T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FLETT POTANSİYELLERİNİN TERSLERİNİN BELİRLENMESİNE İLİŞKİN KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRAL AİLELERİNİN L^p ANLAMINDA YAKINSAMA HIZI ÜZERİNE

Tuğçe ŞAHPAZ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FLETT POTANSİYELLERİNİN TERSLERİNİN BELİRLENMESİNE İLİŞKİN KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRAL AİLELERİNİN L^p ANLAMINDA YAKINSAMA HIZI ÜZERİNE

Tuğçe ŞAHPAZ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FLETT POTANSİYELLERİNİN TERSLERİNİN BELİRLENMESİNE İLİŞKİN KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRAL AİLELERİNİN L^p ANLAMINDA YAKINSAMA HIZI ÜZERİNE

Tuğçe ŞAHPAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 22/06/2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Melih ERYİĞİT (Danışman) M. Eryiğit

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

FLETT POTANSİYELLERİNİN TERSLERİNİN BELİRLENMESİNE İLİŞKİN KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRAL AİLELERİNİN L^p ANLAMINDA YAKINSAMA HIZI ÜZERİNE

Tuğçe ŞAHPAZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Melih ERYİĞİT

Haziran 2018, 25 sayfa

Bu tez çalışmasında, Poisson yarıgrubu tarafından üretilen kesikli hipersingüler aileler aracılığıyla, Flett potansiyellerinin tersi elde edildi. Daha sonra $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun L^p-normundaki pürüzsüzlük derecesi ile, bu ailelerin hiperisngüler integrallerinin yakınsama hızı arasındaki bağlantı oluşturuldu.

ANAHTAR KELİMELER: Flett potansiyelleri, Poisson yarıgrubu, ters belirleme formülü, yaklaşım.

JÜRİ: Doç. Dr. Melih ERYİĞİT
Prof. Dr. İlham ALİYEV
Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

ON THE RATE OF L^p CONVERGENCE OF THE TRUNCATED HYPERSINGULAR INTEGRAL RELATED TO THE INVERSE OF FLETT POTENTIALS

Tuğçe ŞAHPAZ

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Melih ERYİĞİT
June 2018, 25 pages

In this thesis, we obtaim the inversion formula for the classical Flett potentials by means of the families of truncated hypersingular generated by the Poisson semigroup. Then the connection between the order of L^p-smoothness of given $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ function and the rate of convergence of these families of hypersingular integrals is obtained.

KEYWORDS: Flett potentials, Poisson semigroup, approximation, inverse formula.

COMMITTEE: Assoc. Prof.Dr. Melih ERYİĞİT
Prof. Dr. İlham ALİYEV
Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Bir fonksiyonun pürüzsüzlüğünü yorumlamanın ve ölçmenin birçok yolu vardır. Temel bir gerçekse pürüzlüğü ölçmenin en önemli araçlarından biri Fourier dönüşümüdür. Diğer taraftan Fourier dönüşümü dilinde bir fonksiyonun pürüzsüzlüğünü Laplasyan ve Potansiyel tipli operatörler kullanılarak ölçmek Modern Fourier analizde önemli tekniklerden biridir.

Potansiyeller teorisinin en önemli problemlerinden biri, potansiyel tipli integral operatörlerinin terslerini bulmakla ilgilidir.

Bu tez çalışmasında temel olarak, Klasik Flett potansiyellerinin terslerini belirlemek için, Poisson yarıgrubu yardımıyla oluşturulan "kesikli hipersingüler integral aileleri" oluşturulmuş ve bu ailelerin, Flett potansiyelinin etki ettiği $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun L^p-pürüzsüzlük derecesine bağlı olarak, ε parametresi sıfıra giderken L^p-normundaki yakınsama hızları incelenmiştir.

Bu çalışma teorik nitelikte olup, Lipschitz, Sobolev ve Hardy uzaylarında çalışan Matematikçiler için yardımcı kaynak olabilir.

Son olarak bu tezin temel sonuçlarından biri olan Teorem 3.21'in ispatında ve kurgulanmasında büyük emeği geçen Prof. Dr. İlham ALİYEV'e çok teşekkür ederim ve bu tez çalışması boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Melih ERYİĞİT'e ve bölümümüzün diğer hocalarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "FLETT POTANSİYELLERİNİN TERSLERİNİN BELİRLENMESİNE İLİŞKİN KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRAL AİLELERİNİN L^p ANLAMINDA YAKINSAMA HIZI ÜZERİNE" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

22/06/2018

Tuğçe ŞAHPAZ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$L^1_{\ell oc}$	: Lokal integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
$\mathfrak{M}$	: Hardy-Littlewood Maksimal operatörü
Γ	: Gamma fonksiyonu
$f^{\wedge}$	: f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$\mathfrak{S}$	: Schwarz uzayı
$\mathbb{R}^n$	: $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, ..., x_n)\ ;\ x_k \in \mathbb{R}\}$ (n boyutlu Öklid uzayı)
$\lvert x\rvert$	: $\lvert x\rvert = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ (x vektörünün normu)
$L_p(\mathbb{R}^n)$	: Lebesgue uzayları
$I^\alpha f$	: f 'in α mertebeden Riesz potansiyeli
$J^\alpha f$	: f 'in α mertebeden Bessel potansiyeli
Δ	: $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2}{dx_k^2}$ (Laplace operatörü)
$h.h.x$	: hemen hemen her x
w_n	: n-boyutlu kürenin yüzey alanı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$B(x, \delta)$	: x merkezli δ yarıçaplı yuvar

1. GİRİŞ

Modern Fourier analizin önemli problemlerinden biri, verilen bir fonksiyonun pürüzsüzlük derecesini bu fonksiyonun türevlerinin integrallenebilirliği cinsinden ölçmektir. Mesela Sobolev uzayları tamamen bu amaca hizmet etmektedir. Bu bağlamda bazı diferansiyel operatörlerin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanan potansiyel tipli integral operatörler, Riesz potansiyelleri, Bessel potansiyelleri vb. , bu tür uzaylarda oldukça önemli bir araç olarak kullanılmaktadır.

Riesz potansiyelleri Fourier dönüşümü dilinde

$$\left(I^{\alpha}f\right)^{\wedge}(x) = |x|^{-\alpha}\hat{f}(x),\ x\epsilon R^{n},\ \alpha > 0 \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır ve $(-\Delta) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{d^2}{dx_k^2}$ eksi-Laplace diferansiyel operatörünün negatif kesirsel kuvveti olarak yorumlanır (Stein 1970). (1.1) eşitliğinden yararlanarak I^{α}-Riesz potansiyelleriinin aşağıdaki integral gösterimlerini elde edebiliriz, Stein (1970),Flett (1971), Samko vd(1993):

$$\left(I^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int_{R^n}|y|^{\alpha-n}f(x-y)dy,\ 0<\alpha<n$$

Burada $\gamma_n(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}}2^{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{(n-\alpha)}{2})}$dır. $J^{\alpha}f$ simgesiyle göstereceğimiz Bessel potansiyelleri ise, Fourier dönüşümü dilinde

$$(J^{\alpha}f)^{\wedge} = (1+|x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\hat{f}(x),\ x\in\mathbb{R}^n,\ \alpha>0 \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır ve $I-$birim operatör, Δ- Laplasyan olmak üzere, $(I-\Delta)$ operatörünün "*negatif kesirsel kuvveti* olarak yorumlanır. Aynı şekilde (1.2)ten yararlanarak J^{α}-Bessel potansiyellerinin aşağıdakidaki integral gösterimini elde edebiliriz,

$$(J^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\beta_n(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n}G_{\alpha}(y)f(x-y)dy,\ \alpha>0$$

Burada G_{α}-çekirdekleri ve $\beta_n(\alpha)$-katsayıları şöyle tanımlanmıştır:

$$G_{\alpha}(y) = \int_0^{\infty}e^{\frac{-\xi-|y|^2}{4\xi}}\xi^{\frac{\alpha-n}{2}-1}d\xi, \quad \beta_n(\alpha) = 2^n\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})$$

Riesz ve Bessel potansiyellerinin çekirdeklerinin lokal davranışları, $|y|\to 0$ için aynı olmakla beraber, Riesz potansiyelinin çekirdeğinin, yani, $|y|^{\alpha-n}$ fonksiyonunun sonsuzlukta davranışı (azalma hızı), α-arttıkça, Bessel potansiyellerinin çekirdeğiden, yani, $G_\alpha(y)$ fonksiyonundan daha kötüdür. Flett (1971) tarafından Riesz ve Bessel potansiyellerinin davranışlarının arasında bir özellik sergileyen, yeni bir kesirsel integral operatör tanıtılmıştır.

