T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

REEL, KARMAŞIK VE HİPERBOLİK DÜZLEMDE AFİN DÖNÜŞÜMLER VE UYGULAMALARI

İskender ÖZTÜRK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2019

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

REEL, KARMAŞIK VE HİPERBOLİK DÜZLEMDE AFİN DÖNÜŞÜMLER VE UYGULAMALARI

İskender ÖZTÜRK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2019

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL, KARMAŞIK VE HİPERBOLİK DÜZLEMDE AFİN DÖNÜŞÜMLER VE UYGULAMALARI

İskender ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 27/06/2019 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)

Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

Dr.Öğr.Üyesi Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

REEL, KARMAŞIK VE HİPERBOLİK DÜZLEMDE AFİN DÖNÜŞÜMLER VE UYGULAMALARI

İskender ÖZTÜRK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof.Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Temmuz 2019, 82 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmuştur. Bu tezde reel, karmaşık ve hiperbolik düzlemdeki afin dönüşümler ve uygulamalarından bahsedilmiştir. Birinci bölümde, Öklidin beş aksiyomu ve afin dönüşümün üç aksiyomu ve afin dönüşüm kavramı ile ilgili tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde, reel düzlemde afin dönüşümlerin temel özellikleri ve afin dönüşümün temel teoremi ispatlanmıştır. Ayrıca, reel düzlemdeki koniklerin merkezil koniğe çeviren bir afin dönüşüm ortaya konulmuştur. Karmaşık düzlemde afin dönüşümler $A, B, C \in \mathbb{C}$, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ şeklinde bir dönüşümle gösterilmiştir. f afin dönüşümünün türünün A, B, C katsayıları ile olan ilişkisi incelenmiştir. Karmaşık düzlemde afin dönüşümlerin bir uygulaması olarak fraktal örnekleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, hiperbolik düzlemde afin dönüşümler $A, B, C \in \mathbb{P}$, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ şeklinde bir dönüşümle gösterilmiştir. f afin dönüşümünün türünün A, B, C katsayıları ile olan ilişkisi incelenmiştir. Hiperbolik düzlemde afin dönüşümlerin bir uygulaması olarak fraktal örnekleri verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Afin dönüşüm, dönme dönüşümü, fraktaller, hiperbolik sayılar, karmaşık sayılar, konikler, yansıma dönüşümü

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)
Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN
Dr. Öğr. Üyesi Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

AFFINE TRANSFORMATION ON REAL, COMPLEX, AND HYPERBOLIC PLANE AND ITS APPLICATIONS

İskender ÖZTÜRK

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

July 2019, 82 pages

This thesis consists of three parts. In this thesis, affine transformations and applications in real, complex and hyperbolic plane are discoursed. In the first chapter, five axioms of Euclide and three axioms of affine transformation and the definition of affine transformation are given. In the second chapter, the basic properties of affine transformations and the fundamental theorem of affine theorem are proved in the real plane. In addition, an affine conversion of the cones in the real plane into the center-like cone has been demonstrated. Affine transformations in the complex plane are indicated by $A, B, C \in \mathbb{C}$, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$. The relation of the type of f afin transformation with A, B, C coefficients was investigated. Fractal samples are given as an application of affine transformations in the complex plane. In the third chapter, the affine transformations in the hyperbolic plane are shown with a transformation of $A, B, C \in \mathbb{P}$, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$. The relation of the type of f afin transformation with A, B, C coefficients was investigated. Fractal samples are given as an application of affine transformations in the hyperbolic plane.

KEYWORDS: Affine transformation, complex numbers, conics, fractals, rotation transformation, fractals, hiperbolik numbers, reflection transformation

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa Özdemir
Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan Çöken
Asst. Prof. Dr. Hakan Şimşek

ÖNSÖZ

Bu tezde, afin dönüşümün özellikleri reel, karmaşık ve hiperbolik sayı düzleminde özellikleri incelenmiş ve bazı uygulamaları verilmiştir. Reel ve karmaşık düzlemdeki afin dönüşümlerle ilgili kaynaklar taranmıştır. Karmaşık sayı düzlemindeki afin dönüşümler tek bir afin dönüşümle ifade edilmiştir. Uygulama olarak reel sayılarda koniklerin afin dönüşümü, karmaşık sayılarda fraktal örnekleri incelenmiştir. Hiperbolik sayı düzlemindeki afin dönüşümler karmaşık sayı düzleminde olduğu gibi tek bir afin dönüşümle ifade edilmiş ve uygulama olarak fractal örnekleri verilmiştir.

Tez konumun belirlenmesinde ve hazırlanmasında, her türlü yardım ve fedakarlığı esirgemeyen, bilgisi, tecrübesi ve destekleri ile çalışmalarımda bana yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR'e en içten duygularla teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışmamı, hayatım boyunca beni destekleyerek cesaretlendiren, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme ithaf ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum "*Reel, Karmaşık ve Hiperbolik Düzlemde Afin Dönüşümler ve Uygulamaları*" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

27/06/2019

İskender ÖZTÜRK

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{E}^n$	: n boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{Z}_0^-$	: $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$
$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	: Hiperbolik sayılar kümesi
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: İki vektörün iç çarpımı
$\lVert \cdot \rVert$	: Bir vektörün uzunluğu
$\langle \cdot, \cdot \rangle_L$	: Lorentz iç çarpımı
$\lVert \cdot \rVert_{\mathbb{H}}$	: Hiperbolik düzlemde bir vektörün uzunluğu

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Geometri tarih boyunca insanların hayatlarında yer almıştır. Geometri, insanların dünyadaki ve evrendeki yerlerini belirlemede, etraflarındaki nesneleri tanımlamada, düzenlemede ve yeni nesneler üretme uğraşında temel bir bilgi kaynağı olmuştur. Geometri nin bugüne gelişinde bir çok bilim insanı ve matematikçi katkı sağlamıştır. Burada değinil mesi gereken bu matematikçilerin başında Öklid gelmektedir. Öklid, "Elementler" adlı eserinde geometrinin temellerini beş aksiyoma dayandırmış ve bu aksiyomların ışığında oluşturduğu teoremleri ispatlamıştır. Bu geometri günümüzde Öklid geometrisi denilen geometridir. Bahsedilen beş aksiyom şunlardır:

1.Her hangi iki noktadan bir doğru çizilebilir.

2.Bir doğru her iki yönde sürekli olarak uzatılabilir.

3.Yarıçapı ve merkezi verilen çember çizilebilir.

4.Bütün dik açılar birbirine eşittir.

5.İki doğruyu üçüncü bir doğru kestiğinde, kesen doğrunun aynı tarafında kalan iç açıların ölçüleri toplamı iki dik açıdan küçük ise, bu iki doğru sürekli olarak uzatıldığında iç açıların iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişir.

Bu aksiyomlardan beşincisine *"Öklid'in paralellik askiyomu"* denir ve çağlar boyunca matematikçilerin aklında *"Bu aksiyom bir teorem olabilir mi?"* sorusunun uyanmasına sebep olmuştur. Birçok matematikçi bu aksiyomu kanıtlamak için uğraşmışlardır. Bu uğraşlar sonucunda doğrudan bir kanıtın olmadığı görülmüştür. Bunun yerine doğru olmadığı düşünülerek dolaylı kanıt yapılmaya çalışılmıştır. Bu yol matematikçilere yeni geometri alanlarının kapılarını açmıştır. Bu matematikçilerden ikisi N. Lobatchevski ve J. Bolyai'nin birbirinden habersiz olarak ortaya koydukları hiperbolik geometridir. Burada değinilmesi gereken bir diğer matematikçi de Hilbert'tir. Hilbert, Öklid'in "Elemenler" isimli kitabında açık bir tanımı verilmeyen doğru ve nokta gibi kavramaları tanımsız terim olarak nitelendirmiştir. Geometrik tanım ve teoremleri *"Geometrinin Temelleri Üzerine"* adlı kitabında yeniden ele almış ve Descartes'in düşüncelerini uygulayarak geometriye yeni bir yaklaşım getirmiştir. Hilbert, koordinat sistemlerini Öklid'in aksi yomatik geometrisiyle birleştirerek, Descartes'ın analitik geometrisi arasındaki bağı kuran bir düzenleme yapmıştır. Bu çalışmalar afin geometrinin oluşmasına yol açmıştır. Afin geometrinin inşa edilirken aşağıdaki üç aksiyom verilebilir (Bennett 1995; Tarrida 2011).

1. P ve Q iki farklı nokta olmak üzere P ve Q noktalarının üstünde olduğu tek bir d doğrusu vardır.
2. Verilen herhangi P bir noktası ve d doğrusu için, P noktasından geçen d doğrusuna paralel olan tek bir ℓ doğrusu vardır.
3. Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Afin geometri, paralellik aksiyomuyla diğer geometrilerden ayrılır. Afin geometride koordinat sisteminin oluşturulması için, afin uzay ve afin çatı tanımlarına ihtiyaç vardır. Bu sayede, herhangi bir nokta, iki koordinat ile ve herhangi bir doğru birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemle belirlenebilir. Dahası, bu kordinatlar reel sayı olmayabilir, koordinatları, kompleks sayılar gibi farklı cisimler veya hiperbolik sayılar gibi bölmeli halkalar yardımıyla da tanımlamak mümkündür (Tarrida 2011).

Tanım 1.1. *$A \neq \varnothing$ bir küme, $\mathbb{V}$ ise bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir*

$$\Psi : A \times A \to \mathbb{V}$$

*dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için $(P, Q) \to (\overrightarrow{PQ}) \in \mathbb{V}$ şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise, A kümesine, $\mathbb{V}$ vektör uzayıyla birleştirilmiş bir **afin uzay** denir. (Hacısalihoğlu 1998)*

$$1.\forall P, Q, R \in A \text{ için } \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}.$$
$$2.\forall P, Q \in A \text{ için } \overrightarrow{PQ} = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

Tanım 1.2. *Bir $\mathbb{V}$ vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. $P_0, P_1, ..., P_n \in A$ noktaları için*

$$\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n} \in \mathbb{V}$$

*vektörlerinin sistemi $\mathbb{V}$ vektör uzayının bir tabanı ise, $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ nokta $(n+1)$-lisine A afin uzayının **afin çatısı** denir. Burada P_0, noktasına afin çatının başlangıç noktası ve P_i noktalarına da ,afin çatının birim noktaları denir (Hacısalihoğlu 1998).*

Tanım 1.3. *A_1 ve A_2 aynı vektör uzayı ile birleşen iki afin uzay olmak üzere bir,*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

*dönüşümüne karşılık gelen Ψ_P dönüşümü herhangi bir $P \in A_1$ noktası için lineer ise, f dönüşümüne **afin dönüşüm** denir. f dönüşümüne karşılık gelen lineer dönüşüme de **afin dönüşümle birleşen lineer dönüşüm** adı verilir. (Hacısalihoğlu 1998)*

Bu tezde reel, karmaşık ve hiperbolik düzlemler üzerindeki afin dönüşümler incelenecektir. Bu dönüşümler paralelliği koruma, doğru parçalarının uzunlukları arasındaki oranı koruma gibi özelliklere sahiptir. Bu özellikler sayesinde afin dönüşümler üze rinde çalışılması zor olan şekiller, daha düzgün bir şekil haline getirilebilir. Örneğin, bir üçgeni bir eşkenar üçgene çevirerek üçgen üzerindeki işlemler eşkenar üçgende yapılabilir. Aynı şekilde bir elips üzerindeki işlemleri bir afin dönüşüm yardımıyla bir merkezil birim çember üzerine indirgenebilir. Afin dönüşümler, gündelik kullanım alanı olarak çok geniş bir alana sahiptir. Bir mimar yapılacak binanın planını çizerken, binanın boyutlarını belli bir ölçekle küçültmede, afin dönüşümleri kullanılır. Görüntü işlemede fotoğrafin üzerindeki her pikselin bir noktadan başka bir noktaya öteleme, ölçeklendirme, döndürme, yansıtma ve perspektifini almada afin dönüşümler bilgisayarların grafik sistemleri içinde kullanılır (Çayıroğlu 2019). Dahası, afin dönüşümler uygun olmayan kamera açılarından dolayı oluşan görüntüdeki geometrik bozulmaları düzeltmek için de kullanılır. Örneğin, uydu görüntülerindeki geniş açılı lens bozukluğunu, panorama di kişini ve görüntü kaydını düzeltmek için afin dönüşümler kullanır. Bunun için görüntülerdeki çarpıklığı ve bozukluğu gidermek için görüntüleri büyük, düzlemsel bir koordinat sistemine resmetmek ve burada birleştirmek hedeflenir (mathworks Web Source 2019). Özellikle RAS ve IJK koordinat sistemlerini birbirine dönüştüren afin dönüşümler sıklıkla kullanılmaktadır (Chand 2019). Bu sayede görüntüler daha kolay işlenir ve kullanışlı hale gelir. Afin şifreleme işlemlerinde kullanılan S-Box iki aşamasından ilki olarak çarpmaya göre ters ve daha sonra afin dönüşüm işlemi uygulanır (Bayraktar 2014). Tıp alanında görüntüleme cihazları aldıkları görüntüleri işleyip ekrana yansıtırken afin dönüşümler kullanır (NiBabel Web Source 2019).

Bu tezde reel sayı düzlemindeki afin dönüşümler tanıtılacak ve buradaki yansıma dönme gibi dönüşümler verilecektir. Öteleme ve dönme hareketleri ile bir koniği merkezil bir koniğe dönüştüren afin dönüşüm ifade edilecektir. Karmaşık sayı düzlemindeki afin dönüşümler

$$f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\bar{\mathbf{z}} + C, A, B, C \in \mathbb{C}$$

şeklinde tek bir dönüşümle belirtilecektir. f dönüşümünde afin dönüşümün dönme, yansıma ve öteleme, vb. türleri ile A, B, C katsayıları arasındaki ilişki belirlenecektir (Kocic ve Majetic 2006). Ayrıca, afin dönüşümlerin bir uygulaması olarak, fraktaller incelenecek ve fraktal örnekleri verilecektir (Berardo 2018), (Kocic ve Majetic 2006). Bu çalışmada özgün olarak, karmaşık düzlemdeki afin dönüşümleri ifade etmede kullanılan afin dönüşüm, hiperbolik düzlemde

$$A, B, C \in \mathbb{P}, f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\bar{\mathbf{z}} + C$$

şeklinde tanımlanacaktır. Bu afin dönüşümde karmaşık düzlemde olduğu gibi afin dönüşü mün türünün f dönüşümünün A, B, C katsayıları ile olan ilişkisi incelenecektir. Karmaşık sayılarda olduğu gibi hiperbolik düzlemde afin dönüşümlerin bir uygulaması olarak fraktaller verilecektir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde afin dönüşümlerle ilgili temel kavramlar verilecek ve bu konudaki kaynaklar taranarak, konuya hazırlık yapılacaktır. Öncelikle, reel koordinat düzleminde afin dönüşümlerin özellikleri ve afin dönüşümün temel teoremi ispatlanacaktır. Reel düzlemde ki bir şeklin alanı ile, bu şeklin afin dönüşüm altındaki görüntüsünün alanı arasındaki ilişki incelenecektir. Bir koniği reel düzlemdeki dönme ve öteleme hareketleri ile merkezi konik haline getiren bir dönüşüm verilecektir. Daha sonra, karmaşık düzlemde afin dönüşümleri tek bir dönüşüm halinde ifade eden bir dönüşüm incelenecektir. Karmaşık düzlemde afin dönüşümlerin uygulaması olarak fraktal örnekleri verilecektir.

2.1. Reel Düzlemde Afin Dönüşümler

Tanım 2.4. $\mathbf{A}$ 2×2 *türünden tersinir bir matris ve* $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ *bir vektör olmak üzere,*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= \mathbf{A}\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

fonksiyonuna bir afin dönüşüm denir. $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}$ *afin dönüşümünde* $\mathbf{A}$ *tersinir bir matris olduğu için* f^{-1} *dönüşümünün de bir afin dönüşüm olduğu açıktır (Byer, Lazebnik ve Smeltzer 2010).*

Teorem 2.5. *İki afin dönüşümün bileşkesi bir afin dönüşümdür (Byer, Lazebnik ve Smeltzer 2010).*

İspat $f(x) = \mathbf{A}\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{a}}$ ve $g(x) = \mathbf{B}\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}$ afin dönüşüm olsun.

$$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

ise,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= g(f(\overrightarrow{\mathbf{x}})) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{a}}) + \overrightarrow{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}\overrightarrow{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}}) \end{aligned}$$

olur ki, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ tersinir matris olduğundan $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ matrisi de tersinir matiristir. Buna göre, $(g \circ f)(\overrightarrow{\mathbf{x}})$ bir afin dönüşümdür. □

Önerme 2.6. *Öteleme bir afin dönüşümdür. Kısaca,*

$$f(x) = \mathbf{I}_{2\times 2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{a}}$$

eşitliğiyle verilir.

Önerme 2.7. *Dönme bir afin dönüşümdür. Kısaca,*

$$f(x) = \mathbf{R}_O^{\theta}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

eşitliğiyle verilir.

2.2. Afin Dönüşümün Özellikleri

Teorem 2.8. $ad - bc \neq 0$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) &= (ax + by + m, cx + dy + n) \end{aligned}$$

fonksiyonu bir afin dönüşümdür. F afin dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir (Byer, Lazebnik ve Smeltzer 2010):

1. *F birebir ve örtendir.*
2. *F afin dönüşümü bir doğruyu, bir doğruya dönüştürür.*
3. *F bir doğru parçasını, bir doğru parçasına dönüştürür.*
4. *F afin dönüşümü birbirine paralel iki doğruyu, birbirine paralel olan iki farklı doğruya dönüştürür.*
5. *F afin dönüşümü eğimi* m *olan bir doğruyu, eğimi*

   $$\frac{c + dm}{a + bm}$$

   olan bir doğruya dönüştürür.

6. *A, B, C noktalarının F afin dönüşümü altındaki görüntüleri A', B', C' olsun. C, $[AB]$ üzerinde ise C', $[A'B']$ üzerindedir ve*

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|A'C'|}{|C'B'|}$$

eşitliği vardır.

7. *F afin dönüşümü bir n kenarlı bir çokgeni, n kenarlı bir çokgene dönüştürür.*

İspat

1. F afin dönüşümünün birebir olması için,

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \text{ ise } F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$$

şartı sağlanmalıdır. Birebir olma özelliği olmayana ergi yöntemi ile ispat edilebilir. Buna göre,

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \text{ iken } F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$$

olarak yazılabilir. Böylece,

$$F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$$

eşitliğinden,

$$(ax_1 + by_1 + m, cx_1 + dy_1 + n) = (ax_2 + by_2 + m, cx_2 + dy_2 + n)$$

yazılabilir. Buradan da, sıralı iklilerin eşitliği özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + m &= ax_2 + by_2 + m \\ cx_1 + dy_1 + n &= cx_2 + dy_2 + n \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin ortak çözümü

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{b}{d} = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \\ \frac{a}{c} &= \frac{b}{d} \\ ad - bc &= 0 \end{aligned}$$

sonucunu verir. Bu sonuç afin dönüşümün

$$ad - bc \neq 0$$

şartı ile çelişir. Buna göre, F afin dönüşümü birebirdir.

İspatın ikinci aşaması F afin dönüşümünün örten olduğunu gösterilmesidir. Buna göre, örten fonksiyon tanımından, $\forall(p,r) \in F(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere;

$$F(x,y) = (ax + by + m, cx + dy + n) = (p,r)$$

olacak şekilde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sıralı ikilisinin var olduğu gösterilmelidir. Buradan,

$$\begin{aligned} ax + by + m &= p \\ cx + dy + n &= r \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde, x ve y bilinmeyenleri

$$x = \frac{br - pd + md - bn}{bc - ad} \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad y = \frac{ar - pc + mc - an}{ad - bc} \in \mathbb{R}$$

şeklinde bulunur. Afin dönüşümün matrisinin determinantının, yani

$$ad - bc \neq 0$$

olması şartından dolayı x ve y reel sayıları her zaman vardır. Buradan

$$\forall(p,r) \in F(\mathbb{R}^2) \text{ iken } \left(\frac{br - pd + md - bn}{bc - ad}, \frac{ar - pc + mc - an}{ad - bc}\right) \in \mathbb{R}^2$$

olacak şekilde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vardır. Böylece, F afin dönüşümü örtendir.

2. F afin dönüşümü,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (ax + by + m, cx + dy + n) \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde matris ile ifade edilisin. Bu ifadede,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ve } \mathbf{h} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

olarak alındığında bir $l : \overrightarrow{\mathbf{p}} + t \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$, $t \in \mathbb{R}$ doğrusunun F afin dönüşümü altındaki görüntüsü

$$\begin{aligned} F(\overrightarrow{\mathbf{p}} + t \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}) &= \mathbf{A} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{p}} + t \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}) + \mathbf{h} \\ &= (\mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\mathbf{p}} + \mathbf{h}) + t \cdot (\mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada,

$$\mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\mathbf{p}} + \mathbf{h} = \overrightarrow{\mathbf{p}}_1 \quad \text{ve} \quad \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{v}}_1$$

olarak alınsın. Böylece, F afin dönüşümü altında l doğrusunun görüntüsü, l_1 doğ rusu olmak üzere,

$$l_1 : \overrightarrow{\mathbf{p}}_1 + t \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \ t \in \mathbb{R}$$

bir doğru belirtir.

