T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

ÇOK DEĞİŞKENLİ FIBONACCI TİPLİ POLİNOMLAR İÇİN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Gülşah ÖZDEMİR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

EKİM 2017

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

ÇOK DEĞİŞKENLİ FIBONACCI TİPLİ POLİNOMLAR İÇİN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Gülşah ÖZDEMİR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

EKİM 2017

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

ÇOK DEĞİŞKENLİ FIBONACCI TİPLİ POLİNOMLAR İÇİN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Gülşah ÖZDEMİR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafından FDK-2017-2386 nolu proje ile desteklenmiştir.

EKİM 2017

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ FIBONACCI TİPLİ POLİNOMLAR İÇİN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Gülşah ÖZDEMİR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 27 / 10 / 2017 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)

Prof.Dr. Mustafa ALKAN

Prof.Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Yrd.Doç.Dr. Ahmet Aykut AYGÜNEŞ

Yrd.Doç.Dr. Rahime DERE

ÖZET

ÇOK DEĞİŞKENLİ FIBONACCI TİPLİ POLİNOMLAR İÇİN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

Gülşah ÖZDEMİR

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Ekim 2017, 93 sayfa

Bu tezin temel amaçlarından biri Fibonacci tipli polinomlar ve Jacobsthal tipli polinomlar ailesi için yeni bir üreteç fonksiyonu ailesi vermektir. Bu üreteç fonksiyonu ailesi ve bunların fonksiyonel denklemleri kullanılarak, Fibonacci tipli polinomlar ve Jacobsthal tipli polinomların temel özellikleri incelenmiştir. Aynı zamanda bu polinom aileleri ile Apostol-tipli ve Humbert-tipli sayılar ve polinomları içeren özdeşlikler, bağıntılar ve diğer formüller elde edilmiştir. Öncelikli olarak, çeşitli sayı dizileri ve polinom aileleri, bunlara ait üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri ile bu sayı dizileri ve polinom ailelerinin bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. Sonra, oluşturulan yeni üreteç fonksiyonunun yapısı, bu foksiyonun Fibonacci sayıları ve polinomları, Lucas sayıları ve polinomları, Jacobsthal sayılar ve polinomlar, Vieta-Fibonacci polinomları, Vieta-Lucas polinomları, Legendre polinomları, Chebyshev polinomları, Gegenbauer polinomları, Humbert polinomları, Apostol-Bernoulli polinomları, Apostol-Euler polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, Stirling sayıları, Dickson polinomları ve iyi bilinen diğer sayı dizileri ve polinom aileleri ile ilişkisi incelenmiştir. Daha önce bilinen ve yeni elde edilen çeşitli formüller, denklemeler ve bağıntılar verilmiştir. Sonsuz seri uygulamaları, olasılık ve kombinatorik uygulamaları ve cebirsel uygulamalardan bahsedilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Array polinomları, Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları, Apostol-Euler sayıları ve polinomları, Chebyshev polinomları, Dickson polinomları, Fibonacci sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, Geganbauer polinomları, Humbert polinomları, iki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları, Jacobsthal polinomlar, Legendre polinomları, Pell sayıları, Stirling sayıları, üreteç fonksiyonu, Vieta-Fibonacci polinomları, Vieta-Lucas polinomları.

2010 MSC: 05A15, 11B39, 11B68, 11B73, 11B83, 12E10

JÜRİ: Prof.Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)
Prof.Dr. Mustafa ALKAN
Prof.Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Yrd.Doç.Dr. Ahmet Aykut AYGÜNEŞ
Yrd.Doç.Dr. Rahime DERE

ABSTRACT

GENERATING FUNCTIONS AND APPLICATIONS OF MULTI VARIABLE FIBONACCI TYPE POLYNOMIALS

Gulsah OZDEMIR

PhD Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Yilmaz SIMSEK

October 2017, 93 pages

One of the main purpose of this thesis is to construct a new generating function family for the Fibonacci-type polynomials and the Jacobsthal-type polynomials. By using this generating function family and its functional equations, fundamental properties of the Fibonacci-type polynomials and the Jacobsthal-type polynomials are examined. At the same time identities, relations and other formulas that include these polynomial families and Apostol-type and Humbert-type numbers and polynomials are obtained. Primarily, some basic properties of these sequences of numbers and polynomial families are introduced, in general terms, with their generating functions and the Binet formulas. Then, the structure of the newly generated generating function and the relationship with other polynomial families such as Fibonacci numbers and polynomials, Lucas numbers and polynomials, Jacobsthal numbers and polynomials, Vieta-Fibonacci polynomials, Vieta-Lucas polynomials, Legendre polynomials, Chebyshev polynomials, Gegenbauer polynomials, Humbert polynomials, Apostol-Bernoulli polynomials, Apostol-Euler polynomials, Genocchi numbers and polynomials, Stirling numbers, Dickson polynomials and other well known sequences of numbers and polynomial families are examined. Various formulas, equations and correlations are given, which are known before and new. Infinite series applications, probability and combinatorial applications and algebraic applications are mentioned.

KEYWORDS: Apostol-Bernoulli numbers and polynomials, Apostol-Euler numbers and polynomials, Chebyshev polynomials, Dickson polynomials, Fibonacci numbers and polynomials, Geganbauer polynomials, Generating function, Genocchi numbers and polynomials, Humbert polynomials, Jacobsthal polynomials, Legendre polynomials, Pell numbers, Stirling numbers, array polynomials, Two variable Fibonacci and Lucas polynomials, Vieta-Fibonacci polynomials, Vieta-Lucas polynomials.

2010 MSC: 05A15, 11B39, 11B68, 11B73, 11B83, 12E10

COMMITTEE: Prof.Dr. Yilmaz SIMSEK (Supervisor)
Prof.Dr. Mustafa ALKAN
Prof.Dr. Ahmet Sinan CEVIK
Asst.Prof.Dr. Ahmet Aykut AYGUNES
Asst.Prof.Dr. Rahime DERE

ÖNSÖZ

Bu tezde, çeşitli sayı dizileri ve polinom ailelerini kapsayan yeni üreteç fonksiyonu aileleri tanıtılmıştır. Bu üreteç fonksiyonu aileleri ile ilgili temel tanımlar, teoremler ve özellikler ile birlikte çeşitli özdeşlikler, bağıntılar, cebirsel uygulamalar, fonksiyonel denklemler, kısmi türev denklemleri, olasılık ve kombinatorik uygulamalar ve seri uygulamaları verilmiştir.

Bu tez çalışmasının içeriği aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Bu tez, Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma olmak üzere dört ana bölümden oluşur.

Giriş bölümünde, okuyucuyu konuya hazırlayıcı bilgiler verilip araştırmanın amacı ve kapsamı açıklanmıştır.

Kaynak Taraması bölümünde tezin dayandığı kuramsal bilgiler ve tez konusu ile ilgili olarak bu tezde kullanılan temel kavramlar ve özellikler literatür araştırması ile birlikte verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde, tezin materyal ve metodu ile ilgili bilgiler verilmiştir. En genel hali ile tez çalışmasının temel dayanak noktası olan genelleştirilmiş çift değişkenli polinom aileleri ile genelleştirilmiş çift değişkenli Fibonacci tipli polinom aileleri tanıtılmış ve bu polinom ailelerine ait üreteç fonksiyonları, rekürans bağıntıları ve sağladıkları temel özellikler verilmiştir. Bu polinom ailelerinin, diğer özel sayı dizileri ve polinom aileleri ile ilişkileri incelenmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde, tez çalışmasından elde edilen diğer temel sonuçlar verilmiştir. Apostol-Tipli ve Humbert-Tipli polinomları içeren yeni özel sayı ve polinom aileleri, genelleştirilmiş Humbert tipli polinomlar, bir diğer yeni polinom ailesi ve teta fonksiyonları tanıtılmış, bu sayı ve polinom ailelerinin sağladığı temel özellikler ile birlikte bunların diğer özel sayı dizileri ve polinom aileleri ile ilişkileri incelenmiştir.

Tezin diğer bölümleri Sonuç ve Kaynaklar olmak üzere, tez Özgeçmiş ile bitmektedir.

Doktora eğitimim boyunca ve tez çalışmamda desteğini esirgemeyen ve her anlamda bana rehber olan sayın danışman hocam Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK BİDEB Araştırma Burs ve Destek Programları Grubu'na teşekkür ederim.

Ayrıca, hayatım boyunca daima yanımda olan, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, maddi ve manevi anlamda en büyük destekçim olan sevgili annem Gülten ÖZDEMİR'e, babam Ahmet ÖZDEMİR'e ve abim Emrah ÖZDEMİR'e tüm destekleri için teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum "ÇOK DEĞİŞKENLİ FIBONACCI TİPLİ POLİNOMLAR İÇİN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI " adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

27 / 10 / 2017

Gülşah ÖZDEMİR

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

F_j	: Fibonacci Sayıları
L_j	: Lucas Sayıları
P_j	: Pell Sayıları
J_j	: Jacobsthal Sayılari
$F_j\left(x\right)$	: Fibonacci Polinomları
$J_j\left(x\right)$	: Jacobsthal Polinomlar
$V_j\left(x\right)$	: Vieta-Fibonacci Polinomları
$v_j\left(x\right)$	: Vieta-Lucas Polinomları
$T_j\left(x\right)$	: Birinci Tip Chebyshev Polinomları
$U_j\left(x\right)$	: İkinci Tip Chebyshev Polinomları
$V_{n,m}\left(x\right)$	: Genelleştirilmiş Birinci Tip Chebyshev Polinomları
$\Omega_{n,m}\left(x\right)$	: Genelleştirilmiş İkinci Tip Chebyshev Polinomları
$P_j\left(x\right)$	: Legendre Polinomları
$\Pi_{j,m}^{\lambda}\left(x\right)$	: Humbert Polinomları
$P_j\left(m,x,y,p,C\right)$	: Genelleştirilmiş Humbert Polinomları
$C_j^{\lambda}\left(x\right)$	: Gegenbauer Polinomları
$F_j\left(x,y\right)$	: İki değişkenli Fibonacci Polinomları
$L_j\left(x,y\right)$	: İki değişkenli Lucas Polinomları
$\mathcal{G}_j\left(x,y;k,m,n\right)$	: Genelleştirilmiş Çift Değişkenli Polinomlar
$W_j\left(x,y;k,m,n\right)$	: Genelleştirilmiş Çift Değişkenli Fibonacci Tipli Polinomlar

$\mathcal{B}_j(x,\lambda)$: Apostol-Bernoulli Polinomları

$B_j(x)$: Bernoulli Polinomları

$B_j^h(x)$: Yüksek Mertebeden Bernoulli Polinomları

B_j : Bernoulli Sayıları

$\mathcal{E}_j(x,\lambda)$: 1. Tip Apostol Euler Polinomları

$\mathcal{E}_j(\lambda)$: 1. Tip Apostol Euler Sayıları

$E_j(x)$: 1. Tip Euler Polinomları

$E_j^h(x)$: Yüksek Mertebeden Euler Polinomları

$\mathcal{E}_j^*(x,\lambda)$: 2. Tip Apostol Euler Polinomları

$E_j^*(x)$: 2. Tip Euler Polinomları

E_j^* : 2. Tip Euler Sayıları

G_j : Genocchi Sayıları

$G_j(x)$: Genocchi Polinomları

$G_j(x,\lambda)$: Apostol Genocchi Polinomları

$\mathcal{P}_n(x)$: Pincherle Polinomları

$S_2(j,k;\lambda)$: 2. Tip Stirling Sayıları

$S^\alpha(j,k)$: Genelleştirilmiş Stirling Sayıları ve Polinomları

$S_k^j(x;\lambda)$: λ-Array Polinomları

$D_j(x,a)$: Dickson Polinomları

$\mathcal{G}_j^{(h)}(x,y;k,m,n)$: Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Çift Değişkenli Polinomlar

$vd.$: ve diğerleri

$\mathbb{N}_0$	: Doğal Sayılar
$\mathbb{N}$	: Pozitif Tam Sayılar
$\lfloor a \rfloor$	: a’dan küçük veya a’ya eşit en büyük tam sayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Polinomlar, başta matematik olmak üzere hem fizikte hem de mühendisliğin çeşitli alanlarında kapsamlı bir şekilde kullanılmaktadır. Genellikle birden fazla terimli olan ve her terimi bir değişken, bir sayı veya değişkenlerin ve sayıların bazı kombinasyonları olan polinomlar; matematik, ekonomi, fizik, kimya, biyoloji, mühendislik, sayısal analiz, yaklaşım teorisi, bilgisayar programlaması, kodlama ve kriptolojide matematiksek modeller oluşturma ve nihai kararlar almada kullanılan çok güçlü araçlardır (Wikipedia, Mathworld). Matematiğin polinomlarla uğraşan dalları, muazzam sayıda farklı denklemleri ve denklem türlerini kapsar. Sayılar ve çözümler polinom denklemleri ile kullanıldığında, daha karmaşık sistem davranışlarını ve reaksiyonlarını modellemek için kullanılabilirler. Örneğin, birçok sistemin kararlılığı veya kararsızlığı, mühendisler tarafından polinom denklemleri aracılığıyla belirlenebilir. İlaç endüstrisinde, üretim ölçeklerini belirlerken veya her ilacın dozajına göre tüm kimyasal bileşenlerden doğru miktarın sağlanmasında polinom denklemlerinden yararlanılır. Sonuç olarak, polinom denklemleri, fiziksel ve gerçek dünya problemlerini modellemek için en iyi donatılmış araçlardır (Wikipedia, Mathworld).

Üreteç fonksiyonları da matematiğin en ilginç alanlarından biridir. Esas olarak üreteç fonksiyonları, özel sayı ve polinom dizilerinin özelliklerini araştırmak için yararlanılan fonksiyonlardır. Üreteç fonksiyonları aynı zamanda her türlü sayma probleminin çözümlerinde, olasılık ve istatistik uygulamalarında (moment çıkaran fonksiyonlar, karakteristik fonksiyonlar), diferansiyel denklem uygulamalarında kullanılmaktadır (Wikipedia, Mathworld).

Üreteç fonksiyonları, ayrık matematikte birçok uygulaması olan çok kullanışlı araçlar olmak üzere ayrık matematik ile analiz (özellikle karmaşık analiz) arasında bir köprü görevi görmektedir. Ayrık matematik problemlerinin çözümünde kullanılan çok güçlü ve büyülü araçlar olan üreteç fonksiyonları, matematiğin birçok çalışma alanında, kombinatoryal problemlerin çözümünde, rekürans içeren denklemlerde ve hatta fizikte yararlı uygulamalara sahiptir (Wilf 1990).

Üreteç fonksiyonları, belirli bir dizi ile ilişkili sürekli fonksiyonlardır. Matematikte de dizi ile çalışmak yerine sürekli bir fonksiyon ile çalışmak çoğu zaman daha kolay olduğundan, sayı dizilerini veya fonksiyon dizilerini içeren ayrık problemlerin analizinde üreteç fonksiyonları çok önemli rol oynamaktadır. Üreteç fonksiyonları doğrusal rekürans problemlerinin çözümünde, birçok kombinatoryal problemlerin çözümünde, dizisel fonksiyonların analizinde kullanılır (Sahanggamu 2006).

Bu tez çalışmasında da bir çok sayı dizileri ve polinom ailelerini kapsayan üreteç fonksiyonu aileleri tanımlanmış ve çeşitli formüller, denklemler ve eşitlikler elde edilmiştir. Türev bağıntıları, sonsuz seri uygulamaları, kombinatorik ve cebirsel uygulamlar verilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

ÖZEL SAYI VE POLİNOM DİZİLERİ VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, iyi bilinen çeşitli sayı dizileri ve polinom aileleri tanıtılmış ve sağladıkları temel özellikler verilmiştir.

2.1. Fibonacci Sayıları

Fibonacci, matematikte en ünlü isimlerden biridir ve ortaçağın en büyük Avrupalı matematikçisi olarak bilinir. Fibonacci, Hindu-Arap sayı sistemini Ayrupa'ya ilk tanıtan kişilerden biridir. Fibonacci'nin 1202 yılında tamamladığı hesaplama (abaküs) kitabı anlamına gelen ve ondalık sayı sisteminde aritmetik işlem yapma konusundaki Liber Abbaci isimli kitabı, Ortaçağ'ın en etkili matematiksel eserlerinden biridir. Fibonacci bu kitapla o zamanlarda birçok Avrupalı matematikçiyi kitapta yer alan yeni sayı sistemini kullanmaya ikna etmiştir. İlköğretim seviyesinde sayıları ekleme, çıkarma, çarpma ve bölme için uygulanan yöntemlerin ve kuralların yer aldığı bu kitapta Fibonacci, önce sayıların nasıl okunacağını ve yazacağını açıklamış, tam sayı ve kesirlerin nasıl eklendiğini, çıkarıldığını, çarpıldığını ve bölündüğünü göstermiştir. Daha sonra, bu tekniklerin ve Hindu-Arap numaralandırma sisteminin ticari işlemleri nasıl kolaylaştıracağını açıklamıştır. Bu pratik problem çözme teknikleri, özellikle liman şehirlerinde ticaret yapan tüccarlara, kârlarını nasıl hesaplayacaklarını ve bir para biriminin diğer para birimlerine nasıl dönüştüreceğini, malları ölçmek için kullanılan ağırlık birimlerinin birbirine nasıl dönüştürüleceğini açıklamıştır (Koshy 2001; Grigas 2013).

Matematiksel tarihte Leonardo Pisano Bigollo (1180-1250) adı ile bilinen Fibonacci, matematik dünyasına önemli katkılarda bulunmuştur. Bunlardan en önemlisi, kendi adını taşıyan sayı dizisi Fibonacci dizisidir.

Tanım 2.1 *F_j , j. Fibonacci sayısını göstermek üzere, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $j \geq 2$ tam sayısı için Fibonacci sayıları*

$$F_j = F_{j-1} + F_{j-2} \tag{2.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Koshy 2001).

Elemanları Fibonacci sayılarından oluşan $\{F_j\}_{j=0}^{\infty}$ sayı dizisine, Fibonacci sayıları dizisi denir. Fibonacci sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
F_j	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...

Bu dizide, her terim kendinden önceki iki terimin toplamı şeklinde ifade edilmektedir. Fibonacci'nin yaşamından yüzlerce yıl sonra, Rönesans döneminde, insanlar doğal dünyaya daha analitik biçimde dikkat etmeye başlamıştır. Bu dizinin sayıları üzerinde de çeşitli işlemler ve manipülasyonlar yapılmış, güzel ve inanılmaz kalıplar ortaya çıkmıştır. Bu dizideki sayılar, hem birçok bitki ve hayvanın biçim ve tasarımında hem de doğanın her yerinde kendini göstermekle birlikte sanat, mimari ve müzik gibi çeşitli biçimlerde de üretilmiştir (Koshy 2001; Grigas 2013).

Tanım 2.2 *F_j Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısından elde edilen*

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ve

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

değerleri için

$$F_j = \frac{\alpha^j - \beta^j}{\alpha - \beta} \tag{2.2}$$

ifadesine Fibonacci sayıları için Binet formülü denir (Koshy 2001; Posamentier ve Lehmann 2007).

Tanım 2.3 *F_j Fibonacci sayıları için rekürans bağıntısından elde edilen üreteç fonksiyonu*

$$G_F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j t^j = \frac{t}{1-t-t^2} \tag{2.3}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001; Posamentier ve Lehmann 2007).

Tanım 2.4 *F_j Fibonacci sayıları için üstel üreteç fonksiyonu ise*

$$G_{F,\exp}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j \frac{t^j}{j!} = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} \tag{2.4}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001; Posamentier ve Lehmann 2007).

Fibonacci'nin matematiğe yaptığı katkılar yüzyıllar boyunca insanlara ilham kaynağı olmuştur ve ilerleyen zamanlarda çalışmaları matematik dünyasında daha derin bir şekilde incelenmiştir. Bunlardan birkaçı aşağıdaki verilmiştir.

Ardışık iki Fibonacci sayısı aralarında asaldır, yani ortak bölenleri yoktur (Garland 1987).

Ardışık on Fibonacci sayısının toplamı, 11 ile tam bölünür (Posamentier ve Lehmann 2007).

Her j. Fibonacci sayısı F_j ile tam bölünür. Yani, $F_j | F_{kj}$ dir (Garland 1987).

$2F_j - F_{j+1} = F_{j-2}$ (Garland 1987).

$F_{j+1}^2 - F_j^2 = F_{j-1}F_{j+2}$ (Garland 1987).

$F_{j+1}^3 + F_{j+2}^3 - F_j^3 = F_{3j+3}$ (Garland 1987).

$\sum_{j=1}^{n} F_j = F_{n+2} - 1$ (Posamentier ve Lehmann 2007).

$F_{j-1}F_{j+1} = F_j^2 \pm 1$ (Posamentier ve Lehmann 2007).

$\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$ (Posamentier ve Lehmann 2007).

2.2. Fibonacci Polinomları

$F_j(x)$ Fibonacci polinomları, ilk olarak 1883 yılında Belçikalı matematikçi E. Charles Catalan ve Alman matematikçi E. Jacobsthal tarafından çalışılmıştır. 1963 yılında, P. F. Bryd tarafından Fibonacci tipli polinomların bir yenisi olan Pell polinomları literatüre eklenmiştir. Bu çalışmalar, 1966 yılında M. N. Swamy tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra tüm bu farklı tanımlamalar Fibonacci ve Lucas tipi polinomlar olarak adlandırılmıştır. Catalan tarafından tanımlanan Fibonacci polinomlarının üzerine yapılan çalışmalar sonucunda bu polinomların farklı genelleştirmeleri tanımlanmıştır (Koshy 2001; Garth vd. 2007; Shattuck ve Wagner 2007; Prodinger 2009; Amdberhan 2010).

Tanım 2.5 *$F_j(x)$, j. Fibonacci polinomunu göstermek üzere, $F_0(x) = 0$ ve $F_1(x) = 1$ başlangıç koşulları ve her $j \geq 2$ tam sayısı için Fibonacci polinomları*

$$F_j(x) = xF_{j-1}(x) + F_{j-2}(x) \tag{2.5}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Koshy 2001; Catalani 2004; Panwar vd. 2013).

Elemanları Fibonacci polinomlarından oluşan $\{F_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ polinomlar dizisine, Fibonacci polinomları dizisi denir. Fibonacci polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

j	0	1	2	3	4	5	6	$\ldots$
$F_j(x)$	0	1	x	x^2+1	x^3+2x	x^4+3x^2+1	x^5+4x^3+3x	$\ldots$

Tanım 2.6 *Fibonacci polinomlarının rekürans bağıntısından elde edilen*

$$\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

ve

$$\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$$

değerleri için

$$F_j(x) = \frac{\alpha^j(x) - \beta^j(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \tag{2.6}$$

ifadesine Fibonacci polinomları için Binet formülü denir (Koshy 2001; Catalani 2004).

Tanım 2.7 *$F_j(x)$ Fibonacci polinomları için rekürans bağıntısından elde edilen üreteç fonksiyonu*

$$G_F(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(x)\, t^j = \frac{t}{1 - xt - t^2} \tag{2.7}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001).

Tanım 2.8 *$F_j(x)$ Fibonacci polinomları için üstel üreteç fonksiyonu ise*

$$G_{F,\exp}(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(x)\, \frac{t^j}{j!} = \frac{e^{\alpha(x)t} - e^{\beta(x)t}}{\alpha(x) - \beta(x)} \tag{2.8}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001).

