T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KATSAYILI RASYONEL FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL DAVRANIŞI

Faika Derya ŞENDUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KATSAYILI RASYONEL FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL DAVRANIŞI

Faika Derya ŞENDUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 11/07/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Doç. Dr. Ramazan KARATAŞ
Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

ÖZET

DEĞİŞKEN KATSAYILI RASYONEL FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL DAVRANIŞI

Faika Derya ŞENDUR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Temmuz 2017, 37 sayfa

Fark denklemleri biyoloji, genetik, popülasyon dinamiği, olasılık teorisi, psikoloji, sosyoloji ve daha çok bilim dalının içindeki matematiksel modellere uygulanır. Bu nedenden dolayıdır ki, son zamanlarda fark denklemlerinin çalışmasına çok büyük bir ilgi mevcuttur. Bu tezde literatürde fark denklemleriyle ilgili bilinen bazı sonuçlar verilecektir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fark denklemleri hakkında genel bilgiler verilmiş ve lineer olmayan rasyonel fark denklemleri ile ilgili yapılan çalışmaların literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ilk olarak $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ denkleminin ve daha sonra $\{\alpha_n\}$ yakınsak veya 2- periyotlu bir dizi olmak üzere $x_{n+1} = \alpha_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ denkleminin pozitif çözümlerinin davranışları incelenmiştir. Bu bölümde son olarak $\{p_n\}$ pozitif sınırlı bir dizi olmak üzere $x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışları ele alınmıştır. Dördüncü bölümde bulgular ve tartışma kısmına, beşinci bölümde ise sonuç kısmına yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Çekicilik, denge noktası, dizi, fark denklemleri, kararlılık, periyodiklik, salınımlılık, sınırlılık.

JÜRİ: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN (Danışman)
Doç. Dr. Ramazan KARATAŞ
Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

ABSTRACT

GLOBAL BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF THE RATIONAL DIFFERENCE EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENT

Faika Derya ŞENDUR

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
July 2017, 37 pages

Difference equations are applied into mathematical models covering biology, genetics, population dynamics, probability theory, psychology, sociology and many scientific disciplines. That is why, in recent years, there is great interest on the difference equation. In this thesis, some known results about difference equation in the literature are shown.

This study consists of five chapters. In the first chapter, general information about difference equation and the literature summary of researches on non-linear rational difference equation are given. In the second chapter, general definition and theorem concerning difference equation is given. In the third chapter, the behaviour of positive solutions firstly of the equation $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ and then of the equation $x_{n+1} = \alpha_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ in the case when $\{\alpha_n\}$ which is convergent or the period-two sequence are examined. In this chapter, finally, the behaviour of positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ in the case when $\{p_n\}$ which is positive bounded sequence are dealt with. In the fourth chapter, findings and discussion sections and finally in the fifth chapter conclusion is included.

KEYWORDS: Attractivity, equilibrium point, sequence, difference equation, stability, periodicity, the oscillatory, boundedness.

COMMITTEE: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN (Supervisor)
Assoc. Prof. Dr. Ramazan KARATAŞ
Assoc. Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

ÖNSÖZ

Son yıllarda uygulamalı matematiğin oldukça ilgi gören bir dalı haline gelen fark denklemleri, uygulamalı matematikçilerin ve uygulamalı bilimcilerin ilgisini büyük ölçüde çekmeyi başarmıştır. Fark denklemleri, diferansiyel ve gecikmeli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ve ayrık yapıları gibi görünürler ve uygulamalı matematiğin bu dalı mühendislik, fen bilimleri, ekonomi, tıp, sosyal bilimler ve teknik bilimler gibi birçok alanda uygulama sahası bulmaktadır. Fark denklemleri çok basit bir formda görünmesine rağmen onların çözümlerinin global davranışını tam olarak anlayıp, ortaya koymak oldukça zor bir iştir. Fark denklemlerinin dinamiğini anlamada, bu tezde incelenen literatürde çalışılmış sonuçlar yukarıda bahsettiğimiz bilimsel alanlardaki matematiksel modellemelerinin analizinde oldukça kullanışlı olacaktır. Bu tezde literatürde çalışılan otonom olmayan bir denklem ele alınmıştır. Bu tezin bu konularda çalışan matematikçiler için yol gösterici, ufuk açıcı ve faydalı bir kaynak olmasını dilerim.

Maddi ve manevi her zaman yanımda olan başta babam Aziz ŞENDUR ve annem Keziban ŞENDUR olmak üzere kardeşim Nisa ŞENDUR'a; ablam Şeyda ve eşi Yrd. Doç. Dr. Sertaç Timur DEMİR'e (Gümüşhane Üniversitesi İletişim Fakültesi) sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışma konusunun tayin edilmesinde ve çalışma sürecinin her aşamasında bilgi, tecrübe ve kıymetli zamanını esirgemeyerek bana destek olan değerli danışmanım Prof. Dr. Özkan ÖCALAN'a (Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi) ve eğitim yaşamım boyunca büyük katkıları olan tüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Son olarak, tez çalışmam boyunca yardımlarını esirgemeyen, beni cesaretlendiren ve umut veren kıymetli arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
E	Öteleme Operatörü
log	Logaritma Fonksiyonu
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{R}^+$	$(0, \infty)$ aralığı
Sf	f'in Schwarzian Türevi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$\subset$	Kapsar
=	Eşittir
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\geq$	Büyük veya eşittir
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\sum$	Toplam Sembolü

1. GİRİŞ

Fark denklem, bir veya daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Diferansiyel denklemlere benzerlik gösteren fark denklemlere fonsksiyonel denklemler de denir.Fark denklemleri diferansiyel denklemlere kıyasla daha önceden beri varolmasına rağmen inceleme süreci yönünden, diferansiyel denklemlerden daha yenidir. Diferansiyel denklemler 200 yıldan daha fazla bir sürede incelenmesine rağmen fark denklemleri 100 yıllık bir süre sonucunda sistematik hale gelmiştir. Matematiğin sistematik olarak gelişmesi sonucunda ortaya çıkan ilk teorilerden birisi fark denklemler teorisidir.

Diferansiyel denklemlere benzer olan fark denklemleri, ayrık zamanlarda meydana gelen olayları formüle eden bağıntılar olarak ortaya çıkmıştır. Yani, fark denklemleri türev içeren denklemlerin sadece tamsayılarda tanımlanmış şeklidir. Fark denklemleri, doğa olaylarını ifade etmekte de kullanılır.

Fark denklemlerinin en basit ifade edilmesi M.Ö. 2000 yıllarında görülmektedir. Bu kavram ilk defa bir denklemin kökünü bulma çalışması olarak Babillerde görülmüştür. Fark denklemleri Fibonacci tarafından çalışma konusu olarak dikkate alınmıştır ve onun çok başarılı çalışmaları sonucunda pek çok matematikçi daha sonralarda bu ilginç alana yönlenmiştir. Örneğin, Laplace sabit katsayılı homojen doğrusal fark denklemleri, Guichard ise aynı denklemin homojen olmayan özel hallerini ve Gelgrum bu denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışını inceleme konusu olarak seçmiştir.

Bununla birlikte fark denklemler, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin incelenmesinde de kullanılır. Yani, verilen bir diferansiyel denklemin, ayrık benzeri olan fark denklem ifade edilir ve bu fark denklem, diferansiyel denklemin çözümünün yapısını araştırmak için incelenir.

Fark denklemler genellikle zamanın gidişatı üzerindeki olağanüstü oluşumu tanımlar. Örneğin belli bir popülasyon ayrık jenerasyona sahip ise, $(n+1)$'inci jenerasyon olan $x(n+1)$'in büyüklüğü, n'inci jenerasyon olan $x(n)$'in bir fonksiyonudur. Bu ilişki kendini

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{1.1}$$

denkleminde açıklar. Bu probleme diğer bir açıdan da bakabiliriz. Bir x_0 noktasından başlayarak,

$$x_0,\ f(x_0),\ f(f(x_0)),\ f(f(f(x_0))),\ \ldots \tag{1.2}$$

dizisi olarak genelleyebiliriz. Kolaylık için şu notasyonu da benimseyebiliriz;

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)),\ f^3(x_0) = f(f(f(x_0))),\ \ldots \text{vs.}$$

Eğer

$$x(n) = f^n(x_0) \tag{1.3}$$

denilirse,

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x(n)) \tag{1.4}$$

elde edilir.

$f(x_0)$, f'nin herhangi bir x_0 noktasındaki birinci iterasyonunu, $f^2(x_0)$ ise f'nin x_0 noktasındaki ikinci iterasyonunu ve daha genellemek gerekirse, $f^n(x_0)$, f'nin x_0 noktasındaki n'inci iterasyonunu gösterir. $f^0(x_0)$=x_0 olmak üzere $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ tüm pozitif iterasyonların kümesine x_0'ın pozitif yörüngesi denir. Bu iterasyon prosedürü ayrık dinamik sistemin bir örneğidir.

Bu tartışmalardan sonra tam olarak fark denklemleri ve ayrık dinamik sistemler aynı paranın iki yüzünü gösterdiği sonucuna varabiliriz. Mesela matematikçiler fark denklemler hakkında konuştuklarında genellikle konunun analitik kısmına değinirken, ayrık dinamik sistemler hakkında konuştuklarında genellikle konunun geometrik ve topolojik yönüne gönderme yaparlar.

Şayet (1.1)'de tanımlanan f fonksiyonu $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olarak tanımlanan g fonksiyonu ile yer değiştirilirse, o zaman

$$x(n+1) = g(n, x(n)) \tag{1.5}$$

elde edilir. (1.5) denklemine otonom olmayan veya zaman değişkenli denir iken, (1.1) denklemine otonom veya zaman değişkensiz denir. (1.5)'nin çalışılması çok daha karışıktır ve birinci mertebeden denklemlerin ayrık dinamik sistem teorisine uygun düşmez.

Bu çalışmada lineer olmayan, rasyonel, ikinci mertebeden fark denklemleri ve bu fark denklemlerinin pozitif çözümlerinin davranışları ele alınacaktır. Bu tip denklemlerin çalışması oldukça zorlayıcıdır, ancak uğraşmaya değerdir ve bu denklemlerle ilgili çalışmalar hala emekleme evresindedir.

