik kare matris olmak üzere e^A matrisi tersinirdir.*

İspat. (3.10) formülünde $\mathbf{u}$ yerine 1 ve $\mathbf{v}$ yerine -1 yazılırsa,

$$e^A e^{-A} = e^{A(1+(-1))} = e^0 = I$$

olur ki, buradan e^A üstel matrisinin tersi daima vardır ve e^{-A} matrisidir. □

Teorem 3.43. *A hiperbolik bir kare matris ve t reel skaler değişken olsun. $f(t) = e^{tA}$ olmak üzere f 'nin türevi*

$$f'(t) = Ae^{tA} \tag{3.12}$$

ile bulunur.

İspat. Türevin limit tanımında, (3.10) formülünü kullanılırsa,

$$f'(t) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{e^{A(t+s)} - e^{At}}{s}\right) = e^{At}\lim_{s\to 0}\left(\frac{e^{As} - I}{s}\right)$$

olur. (3.9) formülünden

$$e^{As} - I = I + As + \frac{A^2s^2}{2!} + ... - I = As + \frac{A^2s^2}{2!} + ...$$

olacağından,

$$f'(t) = e^{At}\left(\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[As + \frac{A^2s^2}{2!} + ...\right]\right) = e^{At}A = Ae^{At}$$

elde edilir. □

Teorem 3.44. *A ve B matrisleri, $n \times n$ tipinde iki hiperbolik matris olsun. Eğer $AB = BA$ ise,*

$$e^{A+B} = e^Ae^B$$

şeklindedir.

İspat. Eğer $AB = BA$ ise, Önerme 3.40(iv) 'den

$$Ae^{Bt} = e^{Bt}A$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} -Be^{(A+B)t} &= e^{(A+B)t}(-B) \\ -Ae^{-Bt} &= e^{-Bt}(-A) \\ -Ae^{(A+B)t} &= e^{(A+B)t}(-A) \end{aligned}$$

formülleri de yazılabilir. O halde t reel bir değişken olmak üzere,

$$g(t) = e^{(A+B)t}e^{-Bt}e^{-At}$$

olsun. (3.12) formülünden ve çarpımın türevinden,

$$\begin{aligned} g'(t) &= (A+B)\, e^{(A+B)t} e^{-Bt} e^{-At} + e^{(A+B)t} (-B)\, e^{-Bt} e^{-At} \\ &\quad + e^{(A+B)t} e^{-Bt} (-A)\, e^{-At} \\ &= (A+B)\, g(t) - Bg(t) - Ag(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

matrisi elde edilir. Aynı zamanda bu ifade, $AB = BA$ olduğundan, $(-A)$ ve $(-B)$ çarpanları için de mümkündür.

Her t için $g'(t) = 0$ olduğundan $g(t)$, $n \times n$ tipinde sabit bir matristir. O halde, herhangi sabit C matrisi için $g(t) = C$ 'dir. O halde $t = 0$ alınırsa $C = g(0)$ olur. $g(t)$ 'nin tanımından,

$$C = g(0) = e^{(A+B)0} e^{-B0} e^{-A0} = e^0 e^0 e^0 = I$$

olur. Bundan dolayı, her t için

$$I = C = g(t) = e^{(A+B)t} e^{-Bt} e^{-At}$$

olur. Her iki taraf $e^{At} e^{Bt}$ ile çarpılırsa,

$$e^{At+Bt} = e^{At} e^{Bt}$$

eşitliği elde edilir. □

Lemma 3.45. *Eğer bir A matrisi köşegenleştirilebilirse*

$$\det\left(e^A\right) = e^{iz(A)}$$

olur.

İspat. A köşegenleştirilebilir olduğundan bir P tersinir matrisi var öyle ki $A = PDP^{-1}$ olacak şekilde, A matrisinin özdeğerlerinden oluşan D köşegen matrisi ve sütunları A matrisinin özvektörlerinden oluşan P matrisi vardır. O halde

$$iz(A) = iz\left(PDP^{-1}\right) = iz(P)\, iz(D)\, iz\left(P^{-1}\right) = iz(D)$$

olur. Ayrıca $A = PDP^{-1}$ olduğundan $e^A = Pe^D P^{-1}$ olur. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olmak üzere her iki tarafın determinantı alınırsa

$$\begin{aligned} \det\left(e^A\right) &= \det\left(Pe^D P^{-1}\right) = \det(P) \det\left(e^D\right) \det\left(P^{-1}\right) = \det\left(e^D\right) \\ &= e^{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n} = e^{iz(D)} = e^{iz(A)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Lemma 3.46. *Eğer $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrisi ters simetrik ise (yani $A^t = -A$ ise), e^A exponential matrisi $\mathbb{R}^n$ uzayında bir dönme matrisidir.*

İspat. $A^t = -A$ olduğundan A matrisi ters simetriktir ve köşegeni sıfırdır. e^A matrisinin dönme matrisi olduğunu göstermek için

i. $\left(e^A\right)^t \left(e^A\right) = I$

ii. $\det A = 1$

olduğu gösterilmelidir.