Not 1 *(2.5) numaralı rekürans bağıntısında $x = 1$ alınması durumunda Fibonacci polinomları Fibonacci sayılarına dönüşür ve $F_j(1) = F_j$ eşitliği elde edilir.*

2.2.1. Fibonacci polinomları için temel sonuçlar

$F_j(x)$ Fibonacci polinomları, aşağıda verilen temel ve iyi bilinen özellikleri sağlar (Koshy 2001; Catalani 2004; Panwar vd. 2013).

1. $F_j(x)$ Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonu kullanılarak

   $$\begin{aligned} F_{2j+1}(0) &= 1, \\ F_{2j}(0) &= 0 \end{aligned}$$

   eşitlikleri elde edilir (Koshy 2001).

2. Çift indisli Fibonacci polinomları için üreteç fonksiyonu

   $$G_{F_{2j}(x)}(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_{2j}(x)\, t^j = \frac{xt}{1 - (x^2+2)\, t + t^2} \tag{2.9}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001).

Bu ifadenin ispatı için, $F_j(x)$ Fibonacci polinomlarının rekürans bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}(x)\, t^n &= F_0(x)\, t^0 + F_2(x)\, t^1 \\ &\quad + x\sum_{n=2}^{\infty} F_{2n-1}(x)\, t^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{2n-2}(x)\, t^n\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}(x)\, t^n = xt + \left(x^2+2\right) t \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}(x)\, t^n - t^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}(x)\, t^n$$

sonucu elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_{2j}(x)\, t^j = \frac{xt}{1-(x^2+2)\, t + t^2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Not 2 *(2.9) numaralı denklemde $x = 1$ alınırsa, $F_{2j}(1) = F_{2j}$ sonucu elde edilir ve böylece çift indisli Fibonacci sayıları için üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_{2j}(1)\, t^j = \sum_{j=0}^{\infty} F_{2j} t^j = \frac{t}{1-3t+t^2}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001).

3. Tek indisli Fibonacci polinomları için üreteç fonksiyonu

$$G_{F_{2j+1}(x)}(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_{2j+1}(x)\, t^j = \frac{1-t}{1-(x^2+2)\, t + t^2} \tag{2.10}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001).

Not 3 *(2.10) numaralı denklemde $x = 1$ alınırsa, $F_{2j+1}(1) = F_{2n+1}$ sonucu elde edilir ve böylece tek indisli Fibonacci sayıları için üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_{2j+1}(1)\, t^j = \sum_{j=0}^{\infty} F_{2j+1} t^j = \frac{1-t}{1-3t+t^2}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001).

4. a ve b birer doğal sayı olmak üzere, keyfi indisli Fibonacci polinomları için üreteç fonksiyonu

$$G_{F_{aj+b}(x)}(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}F_{aj+b}(x)\,t^{j}=\begin{cases}\frac{F_b(x)-(-1)^a F_{b-a}(x)t}{1-L_a(x)t+(-1)^a t^2} & ;a<b \text{ ise,}\\ \\ \frac{F_b(x)+(-1)^b F_{a-b}(x)t}{1-L_a(x)t+(-1)^a t^2} & ;a\geq b \text{ ise,}\end{cases} \tag{2.11}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001).

5. Çift indisli ve tek indisli Fibonacci polinomlarının rekürans bağıntısından elde edilen

$$\breve{\alpha}(x)=\frac{x^2+2+x\sqrt{x^2+4}}{2}$$

ve

$$\breve{\beta}(x)=\frac{x^2+2-x\sqrt{x^2+4}}{2}$$

değerleri için çift indisli ve tek indisli Fibonacci polinomları için Binet formülleri sırası ile

$$\begin{aligned}F_0(x)&=0\\F_2(x)&=x\end{aligned}$$

başlangıç koşulları ile

$$F_{2j}(x)=x\frac{\breve{\alpha}^j(x)-\breve{\beta}^j(x)}{\breve{\alpha}(x)-\breve{\beta}(x)}$$

ve

$$\begin{aligned}F_1(x)&=1\\F_3(x)&=x^2+1\end{aligned}$$

başlangıç koşulları ile

$$F_{2j+1}(x)=\frac{x^2}{2}\frac{\breve{\alpha}^j(x)-\breve{\beta}^j(x)}{\breve{\alpha}(x)-\breve{\beta}(x)}+\frac{\breve{\alpha}^j(x)+\breve{\beta}^j(x)}{2}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001).

a) Çift indisli Fibonacci polinomları için Binet formülünü elde etmek için öncelikli olarak rekürans bağıntısından yola çıkalım:

$$\begin{aligned}
F_{2j}(x) &= xF_{2j-1}(x) + F_{2j-2}(x) \\
&= x\left(xF_{2j-2}(x) + F_{2j-3}(x)\right) + F_{2j-2}(x) \\
&= \left(x^2+1\right)F_{2j-2}(x) + xF_{2j-3}(x) \\
&= \left(x^2+1\right)F_{2j-2}(x) + F_{2j-2}(x) - F_{2j-4}(x) \\
&= \left(x^2+2\right)F_{2j-2}(x) - F_{2j-4}(x)
\end{aligned}$$

ifadesinde $F_{2j}(x) = T_j(x)$ dönüşümü uygulanırsa, $j \geq 2$ için

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= F_0(x) = 0 \\
T_1(x) &= F_2(x) = x
\end{aligned}$$

başlangıç değerleri olmak üzere

$$T_j(x) = \left(x^2+2\right)T_{j-1} - T_{j-2}(x)$$

rekürans bağıntısı elde edilir.

O halde çift indisli Fibonacci polinomları için Binet formülü

$$\breve{\alpha}(x) = \frac{x^2+2+x\sqrt{x^2+4}}{2}$$

ve

$$\breve{\beta}(x) = \frac{x^2+2-x\sqrt{x^2+4}}{2}$$

olmak üzere

$$F_{2j}(x) = x\frac{\breve{\alpha}^j(x) - \breve{\beta}^j(x)}{\breve{\alpha}(x) - \breve{\beta}(x)}$$

ile ifade edilir.

b) Tek indisli Fibonacci polnomları için Binet formülünü elde etmek için öncelikli olarak rekürans bağıntısından yola çıkarak

$$F_{2j+1}(x) = \left(x^2+2\right)F_{2j-1}(x) - F_{2j-3}(x)$$

eşitliğinden tek indisli Fibonacci polinomları için Binet formülü

$$\breve{\alpha}(x)=\frac{x^2+2+x\sqrt{x^2+4}}{2}$$

ve

$$\breve{\beta}(x)=\frac{x^2+2-x\sqrt{x^2+4}}{2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2x\sqrt{x^2+4}}\\B&=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2x\sqrt{x^2+4}}\end{aligned}$$

değerleri için

$$F_{2j+1}(x)=A\breve{\alpha}^j(x)+B\breve{\beta}^j(x)$$

ile ifade edilir. En genel hali ile

$$F_{2j+1}(x)=\frac{x^2}{2}\frac{\breve{\alpha}^j(x)-\breve{\beta}^j(x)}{\breve{\alpha}(x)-\breve{\beta}(x)}+\frac{\breve{\alpha}^j(x)+\breve{\beta}^j(x)}{2}$$

dir.

6. $\alpha(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $\beta(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ olmak üzere, $F_j(x)$ Fibonacci polinomlarının binomial katsayı ile çarpımlarının kısmi toplamları

$$\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}F_k(x)=\frac{(\alpha(x)+1)^j-(\beta(x)+1)^j}{\alpha(x)-\beta(x)} \tag{2.12}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001).

Bu ifadenin ispatı için, $F_j(x)$ Fibonacci polinomlarının üstel üreteç fonksiyonu ile klasik üstel üreteç fonksiyonunun Cauchy çarpımından

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\sum_{j=0}^{\infty}F_j(x)\frac{t^j}{j!}&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}F_k(x)\frac{t^j}{j!}\\&=e^t\frac{e^{\alpha(x)t}-e^{\beta(x)t}}{\alpha-\beta}\\&=\frac{e^{(\alpha(x)+1)t}-e^{(\beta(x)+1)t}}{\alpha(x)-\beta(x)}\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{(\alpha(x)+1)^j-(\beta(x)+1)^j}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)\frac{t^j}{j!}\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu eşitliğin sağ ve sol tarafında $\frac{t^j}{j!}$'in katsayılarını karşılaştırırsak

$$\sum_{k=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} F_k(x) = \frac{(\alpha(x)+1)^j - (\beta(x)+1)^j}{\alpha(x)-\beta(x)}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

7. $F_j(x)$ Fibonacci polinomları aşağıdaki determinant özelliklerini sağlar (Koshy 2001; Catalani 2004):

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} F_{j+1}(x) & F_j(x) \\ F_j(x) & F_{j-1}(x) \end{bmatrix} &= (-1)^j, \\
\det \begin{bmatrix} F_{k+j+1}(x) & F_{k+j}(x) \\ F_{k+j}(x) & F_{k+j-1}(x) \end{bmatrix} &= (-1)^{k+j}, \\
\det \begin{bmatrix} F_{ak+bj+1}(x) & F_{ak+bj}(x) \\ F_{ak+bj}(x) & F_{ak+bj-1}(x) \end{bmatrix} &= (-1)^{ak+bj}, \\
\det \begin{bmatrix} F_{j+2}(x) & F_{j+1}(x) & F_j(x) \\ F_{j+1}(x) & F_j(x) & F_{j-1}(x) \\ F_j(x) & F_{j-1}(x) & F_{j-2}(x) \end{bmatrix} &= 0.
\end{aligned}$$

8. $F_j(x)$ Fibonacci polinomlarının Binet formülünü elde etmek için bir başka yöntem de matrislerin özdeğer ve özvektör hesaplamalarından yararlanmaktır.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} F_{j+1}(x) & F_j(x) \\ F_j(x) & F_{j-1}(x) \end{bmatrix} = A^j$$

ile ifade edilir.

Bu durumda

$$\begin{bmatrix} F_{j+1}(x) \\ F_j(x) \end{bmatrix} = A^j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir.

Bu ifadenin ispatı için, öncelikli olarak A matrisinin özdeğer ve özvektörlerini inceleyelim:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - x\lambda - 1 = 0$$

karakteristik denkleminin diskriminantı

$$\Delta = x^2 + 4$$

olmak üzere, A matrisinin özdeğerleri

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

ve

$$\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

ile ifade edilir.

Birbirinden farklı iki özdeğer bulunduğundan A matrisi köşegenleştirilebilirdir. Bu matrisi köşegenleştirebilmek için özvektörlerden oluşan bir taban bulmalıyız.

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \alpha(x) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \beta(x) \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x) \\ 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta(x) \\ 1 \end{bmatrix}$$

özvektörleri elde edilir.

Buna göre,

$$S = \begin{bmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

özvektörlerden oluşan bir tabandır. S matrisinin tersi S^{-1} olmak üzere

$$S^{-1} = \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} \begin{bmatrix} 1 & -\beta(x) \\ -1 & \alpha(x) \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir. Bu durumda

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \alpha(x) & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{bmatrix}$$

olup

$$A = S \begin{bmatrix} \alpha(x) & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{bmatrix} S^{-1}$$

dir.

Sonuç olarak

$$A^j = S \begin{bmatrix} \alpha(x) & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{bmatrix}^j S^{-1}$$

yani

$$A^j = \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} \begin{bmatrix} \alpha^{j+1}(x) - \beta^{j+1}(x) & \alpha^j(x) - \beta^j(x) \\ \alpha^j(x) - \beta^j(x) & \alpha^{j-1}(x) - \beta^{j-1}(x) \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{bmatrix} F_{j+1}(x) \\ F_j(x) \end{bmatrix} = A^j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha^{j+1}(x) - \beta^{j+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\ \\ \dfrac{\alpha^j(x) - \beta^j(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \end{bmatrix}$$

eşitliğinden $F_j(x)$ Fibonacci polinomları için Binet formülü

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

ve

$$\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

değerleri için

$$F_j(x) = \frac{\alpha^j(x) - \beta^j(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001; Catalani 2004).

9. $F_j(x)$ Fibonacci polinomlarının r. kuvvetinin üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{j=0}^{\infty}(F_j(x))^r\frac{t^j}{j!} = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(\frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)^k\left(-\frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)^{r-k} \times e^{t\alpha^k(x)\beta^{r-k}(x)}$$

eşitliği ile ifade edilir (Koshy 2001).

Bu ifadenin ispatı için, (2.6) eşitliği ile verilen $F_j(x)$ Fibonacci polinomları için Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(F_j(x))^r\frac{t^j}{j!} &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^j(x)-\beta^j(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)^r\frac{t^j}{j!}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(\frac{\alpha^j(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)^k\left(-\frac{\beta^j(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)^{r-k}\frac{t^j}{j!}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(F_j(x))^r\frac{t^j}{j!} &= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(\frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)^k\left(-\frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)^{r-k}\\ &\quad\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha^k(x)\beta^{r-k}(x)t\right)^j}{j!}\\ &= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(\frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)^k\left(-\frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)^{r-k}\\ &\quad\times e^{t\alpha^k(x)\beta^{r-k}(x)}\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

10. (2.7) eşitliği ile verilen $F_j(x)$ Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonunda, $m \geq 1$ için eşitliğin her iki tarafının x değişkenine göre m. türevi

$$\frac{\partial^m}{x^m}G_F(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{d^m}{dt^m}F_j(x)\right)t^j$$

ile ifade edilir. $\dfrac{d^m}{dt^m}F_j(x) = F_j^{(m+1)}(x)$ ile gösterilmek üzere

$$F_j^{(1)}(x) = F_j(x)$$

başlangıç koşulu ile

$$F_j^{(m+1)}(x) = m \sum_{k=0}^{j} F_k^{(m)}(x) F_{j-k}(x)$$

dir (Koshy 2001; Catalani 2004).

11. (2.7) eşitliği ile verilen $F_j(x)$ Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonunda eşitliğin her iki tarafının t değişkenine göre birinci türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G_F(x,t) &= \sum_{j=1}^{\infty} j F_j(x) t^{j-1} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{1-xt-t^2}\right) \\ &= \frac{1-xt-t^2-t(-x-2t)}{(1-xt-t^2)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bağıntıdan, gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0 \\ F_1(x) &= 1 \end{aligned}$$

başlangıç koşulları olmak üzere, $j \geq 1$ için

$$F_{j+1}(x) = xF_j(x) + F_{j-1}(x)$$

rekürans bağıntısı elde edilir (Koshy 2001; Catalani 2004).

2.3. Pell Sayıları

Tanım 2.9 *P_j , j. Pell sayısını göstermek üzere, $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $j \geq 2$ tam sayısı için Pell sayıları*

$$P_j = 2P_{j-1} + P_{j-2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Koshy 2001, 2014).

Elemanları Pell sayılarından oluşan $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ sayı dizisine, Pell sayıları dizisi denir. Pell sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
P_j	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	...

Tanım 2.10 *P_j Pell sayılarının rekürans bağıntısından elde edilen*

$$\tilde{\alpha} = 1+\sqrt{2}$$

ve

$$\tilde{\beta} = 1-\sqrt{2}$$

değerleri için

$$P_j = \frac{\tilde{\alpha}^j - \tilde{\beta}^j}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}$$

ifadesine Pell sayıları için Binet formülü denir (Koshy 2001, 2014).

Tanım 2.11 *P_j Pell sayıları için rekürans bağıntısından elde edilen üreteç fonksiyonu*

$$G_P(t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j t^j = \frac{t}{1-2t-t^2} \tag{2.13}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001, 2014).

Tanım 2.12 *P_j Pell sayıları için üstel üreteç fonksiyonu ise*

$$G_{P,\exp}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \frac{t^j}{j!} = \frac{e^{\tilde{\alpha}t} - e^{\tilde{\beta}t}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}} \tag{2.14}$$

ile ifade edilir (Koshy 2014).

Teorem 2.13 *P_j Pell sayıları için kapalı formül*

$$P_j = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor} \binom{j}{2k+1} 2^k \tag{2.15}$$

dir (Koshy 2014).

Not 4 *(2.5) numaralı rekürans bağıntısında $x = 2$ alınması durumunda Fibonacci polinomları Pell sayılarına dönüşür ve $F_j(2) = P_j$ eşitliği elde edilir (Koshy 2001, 2014).*

Not 5 *(2.9) numaralı denklemde* $x = 2$ *alınırsa,* $F_{2j}(2) = P_{2j}$ *sonucu elde edilir ve böylece çift indisli Pell sayıları için üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_{2j}(2)\, t^j = \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j} t^j = \frac{2t}{1-6t+t^2}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001, 2014).

Not 6 *(2.10) numaralı denklemde* $x = 2$ *alınırsa,* $F_{2j+1}(2) = P_{2j+1}$ *sonucu elde edilir ve böylece tek indisli Pell sayıları için üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_{2j+1}(2)\, t^j = \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j+1} t^j = \frac{1-t}{1-6t+t^2}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001, 2014).

2.4. Jacobsthal Polinomlar

Tanım 2.14 $J_j(x)$, j. *Jacobsthal polinomu göstermek üzere,* $J_0(x) = 0$ *ve* $J_1(x) = 1$ *başlangıç koşulları ve her* $j \geq 2$ *tam sayısı için Jacobsthal polinomlar*

$$J_j(x) = J_{j-1}(x) + xJ_j(x) \tag{2.16}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Koshy 2001; Djordjevic ve Srivastava 2006; Gupta ve Panwar 2012; Cook ve Bacon 2013).

Elemanları Jacobsthal polinomlardan oluşan $\{J_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ polinomlar dizisine, Jacobsthal polinomlar dizisi denir. Jacobsthal polinomların aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

j	0	1	2	3	4	5	6	...
$J_j(x)$	0	1	1	$x+1$	$2x+1$	x^2+3x+1	$3x^2+4x+1$	...

Tanım 2.15 *$J_j(x)$ Jacobsthal polinomların rekürans bağıntısından elde edilen*

$$a(x) = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$$

ve

$$b(x) = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}$$

değerleri için

$$J_j(x) = \frac{a^j(x) - bj(x)}{a(x) - b(x)} \tag{2.17}$$

ifadesine Jacobsthal polinomlar için Binet formülü denir (Koshy 2001; Djordjevic ve Srivastava 2006; Gupta ve Panwar 2012; Cook ve Bacon 2013).

Tanım 2.16 *$J_j(x)$ Jacobsthal polinomlar için üreteç fonksiyonu*

$$G_J(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} J_j(x)\, t^j = \frac{t}{1-t-xt^2} \tag{2.18}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001; Djordjevic ve Srivastava 2006; Gupta ve Panwar 2012; Cook ve Bacon 2013).

Tanım 2.17 *$J_j(x)$ Jacobsthal polinomlar için üstel üreteç fonksiyonu ise*

$$G_{J,\exp}(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} J_j(x)\, \frac{t^j}{j!} = \frac{e^{a(x)t} - e^{b(x)t}}{a(x) - b(x)} \tag{2.19}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001; Djordjevic ve Srivastava 2006).

Not 7 *(2.16) numaralı rekürans bağıntısında $x = 1$ alınması durumunda Jacobsthal polinomlar Fibonacci sayılarına dönüşür ve $J_n(1) = F_n$ eşitliği elde edilir.*

2.4.1. Jacobsthal polinomlar için temel sonuçlar

$J_j(x)$ Jacobsthal polinomlar, aşağıda verilen temel ve iyi bilinen özellikleri sağlar (Koshy 2001; Djordjevic ve Srivastava 2006; Gupta ve Panwar 2012; Cook ve Bacon 2013).

1. $J_j(x)$ Jacobsthal polinomların üreteç fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} J_0(0) &= 0, \\ J_j(0) &= 1; \quad j \geq 1, \\ J_j(2) &= \frac{2^j - (-1)^j}{3} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir (Koshy 2001).

2. $J_j(x)$ Jacabsthal polinomların reküans bağıntısı kullanılarak çift indisli Jacobsthal polinomlar için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{j=0}^{\infty} J_{2j}(x)\, t^j = \frac{t}{1-(1+2x)\,t + x^2t^2} \tag{2.20}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001; Djordjevic ve Srivastava 2006).

Not 8 *(2.20) numaralı denklemde $x=0$ alınırsa*

$$\sum_{j=0}^{\infty} J_{2j}(0)\, t^j = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} = \frac{t}{1-t}$$

üreteç fonksiyonu elde edilir (Koshy 2001).

3. $J_j(x)$ Jacabsthal polinomların reküans bağıntısı kullanılarak tek indisli Jacobsthal polinomlar için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{j=0}^{\infty} J_{2j+1}(x)\, t^j = \frac{1-xt}{1-(2x+1)\,t + x^2t^2} \tag{2.21}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001; Djordjevic ve Srivastava 2006).

Not 9 *(2.21) numaralı denklemde $x = 0$ alınırsa*

$$\sum_{j=0}^{\infty} J_{2j+1}(0)\, t^j = \sum_{j=0}^{\infty} t^j = \frac{1}{1-t}$$

üreteç fonksiyonu elde edilir (Koshy 2001).

4. Çift indisli ve tek indisli Jacobstal polinomların rekürans bağıntısından elde edilen

$$\tilde{a}(x) = \frac{1+2x+\sqrt{1+4x}}{2}$$

ve

$$\tilde{b}(x) = \frac{1+2x-\sqrt{1+4x}}{2}$$

değerleri için çift indisli ve tek indisli Jacobsthal polinomlar için Binet formülleri sırasıyla

$$J_{2j}(x) = \frac{\tilde{a}^j(x) - \tilde{b}^j(x)}{\tilde{a}(x) - \tilde{b}(x)}$$

ve

$$J_{2j+1}(x) = \frac{1}{2}\frac{\left(\tilde{a}(x) - \tilde{b}(x) + 1\right)\tilde{a}^j(x) + \left(\tilde{a}(x) - \tilde{b}(x) - 1\right)\tilde{b}^j(x)}{\tilde{a}(x) - \tilde{b}(x)}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001).

5. $a(x) = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$ ve $b(x) = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}$ olmak üzere, $J_j(x)$ Jacobsthal polinomların binomial katsayı ile çarpımlarının kısmi toplamları

$$\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} J_k(x) = \frac{(a(x)+1)^j - (b(x)+1)^j}{a(x) - b(x)} \tag{2.22}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001; Djordjevic ve Srivastava 2006; Gupta ve Panwar 2012; Cook ve Bacon 2013).

6. $J_j(x)$ Jacobsthal polinomlar aşağıdaki determinant özelliklerini sağlar (Koshy 2001; Cook ve Bacon 2013):

$$\det\begin{bmatrix} J_{j+1}(x) & J_j(x) \\ J_j(x) & J_{j-1}(x) \end{bmatrix} = x^{j-1}(-1)^j,$$

$$\det\begin{bmatrix} J_{j+2}(x) & J_{j+1}(x) & J_j(x) \\ J_{j+1}(x) & J_j(x) & J_{j-1}(x) \\ J_j(x) & J_{j-1}(x) & J_{j-2}(x) \end{bmatrix} = 0.$$

7. $J_j(x)$ Jacobsthal polinomların r. kuvvetinin üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{j=0}^{\infty}(J_j(x))^r\frac{t^j}{j!} = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(\frac{1}{a(x)-b(x)}\right)^k\left(-\frac{1}{a(x)-b(x)}\right)^{r-k} \times e^{ta^k(x)b^{r-k}(x)}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001).