Flett potansiyelleri olarak adlandırılan bu integral dönüşüm Fourier dönüşümü dilinde

$$(\mathcal{F}^\alpha f)^\wedge(x) = (1+|x|)^{-\alpha}\hat{f}(x)\ ,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \alpha>0$$

şeklinde tanımlanır ve $\delta = (-\Delta)^{1/2}$ olmak üzere, $(I+\delta)$ operatörünün negatif kesirsel kuvveti olarak yorumlanır (Δ-Laplace operatörüdür).

Modern Fourier analizde potansiyel tipli operatörlerin terslerini belirleyen formüller elde etmek önemli problemlerden biridir. Calderon (1956); Stein (1961); Wheeden (1968); Lizorkin (1970); Samko (1984, 1993); Rubin (1996) ve ismini sayamadığımız birçok matematikçi tarafından tanıtılan hipersingüler integral teknikleri bu amaç için oldukça güçlü araçlardır. Son zamanlarda yeni bir yaklaşımla Rubin (1986, 1996) ve Aliev vd (2001, 2002) tarafından, dalgacık dönüşümler kullanılarak potansiyel tipli operatörlerin terslerini belirleme formülleri elde edilmiştir. (Ayrıca, farklı dalgaşık dönüşümlerinin tanıtıldığı, Aliev vd. 2013; Aliev ve Eryigit 2013; Aliev ve Cobanoglu 2014 kaynaklarınada da bakabilirsiniz).

Rubin (2001) ve Rubin (1996, sf. 222-224) kaynaklarında, Boris Rubin tarafıdan Poisson yarıgrubu kullanılarak üretilen ve D_ε^α ve $\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha$ simgeleriyle gösterilen, bazı "*kesiksel integral"* aileleri, tanıtılmış ayrıca $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları ve $\alpha > 0$ parametreleri üzerine konulan bazı koşullar altında I^α-Riesz potansiyelleri ve J^α-Bessel potansiyelleri olmak üzere, $D_\varepsilon^\alpha I^\alpha\varphi$ ve $\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha J^\alpha\varphi$ ifadelerinin $\varepsilon\to 0^+$ için φ fonksiyonuna noktasal (*h.h.x*) ve L^p-normunda yakınsadığı kanıtlanmıştır.

Bu tez çalışmasında ilk olarak Flett potansiyellerinin terslerini belirlemek için; Poisson-yarıgrubu yardımıyla, bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı olan, kesikli hipersingüler integral ailesi tanıtılmıştır. Daha sonra $L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1\le p<\infty)$ uzayından alınmış bir φ fonksiyonunun Flett potansiyeli ile, ε-parametresine bağlı "*kesikli"* hipersingüler integral operatörler ailesinin kompozisyonu oluşturulmuş ve $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ için bu $D_\varepsilon^\alpha\mathcal{F}^\alpha\varphi$ ifadesinin noktasal *(h.h.x)* ve L^p-normunda $\varphi\in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna yakınsadığı kanıtlanmıştır.

Tezde, son olarak, bir $\varphi\in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için L^p-pürüzsüzlük derecesiyle, $\varepsilon \longrightarrow$

0^+ için $D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}^\alpha \varphi$ ailesinin L^p normunda $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna yakınsama hızı arasında bazı bağıntılar elde edilmiştir.

Şunu da önemli bir not olarak belirtelim ki, tezimize ilişkin benzer çalışmalar, Riesz ve Bessel potansiyelleri için Aliev ve Eryiğit (2013) ve Aliev ve Çobanoğlu (2014) tarafından çalışılmıştır.

Tez çalışması, giriş ve kaynaklar bölümü dışında üç kısımdan oluşmaktadır;

Birinci kısımda tez çalışması boyunca kullanılacak notasyonlar, teoremler ve lemmalar ifade edilip, önemli görülen bazı teoremler, okuyucuya kolaylık olması açısından ispat edilmiştir.

İkinci kısım ise iki alt bölümden oluşmaktadır: Birinci bölümde Flett potansiyellerinin terslerinin bulmak için Poisson yarıgrubu yardımıyla "*kesikli*" hipersingüler integral ailesi kurulmuş ve bu kesikli hipersingüler integral ailesi yardımıyla, $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ uzayından alınmış bir fonksiyon Flett potansiyelinin ters belirleme formülü elde edilmiştir.

İkinci alt bölümde ise $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için "L^p-pürüzsüzlük derecesi" kavramı tanıtılmış ve $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun L^p-pürüzsüzlük derecesiyle, $\varepsilon \to 0^+$ için $D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}^\alpha \varphi$ ailesinin L^p formunda φ fonksiyonuna yakınsama hızı arasında bağıntılar elde edilmiştir.

Tezin sonuçlar olarak adlandırılan üçüncü kısmında ise, tez çalışması boyunca elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu tez çalışması boyunca n-boyutlu Öklid uzayını $\mathbb{R}^n$ ile göstereceğiz. Ayrıca $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ noktasının normunu $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ şeklinde tanımlayacağız.

$n \in \mathbb{Z}^+$bir pozitif tam sayı olmak üzere, $\mathbb{Z}_n^+$ ile negatif olmayan sıralı tamsayı n-lilerinin oluşturduğu kümeyi göstereceğiz ve $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_n^+$ için $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ şeklinde tanımlayacağız.

$\mathbb{Z}_n^+$ kümesinin elemanları multi-index olarak adlandırılır. Eğer $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ bir multi-index ve $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ise, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$ şeklinde tanımlanır.

Tez çalışması boyunca, aksi belirtilmediği sürece, tüm fonksiyonlar kompleks değerli olacaktır.

Eğer $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ bir multi-indeks ise

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n} f$$

şeklinde yazılır. Burada $\frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i} f$ gösterimi f fonksiyonunun i-inci değişken olan x_i' ye göre α_i-mertebeden kısmi türevi olarak tanımlanır.

f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir olsun, f fonksiyonunun $L^p(\mathbb{R}^n)$ normu

$$\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır ve $\|f\|_p < \infty$ özelliğini sağlayan tüm ölçülebilir fonksiyonlar kümesi $L^p(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Bir f fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y).e^{-ix.y} dy$$

şeklinde tanımlanır, burada $x.y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ şeklindedir.

$U \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer f fonksiyonu $U \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde tanımlı ve $|\alpha| \leq k$ eşitsizliğini sağlayan her α-multi indeksi $\partial^\alpha f$ kısmi türevleri var ve sürekli ise, o zaman f fonksiyonu $C^k(U)$ kümesindedir diyeceğiz ve $C^\infty(U) = \cap_{n=1}^{\infty} C^k(U)$ şeklinde tanımlayacağız.

Ayrıca, $E \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $C_c^\infty(E)$ notasyonu ile kompakt dayanıklı ve dayanağı E kümesi tarafından kapsanan $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait fonksiyonlar uzayını göstereceğiz.

α bir multi-indeks ve $N \in \mathbb{Z}^+$ olsun, eğer

$$\|f\|_{N,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f|$$

şeklinde tanımlarsak,

$$\mathfrak{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{N,\alpha} < \infty, \ her\ N,\ \alpha \text{ için} \right\}$$

kümesi Schwartz uzayı olarak adlandırılır. Bu uzaya ait fonksiyonlar bulmak zor değildir: Örneğin, $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-|x|^2}$, ($\alpha$ multi-indeks) bu uzaya aittir.

Önerme 2.1. *(Folland 1999) $\mathfrak{S}$ kümesi $\|.\|_{N,\alpha}$-yarınormu ile oluşturulan topoloji ile birlikte bir Frēchet uzayıdır.*

Şimdi tez boyunca kullanılacak olan bazı özel fonksiyonlar, özel dönüşümler ve bunlara ait önemli özellikleri verelim.

Tanım 2.2. *(Samko vd 1993, Rubin 1996) $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ olmak üzere, Gamma fonksiyonu*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds$$

şeklinde tanımlanır.

Gamma fonksiyonunun temel özelliklerini aşağıda verelim:

1) $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n!$ dir.

2) $\Gamma(z+1) = z.\Gamma(z)$ dir.

3) $\ln(\Gamma)$ fonksiyonu konvekstir.

4) $\Gamma(z).\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, $z \in \mathbb{C}$ eşitliği sağlanır.

5) Gamma fonksiyon özdeşliği olarak bilinen çok faydalı bir eşitlik aşağıdaki gibidir: $a, t > 0$ için

$$t^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-ts} s^a \frac{ds}{s} \tag{2.3}$$

Tanım 2.3. *(Stein 1970, Rubin 1996) $f \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için, aşağıdaki fonksiyon*

$$\mathfrak{M}(f)(x) = \sup_{\delta \rangle 0} \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} |f(y)|\, dy \tag{2.4}$$

f fonksiyonunun Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu olarak adlandırılır. Burada, $B(x,\delta)$ ile $x \in \mathbb{R}^n$ merkezli ve $\delta > 0$ yarıçaplı yuvar gösterilmiştir.