1. 2.'deki ispatta $t \in [0, 1]$ aralığına kısıtlandığında bu maddenin ispatı yapılır.

2. Biribirine paralel olan iki doğru $l : \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} + \mathbf{p}$ ve $d : \kappa \overrightarrow{\mathbf{u}} + \mathbf{q}$ olsun. Burada, l doğrusunun F afin dönüşümü altındaki görüntüsü alındığında,

$$\begin{aligned} F(l) &= F(\lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} + \mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot (\lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} + \mathbf{p}) + \mathbf{h} \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{h}) + \lambda(\mathbf{A} \overrightarrow{\mathbf{u}}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu son ifadede, $\mathbf{A} \overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörüne $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ ve $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{h})$ noktası da $\mathbf{p}_1$ olarak alınsın. Böylece,

$$F(l) : \lambda \overrightarrow{\mathbf{v}} + \mathbf{p}_1$$

ve benzer şekilde d doğrusunun görüntüsü,

$$F(d) : \lambda \overrightarrow{\mathbf{v}} + \mathbf{q}_1$$

olarak bulunur. $F(l)$ ve $F(d)$ doğrularının doğrultman vektörleri paralel olduğundan bu iki doğrunun paralel olduğu görülür.

3. Eğimi m olan doğru üzerindeki iki nokta $A(t_1, t_2)$ ve $B(k_1, k_2)$ olsun. Buna göre, AB doğrusunun eğimi,

$$m = \frac{t_2 - k_2}{t_1 - k_1}$$

şeklinde ifade edilir. A ve B noktalarının F afin dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$\begin{aligned} F(A) &= (at_1 + bt_2 + m, ct_1 + dt_2 + n) = A' \\ F(B) &= (ak_1 + bk_2 + m, ck_1 + dk_2 + n) = B' \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, $A'B'$ doğru parçasının eğimi,

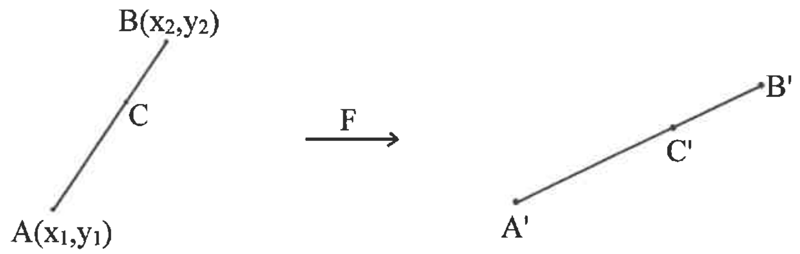
$$m_{A'B'} = \frac{c(k_1 - t_1) + d(k_2 - t_2)}{a(k_1 - t_1) + b(k_2 - t_2)}$$

olur. Burada, $m_{A'B'}$ oranında $(t_2 - k_2)$ yerine, $m(t_1 - k_1)$ yerine yazıldığında, eğim,

$$m_{A'B'} = \frac{c(t_1 - k_1) + dm(t_1 - k_1)}{a(t_1 - k_1) + bm(t_1 - k_1)} = \frac{c + dm}{a + bm}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre, AB doğrusunun F afin dönüşümü altındaki görüntüsü olan $A'B'$doğrusunun eğiminin $\frac{c+dm}{a+bm}$ olduğu görülür.

4. AB doğru parçası üzerinde bir nokta C olsun (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. C noktasının AB doğru parçası üstündeki konumu ve $C' = F(C)$ noktasının $A'B'$ noktası üzerindeki görüntüsü

C, AB doğru parçası üzerinde olduğu için $\frac{|AC|}{|CB|} = k$ olacak şekilde bir k reel sayısı vardır. Buna göre,

$$C = \left(\frac{x_1 + k \cdot x_2}{k + 1}, \frac{y_1 + k \cdot y_2}{k + 1} \right)$$

şeklinde yazılır. A ve B noktalarının F afin dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$\begin{aligned} F(A) &= (ax_1 + by_1 + m, cx_1 + dy_1 + n) = A' \\ F(B) &= (ax_2 + by_2 + m, cx_2 + dy_2 + n) = B' \end{aligned}$$

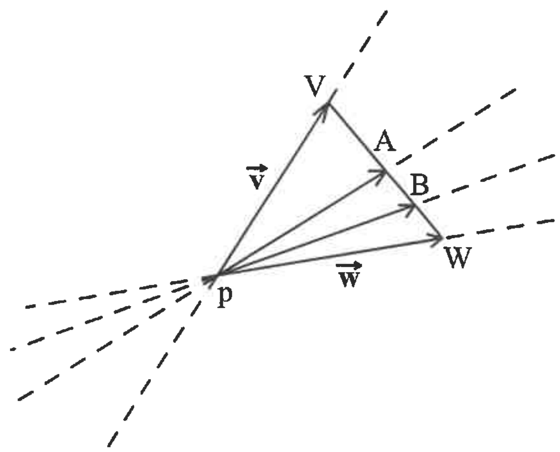
olarak bulunur.

C noktasının F afin dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$\begin{aligned}
F(C) &= \left(a(\frac{x_1+kx_2}{k+1})+b(\frac{y_1+ky_2}{k+1})+m, c(\frac{x_1+kx_2}{k+1})+d(\frac{y_1+ky_2}{k+1})+n\right) \\
&= \left(\frac{ax_1+by_1+k(ax_2+by_2)+(k+1)m}{k+1}, \frac{cx_1+dy_1+k(cx_2+dy_2)+(k+1)n}{k+1}\right) \\
&= \left(\frac{(ax_1+by_1+m)+k(ax_2+by_2+m)}{k+1}, \frac{cx_1+dy_1+n+k(cx_2+dy_2+n)}{k+1}\right) \\
&= C'
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, C' noktasının, $A'B'$ doğru parçasını $\frac{|A'C'|}{|C'B'|} = k$ olacak şekilde böldüğü görülür.

5. Bu teorem, $n \geqq 3$ için tümevarım metodu ile ispatlanabilir. Buna göre, önce $n = 3$ için F afin dönüşümünün bir üçgeni bir üçgene dönüştürdüğü gösterilebilir.



Şekil 2.2. p noktasındaki $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörlerinin Ü: $p + s\vec{v} + t\vec{w}$ denklemi ile oluşturdukları üçgen

Şekil 2.2.'deki üçgeni ve üçgenin iç bölgesi,

$$\text{Ü} : p + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w} \qquad s,t \in [0,1] \quad , s+t \leq 1 \text{ ve } \vec{v} \nparallel \vec{w}$$

ile ifade edilsin. Bir üçgen bu şekilde ifade edildiğinde, $s = 0$ alındığında $p + t \cdot \vec{w}$ noktaları $t \in [0,1]$ aralığında ilerlerken üçgenin $\vec{w}$ doğrultusundaki kenarının noktalarını; aynı şekilde $t = 0$ alındığında $p + s \cdot \vec{v}$, $\vec{v}$ doğrultusundaki kenarının noktalarını ve $s + t = 1$ olacak şekilde alındığında Ü ifadesinin üçgenin

$[VW]$ kenarını oluşturduğu görülür. Örneğin, Şekil 2.2'de görüldüğü gibi A noktası $(s,t) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ve B noktası $(s,t) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ olacak şekilde $[VW]$ kenarı üzerinde belirlenebilir. Buna göre, Ü üçgeninin F afin dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$\begin{aligned} F(\text{Ü}) &= \mathbf{A} \cdot (p + s \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}} + t \cdot \overrightarrow{\mathbf{w}}) \\ &= \mathbf{A} \cdot p + s \cdot \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}} + t \cdot \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\mathbf{w}} \\ &= p_1 + s \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + t \cdot \overrightarrow{\mathbf{w}}_1 \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ifadede $s, t \in [0,1]$, $s+t \leq 1$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} \nparallel \overrightarrow{\mathbf{w}}$ olduğundan $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 \nparallel \overrightarrow{\mathbf{w}}_1$ dir. Böylece, $n = 3$ için $F(\text{Ü})$ üçgen belirtir.

F afin dönüşümü $n \leq k$ için k kenarlı bir çokgeni k kenarlı bir çokgene dönüştürsün. Tümevarım adımı gereği, $n = k + 1$ için F afin dönüşümünün n kenarlı bir çokgeni n kenarlı bir çokgene dönüştürdüğü gösterilmelidir. Böylece, teoremin her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğu gösterilmiş olur.

P, $(k+1)$ kenarlı bir çokgen olsun. P çokgeninin iç bölgesinde kalan bir $[AB]$ köşegeni ile P çokgeni P_1 ve P_2 çokgenlerine bölünebilir. $3 \leq t \leq k$ olmak üzere; P_1 t kenarlı olsun. Böylece, P_2 çokgeni,

$$(k+1) - (t-1) + 1 = k + 3 - t$$

kenarlı olur. Buna göre, $3 \leq t \leq k$ olduğundan

$$k + 3 - t < k$$

ve $F(P_2)$ çokgeni $(k+3-t)$ kenarlı bir çokgendir. Bu iki çokgenin A ve B noktalarının F altındaki görüntüleri, $F(A) = A_1$ ve $F(B) = B_1$ noktalarıdır. Buna göre $F(P_1)$ ve $F(P_2)$ çokgenleri $[A_1B_1]$ kenarına sahiptir. Bu çokgenler $[A_1B_1]$ kenarından karşılıklı olarak birleştirilirlerse $F(P)$,

$$(t + k + 3) - t - 2 = k + 1$$

kenarlı çokgeni elde edilir. Buna göre, bir F afin dönüşümü n kenarlı bir çokgeni, n kenarlı bir çokgene dönüştürür.

□

2.3. Afin Dönüşümün Temel Teoremi

Afin dönüşümün temel teoremi, elemanları doğrudaş olmayan eleman sayıları aynı olan herhangi iki nokta kümesi arasında tek bir dönüşüm olduğunu söyler. Bu teorem, bir görüntünün afin dönüşüm altındaki görüntüsünün tek olduğunu ve kameranın belli bir açı ile çektiği görüntüyü düzeltirken tek bir sonuç elde edileceğini, S-Box tipi bir şifre çözüldüğünde, şifrenin tek bir bilgiye ulaştıracağını veya mimari bir çizimde iki farklı ölçeklendirmeden elde edilecek taslak çizimlerin aynı şeyi ifade ettiğini teorik olarak gösterir.

Teorem 2.9. *İki farklı doğrudaş olmayan üç elemanlı nokta kümesi arasında yalnız bir tane afin dönüşüm vardır (Byer, Lazebnik ve Smeltzer 2010).*

İspat Elemanları doğrudaş olmayan iki farklı nokta kümesi

$$S = \{O = (0,0),\ A(1,0),\ B(0,1)\}$$

ve

$$T = \{p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2), r = (r_1, r_2)\}$$

kümeleri olsun. Bu iki nokta kümesi arasında

$$\begin{aligned} G &: S \to T \\ G(x,y) &= \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşümde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_1 - p_1 \end{bmatrix} \text{ ve } b = p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

olarak alınsın. p, q, r noktaları doğrudaş nokta olmadığı için $\mathbf{A}$ matrisinin satır veya sütun vektörleri lineer bağımsızdır. Bu yüzden, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ dır. Bundan dolayı,

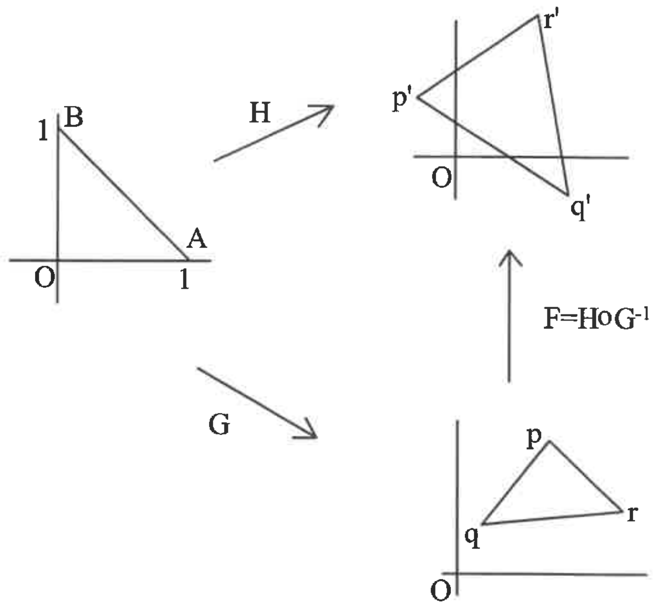
$$G(x,y) = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b$$

bir afin dönüşüm belirtir.

Buna göre, G afin dönüşümünde O, A, B noktalarının görüntüleri,

$$\begin{aligned} G(O) &= \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+b=p \\ G(A) &= \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+b=q \\ G(B) &= \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+b=r \end{aligned}$$

olarak bulunur.



Şekil 2.3. p, q, r ve p', q', r' nokta kümeleri arasındaki afin dönüşüm

Böylece S ve T kümesi arasında bir G afin dönüşümü vardır. Aynı şekilde, S ve $T' = \{p' = (p'_1, p'_2), q' = (q'_1, q'_2), r' = (r'_1, r'_2)\}$ nokta kümesi arasında

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} q'_1 - p'_1 & r'_1 - p'_1 \\ q'_2 - p'_2 & r'_1 - p'_1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad b' = p' = \begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} H &: S \rightarrow T' \\ H(x,y) &= \mathbf{A}'\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+b' \end{aligned}$$

afin dönüşümü tanımlanabilir. $F = H \circ G^{-1}$ afin dönüşümü T ve T' farklı doğrudaş olmayan nokta kümesini birbirine dönüştürür (Şekil 2.3). Ayrıca, F dönüşümünü T ve T'

nokta kümesinin elemanları cinsinden yazılmak istendiğinde,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= H \circ G^{-1}(x,y) \\
&= \mathbf{A}' \cdot \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \left[G(x,y) - b \right] + b' \\
&= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot G(x,y) - \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}^{-1} b + b'
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Dönüşümün benzersiz olduğunu kanıtlamak için, varsayalım ki, bu iki farklı doğrudaş olmayan nokta kümesini birbirine dönüştüren

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &\neq \mathbf{B} \text{ ve } a \neq b \text{ olmak üzere,} \\
F &= \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + a \text{ ve } T = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b
\end{aligned}$$

gibi iki farklı afin dönüşüm olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
F(p) &= \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + a \qquad T(p) = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + b \\
F(q) &= \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + a \qquad T(q) = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + b \\
F(r) &= \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + a \qquad T(r) = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + b
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. F ve T afin dönüşümleri birebir ve örten olduğundan

$$\{F(p), F(q), F(r)\} ve \{T(p), T(q), T(r)\}$$

görüntü kümelerinin elemanları karşılıklı olarak eşittir. Bu eşleşme $F(p) = T(q)$, $F(q) = T(r)$ ve $F(r) = T(p)$ olduğunu kabul edilebilir. Bu eşitliklerde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
F(p) = T(q) &\implies \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + a = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + b \\
&\implies b - a = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(q) = T(r) &\implies \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + a = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + b \\
&\implies b - a = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} - \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(r) = T(p) &\Longrightarrow \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + a = \mathbf{B}\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + b \\ &\Longrightarrow b - a = \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} - \mathbf{B}\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliklerin ortak çözümü yapıldığında,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - \mathbf{B}\cdot\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} - \mathbf{B}\cdot\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{B}\cdot\begin{bmatrix} q_1 - r_1 \\ q_2 - r_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - \mathbf{B}\cdot\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} - \mathbf{B}\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} p_1 - r_1 \\ p_2 - r_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{B}\cdot\begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} - \mathbf{B}\cdot\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} - \mathbf{B}\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} q_1 - r_1 \\ q_2 - r_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{B}\cdot\begin{bmatrix} r_1 - p_1 \\ r_2 - p_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikler taraf tarafa çarpıldığında $\mathbf{A}^3 = \mathbf{B}^3$ bulunur. Buradan $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ve $a = b$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Aynı şekilde $\{F(p), F(q), F(r)\}$ ve $\{T(p), T(q), T(r)\}$ kümelerinin elemanlarının farklı eşleştirmelerinde aynı çelişki elde edilir. Bundan dolayı, iki farklı üç elemanlı, elemanları doğrudaş olmayan iki nokta kümesini birbirine dönüştüren tek bir afin dönüşüm vardır. □

Sonuç 2.10. *Herhangi iki üçgen verildiğinde üçgenlerden birini diğerine dönüştüren bir tek afin dönüşüm vardır (Byer, Lazebnik ve Smeltzer 2010).*

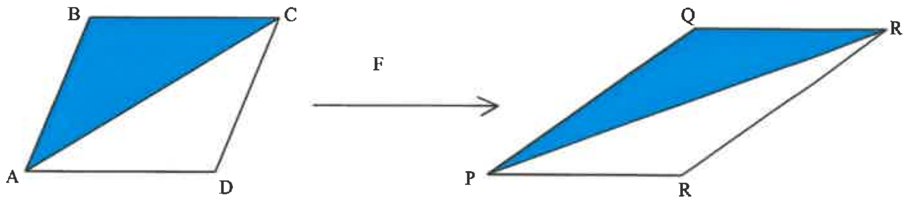
İspat Afin dönüşümün temel teoremine göre bir üçgenin üç köşesini diğer bir üçgenin üç köşesine dönüştüren bir afin dönüşüm bulunabilir. Bu afin dönüşüm üçgenin kenarlarını diğer üçgenin kenarlarına dönüştürür. □

Sonuç 2.11. *Herhangi iki paralelkenar verildiğinde bu paralelkenarların birini diğerine dönüştüren bir afin dönüşüm vardır (Byer, Lazebnik ve Smeltzer 2010).*

İspat $ABCD$ ve $PQRS$ paralelkenar ve $[AC]$ ve $[PR]$ paralelkenarın köşegenleri olsun Şekil 2.4. Sonuç 2.12'den $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgenini $\overset{\triangle}{PQR}$ üçgenine dönüştüren bir F afin dönüşümü vardır. Bu afin dönüşüm

$$F(A) = P, F(B) = Q \text{ ve } F(C) = R.$$

şeklinde noktaları eşleştirdiği varsayılsın.



Şekil 2.4. ABCD paralelkenarının F dönüşümü altındaki görüntüsü PQRS

Böylece, bir afin dönüşüm paralelliği koruduğu için, $[AD]$ ve $[CD]$ kenarlarının görüntüleri olan $[PS]$ ve $[RS]$ sırasıyla $[QR]$ ve $[QP]$ kenarlarına paraleldir. Buradan, $F(D) = S$ olarak bulunur. □

Teorem 2.12. *Her $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $F(x,y) = \mathbf{A} \cdot \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] + b$ afin dönüşümü, düzlemsel bir P çokgenini, alanı P çokgeninin alanın $|\det \mathbf{A}|$ katı olan $F(P)$ çokgenine dönüştürür. Diğer bir deyişle,*

$$\frac{Alan(F(P))}{Alan(P)} = \det \mathbf{A}$$

eşitliği sağlanır (Byer, Lazebnik ve Smeltzer 2010).

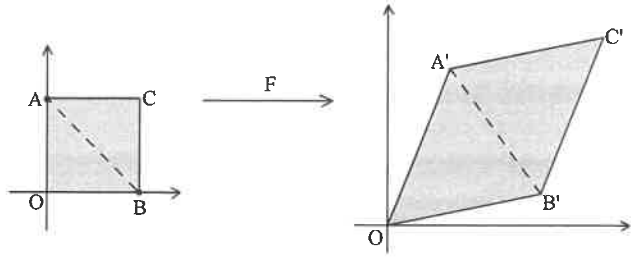
İspat $F(x,y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ bir afin dönüşüm olsun.

$$\frac{Alan(F(P))}{Alan(P)} = k$$

olarak alınsın. Bu orandaki k sayısı, $A(1,0)$, $B(0,1)$ $C(1,1)$ ve O noktaları ile oluşturulan karenin alanının F afin dönüşümü altında oluşan parelelkenarın alanına oranı olarak alınabilir (Şekil 2.5). Böylece, $AOBC$ karesinin F altındaki görüntüsü olan $A'O'B'C'$ paralekenarının köşe noktaları,

$$\begin{aligned} F(A) &= A' = (a,c) \text{ ve } F(B) = B' = (b,d) \\ F(C) &= C' = (a+b, c+d) \text{ ve } F(O) = O \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan, paralelkenarın alanı hesaplanabilir. Buna göre,



Şekil 2.5. $AOBC$ paralelkenarının F dönüşümü altındaki görüntüsü $A'O'B'C'$

(Şekilde $a > b > 0$ ve $c > d > 0$ alınmıştır.)