Bu ifadenin ispatı için, (2.17) eşitliği ile verilen $J_j(x)$ Jacobsthal polinomların Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(J_j(x))^r\frac{t^j}{j!} &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{a^j(x)-b^j(x)}{a(x)-b(x)}\right)^r\frac{t^j}{j!}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(\frac{a^j(x)}{a(x)-b(x)}\right)^k\left(-\frac{b^j(x)}{a(x)-b(x)}\right)^{r-k}\frac{t^j}{j!}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(J_j(x))^r\frac{t^j}{j!} &= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(\frac{1}{a(x)-b(x)}\right)^k\left(-\frac{1}{a(x)-b(x)}\right)^{r-k}\\ &\quad\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(a^k(x)\,b^{r-k}(x)\,t\right)^j}{j!}\\ &= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left(\frac{1}{a(x)-b(x)}\right)^k\left(-\frac{1}{a(x)-b(x)}\right)^{r-k}\\ &\quad\times e^{ta^k(x)b^{r-k}(x)}\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

2.5. Vieta-Fibonacci ve Vieta-Lucas Polinomları

Tanım 2.18 *A.F. Horadam tarafından tanımlanan $V_j(x)$ Vieta-Fibonacci polinomları ve $v_j(x)$ Vieta-Lucas polinomları için $V_0(x)=0$, $V_1(x)=1$ ve $v_0(x)=2$, $v_1(x)=x$ başlangıç koşulları olmak üzere bu polinomların rekürans bağıntıları sırası ile*

$$V_j(x) = xV_{j-1}(x) - V_{j-2}(x) \tag{2.23}$$

ve

$$v_j(x) = xv_{j-1}(x) - v_{j-2}(x) \tag{2.24}$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Horadam 2002, 2003).

$V_j(x)$ Vieta-Fibonacci polinomlarının ve $v_j(x)$ Vieta-Lucas polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur (Horadam 2002).

j	$V_j(x)$	$v_j(x)$
0	0	2
1	1	x
2	x	x^2-2
3	x^2-1	x^3-3x
4	x^3-2x	x^4-4x^2+2
5	x^4-3x^2+1	x^5-5x^3+5x
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tanım 2.19 *$V_j(x)$ Vieta-Fibonacci polinomlarının ve $v_j(x)$ Vieta-Lucas polinomlarının rekürans bağıntısının sağladığı karakteristik denklem*

$$\lambda^2 - x\lambda + 1 = 0 \tag{2.25}$$

olmak üzere (2.25) denkleminin köklerinden elde edilen

$$c(x) = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$$

ve

$$d(x) = \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}$$

değerleri için $V_j(x)$ Vieta-Fibonacci polinomlarının ve $v_j(x)$ Vieta-Lucas polinomlarının Binet formülü sırası ile

$$V_j(x) = \frac{c^j(x) - d^j(x)}{c(x) - d(x)} \tag{2.26}$$

ve

$$v_j(x) = c^j(x) + d^j(x) \tag{2.27}$$

eşitlikleri ile ifade edilir (Horadam 2002).

Tanım 2.20 *$V_j(x)$ Vieta-Fibonacci polinomları ve $v_j(x)$ Vieta-Lucas polinomları için üreteç fonksiyonları ise sırasıyla*

$$G_V(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} V_j(x)\, t^j = \frac{1}{1 - xt + t^2} \tag{2.28}$$

ve

$$G_v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_j(x)\, t^j = \frac{2 - xt}{1 - xt + t^2} \tag{2.29}$$

ile ifade edilir (Horadam 2002).

$V_j(x)$ Vieta-Fibonacci polinomları ve $v_j(x)$ Vieta-Lucas polinomları aşağıda verilen eşitlikleri sağlar (Horadam 2002, 2003).

$$\begin{aligned}
V_j(x)\, V_{j-1}(-x) + V_j(-x)\, V_{j-1}(x) &= 0, \\
v_j(x)\, v_{j-1}(-x) + v_j(-x)\, v_{j-1}(x) &= 0, \\
V_{j+1}(x)\, V_{j-1}(x) - V_j^2(x) &= -1, \\
v_j\left(x^2 - 2\right) - v_j^2(x) &= -2, \\
V_{j+1}(x) - V_{j-1}(x) &= v_j(x), \\
V_j(x)\, v_j(x) &= V_{2j}(x), \\
v_j(v_k(x)) &= v_{jk}(x), \\
\frac{d}{dx} v_j(x) &= jV_j(x).
\end{aligned}$$

Teorem 2.21 *$V_j(x)$ Vieta-Fibonacci polinomları için kapalı formül*

$$V_j(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor} (-1)^k \begin{pmatrix} j-k-1 \\ k \end{pmatrix} x^{j-2k-1}$$

dir (Horadam 2002).

Teorem 2.22 *$v_j(x)$ Vieta-Lucas polinomları için kapalı formül*

$$v_j(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor} (-1)^k \frac{j}{j-k} \begin{pmatrix} j-k \\ k \end{pmatrix} x^{j-2k}$$

dir (Horadam 2002).

2.6. Legendre Polinomları

Tanım 2.23 *$P_j(x)$ Legendre polinomları, $P_0(x) = 1$ ve $P_1(x) = x$ başlangıç koşulları olmak üzere $j \geq 1$ tam sayısı için*

$$(j+1) P_{j+1}(x) = (2j+1) x P_j(x) - j P_{j-1}(x) \tag{2.30}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Rainville 1960; Bell 1967; Comtet 1974).

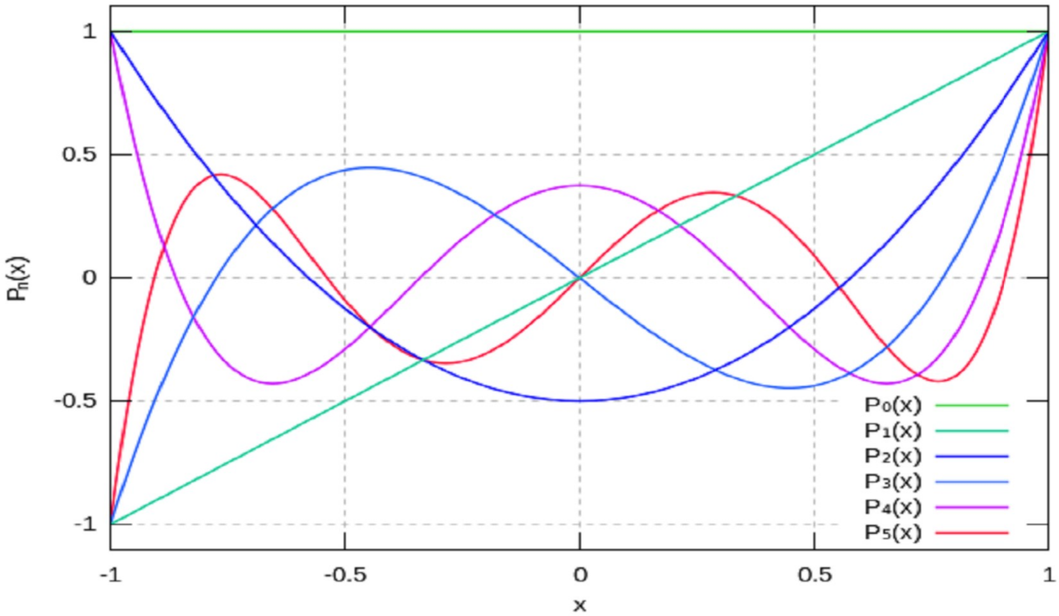
$P_j(x)$ Legendre polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile verilmiştir (Rainville 1960).

j	$P_j(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$
$\vdots$	$\vdots$

Tanım 2.24 *$P_j(x)$ Legendre polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$G_P(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x) t^j = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \tag{2.31}$$

ile ifade edilir (Rainville 1960; Bell 1967; Comtet 1974).



Şekil 2.1: $P_n(x)$: Legendre Polinomları

$x \in [-1,1]$ için $P_j(x)$ Legendre polinomlarının değişimleri yukarıdaki grafik ile sunulmuştur (Rainville 1960).

$P_j(x)$ Legendre polinomları aşağıda verilen temel özellikleri sağlar (Rainville 1960; Bell 1967; Comtet 1974).

$$\begin{aligned}
P_j(1) &= 1; \;\; j=0,1,\ldots \\
P_j(-1) &= (-1)^j; \;\; j=0,1,\ldots \\
P_{2j}(-x) &= P_{2j}(x); \;\; j=0,1,\ldots \\
P_{2j+1}(-x) &= -P_{2j+1}(x); \;\; j=0,1,\ldots \\
P_{2j+1}(0) &= 0; \;\; j=0,1,\ldots \\
P_{2j}(0) &= \left(\begin{array}{c} \frac{-1}{2} \\ j \end{array}\right) = \frac{(-1)^j (2j)!}{2^{2j}(j!)^2}; \;\; j=1,2,\ldots.
\end{aligned}$$

$P_j(x)$ Legendre polinomları aynı zamanda

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_j(x)\right)+j(j+1)P_j(x)=0 \tag{2.32}$$

eşitliği ile verilen Legendre diferansiyel denkleminin çözümüdür (Rainville 1960; Bell 1967). Bu adi diferansiyel denklem daha çok fizikte ve diğer teknik alanlarda kullanılır. Özellikle küresel koordinat sisteminde, kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili Laplace denklemlerini çözerken ortaya çıkar. $P_j(x)$ Legendre polinomunun x değişkenine göre türevi $\frac{d}{dx}P_j(x) = P_j'(x)$ ile gösterilmek üzere $P_j'(x)$ aşağıdaki eşitlikleri sağlar (Rainville 1960; Bell 1967; Comtet 1974).

$$\begin{aligned} P_{j+1}'(x) - xP_j'(x) &= (j+1)P_j(x); \quad j = 0,1,\ldots \\ xP_j'(x) - P_{j-1}'(x) &= jP_j(x); \quad j = 1,2,\ldots \\ P_{j+1}'(x) - P_{j-1}'(x) &= (2j+1)P_j(x); \quad j = 1,2,\ldots \\ \left(x^2-1\right)P_j'(x) &= jxP_j(x) - jP_{j-1}(x); \quad j = 1,2,\ldots. \end{aligned}$$

Teorem 2.25 *$P_j(x)$ Legendre polinomları için kapalı formül*

$$P_j(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^k (2j-2k)!x^{j-2k}}{2^j k!(j-k)!(j-2k)!}$$

dir (Rainville 1960; Bell 1967).

Teorem 2.26 *$P_j(x)$ Legendre polinomları, Rodrigue's Formülü olarak bilnen*

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}\left(x^2-1\right)^j$$

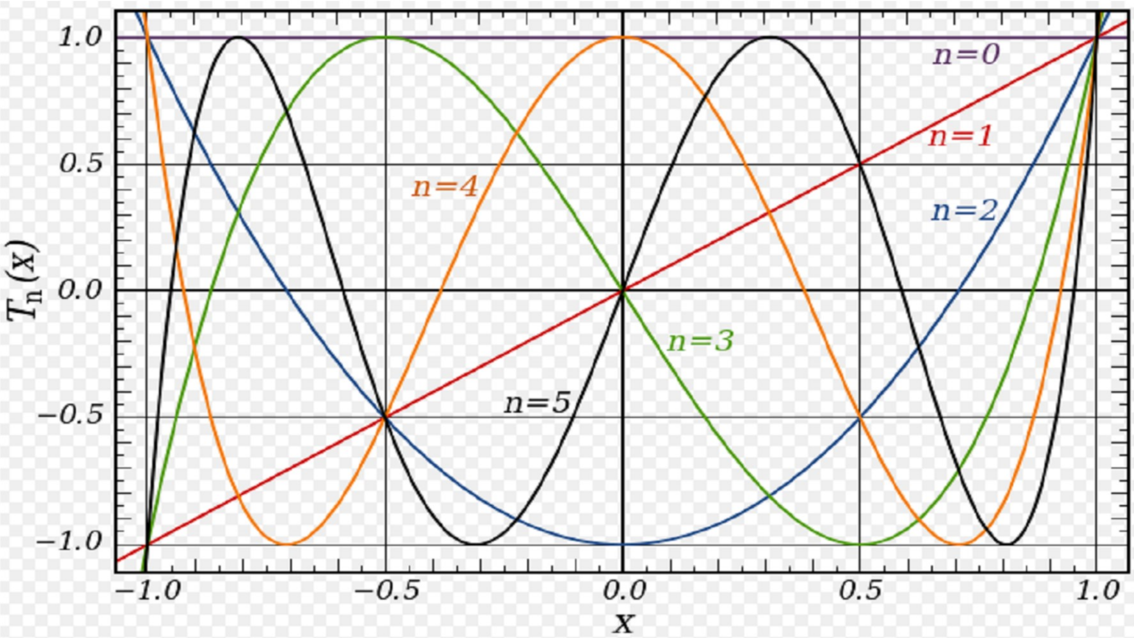
eşitliği sağlar (Rainville 1960; Bell 1967).

2.7. Chebyshev Polinomları

Tanım 2.27 *$T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomları, $T_0(x) = 1$ ve $T_1(x) = x$ başlangıç koşulları olmak üzere $j \geq 1$ tam sayısı için*

$$T_{j+1}(x) = 2xT_j(x) - T_{j-1}(x) \tag{2.33}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).



Şekil 2.2: $T_n(x)$: Birinci Tip Chebyshev Polinomları

$x \in [-1, 1]$ için $T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomlarının değişimleri yukarıdaki grafik ile sunulmuştur (Bell 1967).

$T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile verilmiştir (Bell 1967).

j	$T_j(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
$\vdots$	$\vdots$

x değişkeninin kuvvetlerinin $T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomları cinsinden ifadesi

$$x^k = \begin{cases} \frac{1}{2^{k-1}} \begin{bmatrix} T_k(x) + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} T_{k-2}(x) + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} T_{k-4} + \\ \cdots + \begin{pmatrix} k \\ (k-1)/2 \end{pmatrix} T_1(x) \end{bmatrix} & ;\ \text{k tek ise} \\ \\ \frac{1}{2^{k-1}} \begin{bmatrix} T_k(x) + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} T_{k-2}(x) + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} T_{k-4} + \\ \cdots + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k \\ k/2 \end{pmatrix} T_0(x) \end{bmatrix} & ;\ \text{k çift ise} \end{cases}$$

eşitliği ile verilir (Vetterling ve Press 1988).

Örneğin;

$$\begin{aligned} 1 &= T_0(x), \\ x &= T_1(x), \\ x^2 &= \frac{1}{2}(T_0(x) + T_2(x)), \\ x^3 &= \frac{1}{4}(3T_1(x) + T_3(x)), \\ x^4 &= \frac{1}{8}(3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)), \\ x^5 &= \frac{1}{16}(10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)), \\ x^6 &= \frac{1}{32}(10T_0(x) + 15T_2(x) + 6T_4(x) + T_6(x)) \end{aligned}$$

ile ifade edilebilir.

Tanım 2.28 *$T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$G_T(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(x)\, t^j = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} \tag{2.34}$$

ile ifade edilir (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

$T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomları aşağıda verilen temel özellikleri sağlar (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

$$\begin{aligned} T_j(1) &= 1, \\ T_j(-1) &= (-1)^j, \\ T_j(-x) &= (-1)^j T_j(x), \\ T_{2j}(0) &= (-1)^j, \\ T_{2j+1}(0) &= 0, \\ T_{2j}(x) &= 2T_j^2(x) - 1, \\ T_{2j+1}(x) &= 2T_{j+1}(x)\, T_j(x) - x. \end{aligned}$$

$T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomları aynı zamanda $j \geq 2$ tam sayısı için

$$2T_j(x) = \frac{1}{j+1}\frac{d}{dx}T_{j+1}(x) - \frac{1}{j-1}\frac{d}{dx}T_{j-1}(x)$$

diferansiyel denkleminin çözümüdür (Bell 1967; Rivlin 1974).

$T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomlarının x değişkenine göre türevi $\frac{d}{dx}T_j(x) = T_j^{'}(x)$ ile gösterilmek üzere $T_j^{'}(x)$

$$\left(1-x^2\right) T_j^{'}(x) = -jxT_j(x) + jT_{j-1}(x)$$

rekürans bağıntısını sağlar (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

Teorem 2.29 *$T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomları için kapalı formül*

$$T_j(x) = x^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} j \\ 2k \end{pmatrix} \left(1 - x^{-2}\right)^k$$

veya

$$T_j(x) = \frac{j}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(j-k-1)!}{k!\,(j-2k)!} (2x)^{j-2k}$$

dir (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

Tanım 2.30 *$U_j(x)$ ikinci tip Chebyshev polinomları, $U_0(x) = 1$ ve $U_1(x) = 2x$ başlangıç koşulları olmak üzere $j \geq 1$ tam sayısı için*

$$U_{j+1}(x) = 2xU_j(x) - U_{j-1}(x) \tag{2.35}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

$U_j(x)$ ikinci tip Chebyshev polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile verilmiştir (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

j	$U_j(x)$
0	1
1	$2x$
2	$4x^2 - 1$
3	$8x^3 - 4x$
4	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
$\vdots$	$\vdots$

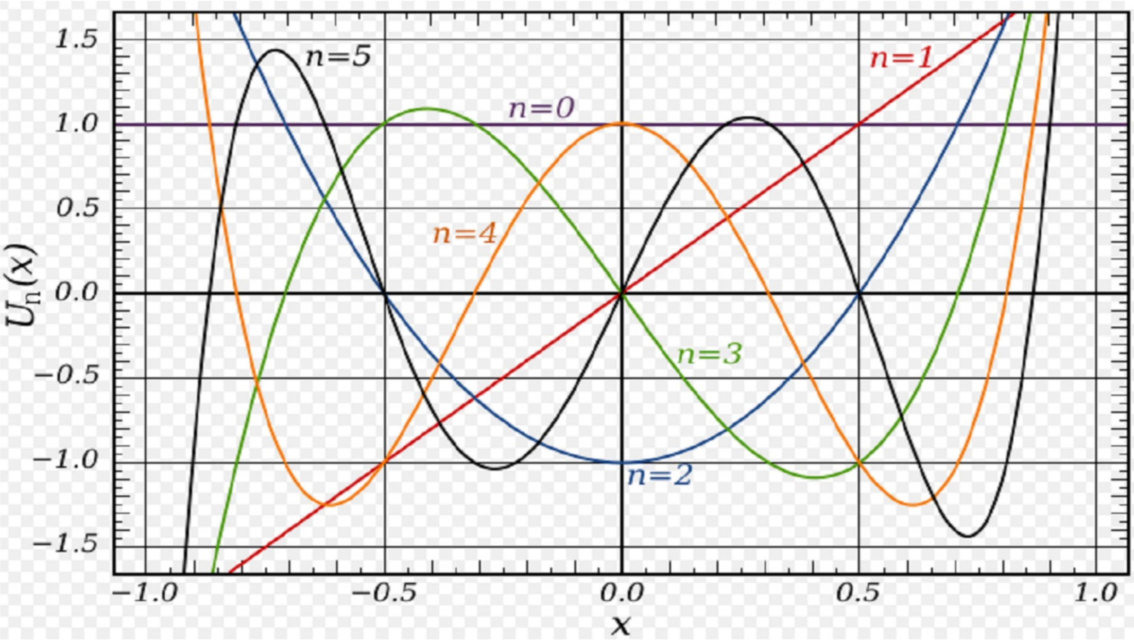
Tanım 2.31 *$U_j(x)$ ikinci tip Chebyshev polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$G_U(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(x)\, t^j = \frac{1}{1 - 2xt + t^2} \tag{2.36}$$

ile ifade edilir (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

$U_j(x)$ ikinci tip Chebyshev polinomları aşağıda verilen temel özellikleri sağlar (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

$$\begin{aligned} U_j(1) &= j + 1, \\ U_j(-1) &= (j+1)(-1)^j, \\ U_j(-x) &= (-1)^j U_j(x). \end{aligned}$$



Şekil 2.3: $U_n(x)$: İkinci Tip Chebyshev Polinomları

$x \in [-1,1]$ için $U_j(x)$ ikinci tip Chebyshev polinomlarının değişimleri yukarıdaki grafik ile sunulmuştur (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

Teorem 2.32 *$U_j(x)$ ikinci tip Chebyshev polinomları için kapalı formül*

$$U_j(x) = x^j \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor} \begin{pmatrix} j+1 \\ 2k+1 \end{pmatrix} \left(1 - x^{-2}\right)^k$$

veya

$$U_j(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor} (-1)^k \begin{pmatrix} j-k \\ k \end{pmatrix} (2x)^{j-2k}$$

dir (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

$T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomları ve $U_j(x)$ ikinci tip Chebyshev polinomları arasındaki ilişkilerden birkaçı aşağıda verilmiştir (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}T_j(x) &= jU_{j-1}(x), \quad j=1,2,\ldots \\
T_j(x) &= \frac{1}{2}\left(U_j(x)-U_{j-2}(x)\right), \\
T_j(x) &= U_j(x)-xU_{j-1}(x), \\
T_{j+1}(x) &= xT_j(x)-\left(1-x^2\right)U_{j-1}(x).
\end{aligned}$$

Chebyshev polinomları özellikle yaklaşım teorisinde kullanılan önemli bir polinom ailesidir. $T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomlarının kökleri (Chebyshev düğümleri olarak da adlandırılır), uygulamalı matematiğin bir alt kategorisi olan sayısal analiz yöntemlerinde polinomların interpolasyonundaki düğümler olarak kullanılır. Elde edilen bu polinom interpolasyonu, Runge olgusu olarak bilinen problemi minimize eder ve maksimum norm altında sürekli bir fonksiyona en iyi yaklaşım polinomu olma özelliği sağlar (Bell 1967; Rivlin 1974; Djordjevic 2009).

Tanım 2.33 *Djordjevic tarafından verilen,* $V_{n,m}(x)$ *genelleştirilmiş birinci tip Chebyshev polinomları ve* $\Omega_{n,m}(x)$ *genelleştirilmiş ikinci tip Chebyshev polinomları,* $n \geq m$ *için* ($n, m \in \mathbb{N}$)

$$V_{n,m}(x)=x^n,\ V_{m,m}(x)=x^m-1$$

ve

$$\Omega_{n,m}(x)=x^n,\ \Omega_{m,m}(x)=x^m-2$$

başlangıç koşulları olmak üzere sırasıyla

$$V_{n,m}(x)=xV_{n-1,m}(x)-V_{n-m,m}(x) \tag{2.37}$$

ve

$$\Omega_{n,m}(x)=x\Omega_{n-1,m}(x)-\Omega_{n-m,m}(x) \tag{2.38}$$

rekürans bağıntıları ile tanımlanır (Djordjevic 2009).

Tanım 2.34 *$V_{n,m}(x)$ ve $\Omega_{n,m}(x)$ genelleştirilmiş birinci tip ve ikinci tip Chebyshev polinomlarının üreteç fonksiyonları ise sırası ile*

$$G^m(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_{n,m}(x)\, t^n = (1 - xt + t^m)^{-1} \tag{2.39}$$

ve

$$F^m(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{n,m}(x)\, t^n = (1 - t^m)(1 - xt + t^m)^{-1} \tag{2.40}$$

ile ifade edilir (Djordjevic 2009).

Teorem 2.35 *$V_{n,m}(x)$ genelleştirilmiş birinci tip Chebyshev polinomları için kapalı formül*

$$V_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n-(m-1)k}{k} x^{n-mk}$$

dir (Djordjevic 2009).