Teorem 2.4. *(Garafakos 2008) Hardy-Littlewood Maksimal fonksiyonu zayıf (1,1) tiplidir; yani;*

$$\forall\alpha > 0 \text{ için } |x \in \mathbb{R}^n : (\mathfrak{M}f)(x) > \alpha| \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_{L^1}$$

eşitsizliği sağlanır.Burada $|E|$ *ile,* $E \subset \mathbb{R}^n$ *kümesinin Lebesgue ölçümü gösterilmiştir. Ayrıca* $1 < p < \infty$ *için güçlü* (p,p) *tiplidir, yani öyle* $c_{p,n} > 0$ *sabiti vardır ki*

$$\|\mathfrak{M}f\|_{L^p} \leq c_{p,n} \|f\|_{L^p}$$

eşitsizliği sağlanır.

Maksimal fonksiyon operatörünün önemi, analizdeki birçok operatörü sınırlandırmasından kaynaklanmaktadır. Aşağıda, bir operatörler ailesinin noktasal yakınsamasını, sınırlandırma özelliğini kullanarak, garanti eden bir teorem verelim.

Teorem 2.5. *(Stein ve Weiess 1971)* $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *ailesi* $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ *uzayından* $\mathbb{R}^n$*'de ölçülebilir fonksiyonlar uzayına doğrusal operatörler olsun.* T^**-maximal operatörü*

$$(T^*h)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |(T_\varepsilon h)(x)|,\, x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlayalım ve $c > 0$, $q \geq 1$ *reel sayıları için*

$$|\{x : |(T^*h)(x)| > t\}| \leq (\frac{c.\|f\|_p}{t})^q$$

eşitsizliğinin her $t > 0$ *ve her* $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda* $D \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ *yoğun altkümesindeki her* $g \in D$ *için* $\lim_{\varepsilon>0}(T_\varepsilon g)(x)$ *limiti h.h.x için var ve sonlu ise, o zaman her* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *için* $\lim\limits_{\varepsilon>0}(T_\varepsilon f)(x)$ *limiti* $h.h.x$ *için var ve sonludur.*

L^p uzaylarının uygulamalarında eşitsizlikler köşe taşlarını oluşturur. Bunlardan en temel ikisi Hölder ve Minkowski eşitsizlikleridir. Şimdi bu eşitsizlikleri ifade edelim.

Teorem 2.6. *(Hölder eşitsizliği, Follond 1999)* $1 < p < \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *olsun. O zaman* f *ve* g *ölçülebilir fonksiyonları için*

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{2.5}$$

eşitsizlği sağlanır. Özel olarak (2.5)*'te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı* α *ve* β *sabitleri için,* $\alpha\,|f|^p = \beta\,|g|^q$ *eşitliğinin h.h.x için sağlanmasıdır.*

Teorem 2.7. *(Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği, Follond 1999)* $\varphi(x, y)$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$ *üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. O zaman* $1 \leq p \leq \infty$ *için*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x,\ y) dy \right\|_{L^p(\mathbb{R}_x^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^m} \|\varphi(.,\ y)\|_{L^p(\mathbb{R}_x^n)}\, dy \tag{2.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıda bir fonsiyonun Fourier dönüşümünün tanımı ve bu dönüşümün temel özelliklerini veren teoremi ispatsız ifade ediyoruz:

Tanım 2.8. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *fonksiyonunun Fourier dönüşümü*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x).e^{-i\xi.x} dx$$

şeklinde tanımlanır.

Buradaki $\xi.x$ iç çarpımını daha önce tanımlamıştık.

Teorem 2.9. *(Follond 1999)* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *olsun.*

(a) $(\alpha f + \beta g)^\wedge(\xi) = \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*(Doğrusallık)*

(b) $\left\| \hat{f} \right\|_\infty \leq \|f\|_1$ *ve* $\hat{f}$ *fonksiyonu süreklidir.*

(c) $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ *(Riemann-Lebesgue)*

(d) $(f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi).\hat{g}(\xi)$

(e) $(f(x-y))^\wedge(\xi) = e^{-i\xi.y} \hat{f}(\xi)$

(f) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *tersinir bir doğrusal dönüşüm ve* $S = (T')^{-1}$, T *nin tersinin devriği olsun, o zaman* $[f(T(x))]^\wedge(\xi) = |\det T|^{-1} (\hat{f}(S(\xi))$ *dir.*

(g) (Çarpım formülü) f *ve* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *olsun. O zaman*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x).g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x).\hat{g}(x) dx$$

eşitliği sağlanır.

2.1. Flett potansiyelleri ve Poisson İntergrali ile Bağlantıları

Tanım 2.10. *Flett potansiyelleri olarak adlandırılan dönüşüm, Fourier dönüşümü dilinde*

$$(\mathcal{F}^\alpha f)^\wedge(x) = (1 + |x|)^{-\alpha} \hat{f}(x)\,,\ x \in \mathbb{R}^n\,,\ \alpha > 0 \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır ve bu dönüşümün açık ifadesi

$$(\mathcal{F}^{\alpha} f)(x) = (\Phi_{\alpha} * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\alpha}(y) f(x-y) dy \tag{2.8}$$

şeklindedir.

Burada, $\Phi_{\alpha}(y)$ çekirdeği

$$\Phi_{\alpha}(y) = \frac{1}{\lambda_n(\alpha)} |y|^{\alpha - n} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha} e^{-t|y|}}{(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \lambda_n(\alpha) = \pi^{\frac{(n+1)}{2}} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\frac{(n+1)}{2})} \tag{2.9}$$

şeklindedir.

Öncelikle, Φ_{α}-çekirdeğinin temel özelliklerini ifade edelim ve bu özelliklerden bazılarını ispatlayalım.

Teorem 2.11. *(Samko vd.1993; Flett 1994)*

(i) *Her* $\alpha > 0$ *için* $\Phi_{\alpha}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ve* $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\alpha}(x) dx = 1$ *dir.*

(ii) $\hat{\Phi}_{\alpha}(x) = (1+|x|)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

(iii) $\alpha > 0$ *olsun. O zaman büyük* $|x|$ *ler için*

$$\Phi_{\alpha}(x) \leq C_{n,\alpha} |x|^{-n-1}$$

eşitsizlği sağlanır.

(iv) $0 < \alpha < n$ *olmak üzere*

$$\Phi_{\alpha}(x) \sim C_n(\alpha) |x|^{\alpha - n}, \ |x| \to 0$$

ve $\alpha = n$ *olduğunda*

$$\Phi_{\alpha}(x) \sim C_n \ln \frac{1}{|x|}, \ |x| \to 0$$

asimptotik özellikleri sağlanır.

(v) *Eğer* $\alpha > n$ *ise, o zaman* $\Phi_{\alpha}(x)$ *çekirdeği tüm* $\mathbb{R}^n$ *de sürekli ve pozitiftir, yani* $\Phi_{\alpha}(x) > 0, \ (x \in \mathbb{R}^n, \alpha > n)$.

Eğer $0 < \alpha \leq n$ *ise, o zaman* $\Phi_{\alpha}(x)$ *çekirdeği* $\mathbb{R}^n - \{0\}$ *üzerinde süreklidir ve bu küme üzerinde,* $\Phi_{\alpha}(x) > 0$ *dır.*

(vi) Φ_{α}*-çekirdeği aşağıdaki yarıgrup özelliğini sağlar:*

$$\Phi_{\alpha} * \Phi_{\beta} = \Phi_{\alpha+\beta}, \ (\alpha > 0, \ \beta > 0)$$

İspat (i)-nin ispatı: $\alpha > 0$ verilsin, bu durumda

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\alpha(x)\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_\alpha(x)|\, dx = (\Phi_\alpha > 0) \text{ olduğu için} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))}{\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-n} \left(\int_0^\infty \frac{t^\alpha e^{-t|x|}}{(1+t^2)(\frac{n+1}{2})} dt\right) dt = \\
&= \frac{1}{\lambda_n(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(1+t^2)(\frac{n+1}{2})} dt \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-n}\, e^{-t|x|} dx \\
&\quad \text{(kutupsal koordinatlara geçersek)} \\
&= \frac{1}{\lambda_n(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(1+t^2)(\frac{n+1}{2})} dt \left(\int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{\alpha-n} e^{-tr}.r^{n-1} dr d\theta \right) = \\
&= \frac{1}{\lambda_n(\alpha)} \omega_n \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(1+t^2)(\frac{n+1}{2})} dt. \int_0^\infty r^{\alpha-1} e^{-tr} dr = \\
&\quad \text{(2.3) } \Gamma\text{-fonksiyon özdesliğinden,} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda_n(\alpha)} \omega_n \int_0^\infty . \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}}} dt = 1
\end{aligned}$$

Teoremin (ii)- iddasının ispatını şöyle yapacağız: her $\varphi \in \mathfrak{S}$ için ,yani Schwartz uzayından olan her φ test fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x).\hat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x).\varphi(x) dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, o zaman f fonksiyonunun Fourier dönüşümü $f^\wedge$fonksiyonudur denir. Bu bağlamda, $t > 0$ olmak üzere $f(x) = e^{-t|x|}$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|x|} \hat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C_n t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{(n+1)}{2}}} \varphi(x) dx \tag{2.10}$$

eşitliği her $\varphi \in \mathfrak{S}$ için sağlanacaktır.