Biz lineer olmayan rasyonel fark denklemlerinin sahip olduğu gerçeklerle çok önemli olduğuna inanıyoruz. Buna ilaveten bu gibi denklemler hakkındaki sonuçlar, lineer olmayan fark denklemlerinin global davranışlarının temel teorisindeki gelişmeler için orijinal çalışmalar sunabilmektedir.

Fark denklemleri biyoloji, genetik, ekonomi, popülasyon dinamiği ve bunun gibi birçoğunun içindeki matematiksel modellemelerde kullanılır. Önemli fark denklem modellerine ilişkin bazı örnekler şunlardır:

(i) Nüfus artış modeli:

$$x(n+1) - x(n) = ax(n) - bx(n) \text{ ya da } x(n+1) = cx(n),\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

(ii) Logistik artış modeli:

$$x(n+1) - x(n) = ax(n) - bx^2(n),\ a, b \in \mathbb{R}$$

(iii) Av-avcı modeli:

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = -ax(n) + bx(n)y(n),\ a > 0,\ b > 0 \\ y(n+1) - y(n) = cy(n) - dx(n)y(n),\ c > 0,\ d > 0 \end{cases}$$

(iv) Rekabet modeli:

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = ax(n) - bx(n)y(n),\ a > 0,\ b > 0 \\ y(n+1) - y(n) = cx(n) - dx(n)y(n),\ c > 0,\ d > 0 \end{cases}$$

(v) Bulaşıcı hastalık modeli:

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = -\beta x(n)y(n),\ \beta > 0 \\ y(n+1) - y(n) = \beta x(n)y(n). \end{cases}$$

Ayrıca, bilinen önemli bir fark denklem örneği Fibonacci dizisidir. Bu dizi,

$$x(n+2) = x(n+1) + x(n), \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ n \geq 0,$$

fark denkleminin tek çözümüdür ve bu çözüm için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} \approxeq 1.618$$

dir. Bu ise altın oranı ifade eder.

Sonuç olarak yukarıda bahsettiğimiz nedenlerden dolayıdır ki fark denklemleri geniş bir uygulama alanına sahip olup son yıllarda uygulamalı matematiğin ilgi gören bir dalı haline gelmiştir.

1.1. Fark Denklemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Devault, Ladas ve Schultz (1998) yaptıkları çalışmada A ve başlangıç koşulları x_{-2}, x_{-1}, x_0 pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.6}$$

fark denkleminin bütün pozitif çözümlerinin iki periyodik bir çözüme yakınsadığını ve $x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \ldots$ fark denkleminin $A, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ için tek denge noktası olan $\overline{x} = A + 1$'in global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Amleh, Grove, Ladas ve Georgiou (1999) çalışmalarında α pozitif bir reel sayı ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.7}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin α'nın durumlarına göre global asimptotik kararlılığını, sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Feuer (2004) yaptığı çalışmada (1.7) denkleminde özellikle $0 < \alpha < 1$ durumuna yoğunlaşmış ve bu durum için pozitif çözümlerin denge noktası civarındaki davranışlarını incelemiştir. Ayrıca α'nın diğer durumları içinde alternatif ispatlar vermiştir.

Devault, Kent ve Kosmala (2003) çalışmalarında p pozitif reel sayı, $k \in \{2, 3, \ldots\}$ ve başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0$ keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = p + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.8}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir. k'nın tek olma durumunda sınırlılık karakteri, global kararlılığı ve periyodikliği için p'nin durumlarına göre gerek ve yeter şartlar verilmiştir. $k = 2$ durumu için de ayrıntılı bir yarı döngü analizi verilmiş ve çözümlerin sınırlılığının ne zaman olacağı problem olarak bırakılmıştır.

El-Owaidy, Ahmed ve Mousa (2004) çalışmalarında (1.8) denkleminin pozitif çözümlerinin bazı özel koşullar altında periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını araştırmışlardır.

El-Owaidy, Ahmed ve Mousa (2003) çalışmalarında α pozitif bir reel sayı, $p \in [1, \infty)$ ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.9}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin lokal kararlılığını, salınımlılığını ve sınırlılık karakterini araştırmışlardır.

Stevic (2005) çalışmasında, Owaidy vd'nin (2003) yaptığı çalışmayı daha da geliştirmiştir. Bu yaptığı çalışmada α pozitif bir reel sayı, $p \in (0, 1)$ ve başlangıç koşulları $x_{-1}, \ x_0$ keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere (1.9) denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, global çekiciliğini, salınımlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Berenhaut ve Stevic (2006a) çalışmalarında $\alpha, \ p$ parametreleri ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere (1.9) fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterini, global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir. Ayrıca bu denklemin çözümlerinin sınırsız, periyodik ve kararlı olma şartlarını p parametresine bağlı olarak elde etmişlerdir.

Stevic (2003a) çalışmasında $\{\alpha_n\}$ negatif olmayan ve α pozitif sayısına yakınsayan bir dizi, başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.10}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, global kararlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Stevic (2003b) diğer çalışmasında α_n negatif olmayan iki periyodik bir dizi, başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 pozitif reel sayılar olmak üzere, (1.10) fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterini, salınımlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Kulenovic, Ladas ve Overdeep (2003) çalışmalarında $\{p_n\}$ dizisinin çeşitli varsayımlar altındaki otonom olmayan

$$x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.11}$$

fark denklemi için birçok açık problemler ve öneriler ileri sürmüştür.

Kulenovic, Ladas ve Overdeep (2004) çalışmalarında $\{p_n\}$ pozitif değerli 2- periyotlu bir dizi, başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 pozitif reel sayılar olmak üzere (1.11) denkleminin çözümlerinin global asimptotik kararlılığını, periyodik doğasını ve sınırlılık karakterini incelemişlerdir.

Devault, Kocic ve Stutson (2005) çalışmalarında $\{p_n\}$ pozitif sınırlı dizi ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 pozitif reel sayılar olmak üzere (1.11) otonom olmayan fark denkleminin çözümlerinin global asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Papaschinopoulos, Schinas ve Stefanidou (2007) yaptıkları çalışmalarında $\{A_n\}$ pozitif sınırlı bir dizi, $p \in (0,1) \cup (1,\infty)$ ve başlangıç koşulları $x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1} = A_n + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.12}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık, periyodiklik ve kararlılık davranışlarını incelemişlerdir.

Papaschinopoulos, Schinas ve Stefanidou (2011) yaptıkları çalışmalarında $\{A_n\}$ pozitif sınırlı bir dizi, $p, q \in (0,\infty)$ ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A_n + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^q}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.13}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışlarını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Öcalan (2012) çalışmasında $\{p_n\}$ reel sayıların negatif olmayan ve $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ olan bir dizisi, başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0$ keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.14}$$

burada $k \in \mathbf{N}$, fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve global davranışını incelemiştir.

Öcalan (2014) çalışmasında $\{p_n\}$ reel sayıların negatif olmayan iki periyodik bir dizisi, başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0$ keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere, (1.14) fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakteri, periyodiklik karakteri ve global davranışını incelemiştir.

Öcalan ve Gümüş (2016) yaptıkları çalışmalarında, $\{p_n\}$ pozitif sınırlı bir dizi ve başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0$ pozitif reel sayılar olmak üzere (1.14) fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakteri global davranışını incelemişlerdir.

Öcalan, Öğünmez ve Gümüş (2014) yaptıkları çalışmalarında $\{A_n\}$ reel sayıların negatif olmayan iki periyodik bir dizisi, başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0$ keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = A_n + \frac{x_{n-k}^p}{x_n^p}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.15}$$

burada $k \in \mathbf{N}$, fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakteri, periyodiklik karakteri ve global davranışını incelemişlerdir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Fark Denklemleriyle İlgili Genel Tanımlar

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1 (Fark Denklemi). n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişkende y olsun. Bağımlı değişken, bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin $E(y)$, $E^2(y)$, $E^3(y), \ldots,$ $E^n(y), \ldots$ gibi farklarını içeren bağıntılara Fark Denklemi denir (Kulenovic ve Ladas 2001).

Teorem 2.2. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I \times I \to I$ sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her x_{-1}, $x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir (Kulenovic ve Ladas 2001).

Tanım 2.3 (Denge Noktası). Eğer (2.1) denkleminde $\overline{x}$ noktası için $f(\overline{x}, \overline{x}) = \overline{x}$ şartı sağlanıyor ise $\overline{x}$ noktasına (2.1) denkleminin denge noktası denir. (Elaydi 1996).

Tanım 2.4 (Değişmez (Sabit) Aralık). Eğer her $n > 0$ için x_{-1}, $x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt aralığı varsa, bu aralığa (2.1) denkleminin değişmez (ya da sabit) aralığı denir (Kulenovic ve Ladas 2001).

Teorem 2.5. $\overline{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

(i) Eğer x_{-1}, $x_0 \in I$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| < \delta$ olmak üzere $\forall n \geq 0$ için $|x_n - \overline{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktası kararlıdır.

(ii) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve x_{-1}, $x_0 \in I$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ olacak şekilde, $|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(iii) Eğer x_{-1}, $x_0 \in I$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ ise, $\overline{x}$ denge noktasına çekici nokta denir.

(iv) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve çekici nokta ise, $\overline{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

(v) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

(vi) Eğer x_{-1}, $x_0 \in I$ iken $|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| < r$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $|x_N - \overline{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktasına geri itici nokta (repeller) denir (Kulenovic ve Ladas 2001).

Tanım 2.6 (p-periyot). Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır (Kulenovic ve Ladas 2001).

Tanım 2.7 (Er geç p-periyot). Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ şartı sağlanıyor ise, $\{x_n\}$ dizisi eninde sonunda p periyotludur ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Kulenovic ve Ladas 2001).