Teorem 2.36 *$\Omega_{n,m}(x)$ genelleştirilmiş ikinci tip Chebyshev polinomları için kapalı formül*

$$\Omega_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} (-1)^k \frac{n-(m-2)k}{n-(m-1)k} \binom{n-(m-1)k}{k} x^{n-mk}$$

dir (Djordjevic 2009).

2.8. Gegenbauer Polinomları

Tanım 2.37 *Leopold Gegenbauer tarafından $C_j^{\lambda}(x)$ gösterimi ile tanımlanan Gegenbauer polinomları*

$$\lambda > -\frac{1}{2} \text{ ve } |x| \leq 1$$

değerleri için $C_0^{\lambda}(x) = 1$ ve $C_1^{\lambda}(x) = 2\lambda x$ başlangıç koşulları olmak üzere $j \geq 2$ tam sayısı için

$$nC_n^{\lambda}(x) = 2x(\lambda + n - 1)\, C_{n-1}^{\lambda}(x) - (2\lambda + n - 2)\, C_{n-2}^{\lambda}(x) \tag{2.41}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Bell 1967; Horadam 1985).

Tanım 2.38 *$C_j^\lambda(x)$ Gegenbauer polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$G_C(\lambda, x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^\lambda(x)\, t^j = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda} \tag{2.42}$$

ile ifade edilir (Bell 1967; Horadam 1985).

Teorem 2.39 *$C_j^\lambda(x)$ Gegenbauer polinomları için kapalı formül, λ bir tam sayı ve $j \geq 2$ olmak üzere*

$$C_j^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^k (\lambda)_{j-k} (2x)^{j-2k}}{k!\,(j-2k)!}$$

dir (Bell 1967; Horadam 1985).

$C_j^\lambda(x)$ Gegenbauer polinomlarının $T_j(x)$ birinci tip Chebyshev polinomları ve $U_j(x)$ ikinci tip Chebyshev polinomları ile ilişkisi

$$T_j(x) = \frac{j}{2} \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{C_j^\lambda(x)}{\lambda} \right); \quad j \geq 1$$

ve

$$U_j(x) = C_j^1(x)$$

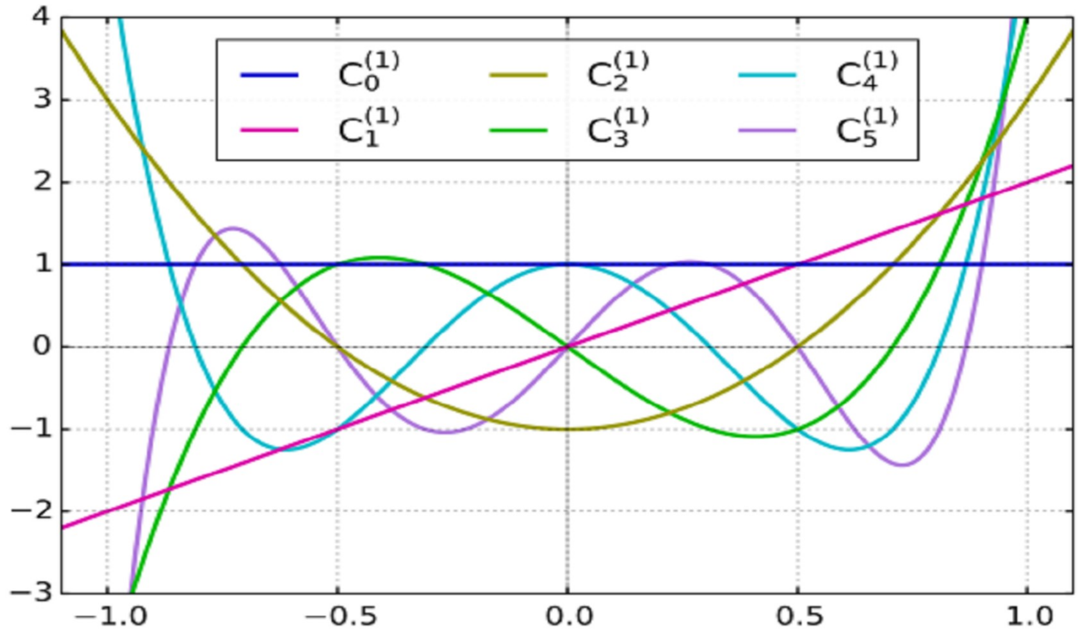
eşitlikleri ile verilebilir (Bell 1967; Horadam 1985).

$C_j^\lambda(x)$ Gegenbauer polinomları

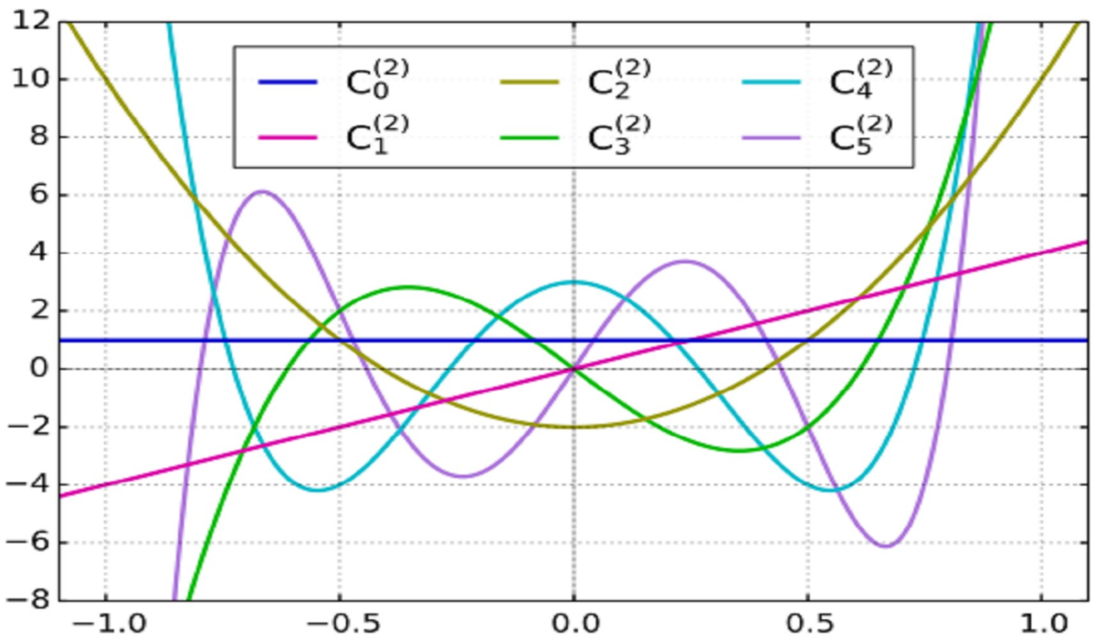
$$\left(1-x^2\right) y'' - (2\lambda+1)\, xy' + j\,(j+2\lambda)\, y = 0 \tag{2.43}$$

Gegenbauer diferansiyel denkleminin bir özel çözümüdür (Suetin 2001). (2.43) denkleminde $\lambda = \frac{1}{2}$ alınması durumunda (2.43) bağıntısı (2.32) bağıntısına dönüşür ve $C_j^{\frac{1}{2}}(x) = P_j(x)$ eşitliği sağlanır.

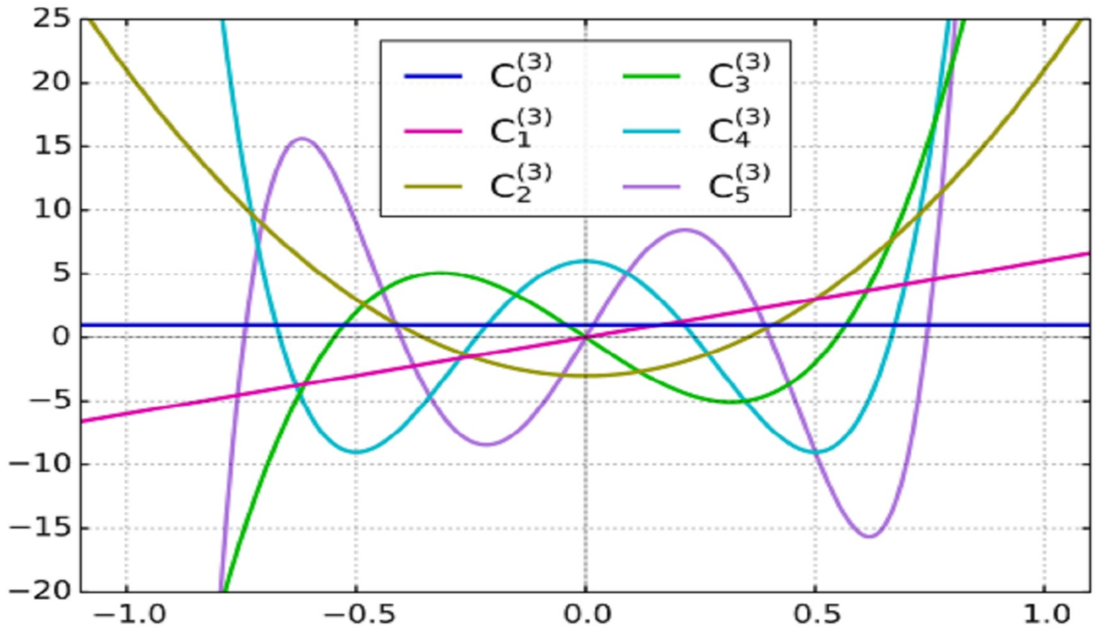
λ değişkeninin aldığı bazı değerler için $C_j^\lambda(x)$ Gegenbauer polinomlarının değişimleri aşağıdaki grafikler ile sunulmuştur.



Şekil 2.4: $C_j^1(x)$: $\lambda = 1$ için Gegenbauer Polinomları



Şekil 2.5: $C_j^2(x)$: $\lambda = 2$ için Gegenbauer Polinomları



Şekil 2.6: $C_j^3(x) : \lambda = 3$ için Gegenbauer Polinomları

2.9. Humbert Polinomları

Tanım 2.40 *1921 yılında Humbert tarafindan $\Pi_{j,m}^{\lambda}(x)$ gösterimi ile tanımlanan Humbert polinomları için rekürans bağıntısı*

$$(j+1)\,\Pi_{j+1,m}^{\lambda}(x) - mx\,(j+\lambda)\,\Pi_{j,m}^{\lambda}(x) - (j+m\lambda-m+1)\,\Pi_{j-m+1,m}^{\lambda}(x) = 0 \tag{2.44}$$

olmak üzere, Humbert polinomları için üreteç fonksiyonu

$$G_{\Pi}(m,\lambda,x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{j,m}^{\lambda}(x)\,t^j = \frac{1}{(1-mxt+t^m)^{\lambda}} \tag{2.45}$$

ile ifade edilir (Humbert 1921; Milovanovic ve Djordjevic 1987).

(2.44) ve (2.45) numaralı denklemlerin bazı özel durumları aşağıda verilmiştir.

Not 10 $m = 2$ *olarak alınırsa (2.44) rekürans bağıntısı ile verilen Humbert polinomları, (2.41) bağıntısı ile verilen Gegenbauer polinomlarına dönüşür ve*

$$\Pi_{j,2}^{\lambda}(x) = C_j^{\lambda}(x)$$

eşitliği elde edilir (Humbert 1921; Milovanovic ve Djordjevic 1987).

Not 11 *$m = 3$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa Humbert polinomları, 1981 de Salvatore Pincherle tarafindan $\mathbb{P}_j(x)$ ile tanımlanan Pincherle polinomlarına dönüşür ve*

$$\Pi_{j,3}^{\frac{1}{2}}(x) = \mathbb{P}_j(x) \tag{2.46}$$

eşitliği elde edilir (Humbert 1921).

1965 yılında Gould, (2.44) bağıntısı ile tanımlanan Humbert polimomlarının bir genelleştirmesini vermiştir (Gould 1965).

Tanım 2.41 *$P_j(m,x,y,p,C)$ genelleştirilmiş Humbert polinomları*

$$\begin{aligned} CjP_j(m,x,y,p,C) &= m(j-1-p)\,xP_{j-1}(m,x,y,p,C) \\ &\quad -(j-m-mp)\,yP_{j-m}(m,x,y,p,C) \end{aligned}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Gould 1965). Burada $j \geq m \geq 1$ dir ve diğer parametreler genel olarak sınırlandırılmamıştır.

Tanım 2.42 *$P_j(m,x,y,p,C)$ genelleştirilmiş Humbert polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$G_P(m,x,y,p,C,t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(m,x,y,p,C)\,t^j = (C - mxt + yt^m)^p \tag{2.47}$$

ile ifade edilir (Humbert 1921; Gould 1965; Milovanovic ve Djordjevic 1987).

$P_j(m,x,y,p,C)$ genelleştirilmiş Humbert polinomlarının bazı özel durumları aşağıdaki eşitlikler ile verilmiştir (Horadam 1985).

$$\begin{aligned} P_j\left(2,x,1,-\tfrac{1}{2},1\right) &= P_j(x) \quad \text{(Legendre 1784)}, \\ P_j(2,x,1,-1,1) &= U_j(x) \quad \text{(Chebyshev 1859)}, \\ P_j(2,x,1,-\lambda,1) &= C_j^{\lambda}(x) \quad \text{(Gegenbauer 1874)}, \\ P_j\left(3,x,1,-\tfrac{1}{2},1\right) &= \mathbb{P}_j(x) \quad \text{(Pincherle 1090)}, \\ P_j(m,x,1,-\lambda,1) &= \Pi_{j,m}^{\lambda}(x) \quad \text{(Humbert 1921)}. \end{aligned}$$

$P_j(m,x,y,p,C)$ genelleştirilmiş Humbert polinomlarının x değişkenine göre türevi $\frac{d}{dx}P_j(m,x,y,p,C) = P_j'(m,x,y,p,C)$ eşitliği ile gösterilmek üzere $P_j(m,x,y,p,C)$ genelleştirilmiş Humbert polinomları

$$xP_j'(m,x,y,p,C) - jP_j(m,x,y,p,C) = yP_{j-m+1}'(m,x,y,p,C)$$

ve

$$(m-1)xP_j'(m,x,y,p,C) + (j-mp)P_j(m,x,y,p,C) = CP_{j+1}'(m,x,y,p,C)$$

$(j \geq 0,\, m-1 \leq j)$ diferansiyel denklemlerini sağlar (Chak 1970).

2.10. İki Değişkenli Fibonacci ve Lucas Polinomları

Tanım 2.43 *Catalani tarafindan tanımlanan $F_j(x,y)$ iki değişkenli Fibonacci polinomları ve $L_j(x,y)$ iki değişkenli Lucas polinomları başlangıç koşulları $F_0(x,y) = 0$, $F_1(x,y) = 1$ ve $L_0(x,y) = 2$, $L_1(x,y) = x$ olmak üzere $j \geq 2$ tam sayısı için sırasıyla*

$$F_j(x,y) = xF_{j-1}(x,y) + yF_{j-2}(x,y) \tag{2.48}$$

ve

$$L_j(x,y) = xL_{j-1}(x,y) + yL_{j-2}(x,y) \tag{2.49}$$

rekürans bağıntısına sahiptir (Koshy 2001; Catalani 2004). Bu ifadelerde $x \neq 0$, $y \neq 0$ ve $x^2 + 4y \neq 0$ dır.

İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

j	$F_j(x,y)$	$L_j(x,y)$
0	0	2
1	1	x
2	x	x^2+2y
3	x^2+y	x^3+3xy
4	x^3+2xy	$x^4+4x^2y+2y^2$
5	$x^4+3x^2y+y^2$	$x^5+5x^3y+5xy^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tanım 2.44 *İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomlarının rekürans bağıntısının sağladığı karakteristik denklem*

$$\lambda^2 - x\lambda - y = 0 \tag{2.50}$$

olmak üzere (2.50) denkleminin köklerinden elde edilen

$$g\left(x,y\right) = \frac{x + \sqrt{x^2+4y}}{2}$$

ve

$$h\left(x,y\right) = \frac{x - \sqrt{x^2+4y}}{2}$$

değerleri için iki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomlarının Binet formülü sırası ile

$$F_j\left(x,y\right) = \frac{g^j\left(x,y\right) - h^j\left(x,y\right)}{g\left(x,y\right) - h\left(x,y\right)} \tag{2.51}$$

ve

$$L_j\left(x,y\right) = g^j\left(x,y\right) + h^j\left(x,y\right) \tag{2.52}$$

eşitlikleri ile ifade edilir (Koshy 2001; Catalani 2004).

Tanım 2.45 *İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları için üreteç fonksiyonları ise sırası ile*

$$G_F\left(x,y,t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j\left(x,y\right)t^j = \frac{t}{1-xt-yt^2} \tag{2.53}$$

ve

$$G_L\left(x,y,t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} L_j\left(x,y\right)t^j = \frac{2-xt}{1-xt-yt^2} \tag{2.54}$$

ile ifade edilir (Koshy 2001; Catalani 2004).

$F_j\left(x,y\right)$ iki değişkenli Fibonacci polinomları ve $L_j\left(x,y\right)$ iki değişkenli Lucas polinomlarının sağladığı bazı özellikler aşağıdaki eşitlikler ile verilmiştir (Koshy 2001; Catalani 2004).

$$
\begin{aligned}
g^{j}(x,y) &= \frac{L_j(x,y)+(g(x,y)-h(x,y))F_j(x,y)}{2},\\
h^{j}(x,y) &= \frac{L_j(x,y)-(g(x,y)-h(x,y))F_j(x,y)}{2},\\
L_j^2(x,y) &= g^{2j}(x,y)+h^{2j}(x,y)+2(-1)^j y^j,\\
(g(x,y)-h(x,y))^2 F_j^2(x,y) &= g^{2j}(x,y)+h^{2j}(x,y)-2(-1)^j y^j,\\
L_j^2(x,y)+(-1)^{j+1}4y^j &= \left(x^2+4y\right)F_j^2(x,y),\\
g\left(L_j(x,y),(-1)^{j+1}y^j\right) &= g^j(x,y),\\
h\left(L_j(x,y),(-1)^{j+1}y^j\right) &= h^j(x,y),\\
F_j\left(L_k(x,y),(-1)^{k+1}y^k\right) &= \frac{F_{jk}(x,y)}{F_k(x,y)},\\
L_j\left(L_k(x,y),(-1)^{k+1}y^k\right) &= L_{jk}(x,y).
\end{aligned}
$$

$F_j(x,y)$ iki değişkenli Fibonacci polinomlarında ve $L_j(x,y)$ iki değişkenli Lucas polinomlarında x ve y değişkenlerinin aldığı bazı özel değerlere göre sağladığı özellikler aşağıdaki tablo ile verilmiştir (Koshy 2001; Catalani 2004).

x	y	$F_j(x,y)$	
x	1	$F_j(x,1)=F_j(x)$	klasik Fibonacci polinomları,
$2x$	1	$F_j(2x,1)=P_j(x)$	Pell polinomları,
1	y	$F_j(1,y)=J_j(y)$	Jacobsthal polinomlar,
$3x$	-1	$F_j(3x,-1)=\mathcal{F}(x)$	Fermat polinomları.

x	y	$L_j(x,y)$	
x	1	$L_j(x,1)=L_j(x)$	klasik Lucas polinomları,
$2x$	1	$L_j(2x,1)=Q_j(x)$	Pell-Lucas polinomları,
1	$2y$	$L_j(1,2y)=JL_j(y)$	Jacobsthal-Lucas polinomları.

Teorem 2.46 *$F_j(x,y)$ iki değişkenli Fibonacci polinomları için kapalı formül*

$$F_j(x,y)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{j-1}{2}\right\rfloor}\binom{j-k-1}{k}x^{j-2k-1}y^k$$

dir (Catalani 2004).

Teorem 2.47 *$L_j(x,y)$ iki değişkenli Lucas polinomları için kapalı formül*

$$L_j(x,y)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{j}{2}\right\rfloor}\frac{j}{j-k}\binom{j-k}{k}x^{j-2k}y^k$$

dir (Catalani 2004).

2.10.1. Fibonacci sayıları yöntemi ile $F_j(x,y)$ iki değişkenli Fibonacci polinomları için ilişkiler bulma

$F_j(x,y)$ iki değişkenli Fibonacci polinomlarının (2.48) eşitliği ile verilen rekürans bağıntısının sağladığı (2.50) numaralı karakteristik denkleminin köklerinden elde edilen

$$g(x,y)=\frac{x+\sqrt{x^2+4y}}{2} \text{ ve } h(x,y)=\frac{x-\sqrt{x^2+4y}}{2}$$

değerleri için

$$\begin{aligned} g(x,y)+h(x,y) &= x \\ g(x,y)-h(x,y) &= \sqrt{x^2+4y} \\ g(x,y)\,h(x,y) &= -y \end{aligned}$$

olmak üzere, aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

$$\begin{aligned} g^2(x,y) &= \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+4y}+4y}{4} \\ &= y+xg(x,y) \\ &= yF_1(x,y)+g(x,y)\,F_2(x,y)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^3(x,y) &= (y + xg(x,y))\, g(x,y) \\ &= yg(x,y) + xg^2(x,y) \\ &= yg(x,y) + x(y + xg(x,y)) \\ &= yg(x,y) + yx + x^2 g(x,y) \\ &= yx + \left(x^2 + y\right) g(x,y) \\ &= yF_2(x,y) + g(x,y)\, F_3(x,y)\,. \end{aligned}$$

Tümevarım yöntemi ile bu şekilde devam edersek ve benzer işlemi $h(x,y)$ fonksiyonunu da uygularsak

$$g^j(x,y) = yF_{j-1}(x,y) + g(x,y)\, F_j(x,y) \tag{2.55}$$

sonucu ve

$$h^j(x,y) = yF_{j-1}(x,y) + h(x,y)\, F_j(x,y) \tag{2.56}$$

sonucu elde edilir.

(2.55) ve (2.56) numaralı denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa, (2.51) bağıntısında verilen iki değişkenli Fibonacci polinomları için Binet formülünün farklı bir ispatı daha verilmiş olur ve

$$F_j(x,y) = \frac{g^j(x,y) - h^j(x,y)}{g(x,y) - h(x,y)}$$

elde edilir (Catalani 2004).

Ayrıca (2.55) ve (2.56) numaralı denklemler kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.48

$$(-1)^j (y)^{j-1} = yF_{j-1}^2(x,y) + xF_j(x,y)\, F_{j-1}(x,y) - F_j^2(x,y)$$

dir (Catalani 2004).

2.11. Apostol-Bernoulli Polinomları

Tanım 2.49 $|t + \log \lambda| < 2\pi$ *olmak üzere,* $\mathcal{B}_j(x, \lambda)$ *Apostol-Bernoulli polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$F_{AB}(x,t;\lambda) = \frac{t\mathrm{e}^{xt}}{\lambda \mathrm{e}^t - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{B}_j(x,\lambda) \frac{t^j}{j!} \tag{2.57}$$

ile ifade edilir (Luo 2004; Luo ve Srivastava 2006, 2011).

Bu polinomlar ile ilgili çeşitli özellikler, eşitlikler, formüller ve genelleştirmeler Srivastava tarafından elde edilmiştir (Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012). Ayrıca birçok yazar da uygun üreteç fonksiyonlarını kullanarak bu polinomların farklı genelleştirmelerini elde etmiştir (Luo ve Srivastava 2006; Kim 2008; Lu ve Srivastava 2011; Dere vd. 2013; Bayad vd. 2014).