$$\left.\begin{array}{l} AA^t = -A^2 \\ A^tA = -A^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AA^t = A^tA$$

olduğundan

$$\begin{array}{l} \left(e^A\right)^t e^A = e^{\left(A^t\right)} e^A = e^{A^t + A} = e^{-A+A} = e^0 = I \\ \det\left(e^A\right) = e^{iz(A)} = e^0 = 1 \end{array}$$

olur ki, buradan (i) ve (ii) eşitliklerinin sağlandığı görülür. □

Teorem 3.47.

a) *A^* matrisi, A matrisinin eşlenik transpozesi olmak üzere, $e^{(A^*)} = \left(e^A\right)^*$ olur.*

b) *Eğer A matrisi hermityen ise (yani $A^* = A$ ise), bu durumda e^A matriside hermityendir.*

c) *Eğer A matrisi skew-hermityen ise (yani $A^* = -A$ ise), bu durumda e^A üniter matristir (yani $e^A\left(e^A\right)^* = I$ olur).*

İspat. Kanıta geçmeden önce küçük bi hazırlık yapalım.

a)

$$(A+B)^* = \left(\overline{(A+B)}\right)^t = \left(\overline{A} + \overline{B}\right)^t = \overline{A}^t + \overline{B}^t = A^* + B^*$$

b)

$$(A^n)^* = \Big(\underbrace{\overline{A\,A\,...\,A}}_{n\ tane}\Big)^t = \Big(\underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\,...\,\overline{A}}_{n\ tane}\Big)^t = \underbrace{\overline{A}^t\overline{A}^t...\overline{A}^t}_{n\ tane} = (A^*)^n$$

Şimdi hazırlamış olduğumuz $a)$ ve $b)$ eşitlikleri kullanılarak teorem kanıtlanabilir.

i.

$$e^{(A^*)} = I + A^* + \frac{(A^*)^2}{2!} + \frac{(A^*)^3}{3!} + ...$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} e^{(A^*)} &= I + A^* + \frac{(A^*)^2}{2!} + \frac{(A^*)^3}{3!} + ... \\ &= I + A^* + \frac{(A^2)^*}{2!} + \frac{(A^3)^*}{3!} + ... \\ &= \left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ...\right)^* \\ &= \left(e^A\right)^* \end{aligned}$$

olarak bulunur.

ii. $A^* = A \Rightarrow \left(e^A\right)^* = e^{(A^*)} = e^A \Rightarrow e^A$ hermityendir.

iii. $A^* = -A \Rightarrow \left(e^A\right)^* = e^{(A^*)} = e^{-A}$ olduğundan $\left(e^A\right)\left(e^A\right)^* = e^A e^{-A} = I$ olur. □

Lemma 3.48. $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{P})$ *matrisinin özdeğerleri*

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\left(\mathbf{a} + \mathbf{d} - \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{d})^2 + 4\mathbf{bc}}\right)}{2} \text{ ve } \boldsymbol{\mu} = \frac{\left(\mathbf{a} + \mathbf{d} + \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{d})^2 + 4\mathbf{bc}}\right)}{2}$$

ile, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri de sırasıyla

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{d} - \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{d})^2 + 4\mathbf{bc}} \\ 2\mathbf{c} \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{d} + \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{d})^2 + 4\mathbf{bc}} \\ 2\mathbf{c} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

İspat. $\det(\boldsymbol{\lambda} I - A) = 0$ polinomunun köklerinden kolayca elde edilir. □

Sonuç 3.49. $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{P})$ *matrisinin özdeğerleri eşit ise, bu özdeğerlere karşılık gelen tek özvektör*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{d} \\ 2\mathbf{c} \end{bmatrix}$$

vektörüdür.

Lemma 3.50. $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{P})$ *matrisinin özdeğerleri eşit ve özvektörü* $\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}-\mathbf{d} \\ 2\mathbf{c} \end{bmatrix}$ *olmak üzere,*

$$(A - \boldsymbol{\lambda} I)\,\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1$$

eşitliğini sağlayan $\mathbf{U}_2$ *vektörü bir reel vektördür ve* $\mathbf{U}_2 = (2, 0)$ *ile belirlidir.*

İspat. $(A - \boldsymbol{\lambda} I)\,\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1$ eşitliğinden, $\mathbf{U}_2 = (\mathbf{m}, \mathbf{n})$ olmak üzere,

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{a}+\mathbf{d} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}+\mathbf{d} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}-\mathbf{d} \\ 2\mathbf{c} \end{bmatrix},$$

yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}(\mathbf{a}-\mathbf{d}) + 2\mathbf{b}\mathbf{n} \\ 2\mathbf{c}\mathbf{m} - \mathbf{n}(\mathbf{a}-\mathbf{d}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\mathbf{a}-\mathbf{d}) \\ 4\mathbf{c} \end{bmatrix}$$

olur ki, buradan

$$\mathbf{m} = 2 \text{ ve } \mathbf{n} = 0$$

elde edilir. □

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 3-\mathbf{h} & 1+2\mathbf{h} \\ 2-2\mathbf{h} & 1+\mathbf{h} \end{bmatrix}$ *matrisinin özdeğerlerinin eşit olduğunu ve* $\mathbf{U}_1$ *özvektörünü bulunuz.*

$$(A - \boldsymbol{\lambda} I)\,\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1$$

olacak şekildeki $\mathbf{U}_2$ *vektörünün,* $\mathbf{U}_2 = (2, 0)$ *olduğunu görünüz.* $\mathbf{U}_1$ *ve* $\mathbf{U}_2$ *ile oluşturulan* P *matrisi tersinir midir?*