Şimdi (2.10) eşitliğinin her iki yanını $t^{\alpha-1}e^{-t}, \alpha > 0$ ile çarpalım,

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^{\alpha-1} e^{-t}.e^{-t|x|} \hat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C_n t.e^{-t}.t^{\alpha-1}}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{(n+1)}{2}}} \varphi(x) dx$$

eşitliği her $t > 0$ ve $\alpha > 1$ için sağlanır. O zaman eşitliğin her iki tarafını $[0, \infty)$ aralığında t'ye göre integralleyelim,

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t} \hat{\varphi}(x) dx \right) dt = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{C_n t.e^{-t}.t^\alpha}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{(n+1)}{2}}} \varphi(x) dx \right) dt \tag{2.11}$$

Şimdi (2.11) eşitliğinin her iki tarafına Fubini teoremini uygulayalım,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty e^{-t} e^{-t|x|} t^{\alpha-1} dt \right) \hat{\varphi}(x) dx$$

(2.3) Gamma fonksiyon Özdeşliğinden

$$\begin{aligned}
&= \Gamma(\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x)dx = \qquad (2.12)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x).(C_n\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}te^{-t}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{(n+1)}{2}}}dt)dx\\
&\iff \int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x).\Phi_\alpha(x)dx
\end{aligned}$$

(2.12) eşitliğinden ve $\Phi_\alpha(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ olmasından

$$(\Phi_\alpha(x))^\wedge(x) = (1+|x|)^{-\alpha}$$

dir.

Son olarak teoremde (iii) önermesini ispatlıyoruz:

(iii)'nin ispatı:

$$G_\alpha(x) = \frac{C_n}{\Gamma(\alpha)}|x|^{\alpha-n}\int_0^\infty \frac{t^\alpha e^{-t|x|}}{(1+t^2)^{\frac{(n+1)}{2}}}dt$$

($t=\frac{s}{|x|}$ değişken değiştirmesi)

$$\begin{aligned}
&= \frac{C_n}{\Gamma(\alpha)}|x|^{\alpha-n}\int_0^\infty \frac{s^\alpha.e^{-s}}{|x|^{\alpha+1}(1+\frac{s^2}{|x|^2})^{\frac{(n+1)}{2}}}ds =\\
&= \frac{C_n}{\Gamma(\alpha)}|x|^{-n-1}\int_0^\infty \frac{s^\alpha.e^{-s}.|x|^{n+1}}{(|x|^2+s^2)^{\frac{(n+1)}{2}}}ds \le C_{n,\alpha}|x|^{-n-1}, |x|\to\infty
\end{aligned}$$

□

Sonuç 2.12. *Teorem* (2.11)-(i) *den* $\|\mathcal{F}^\alpha f\|_p \le \|f\|_p$ $(\forall\alpha>0,\ 1\le p\le\infty)$ *olduğu görülür.*

Gözlem: Poisson integralinin tanımını ve (2.9)'u kullanarak $\mathcal{F}^\alpha$-Flett potansiyelleri için aşağıdaki eşitliği kolayca görebiliriz: $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1\le p\le\infty)$ olsun. O zaman

$$(\mathcal{F}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}U_f(x,t)dt$$

eşitliği sağlanır. Burada $U_f(x,t)$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun "*Poisson integrali*" olarak adlandırılır ve

$$U_f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n}P(y,t)f(x-y)dy,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \qquad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır. (2.13) eşitliğindeki $P(y,t)$ fonksiyonu da "*Poisson çekirdeği*" olarak adlandırılır ve,

$$P(y,t) = \frac{C_n t}{(|y|^2 + t^2)^{\frac{(n+1)}{2}}}, C_n = \frac{\Gamma(\frac{(n+1)}{2})}{\pi^{\frac{(n+1)}{2}}} \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, $U_f(x,t)$ Poisson integralinin, çalışmamızın bundan sonraki bölümlerinde kullanılacak bazı özelliklerini verelim:

Önteorem 2.13. *(Rubin 1996)* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ *ve* $U_f(x,t)$ *fonksiyonu da* (2.13)*'teki gibi olsun, o zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(a) $\int_{\mathbb{R}^n} P(y,t)dy = 1 \; ve \; (P(.,t))^\wedge(y) = e^{-t|y|}, \forall t > 0$

(b) $\|U_f(x,t)\|_p \le \|f\|_p$

(c) $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |U_f(x,t)| \le C_{n,p} t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_p, 1 \le p < \infty$

(d) $\sup_{t>0} |U_f(x,t)| \le (\mathfrak{M}f)(x)$

Burada $\mathfrak{M}f$, (2.4) *de verilen Hardy-Littlewood maximal fonksiyondur.*

(e) $U_f(U_f(t,x),\tau) = U_f(x,t+\tau), t > 0, \tau > 0$

(f) $\lim_{t\to 0} U_f(x,t) = f(x)$

Burada limit L^p*-normunda ve* $h.h.x$ *için noktasal anlamdadır.*

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Sonlu Farklar Yardımıyla Kurulan Hipersingüler Aileleri ve Flett Potansiyellerinin Tersleri

Potansiyel tipli operatörler için önemli problemlerden biri, bu operatörlerin terslerinin veren formüller elde etmektir. Hipersingüler integral teknikleri kullanarak potansiyel tipli operatörlerin terslerini veren formüller, ilk olarak Stein (1961); Wheeden (1968); Lizorkin (1970); Samko (1984, 1993); Rubin (1996) ve diğer birçok matematikçi tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır. Bu çalışmalara yeni bir yaklaşım olarak, Rubin (1996) ve Aliev (2001, 2002) tarafından tanıtılan "sürekli dalgacık-tipli dönüşümler" kullanarak, potansiyel tipli operatörler için ters belirleme formülleri elde edilmiştir.

Bu bölümde ilk olarak Poisson yarıgrubunun doğurduğu kesikli hipersingüler integraller ailesini, D_ε^α, tanıtacağız ve $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için, bazı şartlar altında, $D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}^\alpha \varphi$ ifadesinin $\varepsilon \to 0^+$ için noktasal (*h.h.x* için) ve L^p-normunda φ fonksiyonuna yakınsaklığını göstereceğiz.

Daha sonra bu ailelerin, ε sıfıra giderken L^p-normunda yaklaşım hızını, potansiyel operatörün etki ettiği fonksiyonun bir çeşit pürüzsüzlük derecesine bağlı olarak inceleyeceğiz.

Tanım 3.14. *$g(t)$, $(t \in \mathbb{R}^1)$ fonksiyonunun t merkezli $\ell \in \mathbb{N}$ mertebeli ve $\tau \in \mathbb{R}^1$adımlı sonlu farkı,*

$$\Delta_\tau^\ell[g](t) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k g(t + k\tau)$$

şeklinde tanımlanır. Özel halde, $t = 0$ merkezli sonlu fark

$$\Delta_\tau^\ell[g](t) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k g(k\tau)$$

şeklinde olur.

Tanım 3.15. *$U_f(x,t)$, (2.13)'ten görüldüğü gibi, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Poisson integrali olmak üzere, $(\mathcal{P}_t f)(x)$ yarıgrubu*

$$(\mathcal{P}_t f)(x) = e^{-t} U_f(x,t),\ 0 \le t < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

NOT: Hem L^p-normunda hem de noktasal ($h.h.x \in \mathbb{R}^n$ için) $\lim_{t\to 0^+}(\mathcal{P}_t f)(x) = f(x)$ olduğu kolayca görülebilir. Bu özellikten dolayı $\mathcal{P}_o f = f$ olarak kabul ediyoruz.