(2.57) denkleminde $\lambda \neq 1$ için $x = 0$ alınması durumunda Apostol-Bernoulli sayıları $\mathcal{B}_j(\lambda) = \mathcal{B}_j(0,\lambda)$ elde edilir (Apostol 1951; Luo 2004). $j \geq 0$ için $\mathcal{B}_j(\lambda)$ Apostol-Bernoulli sayılarının aldığı bazı değerler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(\lambda) &= 0, \\ \mathcal{B}_1(\lambda) &= \frac{1}{\lambda - 1}, \\ \mathcal{B}_2(\lambda) &= -\frac{2\lambda}{(\lambda-1)^2}, \\ \mathcal{B}_3(\lambda) &= \frac{3\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)^3}, \\ \mathcal{B}_4(\lambda) &= -\frac{4\lambda\left(\lambda^2+4\lambda+1\right)}{(\lambda-1)^4}, \\ \mathcal{B}_5(\lambda) &= \frac{5\lambda\left(\lambda^3+11\lambda^2+11\lambda+1\right)}{(\lambda-1)^5}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

(2.57) denkleminde $\lambda = 1$ alınması durumunda klasik Bernoulli polinomları $B_j(x) = \mathcal{B}_j(x,1)$ elde edilir. Bu eşitlikte $x = 0$ alınması durumunda ise klasik Bernoulli sayıları $B_j = B_j(0)$ elde edilir. $B_j^{(h)}(x)$, yüksek mertebeden Bernoulli polinomları için üreteç fonksiyonu ise

$$F_{Bh}(x,t;h) = \left(\frac{t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t - 1}\right)^h = \sum_{j=0}^{\infty} B_j^{(h)}(x) \frac{t^j}{j!} \tag{2.59}$$

eşitliği ile tanımlıdır ve bu eşitlikte $h = 1$ için $B_j^{(1)}(x) = B_j(x)$ dır (Apostol 1951; Luo 2004; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

2.12. Apostol-Euler Polinomları

Tanım 2.50 $|2t + \log \lambda| < \pi$ *olmak üzere,* $\mathcal{E}_j(x, \lambda)$ *1. tip Apostol-Euler polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$F_{AE}(x, t; \lambda) = \frac{2e^{xt}}{\lambda e^t + 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{E}_j(x, \lambda) \frac{t^j}{j!} \tag{2.60}$$

ile ifade edilir. (Apostol 1951; Luo 2004; Luo ve Srivastava 2006; Özden vd. 2010; Srivastava vd. 2012; Djordjevic ve Milovanovic 2014).

(2.60) denkleminde $\lambda \neq 1$ için $x = \frac{1}{2}$ olarak alınması durumunda Apostol-Euler sayıları $\mathcal{E}_j(\lambda) = 2^j \mathcal{E}_j\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)$ elde edilir (Apostol 1951; Luo 2004; Luo ve Srivastava 2006; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Djordjevic ve Milovanovic 2014).

(2.60) denkleminde $\lambda = 1$ alınması durumunda 1. tip Euler polinomları $E_j(x) = \mathcal{E}_j(x, 1)$ elde edilir. $E_j^{(h)}(x)$, yüksek mertebeden Euler polinomları için üreteç fonksiyonu ise

$$F_{E^{(h)}}(x, t; h) = \left(\frac{2e^{xt}}{e^t + 1}\right)^h = \sum_{j=0}^{\infty} E_j^{(h)}(x) \frac{t^j}{j!} \tag{2.61}$$

eşitliği ile tanımlanır ve bu eşitlikte $h = 1$ için $E_j^{(1)}(x) = E_j(x)$'dir (Apostol 1951; Luo 2004; Luo ve Srivastava 2006; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Djordjevic ve Milovanovic 2014).

Tanım 2.51 $|2t + \log \lambda| < \pi$ *olmak üzere,* $\mathcal{E}_j^*(x, \lambda)$ *2. tip Apostol-Euler polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$F_{AE^*}(x, t; \lambda) = \frac{2e^{xt}}{\lambda e^t + \lambda^{-1} e^{-t}} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{E}_j^*(x, \lambda) \frac{t^j}{j!} \tag{2.62}$$

eşitliği ile tanımlanır (Şimşek 2016).

(2.62) denkleminde $\lambda = 1$ alınması durumunda 2. tip Euler polinomları $E_j^*(x) = \mathcal{E}_j^*(x,1)$ elde edilir. Bu eşitlikte de $x = 0$ alınması durumunda 2. tip Euler sayıları $E_j^* = E_j^*(0)$ elde edilir (Şimşek 2016).

2. tip Euler sayıları ile 1. tip Euler polinomları arasındaki ilişki

$$E_j^* = 2^j E_j\left(\frac{1}{2}\right)$$

eşitliği ile verilir.

(2.62) denkleminde $x = 0$ alınırsa, 1. tip Apostol-Euler polinomları ve 2. tip Apostol-Euler polinomları arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_j^*(0,\lambda) &= \frac{2}{\lambda e^t + \lambda^{-1}e^{-t}} \\
&= \frac{\lambda 2e^t}{\lambda^2 e^{2t} + 1} \\
&= 2^j \lambda \mathcal{E}_j\left(\frac{1}{2}, \lambda^2\right)
\end{aligned}$$

eşitliği ile verilir (Şimşek 2016).

2.13. Genocchi Sayıları ve Polinomları

Tanım 2.52 *$|t| < \pi$ olmak üzere, G_j Genocchi sayıları için üreteç fonksiyonu*

$$F_g(t) = \frac{2t}{e^t + 1} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \frac{t^j}{j!} \tag{2.63}$$

eşitliği ile tanımlanır (Luo 2004; Kim 2008; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

G_j Genocchi sayıları için $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ ve her $j \in \mathbb{N}^+$ için $G_{2j+1} = 0$ dır.

Elemanları Genocchi sayılarından oluşan $\{G_j\}_{j=0}^{\infty}$ sayı dizisine, Genocchi sayıları dizisi denir. Genocchi sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
G_j	0	1	-1	0	1	0	-3	0	17	0	-155	0	...

G_j Genocchi sayılarının Bernoulli ve Euler sayıları ile ilişkisi sırasıyla

$$G_{2j} = 2\left(1-2^{2j}\right)B_{2j}$$

ve

$$G_{2j} = 2jE_{2j-1}$$

eşitlikleri ile verilir (Horadam 2002; Luo 2004; Kim 2008; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.53 $|t| < \pi$ *olmak üzere,* $G_j(x)$ *Genocchi polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$F_g(x,t) = F_g(t)\,\mathrm{e}^{xt} = \frac{2t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t+1} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(x)\frac{t^j}{j!} \tag{2.64}$$

eşitliği ile tanımlanır (Horadam 2002; Luo 2004; Kim 2008; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

$G_j(x)$, Genocchi polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

j	0	1	2	3	4	$\ldots$
$G_j(x)$	0	1	$2x-1$	$3x^2-3x$	$4x^3-6x^2+1$	$\ldots$

$G_j(x)$ Genocchi polinomlarının Genocchi sayıları ile ilişkisi

$$G_j(x) = \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}G_k x^{j-k} \tag{2.65}$$

eşitliği ile verilir (Horadam 2002; Luo 2004; Kim 2008; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.54 $|2t+\log\lambda| < \pi$ *olmak üzere,* $G_j(x,\lambda)$ *Apostol Genocchi polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$\frac{2t\mathrm{e}^{xt}}{\lambda\mathrm{e}^t+1} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(x,\lambda)\frac{t^j}{j!} \tag{2.66}$$

eşitliği ile tanımlanır (Horadam 2002; Luo 2004; Kim 2008; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.66) denkleminde

$\lambda = 1$	alınırsa;	$G_j(x,1) = G_j(x)$	klasik Genocchi polinomları
$\lambda = 1$ ve $x = 0$	alınırsa;	$G_j(0,1) = G_j(0) = G_j$	klasik Genocchi sayıları
$\lambda \neq 1$ ve $x = 0$	alınırsa;	$G_j(0,\lambda) = G_j(\lambda)$	Apostol Genocchi sayıları

elde edilir.

2.14. Stirling Sayıları

Tanım 2.55 *$k \in \mathbb{N}_0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $S_2(j,k;\lambda)$ ikinci tip Stirling sayıları için üreteç fonksiyonu*

$$F_S(t,k;\lambda) = \frac{(\lambda e^t - 1)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} S_2(j,k;\lambda)\frac{t^j}{j!} \tag{2.67}$$

eşitliği ile tanımlanır (Cakic ve Milovanovic 2004; Srivastava 2011; Şimşek 2013, 2016).

Tanım 2.56 *Toscano (1970), Cakic ve Milovanovic (2004) çalışmalarında da yer alan genelleştirilmiş Stirling sayıları ve polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$F_{S^{(\alpha)}}(t,k;\alpha) = \frac{(e^t - 1)^k}{k!}e^{t\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} S^{(\alpha)}(j,k)\frac{t^j}{j!} \tag{2.68}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Şimşek, (2.68) eşitliği ile verilen genelleştirilmiş Stirling sayıları için üreteç fonksiyonunu modifiye ederek, $k \in \mathbb{N}_0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $S_k^j(x;\lambda)$ ile gösterilen λ-array polinomları için üreteç fonksiyonunu

$$F_A(t,x,k;\lambda) = \frac{(\lambda e^t - 1)^k}{k!}e^{tx} = \sum_{j=0}^{\infty} S_k^j(x;\lambda)\frac{t^j}{j!} \tag{2.69}$$

eşitliği ile tanımlamıştır (Şimşek 2016). Cakic ve Milovanovic ise bu polinomların bir çok kombinatoriyal özelliklerini vermiştir (Cakic ve Milovanovic 2004).

Not 12 *(2.69) denkleminde $\lambda = 1$ alınması durumunda, λ-array polinomları*

$$S^{(\alpha)}(j,k) = S_k^j(\alpha;1)$$

eşitliği ile verilen array polinomlarına dönüşür (Cakic ve Milovanovic 2004; Şimşek 2016).

2.15. Dickson Polinomları

L.E. Dickson, Dickson polinomlarının cebirsel ve teorik özelliklerini araştıran ilk kişidir. Dickson, bu polinomları Chicago Üniversitesi'ndeki doktora tez çalışmasında incelemiştir. 1923 yılında, I. Schur bu polinomların Dickson polinomları olarak adlandırılmasını öneren kişi olmuştur.

Tanım 2.57 $D_j(x,a)$, j. *Dickson polinomunu göstermek üzere,* $D_0(x,a) = 2$ *ve* $D_1(x) = x$ *başlangıç koşulları ve her* $j \geq 2$ *tam sayısı için Dickson polinomları*

$$D_j(x,a) = xD_{j-1}(x,a) - aD_{j-2}(x,a) \tag{2.70}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Lidl 1993; Gao ve Mullen 1994).

Elemanları Dickson polinomlarından oluşan $\{D_j(x,a)\}_{j=0}^{\infty}$ polinomlar dizisine, Dickson polinomları dizisi denir. Dickson polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıdaki tablo ile sunulmuştur.

j	0	1	2	3	4	$\ldots$
$D_j(x,a)$	2	x	x^2-2a	x^3-3ax	$x^4-4ax^2+2a^2$	$\ldots$

Tanım 2.58 *Dickson polinomlarının rekürans bağıntısından elde edilen*

$$m(x,a) = \frac{x+\sqrt{x^2-4a}}{2}$$

ve

$$n(x,a) = \frac{x-\sqrt{x^2-4a}}{2}$$

değerleri için

$$D_j\left(x,a\right)=m^j\left(x,a\right)+n^j\left(x,a\right) \tag{2.71}$$

ifadesine Dickson polinomları için Binet formülü denir (Lidl 1993; Gao ve Mullen 1994).

Tanım 2.59 *Dickson polinomları için rekürans bağıntısından elde edilen üreteç fonksiyonu*

$$G_D\left(x,a,t\right)=\sum_{j=0}^{\infty}D_j\left(x,a\right)t^j=\frac{2-xt}{1-xt+at^2} \tag{2.72}$$

ile ifade edilir (Lidl 1993; Gao ve Mullen 1994).

Tanım 2.60 *Dickson polinomları için üstel üreteç fonksiyonu ise*

$$G_{D,\exp}\left(x,a,t\right)=\sum_{j=0}^{\infty}D_j\left(x,a\right)\frac{t^j}{j!}=e^{m(x,a)t}+e^{n(x,a)t} \tag{2.73}$$

ile ifade edilir (Lidl 1993; Gao ve Mullen 1994).

Teorem 2.61 $D_j\left(x,a\right)$ *Dickson polinomları için kapalı formül*

$$D_j\left(x,a\right)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\begin{pmatrix} j-k \\ k \end{pmatrix}\frac{j}{j-k}\left(-a\right)^k x^{j-2k}$$

dir (Lidl 1993; Gao ve Mullen 1994).

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Genelleştirilmiş Çift Değişkenli Polinomlar

Bu bölümde, iyi bilinen çeşitli polinom aileleri için yeni bir üreteç fonksiyonu ailesi inşa edilmiş ve bu fonksiyonun bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.1 *$\mathcal{G}_j(x, y; k, m, n)$ genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlar için üreteç fonksiyonu*

$$H(t; x, y; k, m, n) = \frac{1}{1 - x^k t - y^m t^{m+n}} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j(x, y; k, m, n) t^j, \tag{3.1}$$

eşitliği ile tanımlanır (Özdemir ve Şimşek 2016). Burada

$$\begin{aligned} m, n, k &\in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} = \mathbb{N}_0, \\ x, y &\in \mathbb{R}, \\ t &\in \mathbb{C} \end{aligned}$$

dir.

Özel Durumlar

m, n, k nın bazı özel durumları için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

1. (3.1) bağıntısında $k = 1$, $m = 0$ ve $n = 2$ olarak alınırsa

   $$H(t; x, y; 1, 0, 2) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j(x, y; 1, 0, 2) t^j = \frac{1}{1 - xt - t^2}$$

   elde edilir. Buradan (2.7) bağıntısı

   $$tH(t; x, y; 1, 0, 2) = G_F(x, t) \tag{3.2}$$

   ile ifade edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

2. (3.1) bağıntısında $k = 0$ ve $m = n = 1$ olarak alınırsa

$$H\left(t; x, y; 0, 1, 1\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j\left(x, y; 0, 1, 1\right) t^j = \frac{1}{1 - t - yt^2}$$

elde edilir. Buradan (2.18) bağınıtısı

$$tH\left(t; x, y; 0, 1, 1\right) = G_J\left(y, t\right) \tag{3.3}$$

ile ifade edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Aşağıda verilen teorem yardımıyla (3.1) bağıntısında yer alan $\mathcal{G}_j\left(x, y; k, m, n\right)$ genelleştirilmiş çift değişkenli polinomları hesaplayan bir özdeşlik verilecektir.

Teorem 3.2 $m \in \mathbb{N}$ *için,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A\left(k, n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} A\left(k, n - mk\right)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} B\left(k, n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B\left(k, n + mk\right)$$

dir (Rainville 1960; Srivastava vd. 2010).

Bu teoremden yola çıkarak $\mathcal{G}_j\left(x, y; k, m, n\right)$ genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlar için kapalı formül aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.3 $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ *ve* $x, y \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $\mathcal{G}_j\left(x, y; k, m, n\right)$ *polinomları için kapalı formül*

$$\mathcal{G}_j\left(x, y; k, m, n\right) = \sum_{c=0}^{\left\lfloor \frac{j}{m+n} \right\rfloor} \binom{j - c\left(m + n - 1\right)}{c} y^{mc} x^{jk - mck - nck} \tag{3.4}$$

dir (Özdemir ve Şimşek 2016).

İspat (3.1) eşitliğinde verilen üreteç fonksiyonundan yola çıkarak

$$H\left(t;x,y;k,m,n\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} j+c \\ c \end{array}\right)\left(x^{k}t\right)^{j}\left(y^{m}t^{m+n}\right)^{c}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\left|x^{k}t\right|<1$ ve $\left|y^{m}t^{m+n}\right|<1$ dir. Teorem 4.2'den yola çıkarak

$$H\left(t;x,y;k,m,n\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{\left\lfloor \frac{j}{m+n}\right\rfloor}\left(\begin{array}{c} j-mc-nc+c \\ c \end{array}\right)\left(x^{k}t\right)^{j-mc-nc}\left(y^{m}t^{m+n}\right)^{c}$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}_{j}\left(x,y;k,m,n\right)t^{j}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{\left\lfloor \frac{j}{m+n}\right\rfloor}\left(\begin{array}{c} j-mc-nc+c \\ c \end{array}\right)\left(x^{k}t\right)^{j-mc-nc}\left(y^{m}t^{m+n}\right)^{c}$$

eşitliğinin her iki tarafında t^{j}'nin katsayısı karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir. □

$\mathcal{G}_{j}\left(x,y;k,m,n\right)$ polinomları için (3.4) bağıntısı ile verilen kapalı formülün bazı özel durumları aşağıda verilmiştir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Not 13 $m=n=1$ *için,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{1}\left(x,y;k,1,1\right) &= x^{k}\\
\mathcal{G}_{2}\left(x,y;k,1,1\right) &= x^{2k}\\
\mathcal{G}_{3}\left(x,y;k,1,1\right) &= x^{3k}+2yx^{k}\\
\mathcal{G}_{4}\left(x,y;k,1,1\right) &= x^{4k}+3yx^{2k}+y^{2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

polinomları elde edilir.

Not 14 $m=1$, $n=0$ *için*

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{1}\left(x,y;k,1,0\right) &= x^{k}+y\\
\mathcal{G}_{2}\left(x,y;k,1,0\right) &= x^{2k}+2yx^{k}+y^{2}\\
\mathcal{G}_{3}\left(x,y;k,1,0\right) &= x^{3k}+3yx^{2k}+3y^{2}x^{k}+y^{3}\\
\mathcal{G}_{4}\left(x,y;k,1,0\right) &= x^{4k}+4yx^{3k}+6y^{2}x^{2k}+4y^{3}x^{k}+y^{4}\\
&\vdots\\
\mathcal{G}_{j}\left(x,y;k,1,0\right) &= \left(x^{k}+y\right)^{j}
\end{aligned}$$

polinomları elde edilir.

3.2. Yüksek Mertebeden Genelleştirilmiş Çift Değişkenli Polinomlar

Bu bölümde genelleştirilmiş çift değişkenli polinomların yeni bir genelleştirmesi verilmiştir.

Tanım 3.4 *h pozitif bir tam sayı olmak üzere, $\mathcal{G}_j^{(h)}(x,y;k,m,n)$ yüksek mertebeden genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlar için üreteç fonsiyonu*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j^{(h)}(x,y;k,m,n)\, t^j = \frac{1}{\left(1-x^k t - y^m t^{n+m}\right)^h} \tag{3.5}$$

eşitliği ile tanımlanır (Özdemir vd. 2017).

Bu eşitlikte $h=1$ için

$$\mathcal{G}_j^{(1)}(x,y;k,m,n) = \mathcal{G}_j(x,y;k,m,n)$$

dir.

$\mathcal{G}_j^{(h)}(x,y;k,m,n)$ yüksek mertebeden genelleştirilmiş çift değişkenli polinomları hesaplamak için aşağıdaki teorem kullanılır.

Teorem 3.5

$$\mathcal{G}_j^{(h_1+h_2)}(x,y;k,m,n) = \sum_{l=0}^{j} \mathcal{G}_l^{(h_1)}(x,y;k,m,n)\, \mathcal{G}_{j-l}^{(h_2)}(x,y;k,m,n) \tag{3.6}$$

dir (Özdemir vd. 2017).

İspat (3.5) numaralı denklemde $h = h_1 + h_2$ olarak alırsak,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j^{(h_1+h_2)}(x,y;k,m,n)\, t^j = \frac{1}{\left(1-x^k t - y^m t^{n+m}\right)^{h_1+h_2}}$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j^{(h_1+h_2)}(x,y;k,m,n)\, t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j^{(h_1)}(x,y;k,m,n)\, t^j \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j^{(h_2)}(x,y;k,m,n)\, t^j$$

şeklinde de ifade edilebilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında Cauchy çarpım kuralı uygulandığında

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j^{(h_1+h_2)}(x,y;k,m,n)\,t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{j} \mathcal{G}_l^{(h_1)}(x,y;k,m,n)\,\mathcal{G}_{j-l}^{(h_2)}(x,y;k,m,n)\,t^j$$

sonucu elde edilir. Son eşitlikte, denklemin her iki tarafında yer alan t^j 'nin katsayıları karşılaştırıldığında istenilen sonuç elde edilir (Özdemir vd. 2017). □

Not 15 *(3.6) denkleminde* $h_1 = h_2 = 1$ *olarak alınırsa , 2. mertebeden çift değişkenli Fibonacci tipli polinomlar*

$$\mathcal{G}_j^{(2)}(x,y;k,m,n) = \sum_{l=0}^{j} \mathcal{G}_l(x,y;k,m,n)\,\mathcal{G}_{j-l}(x,y;k,m,n)$$

eşitliği ile verilir (Özdemir vd. 2017).

Not 16 *(3.5) denkleminde* $x := ax$, $y = -1$, $k = 1$, $m = 1$, $n = a-1$ *olarak alınırsa*

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j^{(h)}(ax,-1;1,1,a-1)\,t^j &= \frac{1}{(1-axt+t^a)^h} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{j,a}^{h}(x)\,t^j\end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafında yer alan t^j'nin katsayıları karşılaştırıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6 $\mathcal{G}_j^{(h)}(x,y;k,m,n)$ *yüksek mertebeden genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlar ile* $\Pi_{n,m}^{h}(x)$ *Humbert polinomları arasındaki ilişki*

$$\mathcal{G}_j^{(h)}(ax,-1;1,1,a-1) = \Pi_{j,a}^{h}(x)$$

eşitliği ile verilir (Özdemir vd. 2017).

3.3. Genelleştirilmiş Çift Değişkenli Fibonacci Tipli Polinomlar

Tanım 3.7 *$W_j(x,y;k,m,n)$, genelleştirilmiş çift değişkenli Fibonacci tipli polinomları göstermek üzere bu polinomlar ailesi için üreteç fonksiyonu*

$$R(t;x,y;k,m,n)=H(t;x,y;k,m,n)t^n=\sum_{j=0}^{\infty}W_j(x,y;k,m,n)\,t^j \tag{3.7}$$

veya açık hali ile

$$R(t;x,y;k,m,n)=\frac{t^n}{1-x^kt-y^mt^{m+n}} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir ve Şimşek 2016).

Teorem 3.8 *$m,n,k\in\mathbb{N}_0$ ve $x,y\in\mathbb{R}$ olmak üzere $j\geq n$ için $W_j(x,y;k,m,n)$ genelleştirilmiş çift değişkenli Fibonacci tipli polinomlar için kapalı formül*

$$W_j(x,y;k,m,n)=\sum_{c=0}^{\left\lfloor\frac{j-n}{m+n}\right\rfloor}\binom{j-n-c(m+n-1)}{c}y^{mc}x^{(j-n)k-mck-nck} \tag{3.9}$$

dir (Özdemir ve Şimşek 2016).