Çözüm. Matrisin özdeğerleri,

$$(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2 + 4\mathbf{b}\mathbf{c} = (3-\mathbf{h}-1-\mathbf{h})^2 + 4(1+2\mathbf{h})(2-2\mathbf{h}) = 0$$

olduğundan, $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} = 2$ bulunur. Buna karşılık gelen tek özvektör de,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}-\mathbf{d} \\ 2\mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\mathbf{h} \\ 4-4\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $(A - \boldsymbol{\lambda} I)\,\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1$ eşitliğinden,

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 3-\mathbf{h} & 1+2\mathbf{h} \\ 2-2\mathbf{h} & 1+\mathbf{h} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\mathbf{h} \\ 4-4\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\mathbf{h} & 2\mathbf{h}+1 \\ 2-2\mathbf{h} & \mathbf{h}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\mathbf{h} \\ 4-4\mathbf{h} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (\mathbf{a}+\mathbf{b})+(-\mathbf{a}+2\mathbf{b})\,\mathbf{h} \\ 2\mathbf{a}-\mathbf{b}-2\mathbf{a}\mathbf{h}+\mathbf{b}\mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\mathbf{h} \\ 4-4\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan $\mathbf{a}=2$ ve $\mathbf{b}=0$ olur. O halde, $\mathbf{U}_2=(2,0)$ olur. Buna göre,

$$P = \begin{bmatrix} 2-2\mathbf{h} & 2 \\ 4-4\mathbf{h} & 0 \end{bmatrix}$$

olur. $\det P = 8\mathbf{h}-8$ değeri null olduğundan bu matrisin tersi yoktur.

Not. $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{P})$ matrisinin, özvektörlerinden birinin, her bileşeni $\pm 1 \pm \mathbf{h}$ null hiperbolik sayısının bir katı ise, özvektörleriyle oluşturulan P matrisi tersinir değildir. Ayrıca, tek özvektörü bu koşulu sağlıyorsa, $\mathbf{U}_1$ bu özvektörü göstermek üzere, $(A-\boldsymbol{\lambda}I)\,\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{U}_1$ ve $\mathbf{U}_2$ ile oluşturulan P matrisi de tersinir değildir. Bu durum, kompleks sayı matrislerini, hiperbolik sayı matrislerinden ayıran en önemli özelliktir. Bu hiperbolik sayıların cisim olmamasının getirdiği bir sonuçtur.

Teorem 3.51. *$\boldsymbol{\lambda}$ ve $\boldsymbol{\mu}$ herhangi bir $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{P})$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere,*

i. *Eğer $\lambda = \mu$ ise,*

$$e^A = e^{\boldsymbol{\lambda}}\left[(1-\boldsymbol{\lambda})\,I + A\right] \tag{3.13}$$

olur.

ii. *Eğer $\lambda \neq \mu$ ise,*

$$e^A = \frac{\boldsymbol{\mu}e^{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}e^{\boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} I + \frac{e^{\boldsymbol{\mu}} - e^{\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} A \tag{3.14}$$

şeklindedir.

İspat. **i.** $\boldsymbol{\lambda}$ ve $\boldsymbol{\mu}$, $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{P})$ matrisinin özdeğerleri ve $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\mu}$ olsun. O halde bazı $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ 'ler için

$$A = P \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{x} \\ 0 & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} P^{-1}$$

yazabiliriz. Buradaki P matrisi, sütunları $\boldsymbol{\lambda}$ ve $\boldsymbol{\mu}$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerden oluşan matristir. Dolayısıyla Lemma 3.39 'dan

$$e^A = e^{\boldsymbol{\lambda}} P \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} e^A &= e^{\boldsymbol{\lambda}} P \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = e^{\boldsymbol{\lambda}} P \begin{bmatrix} 1-\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda} & \mathbf{x} \\ 0 & 1-\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= e^{\boldsymbol{\lambda}} P \left(1-\boldsymbol{\lambda}\right) I P^{-1} + e^{\boldsymbol{\lambda}} P \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{x} \\ 0 & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= e^{\boldsymbol{\lambda}} \left(\left(1-\boldsymbol{\lambda}\right) I + A \right) \end{aligned}$$

olur.

ii. $\boldsymbol{\lambda}$ ve $\boldsymbol{\mu}$, $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}\left(\mathbb{P}\right)$ matrisinin özdeğerleri ve $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{\mu}$ olsun. O halde

$$A = P \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} P^{-1}$$

yazılır. Yine benzer şekilde buradaki P matrisi, sütunları λ ve μ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerden oluşan matristir. Dolayısıyla

$$e^A = P \begin{bmatrix} e^{\boldsymbol{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix} P^{-1}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} e^A &= P \begin{bmatrix} e^{\boldsymbol{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}\right) e^{\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\left(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}\right) e^{\boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\mu}} + \boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} P^{-1} + P \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{\boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} I + \frac{e^{\boldsymbol{\mu}} - e^{\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} A \end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 3+\mathbf{h} & 2-\mathbf{h} \\ \mathbf{h}-2 & 5-3\mathbf{h} \end{bmatrix}$ *matrisi için* e^A *matrisini bulunuz.*