Şimdi, $\mathcal{P}_t f$ yarıgrubunu kullanarak ve Rubin (1996) (220. ve 260. sayfaları) kaynağından esinlenerek aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.16. *$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \le p < \infty)$ verilsin. $\alpha > 0$ ve $l > \alpha$, $(l \in \mathbb{N})$ olsun. $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı olan aşağıdaki integraller ailesine, f fonksiyonuna ilişkin "kesikli ("truncated) integraller ailesi" denir:*

$$\begin{aligned}(D_\varepsilon^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\mathcal{X}_\ell(\alpha)}\int_\varepsilon^\infty \Delta_\varepsilon^\ell[(\mathcal{P}_{k\tau}f)(x)](0)\frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\mathcal{X}_\ell(\alpha)}\int_\varepsilon^\infty (\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k e^{-k\tau}U_f(x,k\tau))\frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}}\end{aligned} \tag{3.1}$$

burada, normalleştirici $\mathcal{X}_\ell(\alpha)$ sayısı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\mathcal{X}_\ell(\alpha) = \int_0^\infty (1-e^{-t})t^{-1-\alpha}$$

İntegraller için Minkowski eşitsizliği (2.6) kullanılırsa, her $\varepsilon > 0$ için $D_\varepsilon^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ olduğu görülür.

Tanım 3.17. *(Rubin 1996) Bir $h(t)$, $(0 < t < \infty)$ fonksiyonunun $\alpha > 0$ mertebeli Riemann-Liouville kesirsel integrali,*

$$I_-^\alpha(h)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty \frac{h(r)}{(r-t)^{1-\alpha}}dr = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{h(r+t)}{r^{1-\alpha}} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Önteorem 3.18. *$f \in L^p\ (\mathbb{R}^n)$, $(1 \le p < \infty)$ olmak üzere, $(\mathcal{P}_t f)(x) = e^{-t}U_f(x,\,t)$ olsun. $I_-^\alpha(h)(t)$ kesirsel integrali de (3.2)'daki gibi olsun. Ayrıca f fonksiyonunun Flett potansiyeli (2.8)'deki gibi olsun. O zaman h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ ve her $t > 0$ için*

$$\mathcal{P}_t[\mathcal{F}^\alpha f](x) = I_-^\alpha[(\mathcal{P}_. f)(x)](t) \tag{3.3}$$

eşitiliği sağlanır.

İspat $f \in \mathfrak{S}$-Schwarz test fonksiyonu olsun. Eğer (3.3) eşitliğinin sağ ve sol taraflarının Fourier dönüşümlerinin her $f \in \mathfrak{S}$ için eşit olduğunu gösterirsek ispat biter.

$$(\mathcal{P}_t[\mathcal{F}^\alpha f](x))^\wedge(\xi) = e^{-t(1+|\xi|)}.(1+|\xi|)^{-\alpha}\hat{f}(\xi) \tag{3.4}$$

Diğer yandan,

$$
\begin{aligned}
(I_-^\alpha[(\mathcal{P}_{\cdot\cdot}f)(x)](t))^\wedge(\xi) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[\int_0^\infty (\mathcal{P}_{r+t}f)(x)r^{\alpha-1}dr]^\wedge(\xi) = \qquad (3.5)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-(r+t)}r^{\alpha-1}[U_f(r+t,\ x)]^\wedge(\xi)dr = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-(r+t)}r^{\alpha-1}e^{-(r+t)|\xi|}dr = \\
&= e^{-t(1+|\xi|)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-r(1+|\xi|)}r^{\alpha-1}dr = e^{-t(1+|\xi|)}(1+|\xi|)^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

Bu durumda (3.4) ve (3.5) den, (3.3) eşitliğinin her Schwarz test fonksiyonları için doğru olduğu görülür. □

Diğer taraftan, $(Af)(x) = \mathcal{P}_t[\mathcal{F}^\alpha f](x)$ ve $(Bf)(x) = I_-^\alpha[(\mathcal{P}_{\cdot}f)(x)](t)$ doğrusal operatörleri $L^p \to L^p$ sınırlı operatörler olduğundan ve Schwarz test uzayı L^p de yoğun olduğundan, (3.3) eşitliği, ölçümü sıfır olan küme hariç, her $f \in L^p$ için sağlanır.

NOT: (3.3) eşitliği, şekilsel olarak Rubin (1996) tarafından elde edilen formüle benzemektedir.

Önteorem 3.19. *$\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \le p < \infty)$ ve $0 < \alpha < \infty$ olsun ve D_ε^α operatörü (3.1)'teki gibi tanımlansın. O zaman, $\mathcal{F}^\alpha\varphi$, φ nin Flett potansiyeli ve $U_f(x,t)$, $(0 < t < \infty)$ de φ nin doğurduğu Poisson yarıgrubu olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve h.h.$x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$
(D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}^\alpha\varphi)(x) = \int_0^\infty K_\alpha^{(\ell)}(\eta)e^{-\varepsilon\eta}(U_p(x,\ \varepsilon\eta)d\eta) \qquad (3.6)
$$

eşitliği sağlanır. Burada $\ell > \alpha$ olmak üzere, $K_\alpha^{(\ell)}(\eta)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$
K_\alpha^{(\ell)}(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\mathcal{X}_\ell(\alpha)}\frac{1}{\eta}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k(\eta-k)_+^\alpha
$$

ve

$$
(\eta-k)_+^\alpha = \left\{\begin{array}{ll} (\eta-k)^\alpha & ,\ \eta > k \text{ ise} \\ 0 & ,\ \eta \le k \text{ ise} \end{array}\right\}
$$

İspat (3.1) formülü ile tanımlanmış D_ε^αoperatörü ile $\mathcal{F}^\alpha\varphi$ ye etki edersek ve (3.3)'te kullanırsak

$$
\begin{aligned}
(D_\varepsilon^\alpha\mathcal{F}^\alpha\varphi) &= \frac{1}{\mathcal{X}_\ell(\alpha)}\int_\varepsilon^\infty (\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k e^{-k\tau}(\mathcal{P}_{k\tau}\mathcal{F}^\alpha\varphi)(x))\frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} = \qquad (3.7)\\
&= \frac{1}{\mathcal{X}_\ell(\alpha)}\int_\varepsilon^\infty (\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k I_-^\alpha[(\mathcal{P}_{\cdot}\varphi)(x)](k\tau))\frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}}
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k I_-^{\alpha}[(\mathcal{P}_{\cdot}\varphi)(x)](k\tau) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\ \textstyle\int_{k\tau}^{\infty}(r-k\tau)^{\alpha-1}(\mathcal{P}_r\varphi)(x)dr &= \textstyle\int_0^{\infty} h_\tau(r)(\mathcal{P}_r\varphi)(x)dr \end{aligned} \tag{3.8}$$

olur. Burada,

$$h_\tau(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k(r-k\tau)_+^{\alpha-1} \tag{3.9}$$

ve

$$(r-k\tau)^{\alpha-1} = \left\{ \begin{array}{cl} (r-k\tau)^{\alpha-1} & ,\ r > k\tau \text{ ise} \\ 0 & ,\ r \leq k\tau \text{ ise} \end{array} \right\}$$

dır.

(3.8)'i (3.7)'de dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} (D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}^\alpha\varphi)(x) &= \frac{1}{\mathcal{X}(\alpha)}\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}}(\int_0^\infty h_\tau(r)(\mathcal{P}_r\varphi)(x)dr)d\tau \\ &= \frac{1}{\mathcal{X}_l(\alpha)}\int_0^\infty (\mathcal{P}_r\varphi)(x)(\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}}h_\tau(r)d\tau)dr = \end{aligned}$$

($r = \varepsilon\eta$, $0 < \eta < \infty$ değişken değiştirmesi yapalım)

$$= \frac{\varepsilon}{\mathcal{X}_l(\alpha)}\int_0^\infty (\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi)(x)(\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}}h_\tau(\varepsilon\eta)d\tau)d\eta \overset{(3.9)'dan}{=}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)\mathcal{X}_l(\alpha)}.\int_0^\infty (\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi)(x)(\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}}(\varepsilon\eta-k\tau)_+^{\alpha-1}d\tau)d\eta \tag{3.10}$$

Şimdi son eşitlikteki

$$i_k = \int_\varepsilon^\infty \tau^{-1-\alpha}(\varepsilon\eta-k\tau)_+^{\alpha-1}d\tau,\ (k = 0, 1, 2, ..., l)$$

integrallerini hesaplayalım

$k = 0$ için: $i_0 = \int_\varepsilon^\infty \tau^{-1-\alpha}(\varepsilon\eta)^{\alpha-1}d\tau = \frac{1}{\alpha\varepsilon}\eta^{\alpha-1}$