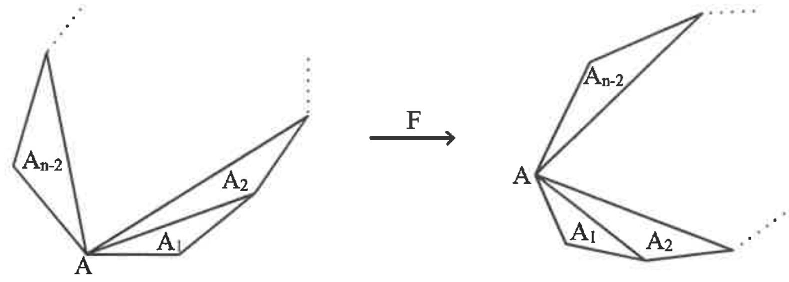
$$\begin{aligned} \text{Paralelkenarın alanı} &= \det(OA', OB') \\ &= \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc = \det \mathbf{A} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buna göre, k oranı,

$$\frac{Alan(OA'B'C')}{Alan(OABC)} = k = \det \mathbf{A}$$

dönüşümün matrisinin determinatı olarak bulunur. Böylece; F afin dönüşümünün OA ve OB kenarlarına sahip birim kareyi, alanı $|\det \mathbf{A}|$ olan bir paralelkenara dönüştürdüğü görülür. Aynı düşünce ile paralelkenarın $[A'B']$ köşegeni ile oluşturulan $A'B'O$ üçgeninin alanının, karenin $[AB]$ köşegeni ile oluşturulan ABO üçgenin alanına oranı da $|\det \mathbf{A}|$ olur.

Teoremi genelleştirmek için, F afin dönüşümünün n kenarlı P çokgeni, n kenarlı P' çokgenine dönüştürdüğünü kabul edilsin. Aşağıda Şekil 2.6'da görüldüğü gibi P çokgeni A köşesinden çizilen köşegenlerle elde edilen $(n-2)$ üçgensel bölgeye parçalanabilir. Oluşturulan bu üçgenler F dönüşümü tarafından, P' çokgeninin $F(A) = A'$ köşesinden çizilen köşegenlerle oluşturulan $(n-2)$ üçgene dönüştürülür. Diğer bir deyişle, A_1 üçgeni, $F(A_1)$ üçgenine, A_2 üçgeni, $F(A_2)$ üçgenine, ... ve $A_{(n-2)}$ üçgeni, $F(A_{(n-2)})$ üçgenine resmedilir. Bu üçgenlerin birer kenarları ortak olduğundan üçgenlerin birleşimi P' çokgenini oluşturur. Bu üçgenlerin karşılıklı olarak alanları oran-landığında, bu oranların herbiri dönüşümün determinantına eşit olduğundan,



Şekil 2.6. P ve P' çokgenlerinin köşegenleri ile parçalanışı

$$\frac{Alan(A'_1)}{Alan(A_1)} = \frac{Alan(A'_2)}{Alan(A_2)} = \cdots = \frac{Alan(A'_{n-2})}{Alan(A_{n-2})} = |\det \mathbf{A}|$$

orantısı yazılabilir. Böylece, bu oranların payları ve paydaları kendi aralarında toplandığın da, oran,

$$\frac{\sum Alan(A'_i)}{\sum Alan(A_i)} = \frac{Alan\ P'}{Alan\ P} = |\det \mathbf{A}|$$

olur. Buna göre, k çarpanı $\mathbf{A}$ matrisinin determinantının mutlak değerine eşittir. □

2.4. Koniklerin Afin Dönüşümü

Genel olarak

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

kapalı denklemi ile verilen bir koniğin matrislerle ifadesi,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

şeklinde verilebilir. Bu gösterimi kullanmak, kapalı denkleme göre afin dönüşüm işlemlerini yapmada kolaylık sağlayacağı için tercih edilecektir. Bu gösterimdeki 2×2 matrisin öz değer ve öz vektörleri kullanılarak elde edilen matrisler vasıtasıyla oluşturulacak bir afin dönüşümle konik merkezil hale getirilecektir. Daha sonra bir elipsi birim çembere dönüştüren afin dönüşüm verilecektir.

Tanım 2.13. *Bir koniğin genel denklemi, $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

şeklindedir. Bu denklemde,

$$\begin{aligned} \delta &= B^2 - 4AC < 0 \text{ ise denklem bir elips,} \\ \delta &= B^2 - 4AC = 0 \text{ ise denklem bir parabol,} \\ \delta &= B^2 - 4AC > 0 \text{ ise denklem bir hiperbol} \end{aligned}$$

belirtir (Özdemir 2016).

Teorem 2.14. *Bir afin dönüşüm, bir koniği başka bir koniğe dönüştürür ve bu dönüşüm koniğin türünü değiştirmez (Byer, Lazebnik ve Smeltzer 2010).*

İspat Varsayalım ki,

$$\mathcal{K} : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

bir konik denklemi olsun. **A**, 2×2 tersinir bir matris ve $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= \mathbf{A}\overrightarrow{\mathbf{x}} + b \end{aligned}$$

bir afin dönüşümü verilsin. $\mathcal{K}$ koniği üzerindeki (x,y) noktasının, f afin dönüşümü altındaki görüntüsü (x',y') olarak alınsın. f afin dönüşümünün tersi

$$f^{-1}(x',y') = \mathbf{A}^{-1}(x',y') - \mathbf{A}^{-1}b = (x,y)$$

şeklindedir. Burada, A matrisinin tersi,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ve } -\mathbf{A}^{-1}b = \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix}$$

olsun. Buna göre; f^{-1} dönüşümü (x',y') noktasını,

$$\begin{aligned} x &= ax' + by' + t, \\ y &= cx' + dy' + u \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilen (x,y) noktasına dönüştürür. Bu eşitlikler $\mathcal{K}$ koniğinde x ve y ye rine yazılırsa, x' ve y' değişkenlerine bağlı ikinci dereceden iki bilinmeyenli bir konik denklemi elde edilir. Bu denklemin ifade ettiği konik $\mathcal{K}'$ olsun. $\mathcal{K}'$ denklemi bir elips, hiperbol veya parabol türünden bir konik belirtir. Çünkü, afin dönüşüm bir noktayı noktaya, bir doğruyu doğruya, bir doğru parçasını bir doğru parçasına dönüştürür. Eğer $\mathcal{K}'$ bir nokta, bir doğru veya bir doğru parçası olsaydı, f^{-1} afin dönüşümü bu nokta, doğru veya doğru parçasını yine bir nokta, bir doğru veya bir doğru parçasına dönüştürürdü. Fakat, bu $\mathcal{K}$ koniğinin elips, hiperbol veya parabol türünden bir konik olması ile çelişirdi. $\mathcal{K}'$ koniğinin denklemi:

$$\begin{aligned} A(ax'+by'+t)^2 + B(ax'+by'+t)(cx'+dy'+u) + C(cx'+dy'+u)^2 \\ +D(ax'+by'+t) + E(cx'+dy'+u) + F = 0 \end{aligned}$$

olacaktır. Bu ifade düzenlendiğinde, bulunan $\mathcal{K}'$ koniğinin diskriminantı,

$$\delta' = (ad-bc)^2 \cdot (B^2 - 4AC)$$

olarak bulunur. Bu ifadeye göre; $\mathcal{K}'$ koniğinin diskriminantı, f afin dönüşümünün mat risinin determinantı ile $\mathcal{K}$ koniğinin diskriminantına bağlıdır. Bir koniğin türü diskriminantının işaretine göre belirlendiği için, δ' sayısının işareti,

$$(ad-bc)^2 > 0$$

olduğundan, f dönüşümünün determinantından işaret olarak etkilenmez. Bundan dolayı, $\mathcal{K}'$ koniğinin türü sadece $\mathcal{K}$ koniğinin diskriminantına, yani,

$$(B^2 - 4AC)$$

sayısının işaretine bağlıdır. Bundan dolayı da, $\mathcal{K}$ koniğinin diskrinantının işareti ile $\mathcal{K}'$ koniğinin diskriminantının işareti aynıdır. Sonuç olarak; $\mathcal{K}'$ koniğinin türü, $\mathcal{K}$ koniğinin türü ile aynıdır. □

Tanım 2.15. *$A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

koniği için,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}.$$

biçiminde tanımlanan matrise, koniğin kuadratik kısmının matrisi denir.

Önteorem 2.16. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ *simetrik bir matris olsun.* $\mathbf{A}$ *matrisinin öz değerleri λ_1, λ_2; bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler ise sırasıyla $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ olsun. Bu durumda,*

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde ortogonal bir $\mathbf{P}$ *matrisi vardır. Öyleki,* $\mathbf{P}$ *matrisi,* $\mathbf{A}$ *matrisinin sırasıyla λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen birim özvektörlerinin sütun olarak yazılmasıyla elde edilir.*

Teorem 2.17. *$A,B,C,D,E,F \in \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$\mathcal{K} : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

koniğinin kuadratik kısmının matrisi $\mathbf{M}$ *olsun.* $\mathbf{M}$ *matrisinin öz değerleri λ_1, λ_2; bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler ise sırasıyla $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ olsun. $\mathcal{K}$ koniği,*

$$x_0 = -\frac{Du_1 + Eu_2}{2\lambda_1}, \quad y_0 = -\frac{Dv_1 + Ev_2}{2\lambda_2}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve } \mathbf{P}^T\mathbf{M}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$f^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x'+x_0 \\ y'+y_0 \end{bmatrix}$$

afin dönüşümü altında bir merkezil koniğe resmedilir. Koniğin asal ekseni olarak seçilen eksene karşılık gelecek olan öz değer, elips için küçük özdeğer, hiperbol için büyük olan özdeğer ve parabol için sıfır olan öz değer olarak seçilir.

İspat $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ konik denklemi işlemlerde kolaylık olması açısından matrisleri kullanarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

Bu konik denklemi, f^{-1} afin dönüşümü altında aşağıdaki koniğe dönüşür:

$$\left(\mathbf{P}\begin{bmatrix} x'+x_0 \\ y'+y_0 \end{bmatrix}\right)^T \mathbf{MP}\begin{bmatrix} x'+x_0 \\ y'+y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix}\mathbf{P}\begin{bmatrix} x'+x_0 \\ y'+y_0 \end{bmatrix} + F = 0$$

Bu ifade düzenlendiğinde,

$$\begin{bmatrix} x'+x_0 & y'+y_0 \end{bmatrix}(\mathbf{P}^T\mathbf{MP})\begin{bmatrix} x'+x_0 \\ y'+y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix}\mathbf{P}\begin{bmatrix} x'+x_0 \\ y'+y_0 \end{bmatrix} + F = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{bmatrix} x'+x_0 & y'+y_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'+x_0 \\ y'+y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Du_1+Eu_2 & Dv_1+Ev_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'+x_0 \\ y'+y_0 \end{bmatrix} + F = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(x'+x_0)^2+\lambda_2(y'+y_0)^2+(Du_1+Eu_2)(x'+x_0)+(Dv_1+Ev_2)(y'+y_0)+F &= 0 \\ \lambda_1(x'^2+2x'x_0+x_0'^2)+\lambda_2(y'^2+2y'y_0+y_0'^2)+(-2\lambda_1x_0)(x'+x_0)+(-2\lambda_2y_0)(y'+y_0)+F &= 0 \\ \lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2-\lambda_1x_0^2-\lambda_2y_0^2+F &= 0 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu son denklemde $\lambda_1x_0^2+\lambda_2y_0^2-F$ ifadesine F_1 denilirse, $F_1 \neq 0$ iken, son denklemi,

$$\frac{x^2}{\frac{F_1}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{F_1}{\lambda_2}} = 1$$

biçiminde, merkezil konik olarak yazılır. □

Örnek 2.18. $\mathcal{E} : 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ *koniği için*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

ile belirlidir. Bu matrisin özdeğer ve özvektörleri,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = \frac{7}{2} \leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

olarak bulunabilir. Bu koniğin asal ekseni y ekseni olarak seçilirse, Teorem 2.17'den, afin dönüşüm altında oluşacak elipsin asal ekseninin y olması için küçük olan özdeğer y_0 sayısı hesaplanırken kullanılmalıdır. Böylece,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \ \textit{ve } x_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{7} \ \textit{ve } y_0 = \sqrt{2}$$

olmak üzere, $\mathcal{E}$ elipsini merkezil bir elipse dönüştüren f^{-1} afin dönüşümü,

$$f^{-1}(x', y') = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x' + x_0 \\ y' + y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{3\sqrt{2}}{7} \\ y + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

olacaktır. Buna göre,

$$2x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

koniğinin matris formu,

$$\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) + \mathbf{I}_{2\times 2} = 0$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$B^2 - 4AC = -7 < 0$$

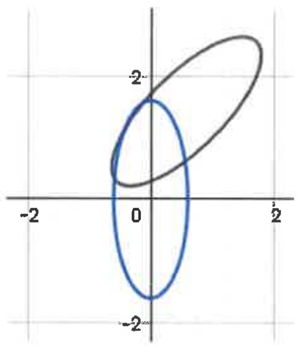
olduğundan bu konik bir elipstir. Bu koniğin f^{-1} afin dönüşümü altındaki görüntüsü, *gerekli işlemler yapıldığında,*

$$0 = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' - \frac{3\sqrt{2}}{7} \\ y' + \sqrt{2} \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' - \frac{3\sqrt{2}}{7} \\ y' + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' - \frac{3\sqrt{2}}{7} \\ y' + \sqrt{2} \end{bmatrix} + \mathbf{I}_{2\times 2}$$
$$0 = \begin{bmatrix} x' - \frac{3\sqrt{2}}{7} \\ y' + \sqrt{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' - \frac{3\sqrt{2}}{7} \\ y' + \sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' - \frac{3\sqrt{2}}{7} \\ y' + \sqrt{2} \end{bmatrix} + \mathbf{I}_{2\times 2}$$
$$0 = \frac{7}{2}(x' - \frac{3\sqrt{2}}{7})^2 + \frac{1}{2}(y' + \sqrt{2})^2 + \frac{6}{\sqrt{2}}(x' - \frac{3\sqrt{2}}{7}) - \frac{2}{\sqrt{2}}(y' + \sqrt{2}) + 1$$
$$0 = \frac{7}{2}x'^2 - 3\sqrt{2}x' + \frac{9}{7} + \frac{1}{2}y'^2 + \sqrt{2}y' + 1 + \frac{6}{\sqrt{2}}x' - \frac{18}{7} - \frac{2}{\sqrt{2}}y' - 2 + 1$$

eşitliğinden

$$\frac{x'^2}{\frac{18}{49}} + \frac{y'^2}{\frac{18}{7}} = 1$$

olarak bulunur (Şekil 2.7).



Şekil 2.7. $\mathcal{E}$ ve görüntüsü

Örnek 2.19. $\mathcal{H} : x^2 + 7xy - y^2 - x - y + 4 = 0$ *koniği için,*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

ile belirlidir. Bu matrisin özdeğer ve özvektörleri,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{53} \leftrightarrow \vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{u}}\|}\begin{bmatrix} -\frac{1}{7}\sqrt{53} - \frac{2}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{53} \leftrightarrow \vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}\begin{bmatrix} \frac{1}{7}\sqrt{53} - \frac{2}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunabilir. Konik $B^2-4AC=53>0$ *olduğundan bir hiperboldür. Afin dönüşüm altında oluşacak hiperbolün asal eksenini x ekseni olarak seçilirse, Teorem 2.17'den büyük özdeğer* x_0 *sayısını hesaplanırken kullanılır. Buna göre,*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_1 \end{bmatrix} \\
x_0 &= -\frac{1}{106}\left(\sqrt{53}-5\right)\sqrt{\frac{106}{49}-\frac{4}{49}\sqrt{53}} \\
y_0 &= \frac{1}{106}\left(\sqrt{53}+5\right)\sqrt{\frac{4}{49}\sqrt{53}+\frac{106}{49}}
\end{aligned}$$

olmak üzere, $\mathcal{H}$ *hiperbolünü merkezil bir hiperbole dönüştüren* f^{-1} *afin dönüşümü,*

$$f^{-1}(x',y') = \mathbf{P}\begin{bmatrix} x'+x_0 \\ y'+y_0 \end{bmatrix}$$

olacaktır.Böylece, $x^2+7xy-y^2-x-y+4=0$ *koniğinin matris formu,*

$$\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 4\mathbf{I}_{2\times 2} = 0$$

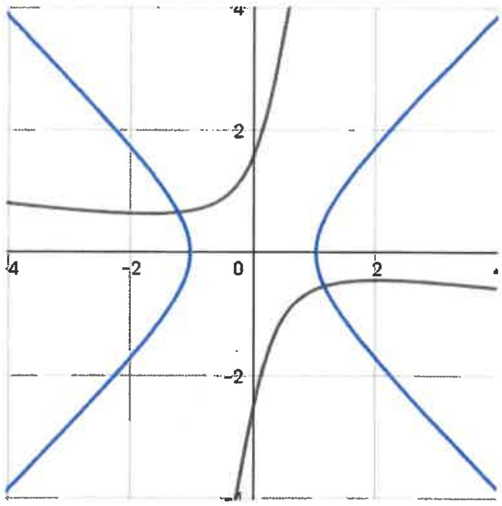
şeklindedir. Bu hiperbolün f^{-1} *afin dönüşümü altındaki görüntüsü,*

$$\begin{bmatrix} x'+x_0 & y'+y_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{53} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{53} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'+x_0 \\ y'+y_0 \end{bmatrix} +$$
$$+\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'+x_0 \\ y'+y_0 \end{bmatrix} + 4\mathbf{I}_{2\times 2} = 0$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında asal ekseni x ekseni üzerinde bulunan,

$$-\frac{1}{2}\sqrt{53}x'^2 + \frac{1}{2}\sqrt{53}y'^2 + \frac{205}{53} = 0$$

hiperbolü elde edilir (Şekil 2.8).



Şekil 2.8. $\mathcal{H}$ hiperbolü ve görüntüsü

Örnek 2.20. $\mathcal{P} : x^2 - 2xy + y^2 - 8x + 12y + 13 = 0$ *koniği için,*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ile belirlidir. Bu matrisin özdeğer ve özvektörleri,

$$\lambda_1 = 2 \leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = 0 \leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

olarak bulunabilir. $\mathcal{P}$ koniği $B^2 - 4AC = 0$ olduğundan bir paraboldür. Afin dönüşüm altında oluşacak parabolün asal ekseni y ekseni olarak seçilsin. Buna göre, Teorem 2.17'ye göre, y eksenini asal eksen yapabilmek için, sıfırdan farklı olan özdeğer x_0 sayısını hesap lanırken kullanılmalıdır. Böylece,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ x_0 &= -\frac{5}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

olmak üzere, $\mathcal{P}$ parabolünü asal ekseni y ekseni olan bir parabole dönüştüren f^{-1} afin dönüşümü,

$$f^{-1}(x', y') = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' - \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y' \end{bmatrix}$$

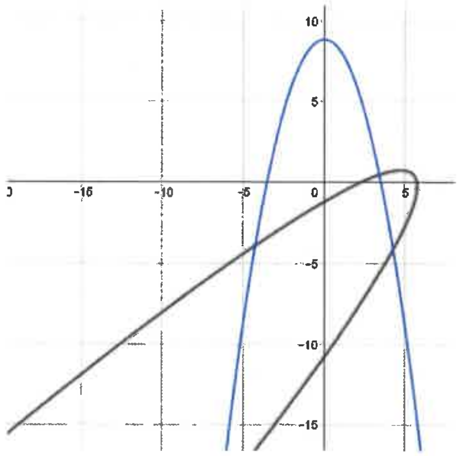
olacaktır. Böylece, $x^2 - 2xy + y^2 - 8x + 12y + 13 = 0$ *koniğinin matris formu,*

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -8 & -12 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + 13 = 0$$

olur. Bu parabolün f^{-1} *afin dönüşümü altındaki görüntüsü, gerekli düzenlemeler yapıldığında,*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'\text{-}\frac{5}{2}\sqrt{2} & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'\text{-}\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{-}8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'\text{-}\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y' \end{bmatrix} &= 0 \\ 2x'^2 + 2\sqrt{2}y' - 25 &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur (Şekil 2.9.).



Şekil 2.9. $\mathcal{P}$ parabolü ve görüntüsü

Teorem 2.21. *Herhangi bir* $\mathcal{E} : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ *elipsinin kuadratik kısmının matrisi* $\mathbf{M}$ *olsun.* $\mathbf{M}$ *matrisinin öz değerleri* λ_1*ve* λ_2*; bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler ise sırasıyla* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ *olmak üzere,*

$$x_0 = -\frac{Du_1 + Eu_2}{2\lambda_1}, \quad y_0 = -\frac{Dv_1 + Ev_2}{2\lambda_2}$$

ise,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x' + x_0 \\ y' + y_0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = g^{-1}(x'', y'') = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 - F}{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 - F}{\lambda_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

dönüşümlerinden elde edilen,

$$h(x, y) = (g \circ f)(x, y)$$

afin dönüşümü $\mathcal{E}$ elipsini merkezil birim çembere dönüştürür.