Çözüm. $(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2 + 4\mathbf{bc} = (3+\mathbf{h}-5+3\mathbf{h})^2 + 4(2-\mathbf{h})(\mathbf{h}-2) = 0$ olduğundan,

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2} = 4-\mathbf{h}$$

bulunur. Bu hiperbolik sayıya karşılık gelen tek hiperbolik özvektör de,

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}-\mathbf{d} \\ 2\mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\mathbf{h}-2 \\ 2\mathbf{h}-4 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan, $\mathbf{U}_2 = (2, 0)$ olduğundan,

$$P = \begin{bmatrix} 2\mathbf{h}-1 & 2 \\ \mathbf{h}-2 & 0 \end{bmatrix}$$

olacaktır. $\det P = 4 - 2\mathbf{h}$ null olmadığından P^{-1} vardır.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-(\mathbf{h}+2)}{3} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\mathbf{h}}{2} \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$D = \begin{bmatrix} 4-\mathbf{h} & \mathbf{x} \\ 0 & 4-\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $A = PDP^{-1}$ eşitliği vardır. Bu eşitlikten, $D = P^{-1}AP$ olur ki,

$$D = \begin{bmatrix} 4-\mathbf{h} & 2 \\ 0 & 4-\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

bulunur. O halde,

$$e^A = e^{\boldsymbol{\lambda}} P \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

formülü uygulanırsa,

$$e^A = e^{4\text{-}\mathbf{h}} \begin{bmatrix} 2\mathbf{h}\text{-}1 & 2 \\ \mathbf{h}\text{-}2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\text{-}(\mathbf{h}+2)}{3} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\mathbf{h}}{2} \end{bmatrix} = e^{4\text{-}\mathbf{h}} \begin{bmatrix} 2\mathbf{h} & 2\text{-}\mathbf{h} \\ \mathbf{h}-2 & 2\text{-}2\mathbf{h} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Diğer taraftan, Teorem 3.51 'deki (3.13) eşitliği uygulanarak da, doğrudan,

$$\begin{aligned} e^{A} &= e^{\boldsymbol{\lambda}}\left[\left(1-\boldsymbol{\lambda}\right)I+A\right] \\ &= e^{4-\mathbf{h}}\left[\left(1-4+\mathbf{h}\right)I+A\right] \\ &= e^{4-\mathbf{h}}\left(\left(\mathbf{h}-3\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3+\mathbf{h} & 2-\mathbf{h} \\ \mathbf{h}-2 & 5-3\mathbf{h} \end{bmatrix}\right) \\ &= e^{4-\mathbf{h}}\begin{bmatrix} 2\mathbf{h} & 2-\mathbf{h} \\ \mathbf{h}-2 & 2-2\mathbf{h} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunabilir.

Teorem 3.52. *Herhangi bir*

$$A=\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}\left(\mathbb{P}\right)$$

matrisi için

i. *Eğer* $\left(\mathbf{a}-\mathbf{d}\right)^{2}+4bc=0$ *ise,*

$$e^{A}=e^{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}}\begin{bmatrix} 1+\frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2} & \mathbf{b} \\ c & 1-\frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

olur.

ii. *Eğer* $\left(\mathbf{a}-\mathbf{d}\right)^{2}+4bc>0$ *ise,*

$$e^{A}=e^{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}}\begin{bmatrix} \cosh\left(\Delta\right)+\frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} & \mathbf{b}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} \\ \mathbf{c}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} & \cosh\left(\Delta\right)-\frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

olur öyle ki $\Delta=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\mathbf{a}-\mathbf{d}\right)^{2}+4\mathbf{bc}}$ *'dır.*

iii. *Eğer* $\left(\mathbf{a}-\mathbf{d}\right)^{2}+4bc<0$ *ise,*

$$e^{A}=e^{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}}\begin{bmatrix} \cos\left(\Delta\right)+\frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} & \mathbf{b}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} \\ \mathbf{c}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} & \cos\left(\Delta\right)-\frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} \end{bmatrix}$$

olur öyle ki, $\Delta=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\left(\mathbf{a}-\mathbf{d}\right)^{2}+4\mathbf{bc}\right|}$ *'dır.*

İspat. **i.** $(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2+4\mathbf{bc}=0$ olsun.

$$A=\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{\left(\mathbf{a}+\mathbf{d}-\sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2+4\mathbf{bc}}\right)}{2},$$
$$\boldsymbol{\mu}=\frac{\left(\mathbf{a}+\mathbf{d}+\sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2+4\mathbf{bc}}\right)}{2}$$

ve $(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2+4\mathbf{bc}=0$ olduğundan,