$k = 1, 2, ..., l$ için:

$$i_k = \left\{ \begin{array}{cl} \int_\varepsilon^{\varepsilon\eta/k} \tau^{-1-\alpha}(\varepsilon\eta-k\tau)^{\alpha-1}d\tau & ,\ \eta > k \text{ ise} \\ 0 & ,\ \eta \leq k \text{ ise} \end{array} \right\}$$

şeklindedir. Bu ifadede

$$\tau = \frac{\varepsilon\eta}{k}\frac{1}{t+1},\ 0 < t < \frac{\eta}{k} - 1$$

değişken değiştirmesi yaparsak,

$\eta > k$ için

$$i_k = \frac{k^\alpha}{\varepsilon\eta}\int_0^{\frac{\eta}{k}-1} t^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\varepsilon\eta\alpha}(\eta-k)^\alpha$$

olur. Böylece her $k = 0, 1, 2, ..., l$ için

$$i_k = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{\varepsilon\eta\alpha}(\eta-k)^\alpha & , \eta > k \text{ ise} \\ 0 & , \eta \leq k \text{ ise} \end{array} \right\} = \frac{1}{\varepsilon\eta\alpha}(\eta-k)_+^\alpha$$

dir. Eğer i_k ların değerleri (3.10)'da yazılırsa,

$$\begin{aligned} (D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}^\alpha\varphi)(x) &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)\mathcal{X}_\ell(\alpha)}\int_0^\infty (\mathcal{P}_{\varepsilon\eta}\varphi)(x)(\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k(\eta-k)_+^\alpha)\frac{d\eta}{\eta} \\ &= \int_0^\infty K_\alpha^{(\ell)}(\eta)e^{-\varepsilon\eta}U_\varphi(x,\ \varepsilon\eta) \end{aligned}$$

Burada $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(1+\alpha)$ olduğu dikkate alınırsa,

$$K_\alpha^{(\ell)}(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\mathcal{X}_\ell(\alpha)}\frac{1}{\eta}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^k(\eta-k)_+^\alpha$$

şeklindedir. □

NOT: Önteoremin ispatında Rubin (1986 ve 1996 sf 262-263) kaynaklarındaki Riesz ve Bessel potansiyelleri için uygulanan bir metod kullanılmıştır.

Şimdi Önteorem 3.19'u ve aşağıda vereceğimiz Önteoremi kullanarak, L^p uzayında olan fonksiyonların Flett potansiyellerinin terslerini, L^p-anlamında ve noktasal olarak veren teoremi ifade ve ispat edebiliriz.

Önteorem 3.20. *(Samko vd. 1993,sf 125, Rubin 1996, sf 158) $K_\alpha^{(\ell)}(\eta)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(a) $K_\alpha^{(\ell)}(\eta) \in L^1(0,\infty)$ *ve* $\int_0^\infty K_\alpha^{(\ell)}(\eta)d\eta = 1$

(b) $K_\alpha^{(\ell)}(\eta) = \left\{ \begin{array}{cc} O(\eta^{\alpha-1}) & , \eta \to 0^+ \\ O(\eta^{\alpha-\ell-1}) & , \eta \to +\infty \end{array} \right\}$

Artık çalışmamızın temel sonuçlarından biri olan teoremi ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem 3.21. $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ *ve* $\mathcal{F}^\alpha\varphi$ *fonksiyonu da* φ*'nin* $0 < \alpha < \infty$ *mertebeden Flett potansiyeli olsun.* D_ε^α, $(\varepsilon > 0)$ *operatörler ailesi* (3.1)*'deki gibi tanımlansın. Bu durumda*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}(D_\varepsilon^\alpha\mathcal{F}^\alpha\varphi)(x) = \varphi(x) \tag{3.11}$$

dir. Burada limit, L^p normunda veya h.h.$x \in \mathbb{R}^n$ için noktasal olarak anlaşılır. Ayrıca $\varphi \in C_o \cap L^p$ için yakınsama düzgündür.

İspat $\int_0^\infty K_\alpha^{(\ell)}(\eta)d\eta = 1$ *olduğundan,*

$$
\begin{aligned}
& |(D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}^\alpha \varphi)(x) - \varphi(x)| \overset{(3.6)\text{'dan}}{=} \\
\leq & \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| . \left|e^{-\varepsilon\eta}(U_\varphi(x,\ \varepsilon\eta)) - \varphi(x)\right| d\eta = \\
\leq & \int_0^\infty (1 - e^{-\varepsilon\eta}) \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| e^{-\varepsilon\eta} \left|U_\varphi(x,\ \varepsilon\eta)\right| d\eta + \\
& + \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| \left|U_\varphi(x,\ \varepsilon\eta)) - \varphi(x)\right| d\eta
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
\|(D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}^\alpha \varphi) - \varphi\|_p \leq \int_0^\infty (1 - e^{-\varepsilon\eta}) \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| . \|U_\varphi(x,\ \varepsilon\eta)\|_p \, d\eta + \\
+ \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| \|U_\varphi(x,\ \varepsilon\eta) - \varphi\|_p \, d\eta = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

dir. $\|U_\varphi(x,\ \varepsilon\eta)\|_p \leq C \|\varphi\|_p$ *olduğundan, Lebesgue integral altında limite geçme teoreminden ,* $\lim_{\varepsilon\to 0} I_1(\varepsilon) = 0$; *aynı şekilde* $\lim_{\varepsilon\to 0} \|U(x,\ \varepsilon\eta) - \varphi\|_p = 0$ *olduğundan, Lebesgue integral altında limite geçme teoreminden,* $\lim_{\varepsilon\to 0} I_2(\varepsilon) = 0.$

$\varphi \in C_o \cap L^p$ *için* (3.12)*'de* $p = \infty$ *alırsak, yakınsamanın düzgün olduğu ortaya çıkar. Nihayet,* $C_o \cap L^p$ *kümesi* $L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ *uzayında yoğun olduğundan, Teorem 2.5 ve*

$$
\sup_{\varepsilon>0} |(D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}^\alpha \varphi)(x)| \leq \sup_{t>0} |U_\varphi(x,\ t)| . \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| d\eta \leq c(\mathfrak{M}\varphi)(x)
$$

eşitsiziliği kullanılırsa, (3.11)'deki yakınsamanın h.h.$x \in \mathbb{R}^n$ için sağlandığını söyleyebiliriz. □

3.2. Kesikli Hipersingüler İntegral Ailelerinin L^p normunda Yakınsama Hızlarının İncelenmesi

Bu bölümde, Flett potansiyelleri için (3.6)'da kurulan kesikli hipersingüler integraller ailesi için L^p uzayı normundaki yakınsama hızları, $\varphi \in L^p$ fonksiyonuna ait L^p anlamında pürüzsüzlük derecesi kullanılarak incelenmiştir.

Tanım 3.22. $\rho \in (0,1)$ *bir sabit ve* $\mu(r)$ *fonksiyonu da* $[0,\rho]$ *aralığında pozitif ve* $\mu(0) = 0$ *olsun. Eğer* $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ *fonksiyonu için,*

$$M_\mu \equiv M_\mu(\varphi) = \sup_{0<r<\rho} \frac{1}{r^n \mu(r)} \int_{|x|\leq r} \|\varphi(\cdot - x) - \varphi(.)\|_p \, dx < \infty \tag{3.13}$$

koşulu sağlanıyorsa, bu fonksiyon L^p*-anlamında "*μ*-pürüzsüzlük özelliği" ne sahiptir denir.*

Bir tanım verildiğinde, doğal olarak, bu tanımı sağlayan bir örneğin varlığını göstermek gerekir.

Sonuç 3.23. μ *fonksiyonu Tanım 3.22'de tanımlandığı gibi olsun ve* $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *için* M_φ *fonksiyonunu,*

$$M_\varphi(r) = \sup_{|x|\leq r} \|\varphi(t-x) - \varphi(t)\|_p$$

şeklinde tanımlayalım, bu fonksiyona φ *nin* L^p*-süreklilik modülü denir.*

Eğer $M_\varphi(r) = M(r)$, $(0 \leq r \leq p)$ *alırsak o zaman,* $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *fonksiyonu için* (3.13)*'teki ifadenin sonlu olduğu görülür.*

NOT: Bundan sonra bir $a > 0$ sabiti için, $\mu(t) \geq at$, $(0 \leq t \leq \rho)$ ve $\rho \leq t < \infty$ ise, $\mu(t) = \mu(\rho)$ kabul edilecektir. Ayrıca, μ-süreklilik modülü ise, $\lambda \geq 0$ için $\mu(\lambda t) \leq (\lambda + 1)\mu(t)$ eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir (Devore ve Lorentz 1993).