İspat (3.7) ve (3.8) eşitlikleri ile verilen üreteç fonksiyonundan yola çıkarak

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}W_j(x,y;k,m,n)\,t^j &= \frac{t^n}{1-x^kt-y^mt^{m+n}}\\ &= t^n\sum_{j=0}^{\infty}\left(x^kt\right)^j\sum_{c=0}^{\infty}\binom{j+c}{c}\left(y^mt^{m+n}\right)^c\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{\infty}\binom{j+c}{c}\left(x^kt\right)^j\left(y^mt^{m+n}\right)^ct^n\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte j yerine $j-mc-nc$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}W_j(x,y;k,m,n)\,t^j &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{\left\lfloor\frac{j}{m+n}\right\rfloor}\binom{j-mc-nc+c}{c}\left(x^kt\right)^{j-mc-nc}\left(y^mt^{m+n}\right)^c\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{c=0}^{\left\lfloor\frac{j}{m+n}\right\rfloor}\binom{j-mc-nc+c}{c}x^{jk-mck-nck}y^{mc}\right)t^{j+n}\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{j=0}^{\infty} W_j(x,y;k,m,n)\,t^j = \sum_{j=n}^{\infty}\left(\sum_{c=0}^{\left\lfloor \frac{j-n}{m+n}\right\rfloor}\binom{j-n-mc-nc+c}{c}x^{jk-nk-mck-nck}y^{mc}\right)t^j$$

olup $j \geq n$ için

$$W_j(x,y;k,m,n) = \sum_{c=0}^{\left\lfloor \frac{j-n}{m+n}\right\rfloor}\binom{j-n-c(m+n-1)}{c}y^{mc}x^{(j-n)k-mck-nck}$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır. □

3.3.1. $\mathcal{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomları ile $W_j(x,y;k,m,n)$ polinomlarının üreteç fonksiyonlarının karşılaştırılması

Teorem 3.9 *$\mathcal{G}_j(x,y;k,m,n)$ genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlar ile $W_j(x,y;k,m,n)$ genelleştirilmiş çift değişkenli Fibonacci tipli polinomlarının üreteç fonksiyonları arasındaki ilişki*

$$\sum_{j=n}^{\infty}\mathcal{G}_{j-n}(x,y;k,m,n)\,t^j = \sum_{j=0}^{\infty}W_j(x,y;k,m,n)\,t^j \tag{3.10}$$

eşitliği ile verilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Yukarıdaki teoremden yola çıkarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.10 *$W_j(x,y;k,m,n)$ polinomları ile $\mathcal{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomları arasındaki ilişki*

$$W_j(x,y;k,m,n) = \begin{cases} \mathcal{G}_{j-n}(x,y;k,m,n)\,; & j \geq n \\ 0 \quad ; & 0 \leq j \leq n-1 \end{cases} \tag{3.11}$$

eşitliği ile verilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Bu teoremlerin ispatı için kullanılan yöntemlerden biri üreteç fonksiyonu ve binom serisinden yararlanmak, bir diğeri de Binet formüllerini kullanmaktır.

Şimdi üreteç fonsiyonundan yola çıkarak yukarıdaki teoremlerin ispatını inceleyelim:

(3.1) ve (3.8) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}_j(x,y;k,m,n)\,t^{j+n} &= \frac{t^n}{1-x^k t-y^m t^{m+n}}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}W_j(x,y;k,m,n)\,t^j\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafında j yerine $j-n$ yazılırsa

$$\sum_{j=n}^{\infty}\mathcal{G}_{j-n}(x,y;k,m,n)\,t^j=\sum_{j=0}^{\infty}W_j(x,y;k,m,n)\,t^j \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

(3.12) eşitliğini tümevarım yöntemi ile gösterelim:

$n=0$ için;

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}_j(x,y;k,m,0)\,t^{j+0}=\sum_{j=0}^{\infty}W_j(x,y;k,m,0)\,t^j$$

olup $\mathcal{G}_j(x,y;k,m,0)=W_j(x,y;k,m,0)$ elde edilir.

$n=1$ için;

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}_j(x,y;k,m,1)\,t^{j+1} &= \frac{t}{1-x^k t-y^m t^{m+1}}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}W_j(x,y;k,m,1)\,t^j\end{aligned}$$

olup $j\geq 1$ için $\mathcal{G}_{j-1}(x,y;k,m,1)=W_j(x,y;k,m,1)$ elde edilir.

$n=2$ için;

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}_j(x,y;k,m,1)\,t^{j+2} &= \frac{t^2}{1-x^k t-y^m t^{n+1}}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}W_j(x,y;k,m,2)\,t^j\end{aligned}$$

olup $j\geq 2$ için $\mathcal{G}_{j-2}(x,y;k,m,2)=W_j(x,y;k,m,2)$ elde edilir.

İşlemlere bu şekilde devam edilirse, tümevarım yöntemi ile $j \geq n$ için (3.11) rekürans bağıntısında verilen

$$\mathcal{G}_{j-n}\left(x,y;k,m,n\right)=W_{j}\left(x,y;k,m,n\right)$$

sonucu elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Şimdi elde ettiğimiz bu sonucun özel bir durum ($F_j\left(x\right)$, Fibonacci polinonları) için uygulamasını verelim.

(2.5) eşitliği ile verilen $F_j\left(x\right)$ Fibonacci polinomları için rekürans bağıntısından elde edilen üreteç fonksiyonundan yola çıkarak,

$$\alpha\left(x\right)=\frac{x+\sqrt{x^{2}+4}}{2}$$

ve

$$\beta\left(x\right)=\frac{x-\sqrt{x^{2}+4}}{2}$$

değerleri için $\alpha\left(x\right)\beta\left(x\right)=-1$ ve $\alpha\left(x\right)+\beta\left(x\right)=x$ ve $F_0\left(x\right)=0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\sum_{j=0}^{\infty}F_{j}\left(x\right)t^{j} &= \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{\infty}F_{j}\left(x\right)t^{j}\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}F_{j}\left(x\right)t^{j-1}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}F_{j+1}\left(x\right)t^{j}\\
&= \frac{1}{1-xt-t^{2}}\\
&= \frac{1}{1-\left(\alpha\left(x\right)+\beta\left(x\right)\right)t+\left(\alpha\left(x\right)\beta\left(x\right)\right)t^{2}}\\
&= \frac{1}{\left(1-\alpha\left(x\right)t\right)\left(1-\beta\left(x\right)t\right)}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}\left(x\right)t^{j}\sum_{j=0}^{\infty}\beta^{j}\left(x\right)t^{j}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\alpha^{k}\left(x\right)\beta^{j-k}\left(x\right)t^{j}
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} F_{j+1}(x) &= \sum_{k=0}^{j} \alpha^{k}(x)\,\beta^{j-k}(x) \\ &= \beta^{j}(x)\left(\frac{\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)^{j+1}-1}{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1}\right) \\ &= \frac{\alpha^{j+1}(x)-\beta^{j+1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Bu ifadeden yola çıkarak

$$\begin{aligned} \frac{t}{1-xt-t^{2}} &= t\sum_{j=0}^{\infty} F_{j+1}(x)\,t^{j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} F_{j+1}(x)\,t^{j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} F_{j}(x)\,t^{j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} F_{j}(x)\,t^{j} \\ &= F_{1}(x)\,t+F_{2}(x)\,t^{2}+F_{3}(x)\,t^{3}+\ldots \end{aligned}$$

sonucu ve

$$\begin{aligned} \frac{t^{2}}{1-xt-t^{2}} &= t^{2}\sum_{j=0}^{\infty} F_{j+1}(x)\,t^{j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} F_{j+1}(x)\,t^{j+2} \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} F_{j-1}(x)\,t^{j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} F_{j-1}(x)\,t^{j} \\ &= F_{1}(x)\,t^{2}+F_{2}(x)\,t^{3}+F_{3}(x)\,t^{4}+\ldots \end{aligned}$$

sonucu elde edilebilir.

İşlemlerimize bu şekilde devam edersek Fibonacci polinomları için üreteç fonksiyonu

$$G_{F}(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty} F_{j}(x)\,t^{j}=\frac{t}{1-xt-t^{2}}$$

olmak üzere $\tilde{G}_F(x,t) = t^k G_F(x,t)$ üreteç fonksiyonunu

$$\tilde{G}_F(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{F}_j(x)\, t^j = \frac{t^{k+1}}{1 - xt - t^2}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\tilde{F}_j(x) = F_{j-k}(x)$$

sonucu elde edilir.

3.3.2. $\mathcal{G}_j(x,y;k,m,n)$ ve $W_j(x,y;k,m,n)$ polinomları ile diğer polinom aileleri arasındaki ilişkiler

Fibonacci ve Jacobsthal Polinomlar ile İlişki

(3.7) numaralı denklemde $k = m = n = 1$, $y = 1$ olarak alınırsa, (3.7) bağıntısı (2.7) bağıntısına dönüşür ve

$$F_j(x) = W_j(x, 1; 1, 1, 1)$$

sonucu elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

(3.7) numaralı denklemde $k = m = n = 1$, $x = 1$ olarak alınırsa, (3.7) bağıntısı (2.18) bağıntısına dönüşür ve

$$J_j(y) = W_j(1, y; 1, 1, 1)$$

sonucu elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Vieta-Fibonacci ve Vieta-Lucas Polinomları ile İlişki

(3.7) numaralı denklemde $k = m = n = 1$, $y = -1$ olarak alınırsa, (3.7) bağıntısının (2.28), (2.29) ve (3.8) bağıntıları ile ilişkisi

$$V_j(x) = W_j(x, -1; 1, 1, 1)$$

ve

$$v_j(x) = 2\mathcal{G}_j(x, -1; 1, 1, 1) - 2xW_j(x, -1; 1, 1, 1)$$

eşitlikleri ile ifade edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Chebyshev Polinomları ile İlişki

(3.1) ve (3.7) numaralı denklemlerde $l \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k = m = 1$, $n = l - 1$, $y = -1$ olarak alınırsa (2.39) ve (2.40) bağıntılıları ile ilgili

$$V_{j,l}(x) = \mathcal{G}_j(x, -1; 1, 1, l-1)$$

ve

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Omega_{j,l}(x)\, t^j = H(t; x, -1; 1, 1, l-1) - tR(t; x, -1; 1, 1, l-1)$$

eşitlikleri elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Legendre Polinomları ile İlişki

(3.1) numaralı denklemde $x = 2x$, $y = -1$, $k = m = n = 1$ olarak alınırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}_j(2x, -1; 1, 1, 1)\, t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{j} P_{j-c}(x) P_c(x) t^j$$

eşitliği elde edilir.

Yukarıdaki ifadede t^j'nin katsayıları karşılaştırılırsa

$$\mathcal{G}_j(2x, -1; 1, 1, 1) = \sum_{c=0}^{j} P_{j-c}(x) P_c(x)$$

sonucu elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Dickson Polinomları ile İlişki

(3.1) ve (3.7) numaralı denklemlerde $y = -a$ ve $k = m = n = 1$ olarak alınırsa (2.72) bağıntısı ile ilgili

$$D_j(x, a) = 2\mathcal{G}_j(x, -a; 1, 1, 1) - xW_j(x, -a; 1, 1, 1)$$

sonucu elde edilir.

3.3.3. Genelleştirilmiş çift değişkenli Fibonacci tipli polinomlara ait üreteç fonksiyonunun seri uygulamaları

Bu kısımda genelleştirilmiş çift değişkenli polinomları, genelleştirilmiş çift değişkenli Fibonacci tipli polinomları ve Fibonacci sayılarını içeren bazı seri uygulamalarından bahsedilmiştir. (3.7) bağıntısı ile verilen $W_j\left(x,y;k,m,n\right)$ genelleştirilmiş çift değişkenli Fibonacci tipli polinomlar için üreteç fonksiyonu

$$R(t;x,y;k,m,n)=\sum_{j=0}^{\infty}W_j\left(x,y;k,m,n\right)t^j=\frac{t^n}{1-x^kt-y^mt^{m+n}}$$

eşitliği ile gösterilmek üzere, bu eşitlikte $c>1$ için $t=\dfrac{1}{c}$ olarak ele alınırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{W_j\left(x,y;k,m,n\right)}{c^j}=\frac{c^m}{c^{m+n}-x^kc^{n+m-1}-y^m} \tag{3.13}$$

sonucu elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Sonuç 3.11 *(3.13) numaralı denklemde $c=2$, $x=y=1$, $k=m=n=1$ olarak alınırsa (Koshy 2001) referansında yer alan Fibonacci polinomları ile ilgili*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{F_j}{2^j}=2 \tag{3.14}$$

sonucu elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Sonuç 3.12 *(3.13) numaralı denklemde $c=10$, $x=y=1$, $k=m=n=1$ olarak alınırsa 1953 yılında F. Stancliff tarafindan elde edilmiş ve yine (Koshy 2001) referansında yer alan Fibonacci polinomları ile ilgili*

$$\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{F_j}{10^j}=\frac{1}{F_{11}} \tag{3.15}$$

sonucu elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Sonuç 3.13 *(3.13) numaralı denklemde* $c = 2,\ y = 1,\ k = m = n = 1$ *olarak alınırsa (Koshy 2001) referansında yer alan Fibonacci polinomları ile ilgili*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(x)}{2^j} = \frac{2}{3-2x} \tag{3.16}$$

sonucu elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Sonuç 3.14 *(3.13) numaralı denklemde* $c = 3,\ x = 1,\ k = m = n = 1$ *olarak alınırsa (Koshy 2001) referansında yer alan Jacobsthal polinomlar ile ilgili*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{J_j(y)}{3^j} = \frac{3}{6-y} \tag{3.17}$$

sonucu elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Sonuç 3.15 *(3.13) numaralı denklemde* $c = 5,\ y = -1,\ k = m = 1,\ n = l - 1$ *olarak alınırsa (Koshy 2001) referansında yer alan birinci tip genelleştirilmiş Chebyshev polinomları ile ilgili*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{V_{j,l}(y)}{5^j} = \frac{5^l}{5^l - 5^{l-1}x - 1} \tag{3.18}$$

sonucu elde edilir (Özdemir ve Şimşek 2016).

3.3.4. Genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlara ait üreteç fonksiyonunun kısmi türevleri

Bu bölümde $\mathcal{G}_j(x, y; k, m, n)$ genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlara ait $H(t; x, y; k, m, n)$ üreteç fonksiyonuna; $\frac{\partial}{\partial x}H(t; x, y; k, m, n)$, $\frac{\partial}{\partial y}H(t; x, y; k, m, n)$ ve $\frac{\partial}{\partial t}H(t; x, y; k, m, n)$ kısmi türevleri uygulanarak bazı eşitlikler verilmiştir. Bu eşitlikler ile birlikte üreteç fonksiyonları kullanılarak, $\mathcal{G}_j(x, y; k, m, n)$ polinomları için türev formülleri ve rekürans bağıntısı elde edilmiştir.

Sonuç 3.16 *(3.1) bağıntısına x değişkenine göre kısmi türev uygulanırsa,*

$$\frac{\partial}{\partial x}H(t;x,y;k,m,n) = kx^{k-1}tH^2(t;x,y;k,m,n) \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.17 *(3.1) bağıntısına y değişkenine göre kısmi türev uygulanırsa,*

$$\frac{\partial}{\partial y}H(t;x,y;k,m,n) = my^{m-1}t^{n+m}H^2(t;x,y;k,m,n) \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.18 *(3.1) bağıntısına t değişkenine göre kısmi türev uygulanırsa,*

$$\frac{\partial}{\partial t}H(t;x,y;k,m,n) = \left(x^k + (n+m)\,y^m t^{n+m-1}\right) H^2(t;x,y;k,m,n) \tag{3.21}$$

eşitliği elde edilir.

Türev Formülleri

$\mathcal{G}_j\,(x,y;k,m,n)$ polinomlarının üreteç fonksiyonuna kısmi türevler uygulandığında elde edilen türev formülleri aşağıda verilmiştir.

(3.19) eşitliğini (3.1) ile birleştirilirse,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}_j\,(x,y;k,m,n)\,t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{j-1}kx^{k-1}\mathcal{G}_l\,(x,y;k,m,n)\,\mathcal{G}_{j-1-l}\,(x,y;k,m,n)\,t^j$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafında t^j'nin katsayıları karşılaştırılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.19

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}_j\,(x,y;k,m,n) = \sum_{l=0}^{j-1}kx^{k-1}\mathcal{G}_l\,(x,y;k,m,n)\,\mathcal{G}_{j-1-l}\,(x,y;k,m,n)$$

dir (Özdemir ve Şimşek 2016).

(3.20) eşitliğini (3.1) ile birleştirilirse,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{G}_j (x, y; k, m, n) t^j$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{j-n-m} m y^{m-1} \mathcal{G}_l (x, y; k, m, n) \mathcal{G}_{j-n-m-l} (x, y; k, m, n) t^j$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafında t^j'nin katsayıları karşılaştırılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.20

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{G}_j (x, y; k, m, n) = \sum_{l=0}^{j-n-m} m y^{m-1} \mathcal{G}_l (x, y; k, m, n) \mathcal{G}_{j-n-m-l} (x, y; k, m, n)$$

dir (Özdemir ve Şimşek 2016).

Rekürans Bağıntısı

$\mathcal{G}_j (x, y; k, m, n)$ polinomlarının üreteç fonksiyonları ile bu polinomlara ait kısmi türevleri ve türev formüllerini kullanarak bu polinomlar için elde edilen rekürans bağıntısı aşağıda verilmiştir.

(3.21) eşitliğini (3.1) ile birleştirilirse,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \mathcal{G}_{j+1} (x, y; k, m, n) t^j$$
$$-x^k \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{j} \mathcal{G}_l (x, y; k, m, n) \mathcal{G}_{j-l} (x, y; k, m, n) t^j$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{j-n-m+1} (n+m) y^m \mathcal{G}_l (x, y; k, m, n) \mathcal{G}_{j-n-m-l+1} (x, y; k, m, n) t^j$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafında t^j'nin katsayıları karşılaştırılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.21 $j < n + m - 1$ *ise*

$$(j+1)\,\mathcal{G}_{j+1}\left(x,y;k,m,n\right) - x^{k}\sum_{l=0}^{j}\mathcal{G}_{l}\left(x,y;k,m,n\right)\mathcal{G}_{j-l}\left(x,y;k,m,n\right) = 0$$

dır.

$j \geq n + m - 1$ *ise*

$$\begin{aligned} & (j+1)\,\mathcal{G}_{j+1}\left(x,y;k,m,n\right) - x^{k}\sum_{l=0}^{j}\mathcal{G}_{l}\left(x,y;k,m,n\right)\mathcal{G}_{j-l}\left(x,y;k,m,n\right) \\ = \quad & (n+m)\,y^{m}\sum_{l=0}^{j-n-m+1}\mathcal{G}_{l}\left(x,y;k,m,n\right)\mathcal{G}_{j-n-m-l+1}\left(x,y;k,m,n\right) \end{aligned}$$

dir (Özdemir ve Şimşek 2016).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Apostol-Tipli ve Humbert-Tipli Polinomları İçeren Yeni Özel Sayı ve Polinom Aileleri İçin Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümün amacı, yeni özel sayı ve polinom aileleri için üreteç fonksiyonları elde etmektir. Üreteç fonksiyonları ve bunların fonksiyonel eşitlikleri kullanılarak, bu özel sayı ve polinom ailelerinin çeşitli özellikleri araştırılıp Fibonacci polinomları, Humbert polinomları, Bernoulli ve Euler sayıları ve polinomları, Apostol-tipli sayılar ve polinomlar, Genocchi sayıları ve polinomları, Stirling sayıları ve diğer iyi bilinen sayı ve polinom aileleri ile ilgili denklem ve bağıntılar elde edilmiştir. Ayrıca bu üreteç fonksiyonları; Humbert polinomlarına, Apostol-tipli sayı ve polinomlara ve çift değişkenli Fibonacci tipli polinomlara da dönüştürülmüştür. Üstelik bu yeni özel sayı ve polinom aileleri için matematik, matematiksel fizik ve ilgili diğer bilimlerde de kullanılan daha fazla gözlem ve sonuç elde edilmiştir.

4.1.1. Genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlar ile Bernoulli ve Euler tipli polinomları içeren yeni polinom ailesi

Bu bölümde, yeni tanımlanan polinom ailesini verebilmek için, genelleştirilmiş çift değişkenli polinomların üreteç fonksiyonunu değiştirilip yeniden düzenlenmiştir. Üreteç fonksiyonları kullanılarak Apostol-Bernolli sayılarını, Bernoulli tipli polinomları, Humbert polinomlarını, Genocchi polinomlarını ve hatta çift değişkenli Fibonacci tipli polinomları içeren bazı denklem ve eşitlikler verilmiştir.

Şimdi, yeni tanımlanan polinom ailesi $(x,y) \mapsto \mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ için üreteç fonksiyonunu verelim:

Tanım 4.1 $\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ *polinomları için üreteç fonksiyonu*

$$\mathbb{F}(z;x,y;k,m,n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)}{j!} \left(\frac{z}{1-x^k-y^m} \right)^j = \frac{1-x^k-y^m}{1-x^k \mathrm{e}^z - y^m \mathrm{e}^{z(m+n)}} \tag{4.1}$$

eşitliği ile tanımlanır (Özdemir vd. 2017).

$\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomları için rekürans bağıntısı aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.2 $\mathbb{G}_0(x,y;k,m,n)=1$ *başlangıç koşulu ve* j *bir pozitif tam sayı olmak üzere* $\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ *polinomları için rekürans bağıntısı*

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n) &= x^k\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}\mathbb{G}_c(x,y;k,m,n)\left(1-x^k-y^m\right)^{j-c}\\ &\quad+y^m\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}\mathbb{G}_c(x,y;k,m,n)(m+n)^{j-c}\left(1-x^k-y^m\right)^{j-c}\end{aligned}$$

dir (Özdemir vd. 2017).

İspat (4.1) bağıntısına umbral kalkülüs metotları uygulandığında,

$$\begin{aligned}1-x^k-y^m &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)\times\frac{z^j}{(1-x^k-y^m)^j\,j!}\\ &\quad-x^k\sum_{j=0}^{\infty}\left(\mathbb{G}(x,y;k,m,n)+1-x^k-y^m\right)^j\times\frac{z^j}{(1-x^k-y^m)^j\,j!}\\ &\quad-y^m\sum_{j=0}^{\infty}\left(\mathbb{G}(x,y;k,m,n)+(m+n)\left(1-x^k-y^m\right)\right)^j\\ &\quad\times\frac{z^j}{(1-x^k-y^m)^j\,j!}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\mathbb{G}^j(x,y;k,m,n)$ gösterimi ile ifade edilen $\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomudur. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafında yer alan z^j'nin katsayılarını karşılaştırırsak, istenilen sonucu elde edilir (Özdemir vd. 2017). $\square$

Bu ifadede k, m ve n 'nin her bir değeri için, yeni bir üreteç fonksiyonu elde edilir. Genel olarak, $\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıda verilmiştir (Özdemir vd. 2017).

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_0(x,y;k,m,n) &= 1,\\
\mathbb{G}_1(x,y;k,m,n) &= x^k+(m+n)\,y^m,\\
\mathbb{G}_2(x,y;k,m,n) &= \left[x^k+(m+n)\,y^m\right]^2-(m+n-1)^2\,x^ky^m+x^k+(m+n)^2\,y^m,\\
\mathbb{G}_3(x,y;k,m,n) &= \left[y^m(m+n)\right]^3+x^ky^{2m}\left[(2m+2n)^{\,2}-(2m+2n)+1\right]\\
&\quad -2x^ky^m\left((m+n)^3-(m+n)-(m+n)^2+1\right)\\
&\quad +x^{2k}y^m(m+n)\left[(m+n)^2-2(m+n)+4\right]\\
&\quad +y^m\left(m^3+n^3\right)+\left(3mn^2+3m^2n\right)y^m+x^k+x^{3k}
\end{aligned}$$

4.1.2. $\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomları ile Apostol-Bernoulli polinomları ve sayıları, Apostol-Euler polinomları ve sayıları, Genocchi polinomları arasındaki ilişkiler

Bu bölümde, $\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomlarının bazı özel durumları incelenmiştir. (4.1) denklemi ile verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak; $\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomları, Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları, Apostol-Euler sayıları ve polinomları, Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları içeren yeni eşitlikler ve bağıntılar verilmiştir.