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\mu}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}$$

olur. Böylece (3.13) 'den

$$\begin{aligned} e^A &= e^{\boldsymbol{\lambda}}\left[(1-\boldsymbol{\lambda})\,I+A\right]=e^{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}}\left(\begin{bmatrix}1-\boldsymbol{\lambda} & 0\\ 0 & 1-\boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{bmatrix}\right)\\ &= e^{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}}\left(\begin{bmatrix}1-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2} & 0\\ 0 & 1-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{bmatrix}\right)\\ &= e^{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}}\begin{bmatrix}1+\frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & 1-\frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

olduğu gürülür.

ii. $(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2+4\mathbf{bc}>0$ ve $\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2+4\mathbf{bc}}$ olsun. A matrisinin özdeğerleri

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{\left(\mathbf{a}+\mathbf{d}-\sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2+4\mathbf{bc}}\right)}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}-\Delta$$
$$\boldsymbol{\mu}=\frac{\left(\mathbf{a}+\mathbf{d}+\sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2+4\mathbf{bc}}\right)}{2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}+\Delta$$

ve $(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2+4\mathbf{bc}>0$ olduğundan $\boldsymbol{\lambda}\neq\boldsymbol{\mu}$ 'dir. Buradan,

$$e^{\boldsymbol{\lambda}}=e^{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}-\Delta}\ ,\ e^{\boldsymbol{\mu}}=e^{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}+\Delta}\ \text{ ve }\ \boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}=2\Delta$$

elde edilir. O halde (3.14) 'dan

$$e^A = \frac{\boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}} I + \frac{e^{\boldsymbol{\mu}} - e^{\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}} A$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\mu} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}-\Delta} - \boldsymbol{\lambda} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}+\Delta}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{\mu} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}-\Delta} - \boldsymbol{\lambda} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}+\Delta}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{a} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}+\Delta} - \mathbf{a} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}-\Delta}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} & \frac{\mathbf{b} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}+\Delta} - \mathbf{b} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}-\Delta}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{\mathbf{c} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}+\Delta} - \mathbf{c} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}-\Delta}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} & \frac{\mathbf{d} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}+\Delta} - \mathbf{d} e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}-\Delta}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $\boldsymbol{\lambda} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2} - \Delta$, $\boldsymbol{\mu} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2} + \Delta$ ve $\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} = 2\Delta$ eşitlikleri yukarıdaki matriste yerine yazılırsa

$$e^A = e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}} \begin{bmatrix} \frac{e^{-\Delta}\left(\frac{\mathbf{d-a}}{2}\right) - e^{\Delta}\left(\frac{\mathbf{d-a}}{2}\right) + \Delta\left(e^{\Delta}+e^{-\Delta}\right)}{2\Delta} & \frac{\mathbf{b}\left(e^{\Delta}-e^{-\Delta}\right)}{2\Delta} \\ \frac{\mathbf{c}\left(e^{\Delta}-e^{-\Delta}\right)}{2\Delta} & \frac{e^{-\Delta}\left(\frac{\mathbf{a-d}}{2}\right) - e^{\Delta}\left(\frac{\mathbf{a-d}}{2}\right) + \Delta\left(e^{\Delta}+e^{-\Delta}\right)}{2\Delta} \end{bmatrix}$$

$$= e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{a-d}}{2}\left(\frac{e^{\Delta}-e^{-\Delta}}{2\Delta}\right) + \Delta\left(\frac{e^{\Delta}+e^{-\Delta}}{2\Delta}\right) & \frac{\mathbf{b}\left(e^{\Delta}-e^{-\Delta}\right)}{2\Delta} \\ \frac{\mathbf{c}\left(e^{\Delta}-e^{-\Delta}\right)}{2\Delta} & \frac{\mathbf{d-a}}{2}\left(\frac{e^{\Delta}-e^{-\Delta}}{2\Delta}\right) + \Delta\left(\frac{e^{\Delta}+e^{-\Delta}}{2\Delta}\right) \end{bmatrix}$$

$$= e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}} \begin{bmatrix} \cosh(\Delta) + \frac{\mathbf{a-d}}{2}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} & \mathbf{b}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} \\ \mathbf{c}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} & \cosh(\Delta) - \frac{\mathbf{a-d}}{2}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

iii. $(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2 + 4\mathbf{bc} < 0$ olsun. O halde $\Delta = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left|(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2 + 4\mathbf{bc}\right|}$ olduğundan $\boldsymbol{\delta} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2 + 4\mathbf{bc}}$ denilirse $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{i}\Delta$ olur. Böylece (3.16) 'ten

$$e^A = e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}} \begin{bmatrix} \cosh(\boldsymbol{\delta}) + \frac{\mathbf{a-d}}{2}\frac{\sinh(\boldsymbol{\delta})}{\boldsymbol{\delta}} & \mathbf{b}\frac{\sinh(\boldsymbol{\delta})}{\boldsymbol{\delta}} \\ \mathbf{c}\frac{\sinh(\boldsymbol{\delta})}{\boldsymbol{\delta}} & \cosh(\boldsymbol{\delta}) - \frac{\mathbf{a-d}}{2}\frac{\sinh(\boldsymbol{\delta})}{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix}$$