İspat Teorem 2.17'ye göre, $\mathcal{E}$ elipsi f^{-1} afin dönüşümü ile

$$\frac{x^2}{\frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 - F}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 - F}{\lambda_2}} = 1$$

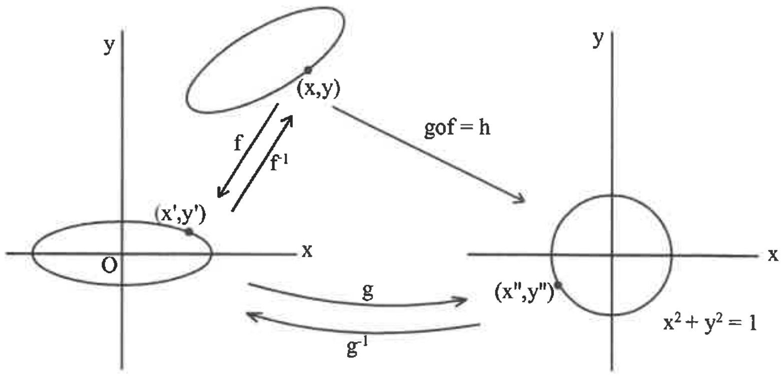
merkezil elipsine dönüşür. g afin dönüşümü ise, bu merkezil elipsi

$$x^2 + y^2 = 1$$

birim çemberine dönüştürür. Buna göre,

$$h(x, y) = (g \circ f)(x, y)$$

afin dönüşümü $\mathcal{E}$ elipsini birim çembere dönüştürür (Şekil 2.10).



Şekil 2.10. Bir elipsi birim çembere dönüştüren dönüşüm

□

Örnek 2.22. *Örnek 2.18'de,* $\mathcal{E}: 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ *elipsinin*

$$f^{-1}(x', y') = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' - \frac{3\sqrt{2}}{7} \\ y' + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

afin dönüşümü altında,

$$\frac{x'^2}{\frac{18}{49}} + \frac{y'^2}{\frac{18}{7}} = 1$$

merkezil elipsine dönüştüğü gösterilmişti. Bu merkezil elips de

$$g^{-1}(x'', y'') = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{18}{49}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{18}{7}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

afin dönüşümü ile $x^2 + y^2 = 1$ *çemberine dönüşür. Buna göre,* $\mathcal{E}$ *elipsi*

$$g \circ f$$

bileşke fonksiyonu ile birim çembere dönüşür.

Örnek 2.23. *Teorem 2.17'de ifade edilen afin dönüşüm, koniğin katsayıları kullanarak nasıl ifade edilebilir?*

Bunun için f^{-1} *afin dönüşümünün yazılmasında kullanılan öz değer ve öz vektörler bulunur. Buna göre,* $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ *koniğinin kuadrik kısmının*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$$

matrisinin öz değerleri, $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{M}| = 0$ *denkleminin kökleridir. Böylece, determinant işlemi yapıldığında,*

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{M}| &= \begin{vmatrix} \lambda - A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & \lambda - C \end{vmatrix} = 0 \\ 0 &= (\lambda - A)(\lambda - C) - \frac{B^2}{4} \\ 0 &= \lambda^2 - \lambda(A + C) + AC - \frac{B^2}{4} \end{aligned}$$

ikinci dereceden deklemi elde edilir. Bu ikinci dereceden denklemin diskriminantı her zaman sıfırdan büyük olduğundan her zaman denklemin reel kökleri vardır. Bundan dolayı,

$\mathbf{M}$ *matrisinin özdeğerleri,*

$$\lambda_1 = \frac{(A+C)+\sqrt{(A+C)^2-4(AC-\frac{B^2}{4})}}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{(A+C)-\sqrt{(A+C)^2-4(AC-\frac{B^2}{4})}}{2}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadelerde

$$A+C = iz\mathbf{M} \text{ ve } AC-\frac{B^2}{4} = \det \mathbf{M}$$

olarak alınsın. Bu durumda; özdeğerler

$$\lambda_1 = \frac{iz\mathbf{M}+\sqrt{(iz\mathbf{M})^2-4(\det \mathbf{M})}}{2} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{iz\mathbf{M}-\sqrt{(iz\mathbf{M})^2-4(\det \mathbf{M})}}{2}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\lambda_1+\lambda_2 = iz\mathbf{M} \text{ ve } \lambda_1\cdot\lambda_2 = \det \mathbf{M}$$

eşitliklerini kolayca yazılabilir. λ_1, λ_2 *öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler sırasıyla* $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ *ve* $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ *olsun.* λ_1 *öz değerine karşılık gelen* $\vec{\mathbf{u}}$ *birim öz vektörü,* $u_2 \neq 0$ *olmak üzere,*

$$\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \vec{\mathbf{u}} = \lambda_1 \vec{\mathbf{u}}$$

yazılabilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde,

$$\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{B}{2(\lambda_1-A)})^2}} \begin{bmatrix} \frac{B}{2(\lambda_1-A)} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{B}{(C-A)+\sqrt{(iz\mathbf{M})^2-4(\det \mathbf{M})}}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{B}{(C-A)+\sqrt{(iz\mathbf{M})^2-4(\det \mathbf{M})}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Aynı şekilde,

$$\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \vec{\mathbf{v}} = \lambda_2 \vec{\mathbf{v}}$$

denklem sisteminin çözümünden, λ_2 *özdeğerine karşılık gelen* $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ *birim özvektörü birim olanı* $v_1 \neq 0$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{v}} &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{B}{2(\lambda_2-A)}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{B}{2(\lambda_2-A)} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{B}{(C-A)-\sqrt{(iz\mathbf{M})^2-4(\det\mathbf{M})}}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{B}{(C-A)-\sqrt{(iz\mathbf{M})^2-4(\det\mathbf{M})}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ile belirlidir. Bu ifadelerde,

$$(iz\mathbf{M})^2 - 4(\det\mathbf{M}) = \Delta$$

olarak alınsın. Teorem 2.17'de ifade edilen,

$$f^{-1}(x', y') = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x' + x_0 \\ y' + y_0 \end{bmatrix}$$

afin dönüşümünde bulunan eşitlikler yerine yazıldığında, f^{-1} *afin dönüşümü,*

$$f^{-1}(x', y') = \begin{bmatrix} \frac{1}{U}\left(\frac{B}{(C-A)+\sqrt{\Delta}}\right) & \frac{1}{V} \\ \frac{1}{U} & \frac{1}{V}\left(\frac{B}{(C-A)-\sqrt{\Delta}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' - \frac{D\frac{1}{U}\left(\frac{B}{(C-A)+\sqrt{\Delta}}\right)+E}{\frac{iz\mathbf{M}+\sqrt{\Delta}}{2}} \\ y' - \frac{D+E\frac{1}{V}\left(\frac{B}{(C-A)-\sqrt{\Delta}}\right)}{\frac{iz\mathbf{M}-\sqrt{\Delta}}{2}} \end{bmatrix}$$

şekline dönüşür. Bu ifadede kullanılan, U ve V ifadeleri

$$\begin{aligned}
U &= \sqrt{1+\left(\frac{B}{(C-A)+\sqrt{(iz\mathbf{M})^2-4(\det\mathbf{M})}}\right)^2} \\
V &= \sqrt{1+\left(\frac{B}{(C-A)-\sqrt{(iz\mathbf{M})^2-4(\det\mathbf{M})}}\right)^2}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece; f afin dönüşümü $\mathcal{K}$ *koniğinin katsayıları kullanılarak ifade edilmiş olur.*

Teorem 2.24. $A,B,C,D,E,F \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E} : Ax^2+Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ *elipsinin alanı,*

$$Alan(\mathcal{E}) = \pi\frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 - F}{\sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2}}$$

eşitliği ile bulunur.

İspat Teorem 2.17'ye göre, $\mathcal{E}$ elipsinin

$$f^{-1}(x', y') = \mathbf{P}\begin{bmatrix} x' + x_0 \\ y' + y_0 \end{bmatrix}$$

afin dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$\mathcal{E}_M : \frac{x^2}{\frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 - F}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 - F}{\lambda_2}} = 1$$

merkezil elipsidir. Afin dönüşümün alan ile ilgili Teorem 2.12'ye göre, $\mathcal{E}$ *ve* $\mathcal{E}_M$ elipsleri nin alanları arasında,

$$\frac{Alan\ (\mathcal{E}_M)}{Alan\ (\mathcal{E})} = \det \mathbf{P}$$

oranı vardır. $\mathcal{E}_M$ merkezil elipsinin alanı, merkezil elipsin alan formülü kullanıldığında,

$$Alan\ (\mathcal{E}_M) = \pi \frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 - F}{\sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2}}$$

bulunur. Buna göre,

$$Alan\ (\mathcal{E}) = \pi \frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 - F}{\sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2}} \frac{1}{\det \mathbf{P}}$$

olarak elde edilir. Burada $\det \mathbf{P}$ değerini hesaplamak için,

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği göz önüne alınsın. Buradan, her iki tarafın determinantı alınıp, gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}) &= \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ (\det \mathbf{P})^2 \cdot \det \mathbf{M} &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ \det \mathbf{P} &= \pm 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Alan negatif değer alamayacağından $\det \mathbf{P} = 1$ olarak alınır. Bundan dolayı, $\mathcal{E}$ elipsinin alanı, $\mathcal{E}_M$ elipsinin alanına eşittir. Böylece, alan ifadesi,

$$Alan\ (\mathcal{E}) = \pi \frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 - F}{\sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2}}$$

olarak bulunur. □

Örnek 2.25. *$\mathcal{E}$: $2x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ elipsinin alanı afin dönüşüm kullanılarak bulunabilir. Daha önce, Örnek 2.18 de bu elipsi merkezil elipse dönüştüren afin dönüşümün,*

$$f^{-1}(x', y') = \mathbf{P}\begin{bmatrix} x' + x_0 \\ y' + y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' - \frac{3\sqrt{2}}{7} \\ y' + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

olduğu gösterildi. Buna göre, $\mathcal{E}_M$ merkezil elipsi

$$\frac{x'^2}{\frac{18}{49}} + \frac{y'^2}{\frac{18}{7}} = 1$$

şeklindedir. Örnek 2.18'de

$$\lambda_1 = \frac{7}{2}\,,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\ ve\ x_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{7},\ y_0 = \sqrt{2}\ ve\ F = 1$$

olduğu biliniyor. Buna göre, $\mathcal{E}$ elipsinin alanı,

$$\begin{aligned} Alan\ (\mathcal{E}) &= \pi\frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 - F}{\sqrt{\lambda_1.\lambda_2}} \\ &= \pi\frac{\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{2}}{7}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1}{\sqrt{\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{18\pi}{7\sqrt{7}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerçekten, merkezil elipsin alanı hesaplandığında, alanın $\frac{18\pi}{7\sqrt{7}}$ olduğu görülebilir.

2.5. Kompleks Düzlemde Afin Dönüşümler

Reel sayılarda olduğu gibi karmaşık sayılarda da afin dönüşümleri tanımlanabilir. Fakat, bu tezde karmaşık sayı düzlemindeki afin dönüşümler $A, B, C \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}+B\overline{\mathbf{z}}+C$ dönüşümü ile ifade edilecektir. Burada, f dönüşümünün A, B, C katsayıları ile dönüşümün türü arasındaki bağıntıları incelenecektir. f dönüşümünün matris formu,

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{z}) &= (a_1+a_2\mathbf{i})(z_1+z_2\mathbf{i}) + (b_1+b_2\mathbf{i})(z_1-z_2\mathbf{i}) + (c_1+c_2\mathbf{i}) \\
&= a_1z_1 + a_1z_2\mathbf{i} + a_2z_1\mathbf{i} - a_2z_2 + b_1z_1 - b_1z_2\mathbf{i} + b_2z_1\mathbf{i} + b_2z_2 + c_1 + c_2\mathbf{i} \\
&= \begin{bmatrix} a_1+b_1 & -a_2+b_2 \\ a_2+b_2 & a_1-b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(A+B) & \mathrm{Im}(-A+B) \\ \mathrm{Im}(A+B) & \mathrm{Re}(A-B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada afin dönüşümün matrisi $\mathbf{T}$ ile gösterilsin. $\mathbf{T}$ matrisi,

$$
\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & -a_2+b_2 \\ a_2+b_2 & a_1-b_1 \end{bmatrix}
$$

şeklindedir. $\mathbf{T}$ matrisinin determinantı,

$$
\det \mathbf{T} = a_1^2 - b_1^2 - (-a_2^2 + b_2^2) = (a_1^2 + a_2^2) - (b_1^2 + b_2^2) = |A|^2 - |B|^2
$$

olarak bulunur. Böylece; f dönüşümünün afin dönüşüm belirtmesi için, A ve B karmaşık sayılarının uzunlukları eşit olmamalıdır. Bir diğer deyişle,

$$
\det \mathbf{T} = 0 \Longleftrightarrow |A| = |B|
$$

bağıntısı varsa f, afin dönüşüm değildir.

Tanım 2.26. *$A, B, C \in \mathbb{C}$ olmak üzere,*

$$
\begin{aligned}
f &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
f(\mathbf{z}) &= A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C
\end{aligned}
$$

dönüşümü $|A| \neq |B|$ olmak üzere bir afin dönüşümdür (Kocic ve Majetic 2006).

Öteleme Dönüşümü

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ afin dönüşümünde, $A = 1$, $B = 0$ ve $C \in \mathbb{C}$ alınırsa, f bir öteleme dönüşümü olur (Kocic ve Majetic 2006). Bu dönüşümün matrisi

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{2\times 2}$$

şeklindedir. f afin dönüşümünün ifadesi,

$$f(\mathbf{z}) = \mathbf{I}_{2\times 2} \cdot \mathbf{z} + c = \mathbf{z} + C$$

olarak bulunur.

Öteleme dönüşümü uzunluğu, alanı ve açıyı korur. Gerçekten de, $\mathbf{X} = x_1 + x_2\mathbf{i}$ ve $\mathbf{Y} = y_1 + y_2\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ olsun. $\mathbf{C} = c_1 + c_2\mathbf{i}$ olmak üzere,

$$f(\mathbf{X}) = (x_1 + c_1) + (x_2 + c_2)\,\mathbf{i} \text{ ve } f(\mathbf{Y}) = (y_1 + c_1) + (y_2 + c_2)\,\mathbf{i}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{Y}) - f(\mathbf{X})| &= |(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)\,\mathbf{i}| \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} \\ &= |\mathbf{Y} - \mathbf{X}| \end{aligned}$$

olduğundan, öteleme dönüşümü uzunluğu ve dolayısıyla alanı değiştirmez. Açıyı değiştir mediği benzer şekilde görülebilir.

Dönme Dönüşümü

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $A, B, C \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ afin dönüşümünde, $A = e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$, $B = C = 0$ alınırsa, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$ bir dönme dönüşümü olur (Kocic ve Majetic 2006). Bu dönüşümün matrisi

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ile verilir. Bu kompleks düzlemde çok iyi bilinen dönme matrisidir.

Gerçekten de,

$$\det \mathbf{T} = 1 \text{ ve } \mathbf{T}^t\mathbf{I}\mathbf{T}\mathbf{I} = \mathbf{I},\ \mathbf{I} = diag\,(1, 1)$$

eşitliği sağlanır.

Not : Öklid uzayında, iç çarpımı değiştirmeyen dönüşümlere ortogonal dönüşüm denir. Bu dönüşüme karşılık gelen matrisin determinantı 1 ise bu dönüşüm dönme dönüşümü, -1 ise yansıma dönüşümüdür. $\mathbf{T} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ dönüşümünü alalım. $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{E}^2$ için, $\mathbf{I} = diag\,(1,1)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{u}}), \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \rangle &= (\mathbf{T}\overrightarrow{\mathbf{u}})^t \mathbf{I}\,(\mathbf{T}\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{u}}^t\,(\mathbf{T}^t\mathbf{I}\mathbf{T})\,\overrightarrow{\mathbf{v}} \\ \langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle &= \overrightarrow{\mathbf{u}}^t\mathbf{I}\overrightarrow{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\langle \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{u}}), \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$\mathbf{T}^t\mathbf{I}\mathbf{T} = \mathbf{I}$$

olmasıdır. Bu matrisin determinantı,

$$\det\left(\mathbf{T}^t\mathbf{I}\mathbf{T}\right) = \det(\mathbf{I}) \Rightarrow \det\mathbf{I}\,(\det\mathbf{T})^2 = \det\mathbf{I} \Rightarrow \det\mathbf{T} = \pm 1$$

bulunur.

Yansıma Dönüşümü

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $A, B, C \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ afin dönüşümünde, $B = e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$, $A = C = 0$ alınırsa, $f(\mathbf{z}) = B\overline{\mathbf{z}}$ bir yansıma dönüşümü olur (Kocic ve Majetic 2006). Bu dönüşümün matrisi

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

ile verilir. Bu kompleks düzlemde yansıma matrisidir. Gerçekten de, $\det\mathbf{T} = -1$ eşitliği sağlanır.

Teorem 2.27. *$B = e^{\mathbf{i}\theta}$, $A = C = 0$ iken $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ alındığında, $f(\mathbf{z}) = e^{\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ afin dönüşümünün matrisi,*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

şeklindedir. f afin dönüşümü bir $\mathbf{z}$ karmaşık sayısını

$$y = \tan\frac{\theta}{2}x$$

doğrusuna göre yansıtır (Kocic ve Majetic 2006).

İspat Herhangi bir $\mathbf{z} = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ sayısının $f(\mathbf{z}) = e^{\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ dönüşümü altındaki görüntüsü

$$f(\mathbf{z}) = (x\cos\theta + y\sin\theta) + \mathbf{i}(x\sin\theta - y\cos\theta)$$

olarak bulunur. $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ noktasının orta noktası $\mathbf{w}$ olsun. Buna göre, orta nokta

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z} + e^{\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}}{2}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{w}$ karmaşık sayısının konum vektörünün, $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ karmaşık sayıları nın konum vektörüyle yaptığı açılar eşit olduğunu görülebilir. Şöyle ki,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle &= \frac{1}{2}\left[\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle + \left\langle \mathbf{z}, e^{\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}} \right\rangle\right] \\
\langle f(\mathbf{z}), \mathbf{w} \rangle &= \frac{1}{2}\left[\left\langle e^{\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}, e^{\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}} \right\rangle + \left\langle e^{\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}, \mathbf{z} \right\rangle\right]
\end{aligned}$$

iç çarpım işlemlerinde,

$$\left\langle \mathbf{z}, e^{\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}} \right\rangle = \left\langle e^{\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}, \mathbf{z} \right\rangle \text{ ve } \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle f(\mathbf{z}), f(\mathbf{z}) \rangle = \left\langle e^{\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}, e^{\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}} \right\rangle$$

eşitlikleri sağlandığı için,

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \langle f(\mathbf{z}), \mathbf{w} \rangle$$

sonucu elde edilir. Buradan, $\mathbf{w}$ konum vektörünün, $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ sayılarının konum vektörleri ile aynı açıyı yaptığı görülür. Buna göre, $O\mathbf{z}$ ve $Of(\mathbf{z})$ doğruları $\overrightarrow{Ow}$ doğrusuna göre birbirinin yansımasıdır. $\mathbf{w}$ karmaşık sayısı şu şekilde de ifade edildiğinde,

$$\mathbf{w} = \frac{(x + x\cos\theta + y\sin\theta) + \mathbf{i}(y + x\sin\theta - y\cos\theta)}{2}$$

doğrultmanı $\overrightarrow{Ow}$ vektörü olan doğrunun eğimi,

$$m = \frac{x + x\cos\theta + y\sin\theta}{y + x\sin\theta - y\cos\theta}$$

ile belirlidir. Bu eşitlik düzenlenirse, eğim,

$$\begin{aligned}
m &= \frac{y + x(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}) - y(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2})}{x + x(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1) + y(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})} \\
&= \frac{x(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}) + y2\sin^2\frac{\theta}{2})}{x2\cos^2\frac{\theta}{2} + y2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}(x\cos\frac{\theta}{2} + y\sin\frac{\theta}{2})}{2\cos\frac{\theta}{2}(x\cos\frac{\theta}{2} + y\sin\frac{\theta}{2})} \\
&= \tan\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\mathbf{w}$ sayısı, $y = \tan\frac{\theta}{2}x$ doğrusu üzerindedir. Aynı zamanda, $\overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörlerinin iç çarpımı alındığında,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle &= \left\langle f(\mathbf{z}) - \mathbf{z}, \frac{\mathbf{z} + e^{\mathrm{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}}{2} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{\mathrm{i}\theta}\overline{\mathbf{z}} - \mathbf{z}, \frac{\mathbf{z} + e^{\mathrm{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}}{2} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left[\langle e^{\mathrm{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}, \mathbf{z}\rangle + \langle e^{\mathrm{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}, e^{\mathrm{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}\rangle - \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle - \langle \mathbf{z}, e^{\mathrm{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}\rangle\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

sonuç sıfır olduğundan, $\mathbf{w}$ karmaşık sayısının karmaşık düzlemdeki konum vektörü, $\overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}$ vektörüne diktir. Bu, $f(\mathbf{z})$ karmaşık sayısının, doğrultusu $\overrightarrow{Ow}$ olan orjinden geçen doğruya göre $\mathbf{z}$ sayısının yansıması olduğunu gösterir. □

Sonuç 2.28. *$f(\mathbf{z}) = e^{\mathrm{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ yansıma dönüşümü ve bu dönüşümün matrisi*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $\mathbf{z} = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$,

$\theta = 0$ için

$$f(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, f afin dönüşümü x eksenine göre yansıma belirtir.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ için

$$f(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, f afin dönüşümü $y = x$ doğrusuna göre yansıma belirtir.