Tanım 2.8 (Lineerleştirilmiş Denklem). (2.1) denkleminde $f(x_n, x_{n-1})$ fonksiyonunu $f(u, v)$ şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x})}{\partial u} \qquad s = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x})}{\partial v}$$

olmak üzere

$$y_{n+1} = r y_n + s y_{n-1} \tag{2.2}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme, $\overline{x}$ denge noktası etrafında lineerleştirilmiş denklem denir. (2.2) denkleminin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0 \tag{2.3}$$

dir (Kulenovic ve Ladas 2001).

Teorem 2.9 (Lineer Kararlılık Teoremi). (i) Eğer (2.3) denkleminin her iki köküde mutlak değerce 1'den küçük ise, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer (2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

(iii) (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart

$$|r| < 1 - s < 2$$

olmasıdır. Bu durumda, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Aynı zamanda $\overline{x}$ çukur nokta (sink) diye de adlandırılır.

(iv) (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den büyük olması için gerek ve yeter şart

$$|s| > 1 \text{ ve } |r| < |1 - s|$$

olmasıdır. Bu durumda, $\overline{x}$ denge noktası geri itici nokta (repeller)'dir.

(v) (2.3) denkleminin bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart

$$r^2 + 4s > 0 \text{ ve } |r| > |1 - s|$$

olmasıdır. Bu durumda $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır ve eyer noktası diye adlandırılır.

(vi) (2.3) denkleminin bir kökünün mutlak değerce 1'e eşit olması için gerek ve yeter şart

$$|r| = |1 - s| \text{ veya } s = -1 \text{ ve } |r| \leq 2$$

olmasıdır. Bu durumda $\overline{x}$ denge noktasına hiperbolik olmayan nokta denir (Chatterjee vd 2003).

Benzer şekilde, mertebesi 3 olan fark denklemleri için Teorem 2.9 aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.4}$$

fark denklemini ele alalım. (2.4) denkleminde $f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ fonksiyonunu $f(u, v, w)$ şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x}, \overline{x})}{\partial u} \qquad s = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x}, \overline{x})}{\partial v} \qquad t = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x}, \overline{x})}{\partial w}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = r y_n + s y_{n-1} + t y_{n-2} \tag{2.5}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme, $\overline{x}$ denge noktası etrafında lineerleştirilmiş denklem denir. (2.5) denkleminin karakteristik denklemi,

$$\lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \tag{2.6}$$

dır.

Teorem 2.10. (i) Eğer (2.6) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer (2.6) denkleminin bütün köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

(iii) (2.6) denkleminin bütün köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar

$$|r + t| < 1 - s, \; |r - 3t| < 3 + s \text{ ve } t^2 - s - rt < 1$$

olmasıdır. Bu durumda, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (Chatterjee vd 2003).

Tanım 2.11 (Pozitif Yarı Döngü). $\overline{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün pozitif yarı döngüsü $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ terimlerinin art arda gelmesinden oluşur. Bu dizinin bütün terimleri $\overline{x}$ denge noktasından büyük veya eşittir. $l \geq -1$ ve $m \leq \infty$ dur, öyle ki

$$\text{ya } l = -1 \text{ veya } l > -1 \text{ ve } x_{l-1} < \overline{x}$$

ve

$$\text{ya } m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} < \overline{x}$$

dır (Kocic ve Ladas 1993).

Tanım 2.12 (Negatif Yarı Döngü). $\overline{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün negatif yarı döngüsü $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ terimlerinin art arda gelmesinden oluşur. Bu dizinin bütün terimleri $\overline{x}$ denge noktasından küçüktür. $l \geq -1$ ve $m \leq \infty$ dur, öyle ki

$$\text{ya } l = -1 \text{ veya } l > -1 \text{ ve } x_{l-1} \geq \overline{x}$$

ve

$$\text{ya } m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} \geq \overline{x}$$

dır (Kocic ve Ladas 1993).

Tanım 2.13 (Sıfır Denge Noktası Etrafında Salınımlılık). (2.1) denkleminin bir çözümü $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü eninde sonunda ne pozitif ne de negatif ise, bu çözüme sıfır denge noktası etrafında salınımlıdır denir. Aksi durumda salınımlı değildir denir (Kulenovic ve Ladas 2001).

Tanım 2.14 ($\overline{x}$ Denge Noktası Etrafında Salınımlılık). $\overline{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, pozitif bir çözümü olmak üzere $\{x_n - \overline{x}\}$ dizisi salınımlı ise, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne $\overline{x}$ denge noktası etrafında salınımlıdır denir. Aksi durumda $\overline{x}$ denge noktasın etrafında salınımlı değildir denir (Kocic ve Ladas 1993).

Tanım 2.15 (Sınırlı Dizi). $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde $\forall n \geq -1$ için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır (Kulenovic ve Ladas 2001).

Teorem 2.16 (Clark Teoremi). $a, b \in \mathbb{R}$ ve $k \in \{1, 2, \ldots\}$ olsun. O zaman

$$z_{n+1} - az_n + bz_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

fark denkleminin asimptotik kararlılığı için $|a| + |b| < 1$ olması yeterli bir koşuldur.

Buna ilaveten aşağıdaki iki durumdan birinin doğru olduğunu varsayalım.

(i) k tek ve $b < 0$

(ii) k çift ve $ab < 0$

durumlarından birinin sağlanması $|a| + |b| < 1$ olması için gerekli bir koşuldur (Kocic ve Ladas 1993).

Teorem 2.17. Kabul edelim ki $b > 0$ ve k çift olsun. O zaman

$$z_{n+1} + bz_n - bz_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

fark denkleminin asimptotik kararlılığı için gerek ve yeter şart

$$b < \frac{1}{2\cos(\frac{\pi}{k+2})}$$

olmasıdır (Kocic ve Ladas 1993).

Tanım 2.18 (Hiperbolik Nokta). $\overline{x}$ denge noktası için (2.1) denkleminde $|f'(\overline{x}, \overline{x})| \neq 1$ şartı sağlanıyor ise $\overline{x}$ denge noktasına (2.1) denkleminin hiperbolik noktası denir (Elaydi 1996).

Tanım 2.19 (Schwarzian Türevi). (1.1)'de tanımlanan bir f fonksiyonunun Schwarzian türevi şu şekilde tanımlanır:

$$sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2$$

(Elaydi 1996).

Teorem 2.20. $\overline{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olsun. (1.1) de tanımlanan f fonksiyonu sürekli ve diferensiyellenebilir olmak üzere aşağıdaki durumlar doğrudur.

(i) Eğer $|f'(\overline{x})| < 1$ ise, o zaman $\overline{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer $|f'(\overline{x})| > 1$ ise, o zaman $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır (Elaydi 1996).

Teorem 2.21. $\overline{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası ve $f'(x) = 1$ için aşağıdaki durumlar doğrudur.

(i) Eğer $f''(\overline{x}) \neq 0$ ise, o zaman $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

(ii) Eğer $f''(\overline{x}) = 0$ ve $f'''(\overline{x}) > 0$ ise, $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

(iii) Eğer $f''(\overline{x}) = 0$ ve $f'''(\overline{x}) < 0$ ise, $\overline{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

Burada $f'''(\overline{x}) = 0$ olması halinde teorem başarısız olur (Elaydi 1996).

Teorem 2.22. $\overline{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası ve $f'(x) = -1$ olsun. O halde aşağıdaki durumlar doğrudur.

(i) Eğer $sf(\overline{x}) < 0$ ise, o zaman $\overline{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer $sf(\overline{x}) > 0$ ise, o zaman $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

Burada $sf(\overline{x}) = 0$ olması durumunda teorem başarısız olur (Elaydi 1996).

Teorem 2.23.

$$x_{n+1} = g(x_n, ..., x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.7}$$

fark denklemini düşünelim. $g \in C[(0,\infty)^{k+1}, (0,\infty)]$ fonksiyonu her bir bileşeni için artan olsun. Başlangıç koşulları $x_{-k}, \ldots, x_0$ pozitif sayılar olmak üzere, (2.7) denklemi tek bir pozitif denge noktasına sahip olsun.

$$h(x) = g(x, ..., x), \quad x \in (0, \infty) \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanan ve

$$(h(x) - x)(x - \overline{x}) < 0, \quad x \neq \overline{x} \text{ için}$$

negatif feedback (geri besleme) özelliğini sağlayan h fonksiyonunu ele alalım. O halde $\overline{x}$, (2.7) denkleminin bütün pozitif çözümlerinin bir global çekicisidir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$$

dir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ Fark Denkleminin Çözümlerinin Dinamiği

Bu bölümde $\alpha \in [0, \infty)$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.1}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliği, sınırlılığı, yarı döngü analizi ve global kararlılığı çalışılacaktır.

Açık bir şekilde görülür ki, (3.1) denkleminin tek denge noktası $\overline{x} = \alpha + 1$ dir. Bu bölümde, (3.1) denkleminin bütün pozitif çözümlerinin sınırlı olabilmesi için gerek ve yeter şart $\alpha \geq 1$ olduğu, eğer $\alpha = 1$ ise, o zaman (3.1) denkleminin her pozitif çözümünün 2- periyodik çözümlere yakınsadığı, $\alpha > 1$ ise, o zaman (3.1) denkleminin $\overline{x} = \alpha + 1$ denge noktasının global asimptotik kararlı olduğu gösterilip, çözümlerin denge noktası etrafında davranışları ayrıntılı olarak incelenecektir.

(3.1) denkleminin $\overline{x} = \alpha + 1$ denge noktası etrafında lineerleştirilmiş denklemi

$$y_{n+1} + \frac{1}{\alpha + 1} y_n - \frac{1}{\alpha + 1} y_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.2}$$

dir. Bazı önermeleri vererek bu kısma başlayalım.

Lemma 3.1. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1) denkleminin eninde sonunda sabit bir çözümü olsun. O zaman

$$x_n = \alpha + 1, \quad n = 0, \ldots,$$

aşikâr bir çözümdür (Elaydi 1996).

Lemma 3.2. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1) denkleminin bir çözümü ve $L > \alpha$ olsun. O zaman aşağıdaki durumlar doğrudur.

1. $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \frac{L}{(L-\alpha)}$.

2. $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \frac{L}{(L-\alpha)}$.