$$= e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}} \begin{bmatrix} \cosh(\mathbf{i}\Delta) + \frac{\mathbf{a-d}}{2}\frac{\sinh(\mathbf{i}\Delta)}{\mathbf{i}\Delta} & \mathbf{b}\frac{\sinh(\mathbf{i}\Delta)}{\mathbf{i}\Delta} \\ \mathbf{c}\frac{\sinh(\mathbf{i}\Delta)}{\mathbf{i}\Delta} & \cosh(\mathbf{i}\Delta) - \frac{\mathbf{a-d}}{2}\frac{\sinh(\mathbf{i}\Delta)}{\mathbf{i}\Delta} \end{bmatrix}$$

$$= e^{\frac{\mathbf{a+d}}{2}} \begin{bmatrix} \cos(\Delta) + \frac{\mathbf{a-d}}{2}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} & \mathbf{b}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} \\ \mathbf{c}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} & \cos(\Delta) - \frac{\mathbf{a-d}}{2}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. □

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 3+\mathbf{h} & 2-\mathbf{h} \\ \mathbf{h}-2 & 5-3\mathbf{h} \end{bmatrix}$ *matrisi için* e^A *matrisini bulunuz.*

Çözüm. Bu kez Teorem 3.52 'deki (3.15) kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
e^{A} &= e^{\dfrac{3+\mathbf{h}+5-3\mathbf{h}}{2}} \begin{bmatrix} 1+\dfrac{3+\mathbf{h}-5+3\mathbf{h}}{2} & 2-\mathbf{h} \\ \mathbf{h}-2 & 1-\dfrac{3+\mathbf{h}-5+3\mathbf{h}}{2} \end{bmatrix} \\
&= e^{4-\mathbf{h}} \begin{bmatrix} 2\mathbf{h} & 2-\mathbf{h} \\ \mathbf{h}-2 & 2-2\mathbf{h} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu sonucun, bir önceki örnekteki sonuçla aynı olduğu görülür.

4. SONUÇ

Bu tezde aşağıdaki sonuçlar ortaya konulmuştur:

1. Hiperbolik sayı kavramı cebirsel özellikleriyle verilmiştir.

2. Hiperbolik sayılar timelike, spacelike veya null olarak sınıflandırılarak, bu sınıflandırmaya göre, polar, üstel, matris formları verilmiş ve yine bu sınıflandırmaya göre değişecek şekilde köklerinin bulunma yöntemleri ele alınmıştır. Bunun için, hiperbolik sayılar için De Moivre formülü kanıtlanmış ve buna uygun şekilde sonuçlar elde edilimiştir.

3. Hiperbolik sayıların Lorentziyen düzleminde dönmelerle ilişkisi incelenmiş ve bazı uygulamaları verilmiştir.

Her

$$\mathbf{z} = \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta$$

birim spacelike hiperbolik sayısı,

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

hiperbolik dönme matrisine karşılık gelir ve bu dönme matrisi, herhangi bir $\mathbf{w}$ hiperbolik sayısının null, timelike ya da spacelike olma karakterini değiştirmez. Yani, $\mathbf{w} = x + \mathbf{h}y$ ve $R_\theta(\mathbf{w}) = x' + \mathbf{h}y'$ sayılarının karakteri aynıdır. Dönme ise,

$$(x')^2 - (y')^2 = x^2 - y^2$$

hiperbolü üzerinde gerçekleşir.

Ayrıca, $\mathbf{P}^1_{sp}(1) \cong \mathbf{SO}^+(1,1)$ dönme grubu, Lorentziyen düzlemdeki

$$\mathbf{SO}(1,1) = \left\{R : R^t I^* R = I^*,\ \det R = 1,\ I^* = diag(1,-1)\right\}$$

grubuna izormoftur. Yani her bir birim spacelike hiperbolik sayı, Lorentziyen düzlemde bir dönme matrisine karşılık gelir.

4. Hiperbolik modül ve hiperbolik vektörler verilerek, hiperbolik vektör modülünde hermityen skaler çarpım ve vektörel çarpım tanımlanarak bunların özellikleri ispatlanmıştır.

5. Hiperbolik üniter matrisleri verilerek bunların hiperbolik hermityen skaler çarpımla elde edilmesi gösterilmiştir.

Her birim timelike hiperbolik sayıya,

$$\begin{bmatrix} \sinh\theta + \mathbf{h}\cosh\theta & \sqrt{2}\left(\pm\sinh\theta + \cosh\theta\mathbf{h}\right) \\ \sqrt{2}\left(\pm\sinh\theta + \cosh\theta\mathbf{h}\right) & \sinh\theta + \mathbf{h}\cosh\theta \end{bmatrix}$$

biçiminde bir hiperbolik üniter matris, her birim spacelike hiperbolik sayıya da

$$\begin{bmatrix} \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta & 0 \\ 0 & \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta \end{bmatrix}$$

formunda bir hiperbolik üniter matris karşılık gelir.