$\theta = \pi$ için

$$f(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, f afin dönüşümü y eksenine göre yansıma belirtir.

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ için

$$f(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, f afin dönüşümü $y = -x$ doğrusuna göre yansıma belirtir (Kocic ve Majetic 2006).

Kırpma Dönüşümü:

Tanım 2.29. *$A, B, C \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ eşitliğinde, $A = 1 - \frac{\mathrm{i}u}{2}$, $B = \frac{\mathrm{i}u}{2}, u \neq 0, u \in \mathbb{R}$ ve $C = 0$ alınırsa,*

$$f_u(\mathbf{z}) = (1 - \frac{\mathrm{i}u}{2})\mathbf{z} + (\frac{\mathrm{i}u}{2})\overline{\mathbf{z}}$$

dönüşümü bir kırpma dönüşümü olur. Bu dönüşümün matrisi

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile verilir (Kocic ve Majetic 2006).

Tanım 2.30. *$\left||A|^2 - |B|^2\right| = 1$ ise $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}}$ lineer dönüşümüne unimodular dönüşüm denir (Kocic ve Majetic 2006).*

Unimodular afin dönüşümlerin matrislerinin determinantı ± 1 olduğu için, bu tür afin dönüşümler, şekillerin alanlarının büyüklüklerini değiştirmezler. Buna göre, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}}$ dönüşümünün matrisinin deteminantı

$$\det \mathbf{T} = \det \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & -a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{bmatrix} = \left||A|^2 - |B|^2\right| = 1$$

olarak bulunur. Böylece öteleme, dönme, yansıma ve kırpma dönüşümlerinin determinantı ± 1 olduğundan birer unimodular dönüşümdür.

Önteorem 2.31. *Eğer* $A = \sqrt{1-a^2} + \mathbf{i}a$ *ve* $B = a + \mathbf{i}\sqrt{1-a^2}, a, b \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + C$ *ve* $f(\mathbf{z}) = B\overline{\mathbf{z}} + C$ *afin dönüşümleri ortogonal afin dönüşümler olur. Gerçekten de,* $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + C$ *dönüşümünün matrisi,*

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-a^2} & -a \\ a & \sqrt{1-a^2} \end{bmatrix}$$

ve $f(\mathbf{z}) = B\overline{\mathbf{z}} + C$ *dönüşümünün matrisi,*

$$\begin{bmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & a \end{bmatrix}$$

olmak üzere, bu matrislerin determinantı 1 *dir (Kocic ve Majetic 2006).*

Önteorem 2.32. *Ortogonal dönüşümler iç çarpımı korur (Kocic ve Majetic 2006).*

İspat f ortogonal dönüşüm olsun. İç çarpımın korunduğunu göstermek için iki karmaşık sayının iç çarpımı ile bu sayıların f dönüşümü altındaki görüntülerinin iç çarpımlarının eşit olduğunu gösterilmelidir. Bu düşünceden hareketle,

$$\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C} \text{ ve } f(\mathbf{z}) = e^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{z}_1,\ f(\mathbf{z}) = e^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{z}_2$$

olmak üzere, iç çarpım işlemeleri yapıldığında,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle &= \frac{\mathbf{z}_1\overline{\mathbf{z}}_2 + \overline{\mathbf{z}}_1\mathbf{z}_2}{2} \\ \langle f(\mathbf{z}_1), f(\mathbf{z}_2) \rangle &= \frac{f(\mathbf{z}_1)\overline{f(\mathbf{z}_2)} + \overline{f(\mathbf{z}_1)}f(\mathbf{z}_2)}{2} \\ &= \frac{e^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{z}_1 \cdot e^{-\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}_2 + e^{-\mathbf{i}\theta}\overline{\mathbf{z}}_1 \cdot e^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{z}_2}{2} \\ &= \frac{\mathbf{z}_1\overline{\mathbf{z}}_2 + \overline{\mathbf{z}}_1\mathbf{z}_2}{2} = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece, $\langle f(\mathbf{z}_1), f(\mathbf{z}_2) \rangle = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle$ olduğu görülebilir. □

2.6. Kompleks Düzlemde Afin Dönüşümlerin Uygulaması: Fraktaller

Bir şeklin kendini yineleyerek kendine benzer şekiller üretmesi hakkındaki düşünce 17. yüzyılın ilk yıllarında başlar. Bir şekilden kendini yineleyen, kendine benzer olan şekillerden oluşan bir fraktal üretilebilmesi için bir fonksiyon sistemine ihtiyaç vardır. Bir fraktal, bir geometrik şekle, yüzeye yada noktalar kümesine bir Yinelenen Fonksiyon Sistemi (YFS) uygulanması ile oluşturulabilir. YFS içindeki dönüşümler, benzerlik, öteleme ve dönme gibi temel dönüşümler olabilir. Yinelenen fonksiyon sisteminin uygulanmasıyla elde edilen şekillerin birleşimi fraktali oluştur. YFS ile fraktal oluşturmak için aşağıdaki adımlar izlenebilir:

1. Herhangi bir noktalar kümesi, bir şekil veya bir yüzey belirlenir.
2. Bir afin dönüşüm sistemi tanımlanır.
3. Birinci adımda belirlenen noktalar kümesinin ikinci adımda belirlenen afin dönüşümlerdeki görüntü kümeleri oluşturulur.
4. Üçüncü adımda bulunan görüntü kümesinin noktaları, ikinci adımda belirlenen afin dönüşüm sisteminde yeni bir görüntü kümesi oluşturmak için tekrar yerine yazılır.
5. Herhangi bir adımda elde edilen görüntü kümesine, yine aynı dönüşüm sistemi uygulanarak yeni görüntü kümeleri oluşturulur.

Bu işlem dizisi sonsuza kadar yapıldığında oluşan şekillerin yada yüzeylerin yada noktalar kümesin birleşimi ile fraktal elde edilmiş olur. Bu elde edilen yeni noktaların tekrarlı olarak afin sisteme uygulanmasına özyineleme (recursive) ve elde edilen adımlardaki şekillerin bütün fraktale benzerliğine de kendi kendine benzerlik (self similarity) denilmektedir. (Berardo 2018)

Örneğin; belirlenen nokta kümesi A ve küçültme yapan üç afin dönüşümün oluşturduğu bir afin dönüşüm sistemi, aşağıdaki gibi,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}) &= A\mathbf{z}+a \\ G(\mathbf{z}) &= B\mathbf{z}+b \\ H(\mathbf{z}) &= C\mathbf{z}+c \end{aligned}$$

olsun. YFS için verilen basamaklar uygulandığında ilk üç adımda elde edilen nokta kümeleri,

1. adım: $\{F(A), G(A), H(A)\}$,

2. adım $\{F(F(A)), F(G(A)), F(H(A)), G(F(A)), G(G(A)), G(H(A)), H(F(A)), H(G(A)), H(H(A))\}$,

3. adım: $\{F(F(F(A))), F(F(G(A))), F(F(H(A))), F(G(F(A))), F(G(G(A))), F(G(H(A))), F(H(F(A))), F(H(G(A))), F(H(H(A))), G(F(F(A))), G(F(G(A))), G(F(H(A))), G(G(F(A))), G(G(G(A))), G(G(H(A))), G(H(F(A))), G(H(G(A))), G(H(H(A))), H(F(F(A))), H(F(G(A))), H(F(H(A))), H(G(F(A))), H(G(G(A))), H(G(H(A))), H(H(F(A))), H(H(G(A))), H(H(H(A)))\}$

şeklinde olur.

Tanım 2.33. $F(\mathbf{z}) = \mathbf{A}z+b$ *afin dönüşüm her* $\mathbf{z} = z_1 + \mathbf{i}z_2, \mathbf{w} = w_1 + \mathbf{i}w_2 \in \mathbb{C}$ *için* $\mathbf{z}$ *ve* $\mathbf{w}$ *arasındaki uzaklık ile* $F(\mathbf{z})$ *ve* $F(\mathbf{w})$ *arasındaki uzaklık arasında,* $\boldsymbol{\lambda} \in (0,1)$ *olacak şekilde,*

$$\|F(\mathbf{z}) - F(\mathbf{w})\| \leq \lambda \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|$$

bir eşitsizlik varsa F afin dönüşümüne küçültme dönüşümü denir. λ *reel sayısına dönüşümün küçültme oranı denir.*

Teorem 2.34. *Küçülten bir* $F(\mathbf{z}) = \mathbf{Az} + b$ *afin dönüşümü bir küçültme dönüşümü olsun. Her* $\mathbf{z} = z_1 + \mathbf{i}z_2$, $\mathbf{w} = w_1 + \mathbf{i}w_2 \in \mathbb{C}$ *için*

$$\|F(\mathbf{z}) - F(\mathbf{w})\| \leq \sqrt{\boldsymbol{\lambda}_1}\, \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|$$

olacak şekilde bir $\boldsymbol{\lambda}_1 \in (0,1)$ *vardır.* $\boldsymbol{\lambda}_1$ *çarpanı F afin dönüşümünün matrisinden oluşturulan,* $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ *matrisinin öz değerlerinden büyük olanıdır ve* $\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_1}$ *küçültme oranıdır (Berardo 2018).*

İspat Verilen eşitsizliğin iki tarafındaki normlar hesaplandığında, eşitsizliğin sağ tarafı,

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\langle \mathbf{z} - \mathbf{w}, \mathbf{z} - \mathbf{w} \rangle} = \sqrt{(\mathbf{z} - \mathbf{w})^t\,(\mathbf{z} - \mathbf{w})}$$

ve aynı şekilde sol tarafı da

$$\begin{aligned} \|F(\mathbf{z}) - F(\mathbf{w})\| &= \|\mathbf{Az} + b - (\mathbf{Aw} + b)\| \\ &= \|\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{w}))\| = \sqrt{(\mathbf{A}\,(\mathbf{z} - \mathbf{w}))^t \mathbf{A}\,(\mathbf{z} - \mathbf{w})} \\ &= \sqrt{(\mathbf{z} - \mathbf{w})^t\, \mathbf{A}^t \mathbf{A}\,(\mathbf{z} - \mathbf{w})} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $(\mathbf{z}-\mathbf{w})$ karmaşık sayısı $\mathbf{q}$ ile gösterilsin. $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ matrisi

$$\left(\mathbf{A}^t\mathbf{A}\right)^t = \mathbf{A}^t\left(\mathbf{A}^t\right)^t = \mathbf{A}^t\mathbf{A}$$

eşitliğini sağladığı için simetrik bir matristir ve bütün girdileri reel sayıdır. $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ matrisi simetrik olduğu için ortogonal olarak köşegenleştirilebileceğinden, $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ matrisi ortogonal ve köşegen olarak kabul edilebilir. $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ olmak üzere, bu öz değerlere karşılık gelen birim ve birbirine dik öz vektörlere karşılık gelen karmaşık sayılar $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ olsun. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sayıları birim ve birbirine dik olduğu için ortonormal bir taban olarak alınabilir. Böylece, c_1 ve c_2 sabit reel sayılar olmak üzere, $\mathbf{q}$ sayısının gösterdiği vektör, $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2$ özvektörlerinin lineer birleşimi olarak,

$$\mathbf{q} = c_1\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + c_2\overrightarrow{\mathbf{v}}_2$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, $\mathbf{q}^t\mathbf{A}^t\mathbf{A}\mathbf{q}$ ifadesi

$$\mathbf{q}^t\mathbf{q} = c_1^2 + c_2^2$$

$$\langle\overrightarrow{\mathbf{v}}_1,\overrightarrow{\mathbf{v}}_1\rangle = \langle\overrightarrow{\mathbf{v}}_2,\overrightarrow{\mathbf{v}}_2\rangle = 1, \langle\overrightarrow{\mathbf{v}}_1,\overrightarrow{\mathbf{v}}_2\rangle = \langle\overrightarrow{\mathbf{v}}_2,\overrightarrow{\mathbf{v}}_1\rangle = 0$$

$$\mathbf{A}^t\mathbf{A}\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 = \lambda_1\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 \text{ ve } \mathbf{A}^t\mathbf{A}\overrightarrow{\mathbf{v}}_2 = \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{v}}_2$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}^t\mathbf{A}^t\mathbf{A}\mathbf{q} &= (c_1\overrightarrow{\mathbf{v}}_1^t + c_2\overrightarrow{\mathbf{v}}_2^t)\mathbf{A}^t\mathbf{A}\left(c_1\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + c_2\overrightarrow{\mathbf{v}}_2\right) \\
&= (c_1\overrightarrow{\mathbf{v}}_1^t + c_2\overrightarrow{\mathbf{v}}_2^t)\left(c_1\mathbf{A}^t\mathbf{A}\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + c_2\mathbf{A}^t\mathbf{A}\overrightarrow{\mathbf{v}}_2\right) \\
&= (c_1\overrightarrow{\mathbf{v}}_1^t + c_2\overrightarrow{\mathbf{v}}_2^t)\left(c_1\lambda_1\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + c_2\lambda_2\overrightarrow{\mathbf{v}}_2\right) \\
\mathbf{q}^t\mathbf{A}^t\mathbf{A}\mathbf{q} &= \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Son eşitlikte λ_2 yerine λ_1 yazdığında, λ_1 büyük özdeğer olduğundan,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 &\leq \lambda_1 c_1^2 + \lambda_1 c_2^2 = \lambda_1(c_1^2 + c_2^2) \\
&\leq \lambda_1\mathbf{q}^t\mathbf{q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe göre,

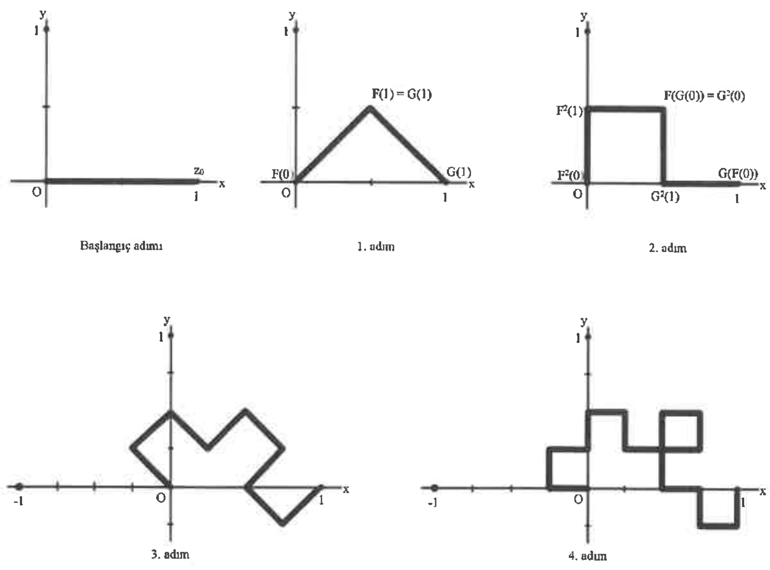
$$\begin{aligned}
\|F(\mathbf{z}) - F(\mathbf{w})\| &= \sqrt{\mathbf{q}^t\mathbf{A}^t\mathbf{A}\mathbf{q}} \\
&\leq \sqrt{\lambda_1\mathbf{q}^t\mathbf{q}} \\
&= \sqrt{\lambda_1}\,\|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Fakat, karmaşık sayılarda $\mathbf{A}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}$, $F(\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}$, afin dönüşümünün bu küçültme oranı $\mathbf{A}$ karmaşık sayısının normuna eşit olarak alınabilir. □

Örnek 2.35. ***Heighway Dragon Eğrisi:*** *1967 yılında ilk defa ortaya atılan bu fraktal aşağıdaki yinelenen afin dönüşüm sistemi ile elde edilebilir (Berardo 2018). Fraktalin başlangıç kümesi olarak $\mathbf{z}_0 = (1,0)$ olmak üzere $O\mathbf{z}_0$ doğru parçası alınsın. Bu doğru parçasının belirttiği noktalar kümesine,*

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2}(1+\mathbf{i})\mathbf{z} \\ G(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2}(-1+\mathbf{i})\mathbf{z} + 1 \end{aligned}$$

afin dönüşüm sistemi uygulandığında Heighway Dragon eğrisi fraktali elde edilebilir. Buna göre, afin dönüşüm sistemi, $O\mathbf{z}_0$ doğru parçasının noktalarına özyinelemeli olarak uygulandığında Şekil 2.11'deki dört adım elde edilir.



Şekil 2.11. Heighway Dragon Eğrisi oluşturan ilk dört adım

Dönüşümler öz yinelemeli olarak sonsuza kadar ilerletildiğinde Heighway Dragon eğrisi elde edilir. Oluşturulan bu dört adım fraktalin belli bölgelerinden parçalar alındığında alınan bu parçaların büyütülmüş halidir ve fraktalin kendi kendine benzerliğini gösterir. Çünkü bir fraktalin herhangi bir adımı fraktalin bütününün içinde bulunabilir.

Örnek 2.36. *Aşağıdaki afin dönüşüm sistemini* $[0,1]$ *aralığındaki noktalara üç defa uygulandığında, fraktal yapı görülebilir. Yinelenen afin dönüşüm sistemi,*

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{z}) &= \frac{\mathbf{z}}{3} \\ f_2(\mathbf{z}) &= \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathbf{i}}{2})\mathbf{z}+\frac{1}{3} \\ f_3(\mathbf{z}) &= \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathbf{i}}{2})(\left(\frac{1}{9}-\frac{\mathbf{i}}{18}\right)\mathbf{z}+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Fraktalin 1. adımını oluşturmak için $\mathbf{z}=0$ *ve* $\mathbf{z}=1$ *karmaşık sayılarının afin dönüşüm sistemi altındaki görüntüleri bulunmalıdır.*

$1.adım$:

$f_1(0)=0$ *ve* $f_1(1)=1$

$f_2(0)=\frac{1}{3}$ *ve* $f_2(1)=\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\mathbf{i}$

$f_3(0)=\frac{2}{3}$ *ve* $f_3(\mathbf{z})=\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\mathbf{i}$

Fraktalin 2. adımını oluşturmak için 1. adımda bulunan her bir karmaşık sayıyı sistemdeki dönüşümlerde yerine yazılır.