Teorem 3.3. $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun ve

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \tag{3.3}$$

fark denklemini $x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ başlangıç koşulları altında düşünelim. f fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim.

(i) $a < b$ olacak şekilde a, b pozitif sayıları vardır, öyle ki

$$a \leq f(x, y) \leq b, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

(ii) $f(x, y)$ her bir $y \in [a, b]$ için $x \in [a, b]$ içinde artmayan ve $f(x, y)$, her bir $x \in [a, b]$ için $y \in [a, b]$ içinde azalmayan olsun.

(iii) (3.3) denklemi, $[a, b]$ içinde 2- asli periyotlu çözümlere sahip olmasın. O zaman, $[a, b]$ içinde (3.3) denkleminin tam olarak bir denge noktası vardır. Buna ilaveten, (3.3) denkleminin $[a, b]$ içinde her bir çözümü $\overline{x}$'a yakınsar (Kulenovic, Ladas ve Sizer 1998).

3.1.1. $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ Denklemi için Yarı Döngü Analizi

Bu bölümde, (3.1) denklemi için yarı döngü analizini çalışacağız.

Lemma 3.4. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1) denkleminin tek yarı döngüden oluşan pozitif bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ monoton olarak $\overline{x} = \alpha + 1$'e yakınsar (Amleh, Grove, Ladas ve Georgiou 1999).

Lemma 3.5. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1) denkleminin en az iki yarı döngüden oluşan pozitif bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ salınımlıdır. Dahası, ilk yarı döngünün olma ihtimali hariç, her yarı döngü bir elemana sahiptir ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$' nin her bir terimi α'dan daha büyüktür ve ilk iki yarı döngünün olma ihtimali hariç, hiçbir terim $\alpha + 1$ e eşit değildir (Amleh, Grove, Ladas ve Georgiou 1999).

Lemma 3.6. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. $N \geq 0$ için aşağıdaki durumlar doğrudur (Amleh, Grove, Ladas ve Georgiou 1999).

$$(1)\ x_{N+1} > x_{N-1} \iff x_{N-1} - \alpha x_N - x_{N-1}x_N > 0.$$

$$(2)\ x_{N+1} = x_{N-1} \iff x_{N-1} - \alpha x_N - x_{N-1}x_N = 0.$$

$$(3)\ x_{N+1} < x_{N-1} \iff x_{N-1} - \alpha x_N - x_{N-1}x_N < 0.$$

3.1.2. $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ Denkleminin Sınırlılık Karakteri

Bu bölümde, (3.1) denkleminin sınırlılık karakterini çalışacağız.

Lemma 3.7. $\alpha > 1$ durumunu düşünelim. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. O zaman

$$\alpha + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$$

durumu doğrudur (Amleh, Grove, Ladas ve Georgiou 1999).

Teorem 3.8. $0 \leq \alpha < 1$ ve (3.1) denkleminin bir çözümü $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $0 < x_{-1} \leq 1$ ve $x_0 \geq \frac{1}{1-\alpha}$ başlangıç koşullarını alalım. O zaman aşağıdaki durumlar doğrudur.

(1) $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \infty$.

(2) $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \alpha$ (Amleh, Grove, Ladas ve Georgiou 1999).

3.1.3. $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ Denkleminin Periyodiklik Doğası

Bu bölümde, (3.1) denkleminin periyodiklik karakterini çalışacağız.

Lemma 3.9. Aşağıdaki durumlar doğrudur.

(i) (3.1) denklemi 2- asli periyotlu çözümlere sahip olması için gerek ve yeter şart $\alpha = 1$ olmasıdır.

(ii) Kabul edelim ki, $\alpha = 1$ olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1) denkleminin bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, 2- periyodu ile periyodik olması için gerek ve yeter şart $x_{-1} \neq 1$ ve $x_0 = \frac{x_{-1}}{x_{-1}-1}$ olmasıdır (Amleh, Grove, Ladas ve Georgiou 1999).

Teorem 3.10. $\alpha = 1$ ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün en az iki yarı döngüden oluştuğunu kabul edelim. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1) denkleminin 2- asli periyotlu bir çözümüne yakınsar (Amleh, Grove, Ladas ve Georgiou 1999).

3.1.4. $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ Denkleminin Global Asimptotik Kararlılığı

Bu bölümde, (3.1) denkleminin global asimptotik kararlılık karakterini çalışacağız.

Lemma 3.11. Aşağıdaki durumlar doğrudur.

(i) Eğer $\alpha > 1$ ise, (3.1) denkleminin $\overline{x} = \alpha + 1$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer $0 \leq \alpha < 1$ ise, (3.1) denkleminin $\overline{x} = \alpha + 1$ denge noktası kararlı değildir (Aslında o bir eyer noktası olur.) (Amleh, Grove, Ladas ve Georgiou 1999).

Teorem 3.12. $\alpha > 1$ olsun. O zaman (3.1) denkleminin $\overline{x} = \alpha + 1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır (Amleh, Grove, Ladas ve Georgiou 1999).

3.2. $x_{n+1} = \alpha_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ Fark Denkleminin Çözümlerinin Dinamiği

$\alpha_n = \alpha$ olduğu durumu önceki bölümde ele almıştık. Bu bülümde ilk olarak; başlangıç koşulları x_{-1} ve x_0 keyfi pozitif sayılar, $\{\alpha_n\}$ negatif olmayan bir dizi ve

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \alpha_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

fark denkleminin çözümlerinin davranışı incelenecektir. Stevic'in (2003a) çalışmasında (3.4) denklemi için elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.13. $\alpha > 1$ olsun. O zaman (3.4) denkleminin her pozitif çözümü sınırlıdır (Stevic 2003a).

Sonuç 3.14. $\alpha > 1$ olsun. O zaman her bir $\varepsilon \in (0, \alpha - 1)$ için (3.4) denkleminin her pozitif çözümü eninde sonunda $\left(\alpha - \varepsilon, \frac{a^2-\varepsilon^2}{\alpha-\varepsilon-1} + \varepsilon\right)$ aralığına düşer (Stevic 2003a).

Teorem 3.15. $\alpha > 1$ olsun. O zaman (3.4) denkleminin her pozitif çözümü $\alpha + 1$'e yakınsar (Stevic 2003a).

Teorem 3.16. $\alpha \in [0, 1)$ olsun. O zaman (3.4) denkleminin sınırsız çözümleri vardır.

Öneri 3.17.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$$

olsun. O zaman (3.4) denkleminin her pozitif çözümü 2- periyotlu bir çözüme yakınsar (Stevic 2003a).

Kulenovic, Ladas ve Overdeep (2003) ile Stevic (2003b) birbirlerinden bağımsız olarak aynı denklem üzerinde çalışma yapmışlar ve benzer sonuçlar bulmuşlardır. İlk olarak Kulenovic, Ladas ve Overdeep'in (2003) çalışmalarında elde edilen sonuçları verelim.

Şimdi $\{\alpha_n\}$ 2- periyotlu dizi olmak üzere,

$$x_{n+1} = \alpha_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

fark denklemini düşünelim. Burada x_{-1} ve x_0 keyfi pozitif sayılar ve

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha, & n \text{ çift ise} \\ \beta, & n \text{ tek ise} \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in (0, \infty)$$

dır. Eğer (3.5) denkleminde

$$y_n = -\alpha + x_{2n-1} \text{ ve } z_n = -\beta + x_{2n}$$

yazılırsa

$$y_n > 0, \quad n \geq 0 \text{ için}$$

ve

$$z_n > 0, \quad n \geq 1 \text{ için}$$

olur.

$$y_{n+1} = \frac{y_n(\alpha + y_n)^2}{\beta y_n(\alpha + y_n) + (\alpha + y_{n-1})}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.6}$$

ve

$$z_{n+1} = \frac{z_n(\beta + z_n)^2}{\alpha z_n(\beta + z_n) + (\beta + z_{n-1})}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.7}$$

elde edilir. Hemen görebiliriz ki sıfır her zaman (3.6) ve (3.7) denkleminin denge noktasıdır. Eğer

$$\alpha = \beta = 1$$

ise (3.6) denkleminin herhangi bir $\overline{y} > 0$ noktası bir denge noktasıdır ve (3.7) denkleminin herhangi bir $\overline{z} > 0$ noktası bir denge noktasıdır. Ayrıca (3.5) denkleminin her $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü için

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} \text{ ve } \lim_{n\to\infty} x_{2n}$$

vardır ve sonlu sayılardır.

Diğer taraftan

$$|\alpha - 1| + |\beta - 1| \neq 0$$

olduğunda (3.6) ve (3.7) denklemleri, sıfır denge noktasına ek olarak, pozitif bir denge noktasına sahip olması için gerek ve yeter şart

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$$

olmasıdır. Burada (3.6) denkleminin pozitif denge noktası

$$\overline{y} = \frac{\alpha - 1}{\beta - 1}$$

dir. (3.7) denkleminin pozitif denge noktası ise

$$\overline{z} = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$$

dir. Şimdi aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Teorem 3.18.

(i) (3.5) denkleminin sıfır denge noktası,

$\alpha < 1$ ve $\beta < 1$

olduğu zaman lokal asimptotik kararlıdır ve

$\alpha > 1$ ve / veya $\beta > 1$

ise bir eyer nokta (saddle) dır.

(ii) (3.5) denkleminin pozitif denge noktası

$\alpha > 1$ ve $\beta > 1$

olduğunda lokal asimptotik kararlıdır ve

$\alpha < 1$ ve $\beta < 1$

olduğunda bir eyer nokta (saddle) dır (Kulenovic, Ladas ve Overdeep 2004).

Teorem 3.19. Kabul edelim ki $\alpha > 1$ ve $\beta > 1$ olsun. O zaman (3.5) denkleminin her çözümü

$$\frac{\alpha\beta - 1}{\beta - 1}, \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha - 1}, \ldots,$$

şeklindeki 2- periyotlu çözüme yakınsar (Kulenovic, Ladas ve Overdeep 2004).

Teorem 3.20. α, β parametrelerinden en az biri 1'den daha küçük olduğu zaman (3.5) denklemi sınırsız çözümlere sahip olur (Kulenovic, Ladas ve Overdeep 2004).