6. Hiperbolik matrislerin özdeğer ve özvektörlerinin bulunması ve özvektörlerin null olması durumları incelenmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}\left(\mathbb{P}\right)$$

matrisinin, özvektörlerinden birinin, her bileşeni $\pm 1 \pm \mathbf{h}$ null hiperbolik sayısının bir katı ise, özvektörleriyle oluşturulan P matrisi tersinir değildir. Ayrıca, tek özvektörü bu koşulu sağlıyorsa, $\mathbf{U}_1$ bu özvektörü göstermek üzere, $(A - \boldsymbol{\lambda} I)\,\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{U}_1$ ve $\mathbf{U}_2$ ile oluşturulan P matrisi de tersinir değildir. Bu durum, kompleks sayı matrislerini, hiperbolik sayı matrislerinden ayıran en önemli özelliktir. Bu hiperbolik sayıların cisim olmamasının getirdiği bir sonuçtur.

7. Bir hiperbolik matrisin exponansiyeli verilerek, 2×2 türünden hiperbolik matrislerin exponansiyeli için kompleks sayılardakine benzer şekilde aşağıdaki Teorem 3.51 ve Teorem 3.52 kanıtlanmıştır.

Teorem 3.51. *λ ve μ herhangi bir $A \in M_{2\times 2}\left(\mathbb{P}\right)$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere,*

i. *Eğer $\lambda = \mu$ ise,*

$$e^A = e^{\boldsymbol{\lambda}}\left[\left(1 - \boldsymbol{\lambda}\right) I + A\right]$$

olur.

ii. *Eğer $\lambda \neq \mu$ ise,*

$$e^A = \frac{\boldsymbol{\mu} e^{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}} I + \frac{e^{\boldsymbol{\mu}} - e^{\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}} A$$

şeklindedir.

Teorem 3.52. *Herhangi bir*

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{P})$$

matrisi için

i. *Eğer* $(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2 + 4bc = 0$ *ise,*

$$e^A = e^{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2} & \mathbf{b} \\ c & 1 - \frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2} \end{bmatrix}$$

olur.

ii. *Eğer* $(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2 + 4bc > 0$ *ise,*

$$e^A = e^{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}} \begin{bmatrix} \cosh(\Delta) + \frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} & \mathbf{b}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} \\ \mathbf{c}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} & \cosh(\Delta) - \frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2}\frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} \end{bmatrix}$$

olur öyle ki $\Delta = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2 + 4\mathbf{bc}}$ *'dır.*

iii. *Eğer* $(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2 + 4bc < 0$ *ise,*

$$e^A = e^{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}} \begin{bmatrix} \cos(\Delta) + \frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} & \mathbf{b}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} \\ \mathbf{c}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} & \cos(\Delta) - \frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2}\frac{\sin(\Delta)}{\Delta} \end{bmatrix}$$

olur öyle ki, $\Delta = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left|(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2 + 4\mathbf{bc}\right|}$ *'dır.*

5. KAYNAKLAR

ANDREESCU, T. and ANDRİCA, D. 2014. Complex Numbers from A to... Z. *Boston: Birkhäuser*.

ARAGON, G., ARAGON, J. L. and RODRIGUEZ, M. A. 1997. Clifford algebras and geometric algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras, 7(2), 91-102.*

BERNSTEIN, D. S. 1990. Orthogonal Matrices and the Matrix Exponential. *SIAM Review, 32(4), 673.*

BERNSTEIN, D. S. and SO, W. 1993. Some explicit formulas for the matrix exponential. *IEEE Transactions on Automatic Control, 38(8), 1228-1232.*

BOROTA, N. A., FLORES, E. and OSLER, T. J. 2000. Spacetime numbers the easy way. *Mathematics and Computer Education, 34(2), 159.*

BOROTA, N. A. and OSLER, T. J. 2002. Functions of a spacetime variable. *Mathematics and Computer Education, 36(3), 231.*

BRACKEN, P. and HAYES, J. 2002. On a formulation of certain integrable systems using hyperbolic numbers. *Physics Letters A, 301(3), 191-194.*

CALLAHAN, J. J. 2000. The geometry of spacetime: an introduction to special and general relativity. *Springer Science & Business Media.*

CATONI, F., CANNATA, R., CATONI, V. and ZAMPETTI, P. 2004. Two-dimensional hypercomplex numbers and related trigonometries and geometries. *Advances in Applied Clifford Algebras, 14(1), 47-68.*

CATONI, F., CANNATA, R., CATONI, V. and ZAMPETTI, P. 2005. Hyperbolic trigonometry in two-dimensional space-time geometry. *arXiv preprint math-ph/0508011.*

CATONI, F., BOCCALETTI, D., CANNATA, R., CATONI, V., NICHELATTI, E. and ZAMPETTI, P. 2008. The mathematics of Minkowski space-time: with an introduction to commutative hypercomplex numbers. *Springer Science & Business Media.*

CATONI, F., BOCCALETTI, D., CANNATA, R., CATONI, V. and ZAMPETTI, P. 2011. Geometry of Minkowski space-time. *Springer Science & Business Media.*

CATONI, F. and ZAMPETTI, P. 2012. Cauchy-Like Integral Formula for Functions of a Hyperbolic Variable. *Advances in Applied Clifford Algebras, 22(1), 23-37.*

CHUNG, K. L. and YAN, W. M. 1997. The complex Householder transform. *IEEE transactions on signal processing, 45(9), 2374-2376.*