$2.adım$:

$f_1\circ f_1(0)=0$ *ve* $f_1\circ f_1(1)=1$

$f_1\circ f_2(0)=\frac{1}{3}$ *ve* $f_1\circ f_2(1)=\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\mathbf{i}$

$f_1\circ f_3(0)=\frac{2}{3}$ *ve* $f_1\circ f_3(\mathbf{z})=\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\mathbf{i}$

$f_2\circ f_1(0)=\frac{1}{3}$ *ve* $f_2\circ f_1(1)=\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\mathbf{i}$

$f_2\circ f_2(0)=\frac{1}{18}\sqrt{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}\mathbf{i}$ *ve* $f_2\circ f_2(1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{7}{18}\right)+\left(\frac{1}{18}i+\frac{\sqrt{3}}{18}\right)\mathbf{i}$

$f_2\circ f_3(0)=\frac{1}{9}\sqrt{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\mathbf{i}$ *ve* $f_2\circ f_3(1)=\frac{1}{9}\sqrt{3}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\mathbf{i}$

$f_3\circ f_1(0)=\frac{2}{3}$ *ve* $f_3\circ f_1(1)=\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\mathbf{i}$

$f_3\circ f_2(0)=\frac{1}{18}\sqrt{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{18}\mathbf{i}$ *ve* $f_3\circ f_2(1)=\frac{1}{18}\sqrt{3}+\frac{7}{9}-\frac{1}{18}\mathbf{i}$

$f_3\circ f_3(0)=\frac{1}{9}\sqrt{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\mathbf{i}$ *ve* $f_3\circ f_3(1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{13}{18}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{18}-\frac{1}{9}\right)\mathbf{i}$

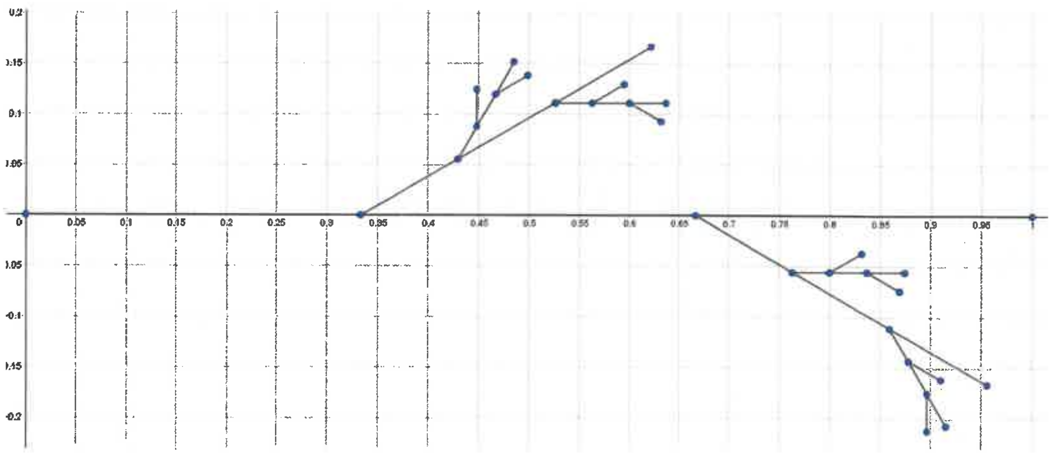
$3.adım$: *1. adımda ve 2. adımda ortak olarak elde edilen karmaşık sayıları ve* f_1 *fonksiyonunun vereceği karmaşık sayılar var olanlarla aynı olduğu için bu adımda hesaplanmış olarak alınsın. Buna göre, üçüncü adımda elde edilecek yeni noktalar aşağıdaki gibi bulunur.*

$f_2\circ f_2\circ f_2(0)=\left(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{19}{54}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{54}+\frac{1}{18}\right)\mathbf{i}$

$f_2\circ f_2\circ f_2(1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{19}{54}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{54}+\frac{5}{54}\right)\mathbf{i}$

$$f_2 \circ f_2 \circ f_3(0) = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{18} + \tfrac{10}{27}\right) + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{27} + \tfrac{1}{18}\right)\mathbf{i}$$
$$f_2 \circ f_2 \circ f_3(1) = \left(\tfrac{2\sqrt{3}}{27} + \tfrac{10}{27}\right) + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{27} + \tfrac{2}{27}\right)\mathbf{i}$$
$$f_2 \circ f_3 \circ f_2(0) = \tfrac{1}{9}\sqrt{3} + \tfrac{10}{27} + \tfrac{1}{9}\mathbf{i}$$
$$f_2 \circ f_3 \circ f_2(1) = \tfrac{7}{54}\sqrt{3} + \tfrac{10}{27} + \tfrac{7}{54}\mathbf{i}$$
$$f_2 \circ f_3 \circ f_3(0) = \tfrac{1}{9}\sqrt{3} + \tfrac{11}{27} + \tfrac{1}{9}\mathbf{i}$$
$$f_2 \circ f_3 \circ f_3(\mathbf{z}) = \tfrac{7}{54}\sqrt{3} + \tfrac{11}{27} + \tfrac{5}{54}\mathbf{i}$$
$$f_3 \circ f_2 \circ f_2(0) = \tfrac{1}{18}\sqrt{3} + \tfrac{19}{27} - \tfrac{1}{18}\mathbf{i}$$
$$f_3 \circ f_2 \circ f_2(1) = \tfrac{2}{27}\sqrt{3} + \tfrac{19}{27} - \tfrac{1}{27}\mathbf{i}$$
$$f_3 \circ f_2 \circ f_3(0) = \tfrac{1}{18}\sqrt{3} + \tfrac{20}{27} - \tfrac{1}{18}\mathbf{i}$$
$$f_3 \circ f_2 \circ f_3(1) = \tfrac{2}{27}\sqrt{3} + \tfrac{20}{27} - \tfrac{2}{27}\mathbf{i}$$
$$f_3 \circ f_3 \circ f_2(0) = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{9} + \tfrac{37}{54}\right) + \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{54} - \tfrac{1}{9}\right)\mathbf{i}$$
$$f_3 \circ f_3 \circ f_2(1) = \left(\tfrac{7\sqrt{3}}{54} + \tfrac{37}{54}\right) + \left(-\tfrac{7}{54} - \tfrac{\sqrt{3}}{54}\right)\mathbf{i}$$
$$f_3 \circ f_3 \circ f_3(0) = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{9} + \tfrac{19}{27}\right) + \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{27} - \tfrac{1}{9}\right)\mathbf{i}$$
$$f_3 \circ f_3 \circ f_3(1) = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{9} + \tfrac{19}{27}\right) + \left(-\tfrac{4}{27} - \tfrac{\sqrt{3}}{27}\right)\mathbf{i}$$

Bulunan bu yeni noktaları koordinat eksenine yerleştirildiğinde, Şekil 2.12 elde edilir. Bu şekil, verilen afin dönüşüm sistemin $[0,1]$ *aralığındaki karmaşık sayılara üç defa özyinelemeli olarak uygulaması sonucu elde edilmiştir.*

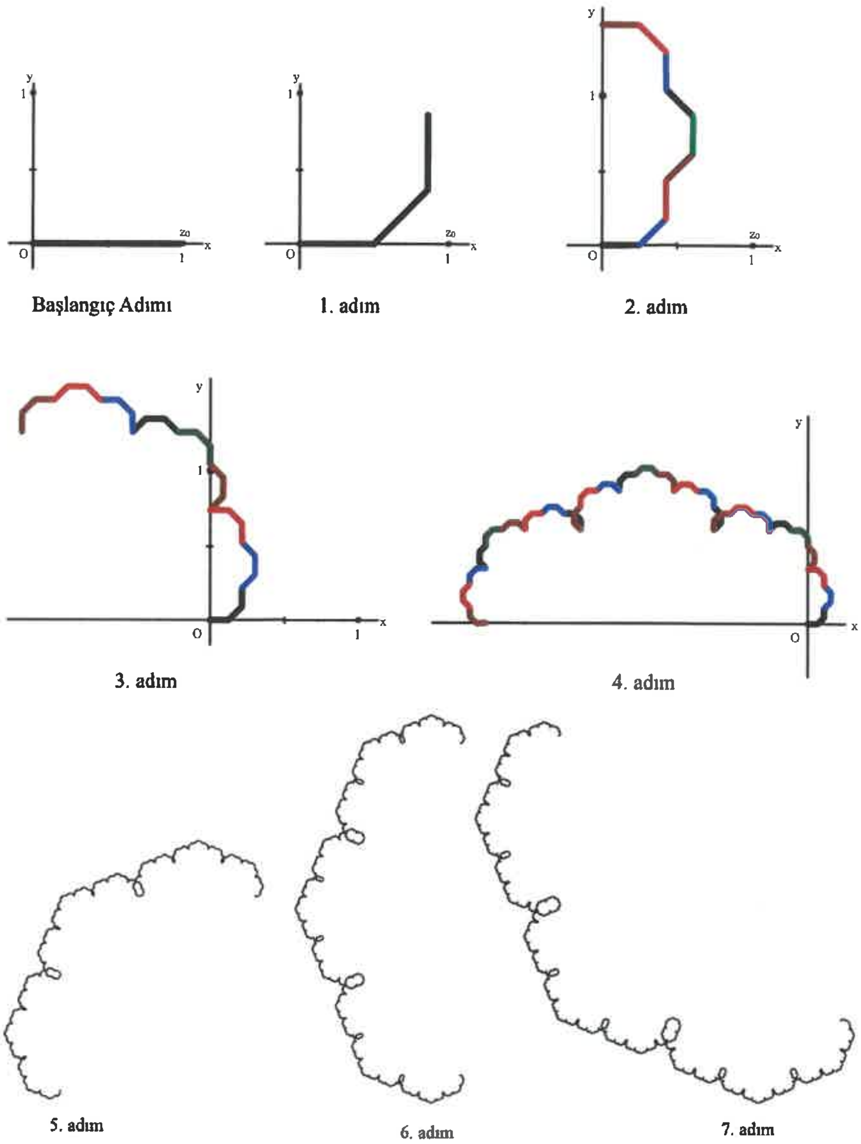


Şekil 2.12. $[0,1]$ aralığına f_1, f_2, f_3 afin dönüşüm sisteminin özyinelemeli olarak uygulanması ile elde edilen fraktal adımları

Örnek 2.37. *Aşağıda verilen afin dönüşüm sistemi* $[0, 1]$ *aralığındaki noktalara uygulandığında, fraktal yapı görülebilir.*

$$
\begin{aligned}
f_1(\mathbf{z}) &= \frac{\mathbf{z}}{2} \\
f_2(\mathbf{z}) &= \frac{\mathbf{z}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}) + \frac{1}{2} \\
f_3(\mathbf{z}) &= \frac{\mathbf{z}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{i}
\end{aligned}
$$

Dönüşümler öz yinelemeli olarak yedi defa uygulandığında her adımda aşağıdaki şekiller oluşturulabilir Şekil 2.13.



Şekil 2.13. [0,1] aralığına f_1, f_2, f_3 afin dönüşüm sistemi ile elde edilen fraktal adımları

3. MATERYAL VE METOT

Bu tezde matematiksel yöntemler ve kanıtlar kullanılarak, reel düzlemdeki afin dönüşümlerin özellikleri ispatlanmış ve karmaşık düzlemdeki afin dönüşümler $A,\ B,\ C \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ şeklinde bir dönüşümle ifade edilerek incelenmiştir. Reel düzlemde afin dönüşümlerin uygulaması olarak herhangi bir merkezil olmayan koniği merkezil konik haline getiren bir afin dönüşüm verilmiş ve karmaşık düzlemde afin dönüşümlerin uygulaması olarak fraktaller verilmiştir.

Hiperbolik sayıların temel bir kaç özelliği verildikten sonra tezde özgün olarak karmaşık düzlemde verilen afin dönüşüme benzer şekilde hiperbolik düzlemdeki afin dönü şümler $A,\ B,\ C \in \mathbb{P}$ olmak üzere, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ şeklinde bir dönüşümle ifade edilerek incelenmiştir. Uygulama olarak hiperbolik düzlemde fraktaller verilmiştir.

Bu tezin oluşmasındaki en önemli materyaller, bu konuda yapılmış daha önceki çalışmalar ile bu konuda yazılmış kitaplardır. Bunların en önemlileri kısaca Özdemir (2016, 2017); Çakır (2017); Kocic ve Majetic (2006) ait çalışmalardır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Hiperbolik Düzlemde Afin Dönüşümler

Karmaşık düzlemde bir afin dönüşümü $A, B, C \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(\mathbf{z}) &= A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanabileceği gösterildi. Bu kısımda, ise hiperbolik düzlemde, afin dönüşümlerin, ki bunlar aslında Lorentz düzleminde afin dönüşümlerdir, hiprebolik sayılar yardımıyla gösterilebileceği ele alınacaktır. Hiperbolik sayılar $\mathbb{P}$ harfi ile gösterilir. Hiperbolik sayılar kümesi

$$\mathbb{P} = \left\{a + \mathbf{h}b : \mathbf{h}^2 = 1,\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu sayı kümesindeki iki hiperbolik sayının eşitliği ve iki sayının toplama ve çarpıma işlemleri sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{h}x_2$, $\mathbf{y} = y_1 + \mathbf{h}y_2 \in \mathbb{P}$ olmak üzere,

1. $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Longleftrightarrow x_1 + \mathbf{h}x_2 = y_1 + \mathbf{h}y_2 \Longleftrightarrow x_1 = y_1$ ve $x_2 = y_2$,
2. $+ : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$
   $(x_1 + \mathbf{h}x_2) + (y_1 + \mathbf{h}y_2) = (x_1 + \mathbf{y}_1) + \mathbf{h}(x_2 + y_2)$,
3. $\cdot : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$
   $(x_1 + \mathbf{h}x_2) \cdot (y_1 + \mathbf{h}y_2) = (x_1\mathbf{y}_1 + x_2\mathbf{y}_2) + \mathbf{h}(x_2y_1 + x_1y_2)$ (Çakır 2017).

Tanım 4.38. *Herhangi bir $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y \in \mathbb{P}$ sayısı için, $x - \mathbf{h}y \in \mathbb{P}$ sayısına, $\mathbf{z}$ sayısının eşleniği denir ve $\overline{\mathbf{z}}$ ile gösterilir. $\mathbf{z}$ ve $\overline{\mathbf{z}}$ sayıları reel eksene göre simetriktir (Çakır 2017).*

Önerme 4.39.

1. $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ ise $\overline{\mathbf{x}}$ hiperbolik sayısının eşleniği $\mathbf{x}$ sayısıdır. Yani, $\overline{(\overline{\mathbf{x}})} = \mathbf{x}$'dir.
2. Her $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ için $\overline{\mathbf{x} + \mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}$'dir.
3. Her $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ için $\overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}}$'dir.,

4. Her $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{P}$ ve $y \neq 0$ için $\overline{\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right)} = \frac{\overline{\mathbf{x}}}{\overline{\mathbf{y}}}$'dir.

5. Her $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ için $\overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|^2$'dir (Çakır 2017).

Tanım 4.40. *Herhangi bir* $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y \in \mathbb{P}$ *sayısının modülü (mutlak değeri),*

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{x^2 - y^2}$$

şeklinde ifade edilebilir (Çakır 2017).

Tanım 4.41. *Herhangi bir* $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y \in \mathbb{P}$ *sayısının tersi,* $|\mathbf{z}| \neq 0$ *olmak üzere,*

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{z}}}{|\mathbf{z}|^2}$$

şeklinde verilir (Çakır 2017).

Hiperbolik sayı düzlemindeki afin dönüşümler $A, B, C \in \mathbb{P}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \\ f(\mathbf{z}) &= A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. Buna göre, f dönüşümünün matrislerle ifadesi,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= (a_1 + a_2\mathbf{h})(z_1 + z_2\mathbf{h}) + (b_1 + b_2\mathbf{h})(z_1 - z_2\mathbf{h}) + (c_1 + c_2\mathbf{h}) \\ &= a_1z_1 + a_1z_2\mathbf{h} + a_2z_1\mathbf{h} + a_2z_2 + b_1z_1 - b_1z_2\mathbf{h} + b_2z_1\mathbf{h} - b_2z_2 + c_1 + c_2\mathbf{h} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 - b_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(A+B) & \mathrm{Im}(A-B) \\ \mathrm{Im}(A+B) & \mathrm{Re}(A-B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. f afin dönüşümünün 2×2 matris kısmı

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 - b_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{bmatrix}$$

olsun. $\mathbf{T}$ matrisinin determinantı,

$$\det \mathbf{T} = a_1^2 - b_1^2 - (a_2^2 - b_2^2) = (a_1^2 - a_2^2) - (b_1^2 - b_2^2) = |A|_H^2 - |B|_H^2$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$\det \mathbf{T} = 0 \Longleftrightarrow |A|_{\mathbb{H}} = |B|_{\mathbb{H}}$$

bağıntısı vardır.

Tanım 4.42. *$A, B, C \in \mathbb{P}$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{P} \to \mathbb{P} \\ f(\mathbf{z}) &= A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C, \end{aligned}$$

dönüşümü, $|A|_{\mathbb{H}} \neq |B|_{\mathbb{H}}$ olmak üzere, bir afin dönüşümdür.

Bu bölümde, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}+B\overline{\mathbf{z}}+C$ afin dönüşümünde, $A, B, C \in \mathbb{P}$ hiperbolik sayıları değiştirilerek dönüşümün, Lorentz uzayındaki öteleme, dönme, yansıma dönüşümleriyle ilişkisi ve uygulamaları incelenecektir.

Öteleme Dönüşümü

$A = 1, B = 0$ ve $C \in \mathbb{P}$, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ afin dönüşümünde, $A = 1, B = 0$ ve $C \in \mathbb{P}$ alınırsa, $f(\mathbf{z})$ bir öteleme dönüşümü olur. Bu dönüşümün matrisi,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{2\times 2}$$

şeklindedir. Bu dönüşüm,

$$f(\mathbf{z}) = \mathbf{I}_{2\times 2} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{C} = \mathbf{z} + \mathbf{C}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Öteleme dönüşümü uzunluğu ve alanı korur. Gerçekten de, $\mathbf{X} = x_1 + \mathbf{h}x_2$ ve $\mathbf{Y} = y_1 + \mathbf{h}y_2 \in \mathbb{P}$ olsun. $\mathbf{C} = c_1 + c_2\mathbf{h}$ olmak üzere,

$$f(\mathbf{X}) = (x_1 + c_1) + \mathbf{h}(x_2 + c_2) \quad \text{ve } f(\mathbf{Y}) = (y_1 + c_1) + \mathbf{h}(y_2 + c_2)$$

şeklinde bulunur. Buradan $f(\mathbf{X})$ ve $f(\mathbf{Y})$ arası Lorentz anlamındaki uzaklık hesap landığında,

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{Y}) - f(\mathbf{X})| &= |(y_1 - x_1) + \mathbf{h}(y_2 - x_2)| \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} \\ &= |\mathbf{Y} - \mathbf{X}| \end{aligned}$$

uzaklığın değişmediği görülebilir. Öteleme dönüşümü uzunluğu değiştirmez. Uzunluğu değiştirmediği için alanı da değiştirmeyeceği aşikardır. Öteleme dönüşümünün açıyı değiştirmediği benzer şekilde görülebilir.

Dönme Dönüşümü

$A, B, C \in \mathbb{P}$, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ afin dönüşümünde, $A = e^{\mathbf{h}\theta} = \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta$, $B = C = 0$ alındığında, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$ bir dönme dönüşümü olur. Bu dönüşümün matrisi,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

ile verilir. Bu Lorentz düzleminde çok iyi bilinen dönme matrisidir. Gerçekten de,

$$\det\mathbf{T} = 1 \text{ ve } \mathbf{T}^t\mathbf{I}^*\mathbf{T}\mathbf{I}^* = \mathbf{I},\ \mathbf{I}^* = diag\,(1, -1)$$

eşitliği sağlanır.

Not : Lorentz uzayında, iç çarpımı değiştirmeyen dönüşümlere pseudo ortogonal dönüşüm denir. Bu dönüşüme karşılık gelen matrisin determinantı 1 ise bu dönüşüm dönme dönüşümü, -1 ise yansıma dönüşümdür.

$\mathbf{T} : \mathbb{E}_1^2 \to \mathbb{E}_1^2$ dönüşümünde, $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{E}_1^2$ için, $\mathbf{I}^* = diag\,(1, -1)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{u}}), \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \right\rangle_L &= \left(\mathbf{T}\overrightarrow{\mathbf{u}}\right)^t \mathbf{I}^* \left(\mathbf{T}\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{u}}^t \left(\mathbf{T}^t\mathbf{I}^*\mathbf{T}\right) \overrightarrow{\mathbf{v}} \\ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle_L &= \overrightarrow{\mathbf{u}}^t \mathbf{I}^* \overrightarrow{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\left\langle \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{u}}), \mathbf{T}(\mathbf{v}) \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle_L$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$\mathbf{T}^t\mathbf{I}^*\mathbf{T} = \mathbf{I}^*$$

olmasıdır. Bu matrisin determinantı,

$$\det\left(\mathbf{T}^t\mathbf{I}^*\mathbf{T}\right) = \det\left(\mathbf{I}^*\right) \Rightarrow \det\mathbf{I}^* \left(\det\mathbf{T}\right)^2 = \det\mathbf{I}^* \Rightarrow \det\mathbf{T} = \pm 1$$

bulunur.

Örnek 4.43. $A = \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta,\ f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$ *dönüşümü verilsin.* $\theta = \ln 2$ *için,*

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 2\mathbf{h})$$

timelike hiperbolik sayısı $f(\mathbf{z})$ *sayısının konum vektörü ile* $\mathbf{z}$ *sayısının konum vektörü arasındaki açının ölçüsünün* θ *olduğu görülebilir. Gerçekten,*

$$\begin{aligned} \cosh\theta &= \cosh\ln 2 = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{5}{4} \\ \sinh\theta &= \sinh\ln 2 = \frac{e^{\ln 2} + ie^{-\ln 2}}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

olmak üzere, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$ *dönüşümü, olmak üzere,*

$$f(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece, $\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 2\mathbf{h})$ *timelike hiperbolik sayısının görüntüsü,*

$$f(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{4\sqrt{3}} \\ \frac{13}{4\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buna göre, $f(\mathbf{z}) = \frac{11}{4\sqrt{3}} + \frac{13}{4\sqrt{3}}\mathbf{h}$ *de bir timelike sayıdır.* f *sayının casual karakterini değiştirmemiştir. Ayrıca,*

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}} = \|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}} = 1$$

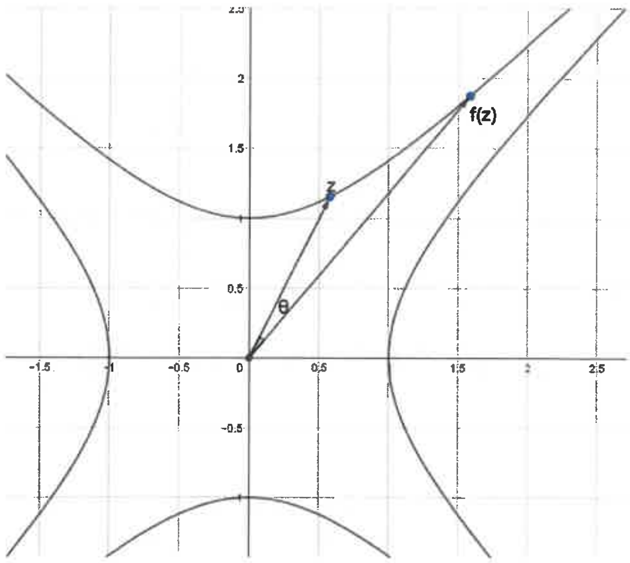
olduğundan f *dönüşümünün uzunluğu değiştirmediği görülür.* $\mathbf{z}$ *ve* $f(\mathbf{z})$ *arasındaki açıyı bulmak için Lorentz skaler çarpımından yararlanılırsa,*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}, f(\mathbf{z})\rangle_L &= -\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}\,\|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}}\cosh\theta \\ \left\langle (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}), (\frac{11}{4\sqrt{3}}, \frac{13}{4\sqrt{3}}) \right\rangle_L &= -1 \cdot 1 \cosh\theta \\ \cosh\theta &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = \frac{5}{4}$$

denklemi çözüldüğünde, $\theta = \ln 2$ *olarak bulunur. Bundan dolayı,* f *dönüşümünün* $\mathbf{z}$ *sayısı nı gösteren vektörü* θ *kadar döndürdüğü görülür (Şekil 4.1).*



Şekil 4.1. Birim hiperbol üzerinde $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ sayılarının görüntüsü

Teorem 4.44. $A = e^{\mathbf{h}\theta} = \cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta, B = 0$ *ve* $C = 0$ *ise* $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$ *bir dönme dönüşümüdür.* f *dönüşümü,* $\mathbf{z}$ *hiperbolik sayısının*

a) Casual karakterini ve boyunu değiştirmez.

b) $\mathbf{z}$ *hiperbolik sayısını hiperbolik olarak* θ *kadar döndürür.*

İspat a) $\mathbf{z} = z_1 + \mathbf{h}z_2 \in \mathbb{P}$ olmak üzere, $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$ dönme dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta \\ z_1\sinh\theta + z_2\cos\theta \end{bmatrix} \\
&= (z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta) + (z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta)\mathbf{h}
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. f dönüşümünün $\mathbf{z}$ sayısının casual karakterini ve boyunu değiştirmedi ğini göstermek için,

$$\langle f(\mathbf{z}), f(\mathbf{z})\rangle_L = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle_L$$

olduğu gösterilmelidir.