Şimdi de Stevic'in (2003b) çalışmasında (3.5) denklemi için elde edilen sonuçları verelim.

(α_n) negatif olmayan, 2- asli periyodu ile periyodik bir dizi olmak üzere (3.5) denkleminde $\alpha_{2n} = \alpha$ ve $\alpha_{2n+1} = \beta$ olsun. Bu durumda $x_{-1}, x_0 \in (0, +\infty)$ olmak üzere

$$x_{2n+1} = \alpha + \frac{x_{2n-1}}{x_{2n}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

ve

$$x_{2n+2} = \beta + \frac{x_{2n}}{x_{2n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.9}$$

elde edilir.

Lemma 3.21. Aşağıdaki durumlar doğrudur:

(1) (3.8)-(3.9) denklemlerinin 2- asli periyotlu çözümlere sahip olması için gerek ve yeter şart $\alpha = \beta = 1$ ya da $\alpha \neq \beta$ ve $\alpha \neq 1$ ve $\beta \neq 1$ olmasıdır.

(2) $\alpha = \beta = 1$ olduğunu varsayalım. $\{x_n\}$, (3.8)-(3.9) denklemlerinin bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}$ çözümünün 2- periyot ile periyodik olması için gerek ve yeter şart $x_{-1} \neq 1$ ve $x_0 = \frac{x_{-1}}{x_{-1}-1}$ olmasıdır.

(3) $\alpha \neq \beta, \alpha \neq 1$ ve $\beta \neq 1$ olduğunu varsayalım. $\{x_n\}$, (3.8)-(3.9) denklemlerinin bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}$ 2- periyot ile periyodik olması için gerek ve yeter şart

$$x_{-1} = \frac{\alpha\beta - 1}{\beta - 1} \text{ ve } x_0 = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha - 1}$$

olmasıdır (Stevic 2003b).

Teorem 3.22. $\alpha > 1$ ve $\beta > 1$ olsun. O zaman (3.8)-(3.9) denklemlerinin her pozitif çözümü sınırlıdır (Stevic 2003b).

Teorem 3.23. (3.8)-(3.9) denklemlerinin her $\{x_n\}$ pozitif çözümü için $\{x_{2n}\}$ ve $\{x_{2n+1}\}$ dizileri eninde sonunda monotondur (Stevic 2003b).

Teorem 3.24. $\alpha > 1$, $\beta > 1$ ve $\alpha \neq \beta$ olsun. O zaman (3.8)-(3.9) denklemlerinin her pozitif çözümü bir 2- döngüye yakınsar (Stevic 2003b).

Teorem 3.25. $\alpha \leq 1$ veya $\beta \leq 1$ ve $\alpha \neq \beta$ olsun. O zaman (3.8)-(3.9) denklemlerinin sınırsız pozitif çözümleri vardır (Stevic 2003b).

3.3. $x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ Fark Denkleminin Çözümlerinin Dinamiği

Bu bölümde $\{p_n\}$ pozitif sınırlı bir dizi olmak üzere

$$x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.10}$$

lineer ve otonom olmayan fark denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik davranışı çalışılacaktır. Burada başlangıç koşulları $x_{-1} \geq 0$, $x_0 > 0$ ve

$$\liminf_{n\to\infty} p_n = p \geq 0 \text{ ve } \limsup_{n\to\infty} p_n = q < \infty \tag{3.11}$$

dır. Şimdi, aşağıdaki iki teoremi verebiliriz.

Teorem A. Kabul edelim ki, $s_1, s_2, \ldots, s_N \geq 0$ olmak üzere

$$P(t) = t^N - s_1 t^{N-1} - \ldots - s_N$$

polinomunun bütün kökleri mutlak değerce 1'den daha küçük değere sahiptir. Eğer $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ için $y_n \geq 0$ olmak üzere

$$x_{n+N} \leq s_1 x_{n+N-1} + \ldots + s_N x_n + y_n$$

eşitsizliğinin negatif olmayan bir çözümü ise o zaman aşağıdaki durumlar doğrudur:

(i) Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ yakınsak ise, o zaman $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ yakınsaktır.

(ii) Eğer $\{y_n\}$ sınırlı ise, $\{x_n\}$ sınırlıdır.

(iii) Eğer $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ ise, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

Teorem B (Brower'ın Sabit Nokta Teoremi). Sürekli operatör

$$A : M \to M$$

M, K ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde sonlu boyutlu normlu bir uzayda kompakt, konveks, boş olmayan bir küme olduğu zaman en az bir sabit noktaya sahiptir (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

3.3.1. $x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ Denkleminin Sınırlılık Karakteri

Bu bölümde, (3.11) koşulunun sağlandığını kabul ederek (3.10) denkleminin sınırlılık karakterini çalışacağız.

Lemma 3.26. (3.11) koşulunun sağlandığını kabul edelim ve $\{x_n\}$, (3.10) denkleminin bir çözümü olsun. O zaman aşağıdaki durumlar doğrudur:

(i) Eğer $p > 0$ ise, $\{x_n\}$ *persist*tir.

(ii) Eğer $p > 1$ ise, $\{x_n\}$ üstten sınırlıdır (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. (i) $x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n} > p_n$ olduğundan dolayı aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz;

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \geq \liminf p_n = p > 0.$$

Dolayısıyla (i) kısmının ispatı tamamlanır.

(ii) $p - \varepsilon > 1$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman yeterince büyük n için

$$x_n \geq p_{n-1} \geq p - \varepsilon \;\text{ ve }\; x_{n+1} \leq p_n + \frac{x_{n-1}}{p - \varepsilon}$$

$\{p_n\}$ sınırlı olduğundan dolayı Teorem A' dan açıkça görülür ki $\{x_n\}$ de sınırlıdır.

Lemma 3.27. (3.11) koşulunun sağlandığını kabul edelim. $p > 1$ ve (3.10) denkleminin bir çözümü $\{x_n\}$ olsun. Eğer

$$\lambda = \liminf_{n\to\infty} x_n \ \text{ ve } \ \mu = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

ise

$$\frac{pq-1}{q-1} \leq \lambda \leq \mu \leq \frac{pq-1}{p-1} \tag{3.12}$$

dır (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman $n \geq N_0(\varepsilon)$ için,

$$\lambda - \varepsilon \leq x_n \leq \mu + \varepsilon$$

ve

$$p - \varepsilon \leq p_n \leq q + \varepsilon$$

elde ederiz. Bundan dolayı,

$$x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n} \geq p - \varepsilon + \frac{\lambda - \varepsilon}{\mu + \varepsilon}$$

ve

$$x_{n+1} \geq p - \varepsilon + \frac{\lambda - \varepsilon}{\mu + \varepsilon} \tag{3.13}$$

dir. $n \to \infty$ için limit alırsak,

$$\lambda \geq p - \varepsilon + \frac{\lambda - \varepsilon}{\mu + \varepsilon}$$

ve $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$\lambda \geq p + \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.14}$$

dır. Benzer olarak,

$$\mu \leq q + \frac{\mu}{\lambda} \tag{3.15}$$

(3.14) ve (3.15) denklemlerinden,

$$\mu p + \lambda \leq \lambda\mu \leq q\lambda + \mu$$

elde ederiz. Buradan,

$$\mu(p-1) \leq \lambda(q-1)$$

ve

$$\frac{\mu}{\lambda} \leq \frac{q-1}{p-1} \text{ ve } \frac{\lambda}{\mu} \geq \frac{p-1}{q-1} \tag{3.16}$$

durumuna sahibiz. (3.13) denkleminden, $n > N_0(\varepsilon)$ için

$$x_{n+1} \geq p + \frac{\lambda}{\mu} + O(\varepsilon) \geq p + \frac{p-1}{q-1} + O(\varepsilon) = \frac{pq-1}{q-1} + O(\varepsilon)$$

durumuna sahibiz. $n \to \infty$ için limit alırsak,

$$\lambda \geq \frac{pq-1}{q-1} + O(\varepsilon)$$

elde ederiz ve $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$\lambda \geq \frac{pq-1}{q-1}$$

dır. Benzer olarak,

$$\mu \leq \frac{pq-1}{p-1}$$

elde ederiz.

Teorem 3.28. $n = 0, 1, \ldots$ için $1 < P \leq p_n \leq Q$ olmak üzere $I = \left[\frac{(PQ-1)}{(Q-1)}, \frac{(PQ-1)}{(P-1)}\right]$ olsun. Başlangıç şartları $x_{-1},\ x_0 \in I$ olmak üzere $\{x_n\}$, (3.10) denkleminin bir çözümü ise $n = 0, 1, \ldots$ için $x_n \in I$ dır (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. Tümevarımla ispatlanır. Kabul edelim ki, $x_{n-1},\ x_n \in I$. O zaman

$$x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n} \leq Q + \frac{\frac{PQ-1}{P-1}}{\frac{PQ-1}{Q-1}} = Q + \frac{Q-1}{P-1} = \frac{PQ-1}{P-1}$$

dir. Benzer olarak,

$$x_{n+1} \geq \frac{PQ-1}{Q-1}$$

elde ederiz ve ispat tamamlanır.

3.3.2. $x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ Denkleminin Sınırsız Çözümlerinin Varlığı

Bu bölümde, (3.10) denkleminin sınırsız çözümlerinin varlığı için yeter şartları elde edeceğiz.

Lemma 3.29. (3.10) denklemini düşünelim. O zaman aşağıdaki durumlar doğrudur.

(i) Kabul edelim ki $0 < b < 1,\ 0 < p_{2n+1} \leq b$ dir. $x_{-1} > \frac{1}{1-b}$ ve $0 < x_0 < 1$ seçelim. O zaman

$$x_{2n-1} > \frac{1}{1-b} \text{ ve } 0 < x_{2n} < 1, \quad \forall n \geq 0.$$

(ii) Kabul edelim ki $0 < b < 1,\ 0 < p_{2n} \leq b$ dir. $0 < x_{-1} < 1$ ve $x_0 > \frac{1}{1-b}$ seçelim. O zaman

$$0 < x_{2n-1} < 1 \text{ ve } x_{2n} > \frac{1}{1-b}, \quad \forall n \geq 0.$$

(Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. (i) kısmını ispatlayacağız. (ii)'nin ispatı benzerdir ve ihmal edilebilir. (3.10) denkleminden,

$$x_1 = p_0 + \frac{x_{-1}}{x_0} > \frac{x_{-1}}{x_0} > \frac{1}{1-b}$$

ve

$$0 < x_2 = p_1 + \frac{x_0}{x_1} < b + \frac{1}{\frac{1}{1-b}} = 1$$

dir. Tümevarımla ispat tamamlanır.