Önteorem 3.24. *(Aliev vd. 2013)* $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *fonksiyonu verilsin.* $\Psi(r)$, $(0 \leq r \leq \rho)$ *fonksiyonu da* $[0,\rho]$ *kapalı aralığında azalan, negatif olmayan ve* $C^1[0,\rho]$ *sınıfından olsun. Eğer* $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *fonksiyonu* L^p *anlamında* μ*-pürüzsüzlük özelliğine sahipse, o zaman*

$$\int_{|x|\leq\rho} \|\varphi(t-x) - \varphi(t)\|_p \Psi(x) dx \leq M_\mu \left[\rho^n \mu(\rho)\Psi(\rho) + \int_0^\rho r^n \mu(r)(-\Psi'(r)dr) \right] \tag{3.14}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $g(x) = \|\varphi(t-x) - \varphi(t)\|_p$ ve $r = |x|$, $\theta \in S^{n-1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{|x|\leq\rho} \|\varphi(t-x) - \varphi(t)\|_p \Psi(|x|) dx = \int_{|x|\leq\rho} g(x)\Psi(|x|)dx = \\ &= \int_0^\rho r^{n-1}\Psi(r)(\int_{|\theta|=1} g(r\theta)dr(\theta))dr \end{aligned}$$

Eğer,

$$\lambda(r) = \int_{|\theta|=1} g(r\theta)dr(\theta) \text{ ve } \Omega(r) = \int_0^r \lambda(t)t^{n-1}dt$$

şeklinde tanımlarsak,

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^\rho \Psi(r)\lambda(r)r^{n-1}dr = \int_0^\rho \Psi(r)d\Omega(r)\,|_0^\rho - \int_0^\rho \Omega(r)\Psi'(r)dr \\ &= \Psi(\rho)\Omega(\rho) + \int_0^\rho \Omega(r)(-\Psi'(r))dr \end{aligned}$$

(3.13) şartı gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \Omega(r) &= \int_0^r \lambda(t)t^{n-1}dt = \int_{|x|\le r} g(x)dx = \\ &= \int_{|x|\le r} \|\varphi(t-x)-\varphi(t)\|_p\, dx \le r^n\mu(r)M_\mu \end{aligned}$$

Böylece,

$$I \le M_\mu[\rho^n\mu(\rho)\Psi(\rho) + \int_0^p r^n\mu(r)(-\Psi'(r)dr]$$

dir. Ki bu da göstermeye çalıştığımız eşitsizliktir.

Önteorem 3.25. *$P(x,\varepsilon)$ poisson çekirdeği (2.14)'te tanımlandığı gibi olsun, yani*

$$P(x;\,\varepsilon) = \frac{C_n\varepsilon}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{(n+1)/2}},\; C_n = \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})$$

O zaman öyle $c>0$ sabiti vardır ki,

$$\int_{|x|\le\rho} \|\varphi(t-x)-\varphi(t)\|_p\, P(x;\,\varepsilon)dx \le cM_\mu[\varepsilon + \int_0^\infty \mu(\varepsilon t)\frac{dt}{1+t^2}] \tag{3.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

□

İspat (3.14)'te $\Psi(|x|) = P(x;\varepsilon)$ koyarsak

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{|x|\le\rho} \|\varphi(t-x)-\varphi(t)\|\, P(x;\varepsilon)dx \le M_\mu[\rho^n\mu(\rho)\frac{C_n\varepsilon}{(\varepsilon^2+\rho^2)^{(n+1)/2}}]+ \\ &+\textstyle\int_0^\rho r^n\mu(r)(-\frac{C_n\varepsilon}{(\varepsilon^2+r^2)^{(n+1)/2}})dr \end{aligned} \tag{3.16}$$

□

Şimdi (3.16)'da bazı analizler yapalım:

$$\rho^n\mu(\rho)\frac{C_n\varepsilon}{(\varepsilon^2+\rho^2)^{(n+1)/2}} \le a_1\varepsilon,\; a_1 = C_n\frac{\mu(\rho)}{\rho}$$

Ayrıca

$$(-\frac{C_n\varepsilon}{(\varepsilon^2+\rho^2)^{(n+1)/2}})' = a_2\frac{\varepsilon r}{(\varepsilon^2+r^2)^{(n+3)/2}},\ a_2 = C_n.(n+1)$$

Bunları (3.16)'da kullanırsak, $c = \max\{a_1,\ a_2\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{ll}\int_{|x|<\rho}\|\varphi(t-x)-\varphi(t)\|_p P(x,\ \varepsilon) & \leq cM_\mu[\varepsilon+\int_0^\rho \frac{\varepsilon r^{n+1}}{(\varepsilon^2+r^2)^{(n+3)/2}}\mu(r)dr] \\ = cM_\mu[\varepsilon+\int_0^{\rho/\varepsilon}\frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^{(n+3)/2}}\mu(\varepsilon t)] & \leq cM_\mu[\varepsilon+\int_0^\infty \frac{\mu(\varepsilon t)}{1+t^2}dt]\end{array}$$

elde edilir.

Sonuç 3.26. $\mu(r)$, $(0\leq r\leq\rho<1)$ *fonksiyonu* $[0,\rho]$ *aralığında sürekli,* $(0,\rho]$ *aralığında pozitif ve* $\mu(0)=0$ *olsun. ayrıca bir* $a>0$ *sabiti için* $\mu(t)\geq at$, $(0\leq t\leq\rho)$ *ve* $\rho\leq t<\infty$ *için* $\mu(t)=\mu(\rho)$ *sağlansın. Eğer bir lokal sınırlı* $w(t)$ *fonksiyonu için,*

$$\mu(\varepsilon t)\leq\mu(\varepsilon)w(t)\ \textit{ve}\ \int_0^\infty\frac{w(t)}{1+t^2}dt<\infty,\ (\varepsilon\in(0,\ \rho)\ \textit{ve}\ t\in(0,\ \infty)) \tag{3.17}$$

sağlanıyorsa, o zaman $\varepsilon\in(0,\rho)$ *değerine bağlı olmayan öyle bir* $A>0$ *sabiti vardır ki;*

$$\int_{|x|\leq\rho}\|\varphi(t-x)-\varphi(t)\|_p P(x,\varepsilon)dx\leq A\mu(\varepsilon),\ \forall\varepsilon\in(0,\rho) \tag{3.18}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat (3.17)*'yi* (3.15)*'te hesaba katarsak ve* $\mu(\varepsilon)\geq a\varepsilon$, $(0\leq\varepsilon\leq\rho)$ *koşulunu da kullanırsak,*

$$\int_{|x|\leq\rho}\|\varphi(t-x)-\varphi(t)\|_p P(x,\varepsilon)dx\leq cM_\mu[\varepsilon+\mu(\varepsilon)\int_0^\varepsilon\frac{w(t)}{1+t^2}dt]\leq A\mu(\varepsilon)$$

elde edilir. Burada A sabiti $\varepsilon>0$ *parametresinden bağımsızdır.* □

Örnek 3.27. $0<\gamma<1$ *olsun. Bu durumda*

$$\mu(r)=\left\{\begin{array}{ll} r^\gamma & ,\ 0\leq r\leq\rho<1\ \textit{ise} \\ \rho^\gamma & ,\ r\geq\rho\ \textit{ise}\end{array}\right\}$$

fonksiyonu Sonuç 3.26'nın tüm koşullarını $w(t)=t^\gamma$ *fonksiyonu ile birlikte sağlamaktadır.*

Artık çalışmamızın temel sonuçlarından ikincisinin ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem 3.28. $\mu(r)$, $(0 < r < \infty)$ *fonksiyonu, Sonuç 3.23'ün tüm şartlarını sağlasın. Ayrıca* $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ *fonksiyonu* L^p*-anlamında* μ*-pürüzsüzlük özelliğini,* (3.13) *sağlasın. O zaman,*

$$\|D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}^\alpha \varphi - \varphi\|_p = O(\mu(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0^+ \tag{3.19}$$

dir. Özel olarak (3.19) *eşitliği* $\mu(\varepsilon) = \varepsilon^\gamma$, $(0 < \gamma < 1)$ *fonksiyonu için sağlanır.*