Buna göre,

$$\begin{aligned}
\langle f(\mathbf{z}),f(\mathbf{z})\rangle_L &= (z_1\cosh\theta{+}z_2\sinh\theta)(z_1\cosh\theta{+}z_2\sinh\theta)+\\
&\quad -(z_1\sinh\theta{+}z_2\cosh\theta)(z_1\sinh\theta{+}z_2\cosh\theta)\\
&= z_1^2\cosh^2\theta{+}2z_1z_2\cosh\theta\sinh\theta{+}z_2^2\sinh^2\theta+\\
&\quad -(z_1^2\sinh^2\theta{+}2z_1z_2\cosh\theta\sinh\theta{+}z_2^2\cosh^2\theta)\\
&= z_1^2(\cosh^2\theta-\sinh^2\theta)-z_2^2(\cosh^2\theta-\sinh^2\theta)\\
&= z_1^2-z_2^2\\
&= \langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle_L
\end{aligned}$$

bulunur ve $\mathbf{z}$ ile $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayılarının casual karakterlerinin aynı ve uzunluklarının eşit olduğu görülür.

b) $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ arasındaki açı α $(\alpha>0)$ olmak üzere; α hiperbolik açısını hesaplamak için,

$$\langle\mathbf{z},f(\mathbf{z})\rangle_L=-\left\|\mathbf{z}\right\|_{\mathbb{H}}\left\|f(\mathbf{z})\right\|_{\mathbb{H}}\cosh\alpha$$

skaler çarpımı kullanılabilir. Böylece, skaler çarpımdan elde edilen,

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{z},f(\mathbf{z})\rangle_L &= \langle(z_1+z_2\mathbf{h}),(z_1\cosh\theta+z_2\sinh\theta)+(z_1\sinh\theta+z_2\cosh\theta)\mathbf{h}\rangle\\
&= z_1^2\cosh\theta+z_1z_2\sinh\theta-(z_1z_2\sinh\theta+z_2^2\cosh\theta)
\end{aligned}$$

eşitliği düzenlenirse,

$$-\left\|\mathbf{z}\right\|_{\mathbb{H}}\left\|f(\mathbf{z})\right\|_{\mathbb{H}}\cosh\alpha=z_1^2\cosh\theta-z_2^2\cosh\theta$$

elde edilir. Buradan da,

$$(z_1^2-z_2^2)\cosh\alpha=(z_1^2-z_2^2)\cosh\theta$$

sonucu elde edilir. Böylece,

$$\alpha=\theta$$

olur ve f dönüşümünün $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısını, hiperbolik olarak θ kadar döndürdüğü görülür. □

Teorem 4.45. *Teorem 4.44'de belirtilen $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$ afin dönüşümü verilsin. $\mathbf{z} = a + a\mathbf{h} \in \mathbb{H}$ null hiperbolik sayısı $\theta = \ln k$ alındığında, $f(\mathbf{z}) = k(a + a\mathbf{h})$ null sayına dönüşür.*

İspat $\mathbf{z} = a + a\mathbf{h} \in \mathbb{H}$ null hiperbolik sayısı ve $\theta = \ln k$ için;

$$\begin{aligned} \cosh\theta &= \cosh\ln k = \frac{e^{\ln k} + e^{-\ln k}}{2} = \frac{k^2+1}{2k}, \\ \sinh\theta &= \sinh\ln k = \frac{e^{\ln k} - e^{-\ln k}}{2} = \frac{k^2-1}{2k} \end{aligned}$$

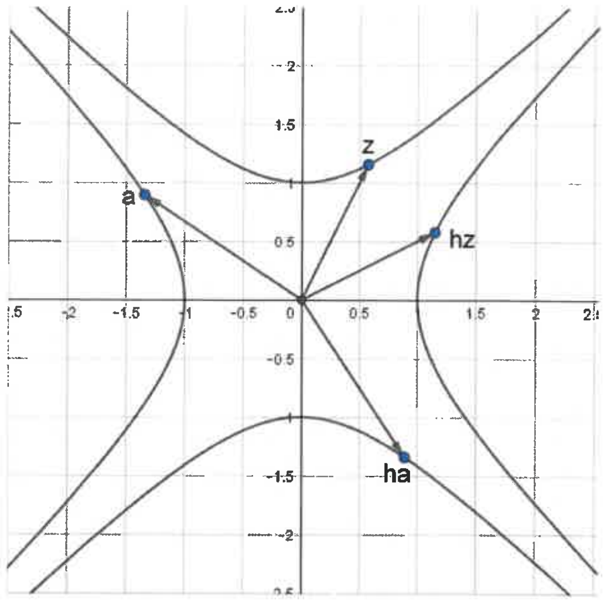
olmak üzere, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$ afin dönüşümü, gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} \frac{k^2+1}{2k} & \frac{k^2-1}{2k} \\ \frac{k^2-1}{2k} & \frac{k^2+1}{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(\frac{k^2+1}{2k} + \frac{k^2-1}{2k}) \\ a(\frac{k^2+1}{2k} + \frac{k^2-1}{2k}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a\frac{2k^2}{2k} \\ a\frac{2k^2}{2k} \end{bmatrix} \\ &= k(a + a\mathbf{h}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Sıçramalı Dönme :

Tanım 4.46. *$f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, $f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}\mathbf{z}$ şeklinde verilen dönüşüme* ***sıçrama dönüşümü*** *denir. Bu dönüşümde, $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayısı, $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısına pseudo dik olan ve $\mathbf{z}$ sayısının bulunduğu hiperbol kolunda olmayan bir hiperbolik sayıdır. Bu dönüşüm, hiperbolik sayının bulunduğu hiperbol kolunu değiştirdiği için, bu dönüşüm sıçrama dönüşümü olarak adlandırılmıştır. Ayrıca, $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{h}\mathbf{z}$ hiperbolik sayıları $y = x$ doğrusuna göre birbirinin yansıması olduğu, kolayca görülebilir (Şekil 4.2).*



Şekil 4.2. Birim hiperbolde $\mathbf{z}$, $\mathbf{hz}$ ve $\mathbf{a}$, $\mathbf{ah}$ sayılarının görüntüsü

Sıçramalı dönme dönüşümü, sıçrama dönüşümü ile dönme dönüşümünün bileşkesidir. Bundan dolayı, bu dönüşüm bir sonuç olarak verilecektir.

Sonuç 4.47. *Sıçramalı Dönme:* $A = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}$, $B = 0$, *ve* $C = 0$ *ise*

$$f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\mathbf{z}$$

dönüşümü verilsin.

a) f dönüşümü null olmayan hiperbolik $\mathbf{z}$ *sayısının casual karakterinin değiştirir, fakat boyunu değiştirmez.*

b) f dönüşümü null olmayan hiperbolik $\mathbf{z}$ *sayısını, önce diğer kola atlatıp daha sonra θ hiperbolik açısı kadar döndürür.*

İspat a) $\mathbf{z} = z_1 + z_2\mathbf{h} \in \mathbb{P}$ olsun. f afin dönüşümünde $\mathbf{z}$ hiperbolik sayının görüntüsü,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} \sinh\theta & \cosh\theta \\ \cosh\theta & \sinh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta \\ z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta \end{bmatrix} \\ &= (z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta) + (z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta)\mathbf{h} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Buna göre,

$$\begin{aligned}
\langle f(\mathbf{z}), f(\mathbf{z})\rangle_L &= (z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta)(z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta) + \\
&\quad -(z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta)(z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta) \\
&= z_1^2\sinh^2\theta + 2z_1z_2\cosh\theta\sinh\theta + z_2^2\cosh^2\theta + \\
&\quad -(z_1^2\cosh^2\theta + 2z_1z_2\cosh\theta\sinh\theta + z_2^2\sinh^2\theta) \\
&= z_1^2(\sinh^2\theta - \cosh^2\theta) - z_2^2(\sinh^2\theta - \cosh^2\theta) \\
&= -z_1^2 + z_2^2 \\
&= -\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayılarının casual karakteri farklıdır. Fakat boyu birbiri ile aynıdır.

b) $\mathbf{hz}$ vektörü ile $f(\mathbf{z})$ vektörü arasındaki açı β olsun. β açısını bulmak için Lorentz skaler çarpımı kullanılabilir. Buna göre,

$$\mathbf{hz} = (z_2, z_1) \text{ ve } f(\mathbf{z}) = (z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta,\ z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{hz}, f(\mathbf{z})\rangle_L| &= \|\mathbf{hz}\|_{\mathbb{H}}\,\|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}}\cosh\beta \\
\left|z_1z_2\sinh\theta + z_2^2\cosh\theta - z_1^2\cosh\theta - z_1z_2\sinh\theta\right| &= \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}^2\cosh\beta \\
(z_1^2 - z_2^2)\cosh\theta &= \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}^2\cosh\beta \\
\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}^2\cosh\theta &= \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}^2\cosh\beta \qquad (\|\mathbf{z}\| \neq 0) \\
\cosh\theta &= \cosh\beta
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan $\theta = \beta$ olduğu görülebilir. □

Örnek 4.48. *$f(z) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}z$ dönüşümü verilsin. $\theta = \ln 3$ için*

$$\begin{aligned}
\cosh\theta &= \cosh\ln 3 = \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \frac{5}{3} \\
\sinh\theta &= \sinh\ln 3 = \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

olmak üzere, f dönüşümü,

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre, $\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 2\mathbf{h})$ *timelike hiperbolik sayısının* f *altındaki görüntüsü,*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/3\sqrt{3} \\ 13/3\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{14}{3\sqrt{3}} + \frac{13}{3\sqrt{3}}\mathbf{h} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buna göre, $f(\mathbf{z})$ *bir spacelike hiperbolik sayıdır.* f *dönüşümü* $\mathbf{z}$ *sayısının casual karakterini değiştirmiştir. Fakat,*

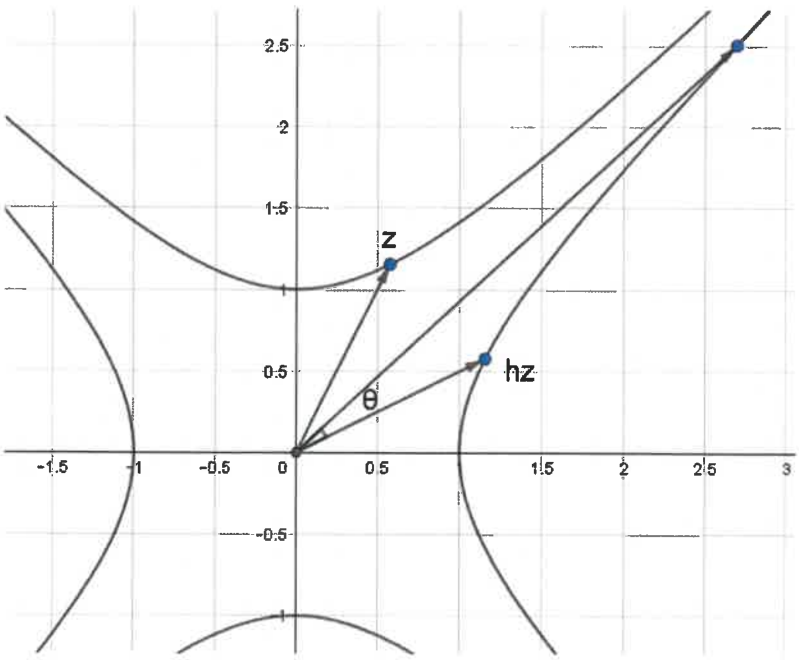
$$\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}} = \|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}} = 1$$

olduğundan f *dönüşümünün uzunluğu değiştirmediği görülür.*

$\mathbf{hz}$ *ve* $f(\mathbf{z})$ *sayılarının konum vektörleri arasındaki açının ölçüsünü skaler çarpım yardımıyla hesaplandığında,*

$$\cosh\beta = \left|\frac{28}{9} - \frac{13}{9}\right|$$

eşitliğinden $\cosh\beta = \frac{5}{3}$ *elde edilir. Buradan* $\beta = \theta$ *olduğu görülebilir (Şekil 4.3.).*



Şekil 4.3. Birim hiperbol üzerinde $\mathbf{z}$, $\mathbf{hz}$ ve $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayılarının görüntüsü.

Teorem 4.49. *$f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\mathbf{z}$ dönüşümü için $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısı ve görüntüsü $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayısını birleştiren doğru parçasının orta noktası, $\mathbf{w}$ olsun. $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ konum vektörleri arasındaki açı θ_1 ve $f(\mathbf{z})$ ve $\mathbf{w}$ konum vektörleri arasındaki açı θ_2 olmak üzere,*

$$\left|\cosh^2\theta_1 - \sinh^2\theta_2\right| = 2$$

olduğu görülebilir.

İspat $\mathbf{z} = z_1 + z_2\mathbf{h}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= (z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta) + (z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta)\mathbf{h}, \\ \mathbf{w} &= \left(\frac{z_1 + z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta}{2}, \frac{z_2 + z_2\sinh\theta + z_1\cosh\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre $\mathbf{w}$ konum vektörünün normu, gerekli işlemler yapıldığında,

$$\langle\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle = \frac{(z_1^2 - z_2^2)\sinh\theta}{2}$$

olarak bulunur. Böylece, $\theta > 0$ için, $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin casual karakterleri aynıdır. Buna göre, $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri arasındaki açının $\cosh\theta_1$ değeri, Lorentz skaler çarpımı kullanılarak, $\langle\mathbf{z},\mathbf{w}\rangle = \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}\cosh\theta_1$ eşitliğinden,

$$\cosh\theta_1 = \frac{\left(\frac{z_1^2-z_2^2}{2}\right)(1+\sinh\theta)}{\sqrt{z_1^2 - z_2^2}\cdot\sqrt{\frac{(z_1^2-z_2^2)}{2}\sinh\theta}} = \frac{1+\sinh\theta}{\sqrt{2\sinh\theta}}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde, $\theta > 0$ için, $f(\mathbf{z})$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin casual karakterleri farklıdır. Buna göre, $f(\mathbf{z})$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri arasındaki açının $\sinh\theta_2$, Lorentz skaler çarpımı kullanılarak, $\langle f(\mathbf{z}),\mathbf{w}\rangle = \|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}\sinh\theta_2$ eşitliğinden,

$$\sinh\theta_2 = \frac{\left(\frac{z_1^2-z_2^2}{2}\right)(-1+\sinh\theta)}{\sqrt{z_1^2 - z_2^2}\cdot\sqrt{\frac{(z_1^2-z_2^2)}{2}\sinh\theta}} = \frac{-1+\sinh\theta}{\sqrt{2\sinh\theta}}$$

olarak bulunur. Buna göre; bulunan eşitlikler $\left|\cosh^2\theta_1 - \sinh^2\theta_2\right|$ ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \left|\cosh^2\theta_1 - \sinh^2\theta_2\right| &= \left|\frac{1 + 2\sinh\theta + \sinh^2\theta - (1 - 2\sinh\theta + \sinh^2\theta)}{2\sinh\theta}\right| \\ &= \left|\frac{4\sinh\theta}{2\sinh\theta}\right| = 2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ sayılarının konum vektörleri $\mathbf{w}$ sayısının konum vektörüne göre birbirinin yansıması olmadığı için $\theta_1 \neq \theta_2$'dir. □

Teorem 4.50. *Hiperbolik düzlemde* $f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\mathbf{z}$ *dönüşüm verilsin.* $\mathbf{z}$ *ve* $f(\mathbf{z})$ *hiperbolik sayılarının toplamını gösteren hiperbolik sayının konum vektörü* $\mathbf{w}$ *ve* $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}$ *olmak üzere, bu iki vektör arasındaki hiperbolik açı*

$$\gamma = \ln\left(\frac{e^{\theta}+1}{e^{\theta}-1}\right)$$

ile belirlidir.

İspat $\mathbf{z} = z_1 + \mathbf{h}z_2$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})} = (z_1 - z_1\sinh\theta - z_2\cosh\theta, z_2 - z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta) \\
\mathbf{w} &= (z_1 + z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta, z_2 + z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta)
\end{aligned}$$

olacaktır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_L &= (z_1 - z_1\sinh\theta - z_2\cosh\theta)(z_1 + z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta) \\
&\quad -(z_2 - z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta)(z_2 + z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta) \\
&= \left[z_1^2 - (z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta)^2\right] - \left[z_2^2 - (z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta)^2\right] \\
&= z_1^2 - z_2^2 + \begin{bmatrix} (z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta + z_1\sinh\theta + z_2\cosh\theta)\cdot \\ \cdot(z_1\cosh\theta + z_2\sinh\theta - z_1\sinh\theta - z_2\cosh\theta) \end{bmatrix} \\
&= z_1^2 - z_2^2 + \begin{bmatrix} (z_1(\cosh\theta + \sinh\theta) + z_2(\sinh\theta + \cosh\theta))\cdot \\ \cdot(z_1(\cosh\theta - \sinh\theta) - z_2(\cosh\theta - \sinh\theta) \end{bmatrix} \\
&= z_1^2 - z_2^2 + [(z_1 + z_2)(\cosh\theta + \sinh\theta)(z_1 - z_2)(\cosh\theta - \sinh\theta)] \\
&= z_1^2 - z_2^2 + (z_1^2 - z_2^2)(\cosh^2\theta - \sinh^2\theta) \\
&= 2(z_1^2 - z_2^2) \\
\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_L &= 2\left\|\mathbf{z}\right\|_{\mathbb{H}}^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan, $\mathbf{v}$ vektörünün normu hesaplandığında,

$$\begin{aligned}
\left|\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L\right| &= \left|(z_1\text{-}z_1\sinh\theta\text{-}z_2\cosh\theta)^2\text{-}(z_2\text{-}z_1\cosh\theta\text{-}z_2\sinh\theta)^2\right| \\
&= \left|(z_1^2\text{-}z_2^2)\,[1\text{-}\sinh\theta\text{-}\cosh\theta)]\,[1\text{-}\sinh\theta + \cosh\theta]\right| \\
\left\|\mathbf{v}\right\|_{\mathbb{H}}^2 &= \left|-2\sinh\theta\right|\left\|\mathbf{z}\right\|_{\mathbb{H}}^2 \quad (\theta > 0) \\
\left\|\mathbf{v}\right\|_{\mathbb{H}}^2 &= 2\sinh\theta\left\|\mathbf{z}\right\|_{\mathbb{H}}^2
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece, $\mathbf{v}$ vektörünün casual karakterinin $\mathbf{z}$ ile aynı olmadığı da görülebilir. Aynı şekilde, $\mathbf{w}$ vektörü için hesaplama yapılırsa, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin normun eşit olduğu görülür. Şimdi $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin arasındaki Lorentz anlamındaki açı γ olsun. Bu açıyı hesaplamak için lorentz skaler çarpımından yararlanılabilir. Böylece, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin skaler çarpımından,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_L &= \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \sinh \gamma, \\
2 \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}^2 &= 2 \sinh \theta \, \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}^2 \sinh \gamma, \\
\sinh \gamma &= \frac{1}{\sinh \theta}, \\
\frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2} &= \frac{2}{e^{\theta} - e^{-\theta}},
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte, $e^{\gamma} = t$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
t - \frac{1}{t} &= \frac{4}{e^{\theta} - e^{-\theta}} \\
\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right) t^2 - 4t - \left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right) &= 0 \\
\left(e^{2\theta} - 1\right) t^2 - 4e^{\theta} t - \left(e^{2\theta} - 1\right) &= 0
\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleminin kökleri,

$$t_1 = -\frac{e^{\theta} - 1}{e^{\theta} + 1} \text{ ve } t_2 = \frac{e^{\theta} + 1}{e^{\theta} - 1}$$

olarak bulunur. $\theta > 0$ için t_1 negatif değer alacağından kök değildir. Buna göre, t_2 kökünden γ hiperbolik açısı,

$$\gamma = \ln \left(\frac{e^{\theta} + 1}{e^{\theta} - 1} \right)$$

olarak bulunur. □

Örnek 4.51. *$f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\mathbf{z}$ dönüşümü verilsin. $\theta = \ln 3$ olmak üzere, $\mathbf{z} = 1 + 2\mathbf{h}$ timelike hiperbolik sayısı için, $f(\mathbf{z})$ ile $\mathbf{z}$ sayılarının toplamının konum vektörü $\mathbf{w}$ ve $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}$ vektörleri arasındaki Lorentz anlamındaki açı γ olsun. $\gamma = \ln 2$ olduğu görülür. Buradan,*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= (z_1 - z_1 \sinh \theta - z_2 \cosh \theta, z_2 - z_1 \cosh \theta - z_2 \sinh \theta) \\
\mathbf{w} &= (z_1 + z_1 \sinh \theta + z_2 \cosh \theta, z_2 + z_1 \cosh \theta + z_2 \sinh \theta)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, $\theta = \ln 3$ için, bu vektörler,