Lemma 3.30. (3.10) denklemini düşünelim ve

ya $0 < p_{2n+1} < 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} p_{2n+1} = 0$

ya da $0 < p_{2n} < 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} p_{2n} = 0$

olduğunu kabul edelim. O zaman (3.10) denkleminin sınırsız çözümleri vardır (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. $\lim_{n\to\infty} p_{2n+1} = 0$ olduğu durumu ispatlayacağız. Diğer durum benzerdir ve ihmal edilebilir.

$$0 < p_{2n+1} < 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} p_{2n+1} = 0$$

olduğundan dolayı $0 < b < 1$, $p_{2n+1} \leq b$ vardır. Ayrıca $x_{-1} > \frac{1}{1-b}$ ve $0 < x_0 < 1$ seçelim. O zaman Lemma 3.29'dan

$$x_{2n-1} > \frac{1}{1-b} \text{ ve } 0 < x_{2n} < 1 \quad \forall n \geq 0$$

durumuna sahibiz. $\lim_{n\to\infty} p_{2n+1} = 0$ olduğundan dolayı $n \geq N-1$ olacak şekilde $N \geq 1$ vardır. Buradan $p_{2n+1} < \frac{b}{2}$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$x_{2N} = p_{2N-1} + \frac{x_{2N-2}}{x_{2N-1}} < \frac{b}{2} + \frac{1}{\frac{1}{1-b}} = \frac{2-b}{2}$$

ve

$$x_{2N+1} = p_{2N} + \frac{x_{2N-1}}{x_{2N}} > \frac{x_{2N-1}}{x_{2N}} > \left(\frac{2}{2-b}\right)\frac{1}{1-b}$$

olur. Tümevarımla, $n \geq N$ için

$$x_{2n} < \frac{2-b}{2} \text{ ve } x_{2n+1} > \left(\frac{2}{2-b}\right)^{n-N+1}\frac{1}{1-b}$$

durumuna sahip oluruz. Buradan açıktır ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \infty$$

dur. İspat tamamlanır.

Teorem 3.31. Kabul edelim ki, $0 < p_n < 1$ ve

$$\text{ya } p_{2n+1} \leq b \text{ ya da } p_{2n} \leq b$$

olacak şekilde $0 < b < 1$ vardır. O zaman (3.10) denkleminin sınırsız çözümleri vardır (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. $p_{2n+1} \leq b$ olduğu durumu ispatlayacağız. Diğer durum benzerdir ve ihmal edilebilir. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} < \infty$ ise, o zaman $\lim_{n\to\infty} p_{2n} = 0$ dır. Lemma 3.30' dan, (3.10) denkleminin sınırsız çözümleri vardır. Bu yüzden kabul edebiliriz ki,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} = \infty$$

dır. Ayrıca $x_{-1} > \frac{1}{1-b}$ ve $0 < x_0 < 1$ seçelim. O zaman Lemma 3.29' dan, $\forall n \geq 0$ için $0 < x_{2n} < 1$ vardır. O zaman

$$x_1 = p_0 + \frac{x_{-1}}{x_0} > p_0 + \frac{1}{1-b}$$

ve

$$x_3 = p_2 + \frac{x_1}{x_2} > p_2 + p_0 + \frac{1}{1-b}$$

dir. Tümevarımla, $n \geq 0$ için

$$x_{2n+1} > \sum_{k=0}^{n} p_{2k} + \frac{1}{1-b}$$

dir. Açık olarak, bu dizi sınırsızdır. İspat tamamlanır.

3.3.3. $x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ Denkleminin Çekicilik Karakteri

Bu bölümde, (3.10) denkleminin çekicilik özelliklerini çalışacağız. $\{\overline{x}_n\}$ çözümü (3.10) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. $\{\overline{x}_n\}$ çözümünün (3.10) denkleminin bütün pozitif çözümlerinin bir çekicisi olması için yeter şartları elde edeceğiz. Diğer bir ifade ile

$$x_n \sim \overline{x}_n$$

olması için yeter şartları elde edeceğiz.

$$y_n = \frac{x_n}{\overline{x}_n}, \quad n = -1, 0, 1, \ldots \tag{3.17}$$

olan $\{y_n\}$ dizisini tanımlayalım. O zaman (3.10) denklemi

$$\overline{x}_{n+1} y_{n+1} = p_n + \frac{\overline{x}_{n-1} y_{n-1}}{\overline{x}_n y_n}$$

veya

$$y_{n+1} = \frac{p_n + \frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_n} \frac{y_{n-1}}{y_n}}{p_n + \frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_n}} \tag{3.18}$$

şeklinde olur.

Lemma 3.32. (3.10) denkleminin bir pozitif çözümü $\{\overline{x}_n\}$ olsun. O zaman aşağıdaki durumlar doğrudur.

(i) (3.18) denklemi, $\overline{y} = 1$ bir pozitif denge çözümüne sahiptir.

(ii) Eğer bazı n için, $y_{n-1} < y_n$ ise, o zaman $y_{n+1} < 1$ dir. Benzer olarak, eğer bazı n için, $y_{n-1} \geq y_n$ ise, o zaman $y_{n+1} \geq 1$ dir.

(iii) (3.18) denkleminin salınımlı bir çözümünün her yarı döngüsü, (ilk yarı döngü olma ihtimali hariç), tam olarak bir terimden oluşur (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. (i) Açıktır.

(ii) $y_{n-1} < y_n$ olsun. O zaman

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} < 1$$

ve

$$y_{n+1} = \frac{p_n + \frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_n}\frac{y_{n-1}}{y_n}}{p_n + \frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_n}} < \frac{p_n + \frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_n}}{p_n + \frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_n}} = 1$$

dir. $y_{n-1} \geq y_n$ olduğu durum benzer şekilde ispatlanır.

(iii) $\{y_n\}$, (3.18) denkleminin eninde sonunda salınımlı bir çözümü olsun. Bu durumda $y_{n-1} < 1$ ve $y_n \geq 1$' dir. (ii) kısımdan $y_{n+1} < 1$ elde ederiz. Bundan dolayı, pozitif yarı döngü tam olarak bir terime sahip olur. Negatif yarı döngü için ispat benzerdir.

Lemma 3.33. (3.18) denkleminin her salınımlı olmayan çözümü 1'e yakınsar (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. $\{y_n\}$, (3.18) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Genelliği kaybetmeksizin, kabul edelim ki, $n \geq N_0$ için $y_n < 1$ dir. Açık olarak $n \geq N_0$ için $y_{n+1} > y_n$ dir. Aksi halde $k > N_0$, $y_k \leq y_{k-1}$ vardır ve **Lemma 3.32** (ii)'den şu sonucu elde ederiz ki, $y_{k+1} \geq 1$ olamaz. y_n artan ve $y_n < 1$ olduğundan dolayı $\{y_n\}$ yakınsaktır.

$$l = \lim_{n\to\infty} y_n$$

olsun. Açık olarak, $0 < l \leq 1$ dir. Burada $l = 1$ olduğunu göstermeliyiz. $\varepsilon > 0$ ve n yeterince büyük olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n-1}}{y_n} = 1$$

olduğundan dolayı,

$$\left| \frac{y_{n-1}}{y_n} - 1 \right| < \varepsilon$$

durumuna sahip oluruz. Bundan dolayı,

$$|y_{n+1} - 1| = \left| \frac{p_n + \frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_n}\frac{y_{n-1}}{y_n}}{p_n + \frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_n}} - 1 \right| = \left| \frac{\frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_n}}{p_n + \frac{\overline{x}_{n-1}}{\overline{x}_n}} \right| \left| \frac{y_{n-1}}{y_n} - 1 \right| < \left| \frac{y_{n-1}}{y_n} - 1 \right| < \varepsilon,$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1$$

elde ederiz. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.34. Kabul edelim ki

$$p > 1 \text{ ve } q < p(p-1)+1$$

ve $\{\overline{x}_n\}$, (3.10) denkleminin bir özel pozitif çözümü olsun. O zaman (3.10) denkleminin bütün pozitif $\{x_n\}$ çözümleri için,

$$x_n \sim \overline{x}_n \tag{3.19}$$

dir (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. (3.19) denklemi, $\{y_n\}$, (3.18) denklemini sağladığında

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1 \tag{3.20}$$

ifadesine eşdeğer olduğundan dolayı (3.20) denkleminin sağlandığını göstermek yeterlidir. Lemma 3.33'den görürüz ki (3.20) denklemi, (3.18) denkleminin bütün salınımlı olmayan $\{y_n\}$ çözümleri için sağlanır. Bundan dolayı, kabul edelim ki $\{y_n\}$ denge noktası 1 denge noktası etrafında salınımlıdır. $p, s, t > 0$ için

$$g(p,t,s) = \frac{p+ts}{p+t} \tag{3.21}$$

fonksiyonunu düşünelim.

$$\frac{\partial g(p,t,s)}{\partial p} = \frac{t(1-s)}{(p+t)^2}$$

ve

$$\frac{\partial g(p,t,s)}{\partial t} = \frac{t(s-1)}{(p+t)^2}$$

olduğundan dolayı,

(i) $s > 1$ için, $g(p,t,s)$, p'de azalandır ve t'de artandır.

(ii) $s < 1$ için, $g(p,t,s)$, p'de artandır ve t'de azalandır durumuna sahibiz.

Bütün yarı döngüler, ilk yarı döngü olma ihtimali hariç, tam olarak bir terime sahiptir. Genelliği kaybetmeksizin kabul edebiliriz ki,

$$y_{2k} < 1 \text{ ve } y_{2k+1} \geq 1, \quad k \geq N_0$$

olacak şekilde N_0 tamsayısı vardır.