COCKLE, J. 1849. III. On a new imaginary in algebra. *Philosophical Magazine Series 3, 34(226), 37-47.*

DEAUX, R. 1956. Introduction to the geometry of complex numbers. *Courier Corporation.*

DESCHAMPS, G. A. 1972. Complex vectors in electromagnetics'. *Lecture notes, unpublished, University of Illinois, Urbana, IL.*

ERDOĞDU, M. 2013. Clifford cebiri üzerine. *Doktora semineri. Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Antalya.*

ERDOĞDU, M. ve ÖZDEMİR, M. 2016. Matrices over Hyperbolic Split Quaternions. *Filomat, 30(4), 913-920.*

ERGİN, A. A. 1989. Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri. *Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.*

FJELSTAD, P. 1986. Extending special relativity via the perplex numbers. *American Journal of Physics, 54(5), 416-422.*

HACISALİHOĞLU, H. H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. *Gazi Üniversitesi, Ankara.*

HARKIN, A. A. and HARKIN, J. B. 2004. Geometry of generalized complex numbers. *Mathematics magazine, 77(2), 118-129.*

KHRENNIKOV, A. 2003. Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras, 13(1), 1-9.*

KHRENNIKOV, A. and SEGRE, G. 2005. An introduction to hyperbolic analysis. *arXiv preprint math-ph/0507053.*

KHRENNIKOV, A. 2008. Hyperbolic quantization. *Advances in applied Clifford algebras, 18(3), 843-852.*

KISIL, V. V. 2010. Erlangen program at large-1: Geometry of invariants. *Symmetry, Integrability and Geometry. Methods and Applications, 6.*

KISIL, V. V. 2013. Induced representations and hypercomplex numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras, 23(2), 417-440.*

LINDELL, I. V. 1983. Complex vector algebra in electromagnetics. *International Journal of Electrical Engineering Education, 20(1), 33-47.*

LUNDHOLM, D. and SVENSSON, L. 2009. Clifford algebra, geometric algebra, and applications. *arXiv preprint arXiv:0907.5356.*

MANDIC, D. P. and GOH, V. S. L. 2009. Complex valued nonlinear adaptive filters: noncircularity, widely linear and neural models. *John Wiley & Sons.*

MILLER, R. A. 2013. Geometric algebra: An introduction with applications in Euclidean and conformal geometry. *San Jose State University.*

MOTTER, A. E. and ROSA, M. A. F. 1998. Hyperbolic calculus. *Advances in Applied Clifford Algebras, 8(1), 109-128.*

MURALIDHAR, K. 2015. Algebra of complex vectors and applications in electromagnetic theory and quantum mechanics. *Mathematics, 3(3), 781-842.*

ÖZDEMİR, M. ve ERGİN, A. A. 2006. Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. *Journal of geometry and physics, 56(2), 322-336.*

ÖZDEMİR, M. 2015. Hiperbolik Sayıların Geometrisi Ders Notları, *Akdeniz Üniversitesi, Antalya.*

OZOLS, M. 2009. How to generate a random unitary matrix.

POODIACK, R. D. and LeCLAIR, K. J. 2009. Fundamental theorems of algebra for the perplexes. *The College Mathematics Journal, 40(5), 322-375.*

ROCHON, D. and SHAPIRO, M. 2004. On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. *Anal. Univ. Oradea, fasc. math, 11(71), 110.*

SALEH-ANARAKI, P. 2010. Application of Complex Vectors and Complex Transformations in Solving Maxwell's Equations. *Master's thesis, University of Waterloo.*

ŞİMŞEK, H. ve ÖZDEMİR, M. 2016. On conformal curves in 2-dimensional de Sitter space. *Advances in Applied Clifford Algebras, 26(2), 757-770.*

SMOKTUNOWICZ, A. and TADEJ, W. 2008. On constructing Hermitian unitary matrices with prescribed moduli. *Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 2(3), 256-259.*

SOBCZYK, G. 1995. The hyperbolic number plane. *The College Mathematics Journal, 26(4), 268-280.*

TAPP, K. 2016. Matrix groups for undergraduates. *American Mathematical Soc..*

ULRYCH, S. 2008. Representations of Clifford algebras with hyperbolic numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras, 18(1), 93-114.*

WIKIPEDIA. 2017. *https://en.wikipedia.org/wiki/Split-complex_number.*

YAGLOM, I. M. 1968. Complex numbers in geometry. *Academic Press.*

YAGLOM, I. M. 1979. A simple non-Euclidean geometry and its physical basis: An elementary account of Galilean geometry and the Galilean principle of relativity. *Springer Science & Business Media.*

ZHANG, F. 2011. Matrix theory: basic results and techniques. *Springer Science & Business Media.*

ÖZGEÇMİŞ

Hasan ÇAKIR 1991 yılında Rize 'de doğdu. İlköğretim ve ortaöğretim eğitimini Rize 'de tamamladı. 2010 yılında Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladı ve 2014 yılında Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü 'nden, Fen Fakültesi birincisi olarak mezun oldu. 2014 yılında, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 'nde Matematik Anabilim Dalı 'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.