Teorem 4.3 *$j\geq 1$ olmak üzere, $\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomları ve $\mathcal{B}_j(\lambda)$ Apostol-Bernoulli sayıları arasındaki ilişki*

$$\mathbb{G}_{j-1}(x,y;k,1,0)=-\frac{\left(1-x^k-y\right)^j}{j}\mathcal{B}_j\left(x^k+y\right) \tag{4.2}$$

eşitliği ile verilir (Özdemir vd. 2017).

İspat

$$\mathbb{F}(z;x,y;k,1,0)=-\frac{1-x^k-y}{z}F_{AB}(0,z;x^k+y)$$

fonksiyonel eşitliğinden yola çıkarak (2.57) ve (4.1) eşitliklerindeki üreteç fonksiyonlarının seri gösteriminden

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathbb{G}_j(x,y;k,1,0)}{\left(1-x^k-y\right)^j}\frac{z^j}{j!}=-\frac{1-x^k-y}{z}\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{B}_j\left(x^k+y\right)\frac{z^j}{j!}$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j\mathbb{G}_{j-1}(x,y;k,1,0)}{(1-x^k-y)^j}\frac{z^j}{j!} = -\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{B}_j\left(x^k+y\right)\frac{z^j}{j!}$$

sonucu elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{z^j}{j!}$'in katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç ede edilir. □

(4.2) eşitliği yardımı ile Apostol-Bernolli sayılarını kullanarak $\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomlarını hesaplayabiliriz (Özdemir vd. 2017).

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_0(x,y;k,1,0) &= -\left(1-x^k-y\right)\mathcal{B}_1\left(x^k+y\right) = 1,\\
\mathbb{G}_1(x,y;k,1,0) &= -\frac{\left(1-x^k-y\right)^2}{2}\mathcal{B}_2\left(x^k+y\right) = x^k+y,\\
\mathbb{G}_2(x,y;k,1,0) &= -\frac{\left(1-x^k-y\right)^3}{3}\mathcal{B}_3\left(x^k+y\right) = x^{2k}+2x^ky+x^k+y^2+y,\\
\mathbb{G}_3(x,y;k,1,0) &= -\frac{\left(1-x^k-y\right)^4}{4}\mathcal{B}_4\left(x^k+y\right)\\
&= \left(x^k+y\right)\left(\left(x^k+y\right)^2+4\left(x^k+y\right)+1\right),\\
\mathbb{G}_4(x,y;k,1,0) &= -\frac{\left(1-x^k-y\right)^5}{5}\mathcal{B}_5\left(x^k+y\right)\\
&= \left(x^k+y\right)\left(\left(x^k+y\right)^3+11\left(x^k+y\right)^2+11\left(x^k+y\right)+1\right).
\end{aligned}$$

Teorem 4.4 *$j \geq 0$ olmak üzere, $\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomları ve $\mathcal{B}_j(x,\lambda)$ Apostol-Bernoulli polinomları arasındaki ilişki*

$$\mathcal{B}_j\left(x,x^k\right) = -j\sum_{c=0}^{j-1}\binom{j-1}{c}\frac{x^{j-1-c}}{\left(1-x^k\right)^{c+1}}\mathbb{G}_c(x,0;k,m,n) \tag{4.3}$$

eşitliği ile verilir (Özdemir vd. 2017).

İspat $m \neq 0$ için

$$ze^{xz}\mathbb{F}(z;x,0;k,m,n) = \left(x^k-1\right)F_{AE}(x,z;x^k) \tag{4.4}$$

fonksiyonel eşitliğinde (2.60) ve (4.1) eşitliklerindeki üreteç fonksiyonlarının seri gösteriminden

$$z\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(xz)^j}{j!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathbb{G}_j\left(x,0;k,m,n\right)}{\left(1-x^k\right)^{j+1}}\frac{z^j}{j!}=-\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{B}_j\left(x,x^k\right)\frac{z^j}{j!}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafına Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}x^{j-c}\frac{\mathbb{G}_c\left(x,0;k,m,n\right)}{\left(1-x^k\right)^{c+1}}\frac{z^{j+1}}{j!}=-\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{B}_j\left(x,x^k\right)\frac{z^j}{j!}$$

sonucu elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{z^j}{j!}$'in katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç ede edilir. □

Sonuç 4.5 *(4.4) denklemi kullanılarak, (4.3) eşitliğinin bir diğer gösterimi*

$$\mathcal{B}_j\left(x,x^k\right)=-\sum_{c=1}^{j}\binom{j}{c}x^{j-c}\frac{c\,\mathbb{G}_{c-1}\left(x,0;k,m,n\right)}{\left(1-x^k\right)^c}$$

eşitliği ile verilebilir (Özdemir vd. 2017).

Teorem 4.6 $\mathbb{G}_j\left(x,y;k,m,n\right)$ *polinomları ile* $E_j\left(x\right)$ *Euler polinomları arasındaki ilişki*

$$E_j\left(x\right)=\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}x^{j-c}\frac{\mathbb{G}_c\left(-1,0;1,m,n\right)}{2^c}\tag{4.5}$$

eşitliği ile verilir (Özdemir vd. 2017).

İspat $m\neq 0$ için

$$\mathrm{e}^{xz}\mathbb{F}\left(z;-1,0;1,m,n\right)=F_{Eh}(x,z;1)$$

fonksiyonel eşitliğinde (2.61) ve (4.1) eşitliklerindeki üreteç fonksiyonlarının seri gösteriminden

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(xz)^j}{j!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathbb{G}_j\left(-1,0;1,m,n\right)}{2^j}\frac{z^j}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}E_j\left(x\right)\frac{z^j}{j!}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafına Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}x^{j-c}\frac{\mathbb{G}_c\left(-1,0;1,m,n\right)}{2^c}\frac{z^j}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}E_j\left(x\right)\frac{z^j}{j!}$$

sonucu elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{z^j}{j!}$'in katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç ede edilir. □

Teorem 4.7 *$\mathbb{G}_j(x,y;k,m,n)$ polinomları ile $G_j(x)$ Genocchi polinomları arasındaki ilişki*

$$G_j(x) = j\sum_{c=0}^{j-1}\binom{j-1}{c}x^{j-1-c}\frac{\mathbb{G}_c(-1,0;1,m,n)}{2^c} \tag{4.6}$$

eşitliği ile verilir (Özdemir vd. 2017).

İspat $m \neq 0$ için

$$z\mathrm{e}^{xz}\mathbb{F}(z;-1,0;1,m,n) = F_g(x;t)$$

fonksiyonel eşitliğinde (2.41) ve (4.1) eşitliklerindeki üreteç fonksiyonlarının seri gösteriminden

$$z\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(xz)^j}{j!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathbb{G}_j(-1,0;1,m,n)}{2^j}\frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}G_j(x)\frac{z^j}{j!}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafına Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}x^{j-c}\frac{\mathbb{G}_c(-1,0;1,m,n)}{2^c}\frac{z^{j+1}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}G_j(x)\frac{z^j}{j!}$$

sonucu elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{z^j}{j!}$'in katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç ede edilir. □

Sonuç 4.8 *(4.6) denklemi kullanılarak bir diğer ilişki*

$$G_j(x) = \sum_{c=1}^{j}\binom{j}{c}x^{j-c}\frac{c\,\mathbb{G}_{c-1}(-1,0;1,m,n)}{2^{c-1}}$$

eşitliği ile verilebilir (Özdemir vd. 2017).

4.2. Genelleştirilmiş Humbert Tipli Polinomlar

Bu bölümde, Humbert polinomlarının üreteç fonksiyonunu değiştirilerek yeni bir genelleştirme daha elde edilmiştir. Yeni polinom aileleri ve sayı dizileri için üreteç fonksiyonları verilmiştir. Bu üreteç fonksiyonlarının çeşitli özellikleri incelenmiş ve fonksiyonel eşitlikler elde edilmiştir. Bu fonksiyonlar kullanılarak Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomlarını, Apostol-Euler sayıları ve polinomlarını, yüksek mertebeden Bernoulli sayılarını, array polinomlarını ve diğer özel sayı dizileri ve polinom ailelerini içeren çeşitli denklemler, eşitlikler ve bağıntılar verilmiştir.

Tanım 4.9 *(2.45) denkleminde $t = e^z$ olarak alınırsa, yeni tanımlanan $Y_j(\lambda; a)$ sayılar ailesi için üreteç fonksiyonu*

$$F(z; \lambda, a) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j(\lambda, a) \frac{z^j}{j!} = \frac{1}{1 - a\lambda e^z + e^{az}} \tag{4.7}$$

eşitliği ile tanımlanır (Özdemir vd. 2017).

4.2.1. $Y_j(\lambda, a)$ Humbert tipli sayıların bazı özel değerlerini hesaplama

Bu bölümde, $Y_j(\lambda, a)$ sayılarının bazı özel değerlerini hesaplamak için bazı ilişkiler ve eşitlikler verilmiştir.

Sonuç 4.10 *(4.7) denkleminde $\lambda = 1$ ve $a = 2$ olarak alınırsa,*

$$\sum_{j=0}^{\infty} Y_j(1, 2) \frac{z^{j+2}}{j!} = \left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} B_j^{(2)} \frac{z^j}{j!}$$

eşitliği elde edilir (Özdemir vd. 2017). Bu ifadede, $B_j^{(2)}$ ikinci mertebeden Bernoulli sayılarını göstermek üzere

$$B_j^{(2)} = j(j-1) Y_{j-2}(1, 2)$$

elde edilir (Özdemir vd. 2017).

Sonuç 4.11 *(4.7) denkleminde $\beta > 1$ olmak üzere $\lambda = -\frac{1}{2}\left(\beta + \beta^{-1}\right)$ ve $a = 2$ olarak alınırsa,*

$$F\left(z; -\frac{1}{2}\left(\beta + \beta^{-1}\right), 2\right) = \frac{1}{4} F_{AE}(0, z; \beta) F_{AE}\left(0, z; \beta^{-1}\right)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte yer alan ifadelere karşılık gelen seri gösterimlerinden

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} Y_j\left(-\frac{1}{2}\left(\beta+\beta^{-1}\right),2\right)\frac{z^j}{j!} &= \frac{1}{4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{E}_j\left(0,\beta\right)\frac{z^j}{j!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{E}_j\left(0,\beta^{-1}\right)\frac{z^j}{j!}\right)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{c=0}^{j}\left(\begin{array}{c} j \\ c \end{array}\right)\mathcal{E}_c\left(0,\beta\right)\mathcal{E}_{j-c}\left(0,\beta^{-1}\right)\right)\frac{z^j}{j!}\end{aligned}$$

elde edilir (Özdemir vd. 2017).

Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{z^j}{j!}$'in katsayıları karşılaştırılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.12

$$Y_j\left(-\frac{1}{2}\left(\beta+\beta^{-1}\right),2\right)=\frac{1}{4}\left(\sum_{c=0}^{j}\left(\begin{array}{c} j \\ c \end{array}\right)\mathcal{E}_c\left(0,\beta\right)\mathcal{E}_{j-c}\left(0,\beta^{-1}\right)\right).$$

Sonuç 4.13 *(4.7) denkleminde $\lambda=-\frac{5}{4}$ ve $a=2$ olarak alınırsa,*

$$F\left(z;-\frac{5}{4},2\right)=F_{AE}\left(0,\mathrm{z};2\right)F_{AE}\left(0,z;\frac{1}{2}\right)$$

fonksiyonel eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten yola çıkarak,

$$\sum_{j=0}^{\infty}4Y_j\left(-\frac{5}{4},2\right)\frac{z^j}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{E}_j\left(0,2\right)\frac{z^j}{j!}\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{E}_j\left(0,\frac{1}{2}\right)\frac{z^j}{j!}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında Cauchy çarpım kuralı uygulanırsa,

$$\sum_{j=0}^{\infty}4Y_j\left(-\frac{5}{4},2\right)\frac{z^j}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}\mathcal{E}_c\left(0,2\right)\mathcal{E}_{j-c}\left(0,\frac{1}{2}\right)\frac{z^j}{j!}$$

sonucu elde edilir (Özdemir vd. 2017).

Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{z^j}{j!}$'in katsayıları karşılaştırılırsa aşağıdaki sonuç ede edilir.

Teorem 4.14

$$4Y_j\left(-\frac{5}{4},2\right)=\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}\mathcal{E}_c\left(0,2\right)\mathcal{E}_{j-c}\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

Sonuç 4.15 *(4.7) denkleminde $a=1$ olarak alırsak, $Y_j\left(\lambda,a\right)$ sayıları Apostol-Bernoulli sayılarına ve Apostol-Euler sayılarına indirgenir. Bu durum, (4.7) denkleminin*

$$zF\left(z;\lambda,1\right)=-F_{AB}(0,z;\lambda-1)$$

ve

$$2F\left(z;\lambda,1\right)=F_{AE}(0,z;1-\lambda)$$

fonksiyonel eşitliklere dönüşmesi ile ifade edilebilir (Özdemir vd. 2017).

Bu fonksiyonel eşitlikler (2.57), (2.60) ve (4.7) denklemleri ile birleştirildiğinde, $Y_j\left(\lambda,1\right)$ sayıları ile Apostol-Bernoulli sayıları ve Apostol-Euler sayıları arasındaki ilişki sırasıyla aşağıdaki sonuç ile verilebilir.

Teorem 4.16

$$Y_{j-1}\left(\lambda,1\right)=-\frac{1}{j}\mathcal{B}_j\left(\lambda-1\right)$$

ve

$$Y_j\left(\lambda,1\right)=\frac{1}{2}\mathcal{E}_j\left(1-\lambda\right)$$

dir (Özdemir vd. 2017).

4.2.2. $Y_j\left(\lambda,a\right)$ Humbert tipli sayılar için rekürans bağıntısı

(4.7) denklemine Umbral cebir metotları uygulanırsa, $Y_j\left(\lambda,a\right)$ sayıları için aşağıdaki rekürans bağıntısı verilir.

Teorem 4.17 $2 \neq a\lambda$ *için*

$$Y_0(\lambda, a) = \frac{1}{2 - a\lambda}$$

olsun. $j \geq 1$ *için*

$$Y_j(\lambda, a) = \sum_{c=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ c \end{pmatrix} \left(a\lambda - a^{j-c}\right) Y_c(\lambda, a) \tag{4.8}$$

dir (Özdemir vd. 2017).

İspat (4.7) denklemi kullanılarak,

$$\sum_{j=0}^{\infty} Y_j(\lambda, a) \frac{z^j}{j!} - a\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \sum_{j=0}^{\infty} Y_j(\lambda, a) \frac{z^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(az)^j}{j!} \sum_{j=0}^{\infty} Y_j(\lambda, a) \frac{z^j}{j!} = 1$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafında Cauchy çarpım kuralı uygulanırsa,

$$\sum_{j=0}^{\infty} Y_j(\lambda, a) \frac{z^j}{j!} - a\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{j} \binom{j}{c} Y_c(\lambda, a) \frac{z^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{j} \binom{j}{c} a^{j-c} Y_c(\lambda, a) \frac{z^j}{j!} = 1$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{z^j}{j!}$'in katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç ede edilir. □

(4.8) denklemi kullanılarak hesaplanan $Y_j(\lambda, a)$ sayılarının aldığı bazı değerler aşağıda verilmiştir (Özdemir vd. 2017).

$$\begin{aligned}
Y_0(\lambda, a) &= \frac{1}{2 - a\lambda} \\
Y_1(\lambda, a) &= \frac{a\lambda - a}{(2 - a\lambda)^2} \\
Y_2(\lambda, a) &= \frac{a^2\lambda^2 + a\lambda(2 - 4a + a^2)}{(2 - a\lambda)^3} \\
Y_3(\lambda, a) &= \frac{\begin{array}{c} a^3\lambda^3 + a^2\lambda^2(8 - 12a + 6a^2 - a^3) \\ + a\lambda(4 - 12a + 6a^2 - 2a^3) + 2a^3 \end{array}}{(2 - a\lambda)^4}
\end{aligned}$$

$$Y_4(\lambda, a) = \frac{\begin{array}{c} a^4\lambda^4 + a^3\lambda^3(22 - 32a + 24a^2 - 8a^3 + a^4) \\ +a^2\lambda^2(44 - 112a + 84a^2 - 40a^3 + 8a^4) \\ +a\lambda(8 - 32a + 24a^2 + 16a^3 - 8a^4) \end{array}}{(2 - a\lambda)^5}.$$

Not 17 *$Y_j(\lambda, a)$ sayılarının tamamı, a ve λ reel parametrelerinin rasyonel fonksiyonlarıdır. Ayrıca, $Y_j(2/a, a) = \infty$ dur. Bu yüzden $\lambda = 2/a$ değeri $Y_j(\lambda, a)$ rasyonel fonksiyonlarının bir kutup noktasıdır (Özdemir vd. 2017).*

4.3. $P_j(x; \lambda, a)$ Yeni Polinomlar Ailesi

Tanım 4.18 *(4.7) denklemi kullanılarak, yeni tanımlanan $P_j(x; \lambda, a)$ polinomlar ailesi için üreteç fonksiyonu $G(z; x; \lambda, a)$ ile gösterilmek üzere*

$$G(z; x; \lambda, a) = \mathrm{e}^{xz} F(z; \lambda, a)$$

veya

$$G(z; x; \lambda, a) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x; \lambda, a) \frac{z^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{xz}}{1 - a\lambda \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{az}} \tag{4.9}$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Özdemir vd. 2017).

(4.7) ve (4.9) denklemleri kullanılarak, $P_j(x; \lambda, a)$ polinomlarını hesaplamak için aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.19

$$P_j(x; \lambda, a) = \sum_{c=0}^{j} \binom{j}{c} x^{j-c} Y_c(\lambda, a)$$

dir (Özdemir vd. 2017).

İspat (4.9) denklemi kullanılarak,

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x;\lambda,a)\frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j\frac{z^j}{j!}\sum_{j=0}^{\infty} Y_j(\lambda,a)\frac{z^j}{j!}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x;\lambda,a)\frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}x^{j-c}Y_c(\lambda,a)\frac{z^j}{j!}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{z^j}{j!}$'in katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç ede edilir. □

$P_j(x;\lambda,a)$ polinomlarının aldığı bazı değerler aşağıda verilmiştir.

$$P_0(x;\lambda,a) = \frac{1}{2-a\lambda},$$

$$P_1(x;\lambda,a) = \frac{x(2-a\lambda)+a\lambda-a}{(2-a\lambda)^2},$$

$$P_2(x;\lambda,a) = \frac{\begin{array}{c} x^2\left(a^2\lambda^2-4a\lambda+4\right)+x\left(-2a^2\lambda^2+4a\lambda-4a+2a^2\lambda\right) \\ +a\lambda\left(a^2+a\lambda-4a+2\right)\end{array}}{(2-a\lambda)^3},$$

$$P_3(x;\lambda,a) = \frac{\begin{array}{c} x^3\left(-a^3\lambda^3+6a^2\lambda^2-12a\lambda+8\right) \\ +x^2\left(3a^3\lambda^3-3a^3\lambda^2-12a^2\lambda^2+12a^2\lambda+12a\lambda-12a\right) \\ +x\left(-3a^4\lambda^2-3a^3\lambda^3+12a^3\lambda^2+6a^3\lambda-24a^2\lambda+12a\lambda\right) \\ -a^5\lambda^2+6a^4\lambda^2-2a^4\lambda+a^3\lambda^3-12a^3\lambda^2 \\ +6a^3\lambda+2a^3+8a^2\lambda^2-12a^2\lambda+4a\lambda\end{array}}{(2-a\lambda)^4}.$$

(4.9) denkleminin x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x}G(z;x;\lambda,a) = zG(z;x;\lambda,a)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği kullanarak

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}P_j(x;\lambda,a)\frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} jP_{j-1}(x;\lambda,a)\frac{z^j}{j!}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{z^j}{j!}$'in katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.20

$$\frac{\partial}{\partial x}P_j\left(x;\lambda,a\right)=jP_{j-1}\left(x;\lambda,a\right)$$

dir (Özdemir vd. 2017).

(4.9) denklemi kullanılarak,

$$G\left(z;x+y;\lambda,a\right)=e^{yz}G\left(z;x;\lambda,a\right).$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin seri gösterimi ile

$$\sum_{j=0}^{\infty}P_j\left(x+y;\lambda,a\right)\frac{z^j}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}y^{j-c}P_c\left(x;\lambda,a\right)\frac{z^j}{j!}.$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{z^j}{j!}$'in katsayıları karşılaştırılırsa,

$$P_j\left(x+y;\lambda,a\right)=\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}y^{c}P_{j-c}\left(x;\lambda,a\right)$$

sonucu elde edilir. Bu eşitlikte $y=1$ alınırsa

$$P_j\left(x+1;\lambda,a\right)=\sum_{c=0}^{j}\binom{j}{c}P_{j-c}\left(x;\lambda,a\right)$$

sonucu ve $y=-1$ alınırsa

$$P_j\left(x-1;\lambda,a\right)=\sum_{c=0}^{j}(-1)^c\binom{j}{c}P_{j-c}\left(x;\lambda,a\right)$$

sonucu elde edilir (Özdemir vd. 2017). Yukarıdaki son iki eşitliği taraf tarafa toplarsak, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.21

$$P_j\left(x+1;\lambda,a\right)+P_j\left(x-1;\lambda,a\right)=\sum_{c=0}^{[j/2]}\binom{j}{c}P_{2(j-c)}\left(x;\lambda,a\right)$$

dir (Özdemir vd. 2017).

(4.9) denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\left\{1-(-a\lambda)^{j} j!F_{A}\left((a-1)z, j, j; \frac{1}{a\lambda}\right)\right\} G(z;x;\lambda,a) \\
=& \sum_{c=0}^{j-1}(-a\lambda)^{c} c!F_{A}\left((a-1)z, \frac{x+c}{a-1}, c; \frac{1}{a\lambda}\right)
\end{aligned}$$

fonksiyonel eşitliği elde edilir (Özdemir vd. 2017). Bu eşitlik (2.69) denklemi ile birleştirildiğinde,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\left\{P_{m}(x;\lambda,a)-(-a\lambda)^{n} n!\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}P_{m-j}(x;\lambda,a) S_{n}^{j}\left(n;\frac{1}{a\lambda}\right)(a-1)^{j}\right\}\frac{z^{m}}{m!} \\
=& \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{n}(-a\lambda)^{j} j!S_{j}^{m}\left(\frac{x+j}{a-1};\frac{1}{a\lambda}\right)(a-1)^{m}\right\}\frac{z^{m}}{m!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafında $\frac{z^m}{m!}$ 'in katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.22

$$\begin{aligned}
&P_{m}(x;\lambda,a)-(-a\lambda)^{n} n!\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}P_{m-j}(x;\lambda,a) S_{n}^{j}\left(n;\frac{1}{a\lambda}\right)(a-1)^{j-m} \\
=& \sum_{j=0}^{n}(-a\lambda)^{j} j!S_{j}^{m}\left(\frac{x+j}{a-1};\frac{1}{a\lambda}\right)
\end{aligned}$$

dir (Özdemir vd. 2017).