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} y_n \text{ ve } \eta = \liminf_{n\to\infty} y_n$$

olsun. Açık olarak,

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} y_{2k+1} \text{ ve } \eta = \liminf_{n\to\infty} y_{2k}$$

dır. (3.18) ve (3.21) denklemlerinden,

$$y_{2k+1} = g\left(p_{2k}, \frac{\overline{x}_{2k-1}}{\overline{x}_{2k}}, \frac{y_{2k-1}}{y_{2k}}\right) \tag{3.22}$$

elde ederiz. Dahası, Lemma 3.27' den $\varepsilon > 0$ için ve k yeterince büyük olmak üzere

$$\frac{y_{2k-1}}{y_{2k}} > 1, \quad p_{2k} > p - \varepsilon \quad \text{ve} \quad \frac{\overline{x}_{2k-1}}{\overline{x}_{2k}} \leq \frac{\mu + \varepsilon}{\lambda - \varepsilon}$$

olur. Bundan dolayı, (i)'den

$$y_{2k+1} \leq g\left(p - \varepsilon, \frac{\mu+\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}, \frac{y_{2k-1}}{y_{2k}}\right) = \frac{p - \varepsilon + \frac{\mu+\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}\frac{y_{2k-1}}{y_{2k}}}{p - \varepsilon + \frac{\mu+\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}} \leq \frac{p - \varepsilon + \frac{\mu+\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}\frac{\gamma+\varepsilon}{\eta-\varepsilon}}{p - \varepsilon + \frac{\mu+\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}}.$$

Sonuç olarak,

$$\gamma = \limsup_{k\to\infty} y_{2k+1} \leq \frac{p - \varepsilon + \frac{\mu+\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}\frac{\gamma+\varepsilon}{\eta-\varepsilon}}{p - \varepsilon + \frac{\mu+\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}}$$

ve $\varepsilon > 0$ keyfi ve $\frac{\mu}{\lambda} \leq \frac{q-1}{p-1}$ olduğundan dolayı

$$\gamma \leq \frac{p + \frac{\mu}{\lambda}\frac{\gamma}{\eta}}{p + \frac{\mu}{\lambda}} \leq \frac{p + \frac{q-1}{p-1}\frac{\gamma}{\eta}}{p + \frac{q-1}{p-1}}$$

ve

$$\gamma\eta \leq \frac{p\eta}{p + \frac{q-1}{p-1}} + \frac{\frac{q-1}{p-1}\gamma}{p + \frac{q-1}{p-1}} \tag{3.23}$$

elde ederiz. Diğer taraftan, (3.18) ve (3.21) denklemlerinden,

$$y_{2k+2} = g\left(p_{2k+1}, \frac{\overline{x}_{2k}}{\overline{x}_{2k+1}}, \frac{y_{2k}}{y_{2k+1}}\right).$$

Ayrıca,

$$\frac{y_{2k}}{y_{2k+1}} < 1, \quad \frac{\overline{x}_{2k}}{\overline{x}_{2k+1}} \leq \frac{\mu+\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}, \quad p_{2k+1} > p - \varepsilon$$

ve (ii)'den

$$y_{2k+2} \geq g\left(p-\varepsilon, \frac{\mu+\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}, \frac{y_{2k}}{y_{2k+1}}\right)$$

elde ederiz. Daha önceki yöntem uygulanarak,

$$\gamma\eta \geq \frac{p\eta}{p+\frac{q-1}{p-1}} + \frac{\frac{q-1}{p-1}\gamma}{p+\frac{q-1}{p-1}}\eta \geq \frac{p\gamma}{p+\frac{q-1}{p-1}} + \frac{\frac{q-1}{p-1}\eta}{p+\frac{q-1}{p-1}} \tag{3.24}$$

elde ederiz. (3.23) ve (3.24) denklemlerinden,

$$a = \frac{p}{p+\frac{q-1}{p-1}} \text{ ve } b = \frac{\frac{q-1}{p-1}}{p+\frac{q-1}{p-1}}$$

olmak üzere

$$a\gamma + b\eta \leq \gamma\eta \leq a\eta + b\gamma \tag{3.25}$$

durumuna sahip oluruz. (3.25) denkleminden,

$$(a-b)\gamma \leq (a-b)\eta$$

elde ederiz.

$$a - b = \frac{p - \frac{q-1}{p-1}}{p+\frac{q-1}{p-1}} = \frac{p(p-1)-q+1}{p(p-1)+q-1} > 0$$

dur. Buradan $\gamma \leq \eta$ elde edilir. Bundan dolayı,

$$\gamma = \eta \text{ ve } \lim_{n\to\infty} y_n = 1$$

dir ve bu ispatı tamamlar.

3.3.4. $x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ Denkleminin Bazı Özel Durumları

Bu bölümde, (3.10) denkleminin bazı özel durumlarına yukarıdaki sonuçları uygulayacağız. İlk olarak, $\{p_n\}$'nin k- asli periyodu ile periyodik olduğu durumu düşünelim. Diğer bir ifade ile

$$p_{n+k} = p_n, \quad n = -1, 0, \ldots$$

olduğu durumu düşünelim. Bu durumda

$$p = \liminf_{n\to\infty} p_n = \min_{1\leq\, i\, \leq k} \{p_i\} = P$$

ve

$$q = \limsup_{n\to\infty} p_n = \max_{1\leq\, i\, \leq k} \{p_i\} = Q$$

olur.

Lemma 3.35. (3.10) denkleminin k- asli periyodu ile periyodik bir $\{x_n\}$ çözümünün varlığı için gerek şart $\{p_n\}$'nin k- periyodu ile periyodik olmasıdır (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. Kabul edelim ki $\{x_n\}$, k- asli periyodu ile periyodiktir, yani;

$$x_{n+k} = x_n, \quad n = -1, 2, \ldots$$

dir. O zaman,

$$p_{n+k} = x_{n+1+k} - \frac{x_{n-1+k}}{x_{n+k}} = x_n - \frac{x_{n-1}}{x_n} = p_n$$

ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.36. Kabul edelim ki $\{p_n\}$, k- asli periyodu ile periyodiktir. Ayrıca $1 < p < q$ olsun. O zaman aşağıdaki durumlar doğrudur:

(i) k- asli periyotlu (3.10) denkleminin pozitif bir $\{\overline{x}_n\}$ periyodik çözümü vardır.

(ii) Eğer $p > 1$ ve $q < p(p-1) + 1$ ise, o zaman $\{\overline{x}_n\}$ periyodik çözümü tektir ve (3.10) denkleminin bütün pozitif çözümlerini çeker, yani; (3.10) denkleminin bütün pozitif $\{x_n\}$ çözümleri için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\overline{x}_n} = 1 \tag{3.26}$$

dir (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. (i) (3.10) denklemi k- periyotlu periyodik bir çözüme sahip olduğunu ispatlamak için aşağıdaki sistemin pozitif bir çözüme sahip olduğunu göstermeliyiz:

$$\begin{aligned} x_1 &= p_k + \tfrac{x_{k-1}}{x_k} \\ x_2 &= p_1 + \tfrac{x_k}{x_1} \\ x_3 &= p_2 + \tfrac{x_1}{x_2} \\ &\vdots \\ x_k &= p_{k-1} + \tfrac{x_{k-2}}{x_{k-1}} \end{aligned}$$

$F : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+^k$ olmak üzere

$$F(u_1, \ldots, u_k) = \left(p_k + \frac{u_{k-1}}{u_k}, p_1 + \frac{u_k}{u_1}, p_2 + \frac{u_1}{u_2}, \ldots, p_{k-1} + \frac{u_{k-2}}{u_{k-1}}\right)$$

olarak tanımlanmış fonksiyonu düşünelim. $I = \left[\frac{pq-1}{q-1}, \frac{pq-1}{p-1}\right]$ olarak tanımlanmış olsun. I^k, F üzerinde sabit olduğunu göstereceğiz. Gerçekten, eğer $u_1, \ldots, u_k \in I$ ise, $i = 1, \ldots, k$ ve $j = (i-1) \operatorname{mod}(k)$ olmak üzere

$$p_i + \frac{u_j}{u_i} \leq q + \frac{\frac{pq-1}{p-1}}{\frac{pq-1}{q-1}} = q + \frac{q-1}{p-1} = \frac{pq-1}{p-1}$$

ve

$$p_i + \frac{u_j}{u_i} \geq p + \frac{\frac{pq-1}{q-1}}{\frac{pq-1}{p-1}} = p + \frac{p-1}{q-1} = \frac{pq-1}{q-1}$$

elde ederiz. Bundan dolayı, $F : I^k \to I^k$. Açık olarak F, I^k üzerinde süreklidir ve I^k kompakt ve konveks kümedir. Sonuç olarak Brower'ın Sabit Nokta Teoremi'nden F, I^k'da bir sabit noktaya sahiptir. $(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_k) \in I^k$, F'nin bir sabit noktası olsun. O zaman $\{\overline{x}_n\}$ dizisi, (3.10) denklemini sağlayan $i = 1, 2, \ldots, k$, $m = 0, 1, \ldots$ için

$$\overline{x}_{-1} = \overline{u}_{k-1}$$

$$\overline{x}_0 = \overline{u}_k$$

ve

$$\overline{x}_{mk+i} = \overline{u}_i$$

olarak tanımlanır ve k- periyodu ile periyodiktir. Bu (i) kısmının ispatını tamamlar.

(ii)

$$\liminf_{n\to\infty} p_n = \min_{1\leq i\leq k} \{p_i\} = p$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty} p_n = \max_{1\le i\le k}\{p_i\} = q$$

olduğundan dolayı Teorem 3.34 gösterir ki ; (3.26) denklemi (3.10) denkleminin herhangi bir $\{x_n\}$ çözümü için sağlanır. Açıkça $\{\overline{x}_n\}$ periyodik çözümü tektir. Aksi halde, (3.10) denkleminin k- periyotlu başka bir periyodik çözümü $\{x'_n\}$ olsun. O zaman

$$x'_{n+k} = x'_n, \quad n = -1, 0, 1, \ldots$$

dir ve i vardır öyle ki

$$\frac{x'_{nk+i}}{\overline{x}_{nk+i}} = \frac{x'_i}{\overline{x}_i} \neq 1$$

dir. Bu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x'_n}{\overline{x}_n} = 1$$

gerçeği ile çelişir ve ispat tamamdır.