İspat (3.6) formülümü, Önteorem 3.20-(a) yı ve Minkowski eşitsizliğini kullanırsak,

$$\|D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F} \varphi - \varphi\|_p \leq \int_0^\infty \left| K_\alpha^{(l)}(\eta) \|U_\varphi(t,\ \varepsilon\eta) - \varphi(t)\|_p \, d\eta \right| \tag{3.20}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\|U_\varphi(t,\ \varepsilon\eta) - \varphi\|_p &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} P(y;\ \varepsilon\eta)(\varphi(t-y) - \varphi(t))dy \right\|_p \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} P(y;\ \varepsilon\eta) \|\varphi(t-y) - \varphi(t)\|_p \, dy = \\
&= \int_{|y| \leq \rho} P(y;\ \varepsilon\eta) \|\varphi(t-y) - \varphi(t)\|_p \, dy \\
&\quad + \int_{|y| > p} P(y;\ \varepsilon\mu) \|\varphi(t-y) - \varphi(t)\|_p \, dy \\
&\equiv i_1(\varepsilon) + i_2(\varepsilon)
\end{aligned}$$

□

(3.18)'den $i_1(\varepsilon) \leq A\mu(\varepsilon\eta)$ eşitsizliğinin sağlandığını biliyoruz. Burada A sabiti ε ve η ye bağlı değildir. Şimdi $i_2(\varepsilon)$ değerini üstten tahmin edelim:

$$\begin{aligned}
i_2(\varepsilon) &\leq 2\|\varphi\|_p \int_{|y|>\rho} P(y;\ \varepsilon\eta)dy \overset{(2.15)\text{'ten}}{=} \\
&\quad 2\|\varphi\|_p \, a_n \int_{|y|>\rho} \frac{\varepsilon\eta}{((\varepsilon\eta)^2 + |y|^2)^{(n+1)/2}} dy
\end{aligned}$$

Son integralde kutupsal koordinatlara geçersek;

$$\begin{aligned}
y &= r\theta,\ \rho < r < \infty, \theta \in S^{n-1}; dy = r^{n-1} dr d\theta \\
&= c_1 \varepsilon\eta \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{((\varepsilon\eta)^2 + |r|^2)^{(n+1)/2}} dr \leq c_1 \varepsilon\eta \int_p^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n+1}} dr = c_2 \varepsilon\eta
\end{aligned}$$

Burada c_2 sabiti ε ve η ya bağlı değildir.

Sonuç olarak

$$\|U_\varphi(\cdot;\varepsilon\eta)-\varphi(\cdot)\|_p \leq A\mu(\varepsilon\eta)+c_2\varepsilon\eta$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\|D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}\varphi-\varphi\|_p &\overset{(3.10)\text{'dan}}{\leq} \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| (A\mu(\varepsilon\eta)+c_2\varepsilon\eta)d\eta \leq \\ &\leq c_3\mu(\varepsilon)\times\int_0^\infty \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| (w(\eta)+\eta)d\eta\end{aligned}$$

Önteorem 3.20-(b) ve $\int_0^\infty (w(\eta)/(1+n^2))d\eta<\infty$ koşulunu kullanırsak,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| w(\eta)d\eta &= \int_0^1 \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| w(\eta)d\eta+\int_1^\infty \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| w(\eta)d\eta \leq \\ &\leq c_4+\int_1^\infty \frac{w(\eta)}{1+\eta^2}(1+\eta^2)\left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| d\eta \\ (K_\alpha^{(\ell)}(\eta) &= O(\eta^{\alpha-\ell-1}),\ \eta\to\infty\ ve\ \ell>\alpha+1 \text{ koşulunu kullanarak }) \\ &\leq c_4+c_5\int_1^\infty \frac{w(\eta)}{1+\eta^2}d\eta \equiv c_6<\infty\end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| \eta d\eta &= \int_0^1 \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| \eta d\eta+\int_1^\infty \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| \eta d\eta \leq \\ &\leq c_7+\int_1^\infty \left|K_\alpha^{(\ell)}(\eta)\right| \eta d\eta \leq c_8\end{aligned}$$

c_8 katsayısını, $K_\alpha^{(\ell)}(\eta)=O(\eta^{\alpha-\ell-1})$, $\eta\to\infty$ asimptotik özelliğinden ve $\ell>\alpha+1$ koşulundan buluyoruz.

Tüm bu tahminleri (3.20)'de bir araya toplarsak,

$$\|D_\varepsilon^\alpha \mathcal{F}\varphi-\varphi\|_p \leq c\mu(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0^+$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar. Son eşitlikte c-sabiti ε parametresine bağlı değildir.

4. SONUÇLAR

Potansiyeller teorsinin en önemli problemlerinden biri, potansiyel operatörünün terslerini veren formülleri bulmakla ilgilidir. Sonuç olarak bu tez çalışmasında, Fourier dönüşümü dilinde

$$(\mathcal{F}^{\alpha}\varphi)^{\wedge}(x) = (1+|x|)^{-\alpha},\ \alpha > 0$$

şeklinde tanımlanan Flett potansiyelleri için, Poisson yarıgrubu yardımıyla bir f fonksiyonuna ilişkin "*kesikli* integraller ailesi, $D_{\varepsilon}^{\alpha} f$, tanımlandı. Bu aileden yararlanarak Flett potansiyelleri için bir ters belirleme formülü elde edildi.

Ayrıca, Teorem 3.28'de, $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun L^p-pürüzsüzlük derecesine göre, $\|D_{\varepsilon}^{\alpha}\mathcal{F}^{\alpha}\varphi - \varphi\|_p$ değeri için, $\varepsilon \to 0^+$ iken bazı tahminler elde edildi.

Bu sonuçların, Lipschitz, Sobolev ve Hardy uzaylarında çalışan matematikçiler için yardımcı bir kaynak olarak kullanılabilir olduğunu düşünüyoruz. (Aliev ve Eryiğit 2002)

5. KAYNAKLAR

Aliev, I.A. and Rubin,B. Parabolic potentials and wavelet transforms with the generalized translation, *Studia Math*. 145 116 (2001).

Aliev, I.A. and Eryiğit, M. Inversion of Bessel potentials with the aid of weigted wawelet transforms. *Mathematishe Nachrichten*. 2002; 242 (1): 27-37.

Aliyev I.A. and Eryigit M. , "On A Rate Of Convergence Of Truncated Hypersingular Integrals Associated To Riesz And Bessel Potentials", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* vol.406, no.1, pp.352-359, 2013

Aliev, I.A. , Sezer, S. ve Eryigit, M. An integral transform associated to the Poisson integral and inversion of Flett potentials. *Journal of mathematical analysis and applications*,2013; 321 (2):691–704.

Aliyev I.A. and Cobanoglu S. , "The Rate Of Convergence Of Truncated Hypersingular Integrals Generated By The Poisson And Metaharmonic Semigroups", *Integral Transforms and Special Functions*, vol.25, no.12, pp.943-954, 2014

Calderon, A.P. and Zygmund, A. On Singular Integrals, *American Journal of Mathematics*, Vol. 78, No. 2 (Apr., 1956), pp. 289-309

Devore, Ronald, A. , Lorentz and George, G. Constructive Approximation, *Springer-Verlag,* Berlin Heidelberg, 1993

Flett, T. Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces. *Proceedings of the London Mathemacical Society*.1971; 3 (3); 385-451

Gerald B. Folland; Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications(2nd Edition), *A Wiley-Interscience publication*,USA, 1999

Grafakos L. Classical Fourier analysis. Second edition. *Graduate Texts in Mathematics,* 249. Springer, New York, 2008. xvi+489 pp. ISBN: 978-0-387-09431-1.

Lizorkin, P.I. The characterization of $L_p^r(\mathbb{R}^n)$ spaces in terms of hypersingular integrals, *Mat. Sb.* 81 (1970) 7991

Rubin, B.A method of characterization and inversion of Bessel and Riesz potentials. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika.* 1986; 30 (5):78-89.

Rubin, B. Description and inversion of Bessel potentials by means of hypersingular integrals with weighted differences *Differ. Uravn.*, Volume 22, Number 10, 18051818, 1986.

Rubin, B. Fractional integrals and potentials, *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.* Longman, Harlow.1996; 86, 82

Samko, S.G. Hypersingular Integrals and Their Applications, Izdat. *Rostov Univ., Rostovon-Don,* 1984 (in Russian).

Samko, S.G. , Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. *Gordon and Breach Science Publishers.* 1993.

Stein, E.M. The characterization of functions arising as potentials, *I, Bull. Amer. Math. Soc.* 67 (1961) 101-104

Stein, E.M. Singular integrals and differentiability properties of functions. *Princeton University Press*. 1970

Stein, E.M. and Weiss, G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. *Princeton University Press*,Princeton, NJ, 1971.

Wheeden, R.L. On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 134 (1968) 421-435.

ÖZGEÇMİŞ

TUĞÇE ŞAHPAZ

tugcesahpaz@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2014-2018	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya
Lisans 2009-2013	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen 2015-Devam Ediyor	Şehit Hakan Demirci Anadolu İmam Hatip Lisesi Kozaklı, Nevşehir