4.4. Teta Fonksiyonları

Teta fonksiyonları, karmaşık değişkenli özel fonksiyonlardır ve cebirsel geometri, karmaşık analiz, sayılar teorisi, modül uzayları, kuadratik formlar gibi teorileri içeren bir çok alan ile kuantum alan teorisinde de kullanılmaktadır (Almkvist 1986).

Teta fonksiyonlarının en yaygın biçimi, eliptik fonksiyonlar teorisinde ortaya çıkmaktadır. Karmaşık değişkenli yarı periyodik Teta fonksiyonları, ilgili eliptik fonksiyonun bir periyodunun eklenmesine ilişkin davranışı ifade eden bir özelliğe sahiptir (Almkvist 1986).

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, Teta fonksiyonları için

$$\varphi_1(x,q) = \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{[n+(1/2)]^2} e^{i(2n+1)\pi x}, \tag{4.10}$$

$$\varphi_2(x,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{[n+(1/2)]^2} e^{i(2n+1)\pi x}, \tag{4.11}$$

$$\varphi_3(x,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2n\pi x}, \tag{4.12}$$

$$\varphi_4(x,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{i2n\pi x} \tag{4.13}$$

eşitlikleri geçerlidir (Almkvist 1986).

(4.10) numaralı eşitlikte $q = e^{\pi i z}$ alınması durumunda

$$\varphi_1\left(\frac{x}{z}, -\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{z}{i}} e^{\left(\pi i x^2/z\right)} \varphi_1(x,z)$$

fonksiyonel denklemi elde edilir (Almkvist 1986).

(4.10) numaralı eşitlikte $q = e^{\pi i z}$ alınması durumunda, $v = -1, 0, 1$ değerleri için

$$\varphi_{3+v}\left(\frac{x}{z}, -\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} e^{\left(\pi i x^2/z\right)} \varphi_{3-v}(x,z)$$

fonksiyonel denklemleri elde edilir (Almkvist 1986).

Teta fonksiyonları için (4.10), (4.11), (4.12) ve (4.13) numaralı eşitliklerde $x = 0$ alınması durumunda

$$\varphi_v = \varphi_v(0,q)$$

ve

$$\varphi_v^{(n)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \varphi_v(0,q)$$

ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{i}\sum_n (-1)^n\, q^{[n+(1/2)]^2}, \\
\varphi_2 &= \sum_n q^{[n+(1/2)]^2}, \\
\varphi_3 &= \sum_n q^{n^2}, \\
\varphi_4 &= \sum_n (-1)^n\, q^{n^2}, \\
\varphi_3+\varphi_4 &= \sum_{n\ \text{çift}} q^{n^2}, \\
\varphi_1' &= \pi\sum_n (-1)^n\,(2n+1)\, q^{[n+(1/2)]^2}, \\
\varphi_1'' &= i\pi^2\sum_n (2n+1)^2\,(-1)^n\, q^{[n+(1/2)]^2}, \\
\varphi_2'' &= -\pi^2\sum_n (2n+1)^2\, q^{[n+(1/2)]^2}, \\
\varphi_3'' &= -4\pi^2\sum_n n^2 q^{n^2}, \\
\varphi_4'' &= -4\pi^2\sum_n (-1)^n\, n^2 q^{n^2}
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir (Almkvist 1986).

Şimdi Teta fonksiyonlarını içeren sonsuz toplamlar ile ilgili eşitliklerden bahsedelim.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

değerleri için $\alpha\beta = -1$ olmak üzere Fibonacci sayıları, F_n ve Lucas sayıları, L_n sırası ile

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir.

Öncelikli olarak Lucas sayılarını içeren bir sonsuz toplamı inceleyelim.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L_{2n}+2} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{2n}+\alpha^{-2n}+2}$$

ifadesinde $\alpha^{-1} = q$ olarak ele alınırsa

$$S = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}$$

elde edilir (Almkvist 1986). (Tannery ve MoIk 1972) referansında yer alan Teta fonksiyonları ile ilgili

$$\frac{\varphi_2''}{\varphi_2} = -\pi^2 \left(1 + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right)$$

eşitliği kullanarak

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L_{2n}+2} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{\pi^2}\frac{\varphi_2''}{\varphi_2}\right)$$

sonucu elde edilir (Almkvist 1986; Tannery ve MoIk 1972).

Şimdi Fibonacci sayıları ve Lucas sayıları ile Teta fonksiyonlarını içeren bazı toplam formüllerini verelim (Jacobi 1881; Hancock 1958; Tannery ve Molk 1972).

1. $q = \alpha^{-1}$ olarak ele alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{L_{2n}+2} &= \frac{1}{8}\left(\varphi_3^2\varphi_4^2 - 1\right), \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{L_{2n}} &= \frac{1}{4}\left(\varphi_3\varphi_4 - 1\right), \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{F_{2n}} &= \frac{\sqrt{5}}{256}\varphi_2^8, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{L_{2n-1}} &= \frac{1}{16}\varphi_2^4
\end{aligned}$$

sonuçları elde edilir (Almkvist 1986).

2. $q = \alpha^{-2}$ olarak ele alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}} &= \frac{\sqrt{5}}{4}\varphi_2^2, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{2n}} &= \frac{1}{4}\left(\varphi_3^2 - 1\right), \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{L_{2n}^2} &= \frac{1}{8}\left(\varphi_3^2\varphi_4^2 - 1\right), \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}^2} &= \frac{5}{24}\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\frac{\varphi_1''}{\varphi_1'}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L_{2n}^{2}} &= -\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{\pi^{2}}\frac{\varphi_{2}''}{\varphi_{2}}\right), \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L_{2n-1}^{2}} &= \frac{1}{8\pi^{2}}\frac{\varphi_{4}''}{\varphi_{4}}, \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{F_{2n}} &= \frac{\sqrt{5}}{8\pi^{2}}\frac{\varphi_{4}''}{\varphi_{4}}
\end{aligned}$$

sonuçları elde edilir (Almkvist 1986).

3. Yukarıda yer alan teta fonksiyonları ile ilişkili eşitliklerden yola çıkarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{F_{2n}} &= \sqrt{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L_{2n-1}^{2}}, \\
\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2n-1}}\right)^{2} &= 5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{L_{2n-1}}, \\
3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2n}^{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2n-1}^{2}} &= 5\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L_{2n-1}^{2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L_{2n}^{2}}\right)
\end{aligned}$$

sonuçları elde edilebilir (Almkvist 1986).

Bu eşitliklerden yola çıkarak, Teta fonksiyonları ile genelleştirilmiş çift değişkenli polinomlar arasındaki ilişkilerden bazıları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}\left(\mathcal{G}_{2n-1}(1,y;1,0,2)\right)^{2}} &= \frac{5}{6}\left(1+\frac{1}{\pi^{2}}\frac{\varphi_{1}''}{\varphi_{1}'}\right), \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\,\mathcal{G}_{2n-2}(1,y;1,0,2)} &= \frac{\sqrt{5}}{4}\varphi_{2}^{2}, \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{\mathcal{G}_{2n-1}(1,y;1,0,2)} &= \frac{\sqrt{5}}{128}\varphi_{2}^{8}, \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathcal{G}_{2n-1}(1,y;1,0,2)} &= \frac{\sqrt{5}}{4\pi^{2}}\frac{\varphi_{4}''}{\varphi_{4}}.
\end{aligned}$$

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, bazı özel sayı dizilerinin ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonlarından yararlanılarak çeşitli sayı dizileri ve polinom ailelerini kapsayan yeni üreteç fonksiyonu aileleri üzerinde çalışılmıştır ve önemli bağıntılar, eşitlikler, ilişkiler ve sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar, Fibonacci sayıları ve polinomları, Lucas sayıları ve polinomları, Jacobsthal sayılar ve polinomlar, Vieta-Fibonacci polinomları, Vieta-Lucas polinomları, Legendre polinomları, Chebyshev polinomları, Gegenbauer polinomları, Humbert polinomları, Apostol-Bernoulli polinomları, Apostol-Euler polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, Stirling sayıları, Dickson polinomları ve iyi bilinen diğer polinom aileleri ile ilişkilidir. Yeni tanımlanan üreteç fonksiyonu ailelerinin sonsuz seri uygulamaları, kısmi türev denklemleri, cebirsel ve kombinatorik uygulamaları verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde, en genel hali ile tez çalışmasının temel dayanak noktası olan genelleştirilmiş çift değişkenli polinom aileleri, yüksek mertebeden genelleştirilmiş çift değişkenli polinom aileleri ve genelleştirilmiş çift değişkenli Fibonacci tipli polinom aileleri tanıtılmıştır. Bu polinom ailelerine ait rekürans bağıntıları verilmiş, üreteç fonksiyonları karşılaştırılmış, diğer özel sayı dizileri ve polinom aileleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca yeni tanımlanan bu polinom ailelerine ait sonsuz seri uygulamaları ile birlikte türev formülleri de verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde, tez çalışmasından elde edilen diğer temel ve önemli sonuçlar incelenmiştir. Bu bölümde, Apostol-Tipli ve Humbert-Tipli polinomları içeren yeni özel sayı ve polinom aileleri tanıtılmıştır. Bu sayı ve polinom ailelerine ait üreteç fonksiyonları, rekürans bağıntıları ve çeşitli fonksiyonel eşitlikler verilmiştir.

Bu tezin materyal ve metot ile bulgular ve tartışma kısmında elde edilen bağıntılar, eşitlikler, ilişkiler ve sonuçlar analiz ve fonksiyonlar teorisi, sayılar teorisi, kombinatorik analiz, istatistik ve olasılık teorisi ile diğer bilim dallarına da önemli katkılar sağlayacaktır.

6. KAYNAKLAR

Almkvist, G. 1986. A solution to a tantalizing problem. *Fibonacci Quarterly*, 24 (4): 316-322.

Apostol, T.M. 1951. On the Lerch Zeta function. *Pacific J. Math.*, 1 (2): 161-167.

Bell, W.W. 1968. Special Function for Scientist and Engineer. D. Van Nostrand Company Ltd., London, 247 p.

Bona, M. 2007. Introduction to Enumerative Combinatorics. The McGraw-Hill Companies Inc., New York, 526 p.

Bayad, A., Şimşek, Y. and Srivastava, H.M. 2014. Some array type polynomials associated with special numbers and polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 244: 149-157.

Cakic, N.P. and Milovanovic, G.V. 2004. On generalized Stirling numbers and polynomials. *Math. Balkanica*, 18: 241-248.

Catalani, M. 2004. Some formulae for bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. arXiv:math/0406323v1 [math.CO].

Catalani, M. 2004. Identities for Fibonacci and Lucas polynomials derived from a book of Gould. arXiv:math/0407105v1 [math.CO].

Catalani, M. 2004. Generalized bivariate Fibonacci polynomials. arXiv:math/0211366v2 [math.CO].

Chak, A.M. 1970. A method for deriving differential equations of special functions. *The Yokohoma Math. J.*, 18: 59-65.

Charalambides, C.A. 2002. Enumerative Combinatorics. Chapman and Hall/Crc Press Company, New York, 619 p.

Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht and Boston, 343 p.

Cook, C.K. and Bacon, M.R. 2013. Some identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers satisfying higher order recurrence relations. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 41: 27-39.

Dere, R., Şimşek, Y. and Srivastava H.M. 2013. A unified presentation of three families of generalized Apostol type polynomials based upon the theory of the umbral calculus and the umbral algebra. *J. Number Theory*, 133: 3245-3263.

Doubilet, P., Rota, G.C. and Stanley, R. 1972. On the foundations of combinatorial theory (VI): The idea of generating function. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Proc., pp. 267-318, Univ. of Calif.

Djordjevic, G.B. 2009. Polynomials related to generalized Chebyshev polynomials. *Filomat*, 23 (3): 279-290.

Djordjevic, G.B. and Milovanovic, G.V. 2014. Special classes of polynomials. University of Niš, Faculty of Technology, Leskovac, 211 p.

Djordjevic, G.B. and Srivastava, H.M. 2005. Some generalizations of the incomplete Fibonacci and the incomplete Lucas polynomials. *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 11: 11-32.

Djordjevic, G.B. and Srivastava, H.M. 2005. Incomplete generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. *Math. Comput. Modelling*, 42: 1049-1056.

Djordjevic, G.B. and Srivastava, H.M. 2006. Some generalizations of certain sequences assoociated with the Fibonacci numbers. *J. Indonesian Math. Soc.*, 12: 99-112.

Falcon, S. and Plaza, A. 2009. On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives. *Chaos, Solitons and Fractals*, 39: 1005-1019.

Gao, S. and Mullen, G.L. 1994. Dickson polynomials and irreducible polynomials over finite fields. *J. Number Th.* , 49: 118-132.

Garland, T.H. 1987. Fascinating Fibonaccis: Mystery and Magic in Numbers. Palo Alto, CA : D. Seymour Publications, Better World Books, Mishawaka, U.S.A., 103 p.

Gegenbauer, L. 1884. Zur Theorie der Functionen $C_n^v(x)$. *Osterreichische Akademie der Wissenschaften Mathematisch Naturwissen Schaftliche Klasse Denkscriften*, 48: 293-316.

Gould, H.W. 1965. Inverse series relations and other expansions involving Humbert polynomials. *Duke Math. J.*, 32 (4): 697-712.

Grigaz, A. 2013. The Fibonacci Sequence, Its History, Significance and Manifestations in Nature. A Senior Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for graduation in the Honors Program, Liberty University, 35 p.

Gupta, V.K. and Panwar, Y.K. 2012. Common factors of generalized Fibonacci, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 1 (4): 377-382.

Hancock, H. 1958. Lectures on The Theory of Elliptic Functions. Dover Publications Inc., New York, 530 p.

Henry, W. and He, T. 2013. Characterization of (c)-Riordan arrays, Gegenbauer-Humbert-type polynomial sequences, and (c)-Bell polynomials. *J. Math. Res. Appl.*, 33 (5): 505-527.

Horadam, A.F. 2002. Vieta polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 40 (3): 223-232.

Horadam, A.F. 2003. Vieta convolutions and diagonal polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 41 (3): 240-252.

Horadam, A.F. 1985. Gegenbauer polynomials revisted. *Fibonacci Quarterly*, 23: 294-299.

Horadam, A.F. 1991. Genocchi numbers and polynomials. *Applications Fibonacci Numbers*, 4: 145-166.

Humbert, P. 1921. Some extensions of Pincherle's polynomials. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 39 (1): 21-24.

Hsu, L. C. 1992. On Stirling-type pairs and extended Gegenbauer-Humbert-Fibonacci polynomials. *Applications of Fibonacci numbers*, 5: 367-377.

Jacobi, C. 1881. Gesammelte Werke. Vol. I, Berlin, G. Reimer, 396 p.

Kim, T. 2008. On the q-Genocchi numbers and polynomials. *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 17: 9-15.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Pure and Applied Mathematics, vol. 51, John Wiley and Sons Inc., 652 p.

Koshy, T. 2014. Pell and Pell - Lucas Numbers with Applications. Springer, New York, 431 p.

Kruchinin, D.V. and Kruchinin, V.V. 2013. Explicit formulas for some generalized polynomials. *Appl. Math. Inf. Sci.*, 7 (5): 2083-2088.

Lidl, R., Mullen, G.L. and Turnwald, G. 1993. Dickson Polynomials. John Wiley andâĂŃ Sons, United States, New York, 207 p.

Lu, D.Q. and Srivastava, H.M. 2011. Some series identities involving the generalized Apostol type and related polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 62: 3591-2602.

Luo, Q.M. and Srivastava, H.M. 2011. Some generalizations of the Apostol-Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind. *Appl. Math. Comput.*, 217: 5702-5728.

Luo, Q.M., Srivastava, H.M. 2006. Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Comput. Math. Appl.*, 51: 631-642.

Luo, Q.M. 2004. On the Apostol-Bernoulli polynomials. *Cent. Eur. J. Math.*, 2 (4): 509-515.

Mezo, I. 2009. Several generating functions for second-order recurrence sequences. *Journal of Integer Sequences*, 12: Article 09.3.7.

Milovanovic, G.V. and Djordjevic, G. 1987. On some properties of Humbert's polynomials *Fibonacci Quart.*, 25: 356-360.

Özdemir, G. and Şimşek, Y. 2016. Generating functions for two-variable polynomials related to a family of Fibonacci type polynomials and numbers. *Filomat*, 30 (4): 969-975.

Özdemir, G. and Şimşek, Y. 2017. Identities and relations associated with Lucas and some special sequences. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1863 (1): 300003.

Özdemir, G. and Şimşek, Y. 2017. A note on generalized Humbert type numbers and polynomials. *AIP Conference Proceedings*, submitted.

Özdemir, G., Şimşek, Y. and Milovanovic G.V. 2017. Generating functions for special polynomials and numbers including Apostol-Type and Humbert-Type polynomials. *Mediterranean Journal of Math.*, 14 (117).

Özden, H., Şimşek, Y. and Srivastava, H.M. 2010. A unified presentation of the generating functions of the generalized Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Comput. Math. Appl.*, 60: 2779-2787.

Panwar, Y.K., Singh, B. and Gupta, V.K. 2013. Identities of common factors of generalized Fibonacci, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers. *Applied Mathematics and Physics*, 1 (4): 126-128.

Panwar, Y.K., Singh, B. and Gupta V.K. 2013. Generalized Fibonacci polynomials. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 1 (1): 43-47.

Pincherle, S. 1890. Una nuova extensione delle funzione spherich. *Mem. R. Accad. Bologna*, 5: 337-362.

Posamentier, A.S. and Lehmann, I. 2007. The (fabulous) Fibonacci Numbers. Prometheus Books, Amherst, New York, 385 p.

Prodinger, H. 2009. Sums of powers of Fibonacci polynomials. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 119 (5): 567-570.

Rainville, E.D. 1960. Special Functions. The Macmillan Company, New York, 365 p.

Ritu, A. and Singh, P.H. 2012. On certain generalized polynomial system associated with Humbert polynomials. *Sci., Ser. A, Math. Sci., (N.S.)*, 23: 31-44.

Rivlin, T.J. 1974. Chebyshev polynomials, From Approximation Theory to Algebra and Number Theory. John Wiley and Sons Inc., 249 p.

Sahanggamu, P. 2006. Generating functions and their applications. MIT Mathematics Department, 18.104 Term Paper.

Şimşek, Y. 2009. q-Hardy-Berndt type sums associated with q -Genocchi type zeta and q-l-functions. *Nonlinear Anal-Theor.*, 71 (12): 377-395.

Şimşek, Y. 2016. Computation methods for combinatorial sums and Euler-type numbers related to new families of numbers. *Math. Meth. Appl. Sci.*, doi:10.1002/mma.4143.

Şimşek, Y. 2013. Generating functions for generalized Stirling type numbers, array type polynomials, Eulerian type polynomials and their applications. *Fixed Point Theory Appl.*, 87: 343-355.

Spivey, M.Z. 2007. Combinatorial Sums and Finite Differences. *Discrete Mathematics*, 307 (24): 3130-3146.

Srivastava, H.M. and Manocha, H.L. 1984. A treatise on generating functions. Ellis Horwood Limited Publisher, Chichester, John Wiley and Sons, New York, 572 p.

Srivastava, H.M., Kim, T. and Şimşek Y. 2005. q-Bernoulli numbers and polynomials associated with multiple q-zeta functions and basic L-series. *Russ. J. Math. Phys.*, 12: 241-268.

Srivastava, H.M., Özarslan, M.A. and Kaanoğlu C. 2010. Some families of generating functions for a certain class of three-variable polynomials. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 21 (12): 885-896.

Srivastava, H.M. 2011. Some generalizations and basic (or q-) extensions of the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Appl. Math. Inf. Sci.*, 5: 390-444.

Srivastava, H.M. and Choi, J. 2012. Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York, 674 p.

Srivastava, H.M., Kurt, B. and Şimşek, Y. 2012. Some families of Genocchi type polynomials and their interpolation functions. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 23: 919-938.

Tannery, J. and Molk, J. 1972. Elements de la Theorie des Functions Elliptiques. Vols. I-IV. New York, Chelsea, 314 p.

Toscano, L. 1970. Generalizzazioni dei polinomi di Laguerre e dei polinomi attuariali. *Riv. Mat. Univ. Parma.*, 11 (2): 191-226.

Vetterling, W.T., Press W.H., Teukolsky, S.A. and Fllannery, B.P. 1988. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, ISBN 0-521-43108-5, 925 p.

Wilf, H.S. 1990. Generatingfunctionology. Academic Press, Inc., University of Pennsylvania, 226 p.

Anonymous 1: https://tr.wikipedia.org

Anonymous 2: http://mathworld.wolfram.com

ÖZGEÇMİŞ

GÜLŞAH ÖZDEMİR

ozdemir.gulsah@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Lisans:	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
2007-2012	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara
Yüksek Lisans:	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
2012-2013	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara
Doktora:	Akdeniz Üniversitesi
2013-2017	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Uzman:	ÖSYM
2016-devam	Ankara

ESERLER:

1- Özdemir, G., Şimşek, Y. and Milovanovic G.V. (2017). Generating functions for special polynomials and numbers including Apostol-Type and Humbert-Type polynomials. *Mediterranean Journal of Math.*, vol.14.

2- Özdemir, G. and Şimşek, Y. (2017). A note on generalized Humbert type numbers and polynomials.15th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, AIP Conference Proceedings, submitted.

3- Özdemir, G. and Şimşek, Y. (2017). Identities and relations associated with Lucas and some special sequences. 14th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, AIP Conference Proceedings, Vol. 1863 (1): 300003.

4- Özdemir, G. and Şimşek, Y. (2016). Generating functions for two-variable polynomials related to a family of Fibonacci type polynomials and numbers. *Filomat*, 30 (4): 969-975.

Ulusal ve uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Özdemir, G. and Şimşek, Y. (2017). A note on generalized Humbert type numbers and polynomials. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2017, 25 - 30 September 2017, Greece, AIP Conference Proceedings, submitted.

2- Özdemir, G. and Şimşek, Y. (2017). Identities and relations associated with Lucas and some special sequences. 14th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, the 5th Symposium on Generating Functionsof Special Numbers and Polynomials and their applications, ICNAAM 2016, 19 - 25 September 2016, Rhodes, Greece, AIP Conference Proceedings, Vol. 1863 (1): 300003.

3- Özdemir, G. and Şimşek, Y. (2016) Some identities of the Humbert and generalized Chebyshev polynomials, International Conference on Analysis and Its Applications, ICAA 2016, 12 - 15 July, 2016, Kırşehir, Turkey.

4- Özdemir, G. and Şimşek, Y. (2015). Çift değişkenli Fibonacci tipli polinomlar ailesi için üreteç fonksiyonu ve uygulamaları. XXVIII Ulusal Matetamtik Sempozyumu, Cebir ve Sayılar Teorisi, 7 - 9 Eylül, 2015, Antalya, Türkiye.

5- Özdemir, G. and Şimşek, Y. (2015) On generating functions for Jacobsthal and Fibonacci polynomials of higher order. The 28th International Conference of The Jangjeon Mathematical Society, 15 - 19 May, 2015, Antalya, Turkey.

6- Özdemir, G. and Kılıç, E. (2012) An another symmetric Fibonacci matrix - II, RAMA 8, 26 - 29 November, 2012, Algeria.