Şimdi (3.10) denkleminin asimptotik otonom olduğu durumda, Teorem 3.34'ün aşağıdaki özel durumunu elde edeceğiz.

Sonuç 3.37. Kabul edelim ki $\{p_n\}$ yakınsak bir dizidir ve

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p > 1.$$

O zaman (3.10) denkleminin her pozitif $\{x_n\}$ çözümü yakınsaktır ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p + 1$$

dir (Devault, Kocic ve Stutson 2005).

İspat. Açık olarak $\{p_n\}$ sınırlıdır. Buna bağlı olarak Lemma 3.26 ve Lemma 3.29'dan şu sonuç çıkar ki, $\{x_n\}$ çözümü sınırlı ve *persist*tir.

$$\lambda = \liminf_{n\to\infty} x_n \text{ ve } \mu = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

olsun. O zaman Lemma 3.27'den

$$p = \liminf_{n\to\infty} p_n \text{ ve } q = \limsup_{n\to\infty} p_n$$

olmak üzere

$$\frac{pq-1}{q-1} \leq \lambda \leq \mu \leq \frac{pq-1}{p-1}$$

dir. p_n 'nin limiti olduğundan dolayı $p = q$ dur. Buradan

$$p+1 = \frac{p^2-1}{p-1} \leq \lambda \leq \mu \leq \frac{p^2-1}{p-1} = p+1$$

dir. Böylece ispatı tamamlayan

$$\lambda = \mu = p+1$$

eşitliğini elde ederiz.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Başlangıç koşulları $x_{-1} \geq 0$, $x_0 > 0$ olmak üzere $\{p_n\}$'nin yakınsak bir dizi, 2-asli periyodu ile periyodik bir dizi ve yalnızca sınırlı bir dizi olduğu durumlarda,

$$x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

denkleminin çözümlerinin global davranışı çeşitli çalışmalarla ortaya konulmuş, literatürde yer etmiş ve bu tez bağlamında da detaylı şekilde ele alınmıştır. $\{p_n\}$ 2- periyot ile periyodik bir dizi değil de; k- periyot ile periyodik bir dizi olduğunda aynı denklemin çözümlerinin global davranışı değişebileceğinden dolayı bu araştırma sonraki çalışmalarda detaylandırılarak konu edinilebilir ve analiz edilebilir. Benzer şekilde, denklemin mertebesi 2'den büyük olarak alınmak suretiyle de yeni ve farklı araştırmalar yapılabilir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin global davranışı ile ilgili literatürde çalışılmış sonuçlar incelenmiştir. Birinci bölümde fark denklemleri hakkında genel bilgiler verilmiş ve lineer olmayan rasyonel fark denklemlerinin sınırlılığı, periyodikliği ve kararlılığı ile ilgili yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde fark denklemleri ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde ilk olarak, $\alpha \in [0, \infty)$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere;

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

denkleminin sınırlılığı, perdiyodikliği, global asimptotik kararlılığı ve yarı döngü analizi üzerinde durulmuştur. Daha sonra, x_{-1} ve x_0 keyfi pozitif sayılar, $\{\alpha_n\}$ yakınsak bir dizi veya 2- periyotlu bir dizi olmak üzere;

$$x_{n+1} = \alpha_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

denkleminin çözümlerinin davranışları incelenmiştir. Son olarak ise $\{p_n\}$ pozitif sınırlı bir dizi olmak üzere;

$$x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

fark denkleminin sınırlılığı, sınırsız çözümlerinin varlığı, çekicilik karakteri ve bazı özel durumları ele alınmıştır.

Bu tezin bu konularda çalışan matematikçiler için bir kılavuz niteliğinde olacağı düşünülmektedir.

6. KAYNAKLAR

AMLEH, A. M., GROVE, E. A., LADAS G. and GEORGIOU, D. A. 1999. On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 233: 790-798.

BEREKETOĞLU, H. ve KUTAY, V. 2012. Fark Denklemleri. Gazi Kitabevi, Ankara.

BERENHAUT, K. S. and STEVIC, S. 2006a. The behavior of the positive solutions of the difference equation $x_n = A + (x_{n-2}/x_{n-1})^p$. *Journal of Difference Equations and Applications*, 12(9): 909-918.

BERENHAUT, K. S and STEVIC S. 2006b. A note on positive non-oscillatory solutions of the difference equation $x_{n+1} = A + (x^p_{n-k}/x^p_{n-1})$. *Journal of Difference Equations and Applications*, 12(5): 495-499.

CHATTERJEE, E., GROVE, E. A., KOSTROV, Y. and LADAS, G. 2003. On the trichotomy character of $x_{n+1} = \frac{\alpha+\gamma x_{n-1}}{A+Bx_n+x_{n-2}}$. *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(12): 1113-1128.

DEVAULT, R., LADAS, G. and SCHULTZ, W. 1998. On the recursive sequence $x_{n+1} = (A/x_n) + (1/x_{n-2})$. *Proceedings of the American Mathematicial Society*, 126(11): 3257-3261.

DEVAULT, R., KENT, C. and KOSMALA, W. 2003. On the recursive sequence $x_{n+1} = p + (x_{n-k}/x_n)$. *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(8): 721-730.

DEVAULT, R., KOCIC, V. and STUTSON, D. 2005. Global behavior of solutions of the nonlinear difference equation $x_{n+1} = p_n + (x_{n-1}/x_n)$. *Journal of Difference Equations and Applications*, 11(8): 707-719.

ELAYDİ, S. N. 1996. An Introduction to Difference Equations. Springer-Verlag, New York, Inc.

EL-OWAIDY, H. M., AHMED, A. M. and MOUSA, M. S. 2003. On the asymptotic behavior of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + (x^p_{n-1}/x^p_n)$. *Journal of Applied Mathematics $\&$ Computing*, 12(1-2): 31-37.

EL-OWAIDY, H. M., AHMED, A. M. and MOUSA, M. S. 2004. On asymptotic behaviour of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-k}/x_n)$. *Applied Mathematics and Computation*, 147(1): 163-167.

FEUER, J. 2004. On the behavior of solutions of $x_{n+1} = p + (x_{n-1}/x_n)$. *Applicable Analysis*, 10(6): 599-606.

GÜMÜŞ, M. 2012. İkinci Mertebeden Rasyonel Fark Denklemlerinin Asimptotik Davranışı. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyonkarahisar.

KOCIC, V. and LADAS, G. 1993. Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

KULENOVIC, M. R. S. and LADAS, G. 2001. Dynamics of second order rational difference equations. Chapman & Hall/CRC.

KULENOVIC, M. R. S., LADAS, G. and OVERDEEP, C. B. 2003. On the dynamics of $x_{n+1} = p_n + (x_{n-1}/x_n)$. *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(11): 1053-1056.

KULENOVIC, M. R. S., LADAS, G. and OVERDEEP, C. B. 2004. On the dynamics of $x_{n+1} = p_n + (x_{n-1}/x_n)$ with a period-two coefficient. *Journal of Difference Equations and Applications*, 10(10): 905-914.

KULENOVIC, M. R. S., LADAS, G. and SIZER, W. S. 1998. On the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha x_n + \beta x_{n-1})/(\gamma x_n + \delta x_{n-1})$. *Math. Sci. Res. Hot-line*, 2(5): 1-16.

ÖCALAN, Ö. 2012. Asymptotic behavior of a higher-order recursive sequence. *International Journal of Difference Equations*, 7(2): 173–178.

ÖCALAN, Ö. 2014. Dynamics of the difference equation $x_{n+1} = p_n + (x_{n-k}/x_n)$ with a periodic coefficient. *Applied Mathematics and Computation*, 228(1): 31-37.

ÖCALAN, Ö., ÖĞÜNMEZ, H. and GÜMÜŞ, M. 2014. Global behavior test for a nonlinear difference equation with a period-two coefficient. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 21: 307-316.

ÖCALAN, Ö. and GÜMÜŞ, M. 2016. Global analysis of a non-autonomous difference equation with bounded coefficient. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 4(1): 184-191.

PAPASCHINOPOULOS, G., SCHINAS, C. J. and STEFANIDOU, G. 2007. Boundedness, periodicity and stability of the difference equation $x_{n+1} = A_n + (x_{n-1}/x_n)^p$. *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, 1(2): 109-116.

PAPASCHINOPOULOS, G., SCHINAS, C. J. and STEFANIDOU, G. 2011. On the nonautonomous difference equation $x_{n+1} = A_n + (x^p_{n-1}/x^q_n)$. *Applied Mathematics and Computation*, 217(12): 5171-6018.

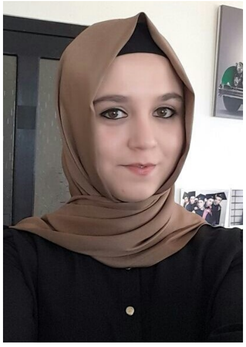
STEVIC, S. 2003a. On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha_n + (x_{n-1}/x_n)$. *International Journal of Mathematical Sciences*, 2(2): 237-243.

STEVIC, S. 2003b. On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha_n + (x_{n-1}/x_n)$. II. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 10: 911-916.

STEVIC, S. 2005. On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + (x^p_{n-1}/x^p_n)$. *Journal of Applied Mathematics $\&$ Computing*, 18(1-2): 229-234.

STEVIC, S. 2009. On a class of higher-order difference equations. *Chaos Solitons Fractals*, 42(1): 138-145.

ÖZGEÇMİŞ



Faika Derya ŞENDUR 1992 yılında Erzurum'da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Erzurum'da tamamladıktan sonra 2010 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden 2015 yılında bölüm üçüncüsü olarak mezun oldu. Eylül 2015 yılında başladığı Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.