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}\right) \text{ ve } \mathbf{w} = \left(\frac{17}{3}, \frac{19}{3}\right)$$

olarak bulunur. $\mathbf{v}$ *ve* $\mathbf{w}$ *vektörlerin normu hesaplandığında,*

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}} = \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} = \sqrt{8}$$

bulunur. Buradan $\mathbf{v}$ *ve* $\mathbf{w}$ *vektörleri arasındaki Lorentz anlamındaki açı, skaler çarpım yardımıyla bulunabilir. Böylece,* $\mathbf{v}$ *ve* $\mathbf{w}$ *vektörlerinin skaler çarpımından,*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_L &= \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \sinh\gamma \\ 2\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}^2 &= 8\sinh\gamma \quad (\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}} = \sqrt{3}) \\ \sinh\gamma &= \frac{3}{4} \\ \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde $\gamma = \ln 2$ *bulunur.*

Teorem 4.52. $A = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}$, $B = \mathbf{0}$, *ve* $C = 0$ *iken* $f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\mathbf{z}$ *dönüşümünde* $\mathbf{z}$ *ve* $f(\mathbf{z})$ *vektörlerinin* $f(\mathbf{z})$ *ile* $\mathbf{z}$ *sayılarının toplamının konum vektörü* $\mathbf{w}$ *ve* $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}$ *vektörünün normu* z *vektörünün boyuna eşit olması için, yani*

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}} = \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}}$$

olması için, $\theta = \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *olmalıdır.*

İspat $\mathbf{w}$ ve $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}$ vektörlerinin normu ile $\mathbf{z}$ vektörünün normu arasındaki bağıntı, Teorem 4.50'nin ispatında,

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^2 = \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}}^2 = 2\sinh\theta\,\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}^2 \quad (\theta > 0)$$

eşitliği elde edilmişti. Buna göre, $\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}} = \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}$ olması için

$$\sinh\theta = \frac{1}{2}$$

olmalıdır. Buna göre,

$$\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} = \frac{1}{2}$$

yazılabilir. Bu denklem çözüldüğünde $\theta = \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olarak bulunur. □

Yansıma Dönüşümü

Örnek 4.53. *$\theta = \ln 2$ olmak üzere, $f(\mathbf{z}) = e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ dönüşümü verilsin. $\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 2\mathbf{h})$ timelike hiperbolik sayısı için $f(\mathbf{z})$ sayısının konum vektörü $y = \tanh\frac{\theta}{2}x$ doğrusuna göre, $\mathbf{z}$ sayısının konum vektörünün yansımasıdır.*

Gerçekten, $f(\mathbf{z}) = e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ dönüşümü $\theta = \ln 2$ için;

$$\begin{aligned}\cosh\theta &= \cosh\ln 2 = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{5}{4} \\ \sinh\theta &= \sinh\ln 2 = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$f(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, $\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + 2\mathbf{h})$ hiperbolik sayısının görüntüsü,

$$f(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4\sqrt{3}} \\ -\frac{7}{4\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buna göre, $f(\mathbf{z}) = -\frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{7}{4\sqrt{3}}\mathbf{h}$ sayısıda bir timelike sayıdır. Fakat $f(\mathbf{z})$ hiperbolün (Lorentz çemberi) alt kolundandır. Görüldüğü gibi, f dönüşümü $\mathbf{z}$ sayısı nın casual karakterini değiştirmemiştir. Aynı zamanda, $\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}} = \|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}} = 1$ olduğundan f dönüşümünün Lorentz anlamında uzunluğu değiştirmediği görülür. Bu dönüşümün mat risinin determinantı -1 olduğu için f dönüşümü bir yansıma dönüşümü olabilir. Bir başka deyişle, $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ sayılarının orta noktası olan $\mathbf{w} = (\frac{3}{8\sqrt{3}}, \frac{1}{8\sqrt{3}})$ noktasının konum vektörüne yansıması olabilir. Böyle olup olmadığını görmek için, $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ konum vektörleri arasındaki açı $\theta_1$ve $f(\mathbf{z})$ ve $\mathbf{w}$ konum vektörleri arasındaki açı θ_2 olmak üzere, bu açıları hesaplamak için, skaler çarpımdan yararlanılabilir. Böylece, θ_1 ve θ_2 açıları hesap landığında

$$\begin{aligned}|\langle \mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle_L| &= \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}\sinh\theta_1 \\ \sinh\theta_1 &= \frac{|\langle \mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle_L|}{\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}} = \frac{\left|\frac{3}{24} - \frac{2}{24}\right|}{1 \cdot \frac{\sqrt{8}}{8\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{24}}\end{aligned}$$

ve aynı şekilde,

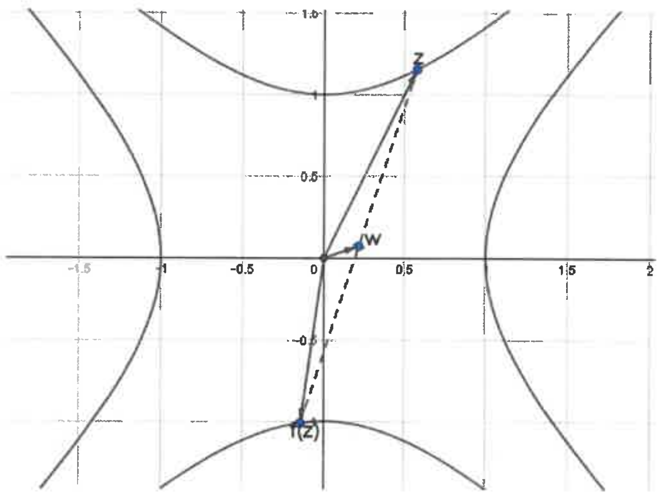
$$\begin{aligned}|\langle f(\mathbf{z}), \mathbf{w}\rangle_L| &= \|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}\sinh\theta_2 \\ \sinh\theta_2 &= \frac{|\langle f(\mathbf{z}), \mathbf{w}\rangle_L|}{\|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}} = \frac{\left|-\frac{3}{96} + \frac{7}{96}\right|}{1 \cdot \frac{\sqrt{8}}{8\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{24}}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buna göre, $\theta_1 = \theta_2$ olduğu bulunur.

Aynı zamanda, $\overrightarrow{O\mathbf{w}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}$ vektörlerinin Lorentz anlamında skaler çarpımı alındığında,

$$\left\langle \overrightarrow{O\mathbf{w}}, \overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})} \right\rangle_L = \left\langle \left(\frac{3}{8\sqrt{3}}, \frac{1}{8\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{5}{4\sqrt{3}}, -\frac{15}{4\sqrt{3}}\right) \right\rangle_L = -\frac{15}{96} + \frac{15}{96} = 0$$

sonucu bulunur. Bu sonuç, $\overleftrightarrow{O\mathbf{w}}$ doğrusu ile $\overleftrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}$ doğrusu $\mathbf{w}$ noktasında birbirine dik olduğunu gösterir. Buradaki $\overleftrightarrow{O\mathbf{w}}$ doğrusunun eğimi $\frac{1}{3} = \tanh\frac{\theta}{2}$ ve doğru orijinden geçtiği için denklemi $y = \tanh\frac{\theta}{2}x$ olarak yazılabilir. Buna göre, $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ noktalarının $\overleftrightarrow{O\mathbf{w}}$ doğrusuna göre birbirinin yansımasıdır (Şekil 4.4.).



Şekil 4.4. Birim hiperbol üzerinde $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ sayılarının görüntüsü

Teorem 4.54. *$f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, $f(\mathbf{z}) = e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ dönüşümü verilsin. $\mathbf{z} \in \mathbb{P}$ olmak üzere*

a) *$f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayısının casual karakteri ve buyu değişmez.*

b) *$f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının $y = \tanh\frac{\theta}{2}x$ doğrusuna göre yansımasıdır.*

İspat **a)** $\mathbf{z} = z_1 + z_2\mathbf{h} \in \mathbb{P}$ olmak üzere, $f(\mathbf{z}) = e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ dönüşümü

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ \sinh\theta & -\cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta \\ z_1\sinh\theta - z_2\cosh\theta \end{bmatrix} \\ &= (z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta) + (z_1\sinh\theta - z_2\cosh\theta)\mathbf{h} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının f dönüşümü altındaki görüntüsü nün casual karakteri ve uzunluğu, skaler çarıpm vasıtasıyla bulunabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\langle f(\mathbf{z}), f(\mathbf{z})\rangle_L &= (z_1\cosh\theta\text{-}z_2\sinh\theta)(z_1\cosh\theta\text{-}z_2\sinh\theta) + \\
&\quad -(z_1\sinh\theta\text{-}z_2\cosh\theta)(z_1\sinh\theta\text{-}z_2\cosh\theta) \\
&= z_1^2\cosh^2\theta - 2z_1z_2\cosh\theta\sinh\theta + z_2^2\sinh^2\theta + \\
&\quad -(z_1^2\sinh^2\theta - 2z_1z_2\cosh\theta\sinh\theta + z_2^2\cosh^2\theta) \\
&= z_1^2(\cosh^2\theta - \sinh^2\theta) - z_2^2(\cosh^2\theta - \sinh^2\theta) \\
&= z_1^2 - z_2^2 \\
&= \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle_L
\end{aligned}$$

olduğundan, $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayılarının casual karakteri aynı ve uzunlukları da eşittir.

b) $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayılarının orta noktası,

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z} + e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}}{2}$$

hiperbolik sayısı ile verilebilir. $\mathbf{w}$ hiperbolik sayısının hiperbolik düzlemdeki konum vektörünün, $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayılarının konum vektörüyle yaptığı açıların eşit olduğu skaler çarpım kullanılarak gösterilebilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle_L &= \frac{1}{2}\left[\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle_L + \left\langle \mathbf{z}, e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}\right\rangle_L\right] \\
\langle f(\mathbf{z}), \mathbf{w}\rangle_L &= \frac{1}{2}\left[\left\langle e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}, e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}\right\rangle_L + \left\langle e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}, \mathbf{z}\right\rangle_L\right]
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada,

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{z}, e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}\right\rangle_L &= \left\langle e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}, \mathbf{z}\right\rangle_L \\
\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle_L &= \langle f(\mathbf{z}), f(\mathbf{z})\rangle_L = \left\langle e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}, e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}\right\rangle_L
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle_L = \langle f(\mathbf{z}), \mathbf{w}\rangle_L$$

olduğu sonucuna varılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \frac{\mathbf{z} + f(\mathbf{z})}{2} \\
&= \frac{z_1 + z_2\mathbf{h} + (z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta) + (z_1\sinh\theta - z_2\cosh\theta)\mathbf{h}}{2} \\
&= \frac{z_1 + z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta}{2} + \frac{z_2 + z_1\sinh\theta - z_2\cosh\theta}{2}\mathbf{h}
\end{aligned}$$

olduğu göz önünü alındığında, $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$ ve $f(\mathbf{z})$, $\mathbf{w}$ skaler çarpımlarının

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle_L &= \frac{\mathbf{z}\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}\overline{\mathbf{z}}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(z_1^2 - z_2^2 + \left(z_1^2 + z_2^2\right)\cosh\theta - 2z_1z_2\sinh\theta\right), \\
\langle f(\mathbf{z}), \mathbf{w}\rangle_L &= \frac{f(\mathbf{z})\,\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{u}\mathbf{w}\overline{f(\mathbf{z})}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(z_1^2 - z_2^2 + \left(z_1^2 + z_2^2\right)\cosh\theta - 2z_1z_2\sinh\theta\right)
\end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir. Burada, $\mathbf{w}$ hiperbolik sayısının üzerinde bulunduğu $O\mathbf{w}$ doğrusunun eğimi,

$$m = \frac{z_2 + z_1\sinh\theta - z_2\cosh\theta}{z_1 + z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta}$$

ile belirlidir. Bu eşitlikte,

$$\sinh\theta = 2\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}, \cosh\theta = 2\cosh^2\frac{\theta}{2} - 1 \text{ ve } \cosh\theta = 2\sinh^2\frac{\theta}{2} + 1$$

özdeşlikleri kullanıldığında, $O\mathbf{w}$ doğrusunun eğiminin,

$$\begin{aligned}
m &= \frac{z_2 + 2z_1\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2} - z_2\left(2\sinh^2\frac{\theta}{2} + 1\right)}{z_1 + z_1\left(2\cosh^2\frac{\theta}{2} - 1\right) - 2z_2\sinh\frac{\theta}{2}\cosh\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\left(\sinh\frac{1}{2}\theta\right)\left(z_1\cosh\frac{1}{2}\theta - z_2\sinh\frac{1}{2}\theta\right)}{\left(\cosh\frac{1}{2}\theta\right)\left(z_1\cosh\frac{1}{2}\theta - z_2\sinh\frac{1}{2}\theta\right)} \\
&= \tanh\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani, $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayılarının orta noktası, $y = \tanh\frac{\theta}{2}x$ doğrusu üzerindedir. Bunun yanında,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right\rangle_L &= \left\langle f(\mathbf{z}) - \mathbf{z}, \frac{\mathbf{z} + e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}}{2}\right\rangle_L \\
&= \left\langle e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}} - \mathbf{z}, \frac{\mathbf{z} + e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}}{2}\right\rangle_L \\
&= \frac{1}{2}\left[\left\langle e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}, \mathbf{z}\right\rangle + \left\langle e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}, e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}\right\rangle - \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle - \left\langle \mathbf{z}, e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}\right\rangle\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan, $\mathbf{w}$ hiperbolik sayısının hiperbolik düzlemdeki konum vektörü, $\overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}$ vektörüne pseudo ortogonaldir. Bu, $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayısının, doğrultusu $\mathbf{w}$ olan orjinden geçen doğruya göre $\mathbf{z}$ sayısının yansıması olduğunu gösterir. □

Sonuç 4.55. *$\theta = 0$ alındığında,* $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *olur. Böylece, f dönüşümü*

$$f(\mathbf{z}) = \mathbf{T}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ -z_2 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir. Yani, $\theta = 0$ ise $f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z}$ noktasının $\mathbf{x}$ eksenine göre yansımasıdır.

Yansımalı Sıçramalı Dönme

$f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ afin dönüşümü üç dönüşümün bileşkesinden oluşmaktadır. Bunlardan ilki $\mathbf{z}$ sayısının x eksenine göre yansımasını veren $g(\mathbf{z}) = \overline{\mathbf{z}}$ eşlenik alma dönüşümü, ikinci dönüşüm $s(\mathbf{z}) = \mathbf{hz}$ sıçrama dönüşümü ve üçüncü dönüşüm de $d(\mathbf{z}) = e^{\mathbf{h}\theta}\mathbf{z}$ dönme dönüşümüdür. f dönüşümü

$$f(\mathbf{z}) = (d \circ s \circ g)(\mathbf{z})$$

şeklinde ifade edilebilir. Gerçekten, $\mathbf{z} = z_1 + z_2\mathbf{h}$ hiperbolik sayısının f dönüşümü altındaki görüntüsü, $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının verilen dönüşümlerde sırasıyla görüntülerinin bulunmasıyla,

$$g(\mathbf{z}) = \overline{\mathbf{z}} = z_1 - z_2\mathbf{h}$$
$$s(\overline{\mathbf{z}}) = \mathbf{h}\overline{\mathbf{z}} = -\, z_2 + z_1\mathbf{h}$$
$$d(-z_2 + z_1\mathbf{h}) = e^{\mathbf{h}\theta}(-z_2 + z_1\mathbf{h}) = (z_1 \sinh\theta - z_2\cosh\theta) + (z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta)\mathbf{h}$$
$$f(\mathbf{z}) = (d \circ s \circ g)(\mathbf{z}) = (z_1 \sinh\theta - z_2\cosh\theta) + (z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta)\mathbf{h}$$

olarak bulunabilir. Bu dönüşüm işlemleri sonucunda $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısı belli bir miktar dönmüş olur.

Örnek 4.56. *$f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ dönüşümü ve $\theta = \ln 2$ için $\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2+3\mathbf{h})$ hiperbolik timelike sayısının f dönüşümü altındaki görüntüsü olan $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayısı $\mathbf{z}$ sayısının belli bir miktar döndürülerek elde edilebilir. Gerçekten,*

$$\begin{aligned}\cosh\theta &= \cosh\ln 2 = \frac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{2} = \frac{5}{4}\\ \sinh\theta &= \sinh\ln 2 = \frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

olmak üzere, $f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ dönüşümü,

$$f(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre, $\mathbf{z}$ sayısının f altındaki görüntüsü hesaplandığında,

$$f(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-9}{4\sqrt{5}} \\ \frac{1}{4\sqrt{5}} \end{bmatrix} = -\frac{9}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{4\sqrt{5}}h$$

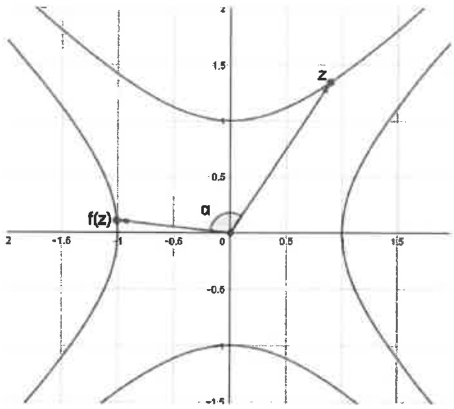
sonucu elde edilir. Sonuca göre, $f(\mathbf{z})$ bir spacelike sayıdır. f dönüşümü $\mathbf{z}$ sayısının casual karakterini değiştirmiştir. Ama,

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}} = \|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}} = 1$$

olduğundan f dönüşümünün uzunluğu değiştirmediği görülür. f dönüşümünün matrisinin determinantı 1 olduğundan f dönüşümü bir dönme dönüşümü olabilir. Bunun için $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ arasındaki açıyı Lorentz iç çarpımı kullanıldığıda,

$$\begin{aligned}|\langle \mathbf{z}, f(\mathbf{z})\rangle_L| &= \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}}\,\|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}}\sinh\alpha\\ \left|\left\langle (\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}),(\frac{-9}{4\sqrt{5}},\frac{1}{4\sqrt{5}})\right\rangle_L\right| &= 1\cdot 1\sinh\alpha\\ \sinh\alpha &= \frac{21}{20}\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. f dönüşümü $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısını hiperbolik anlamda a kadar döndürmüştür. Fakat, $\sinh\theta \neq \sinh\alpha$ olması f dönüşümünün $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısını gösteren vektörü θ kadar döndürmediğini gösterir (Şekil 4.5.).



Şekil 4.5. Birim hiperbol üzerinde $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ sayılarının görüntüsü

Bu dönüşümde dönme açısının büyüklüğünü teorik olarak hesaplayabilmek için aşağıdaki teorem kullanılabilir.

Teorem 4.57. *$f:\mathbb{P}\to\mathbb{P}$, $A=0$, $B=\mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}$, ve $C=0$ ise $f(\mathbf{z})=\mathbf{h}e^{h\theta}\overline{\mathbf{z}}$ dönüşümü verilsin. $\mathbf{z}\in\mathbb{P}$ null olmayan bir hiperbolik sayı olmak üzere,*

a) *f afin dönüşümü $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının casual karakterinin değiştirir, fakat boyunu değiştirmez.*

b) *$\mathbf{z}$ hiperbolik sayısı ile $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayısı arasındaki açının ölçüsü $\left[\ln\left(\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}\right)+\theta\right]$ dır.*

İspat **a)** $\mathbf{z}=z_1+z_2\mathbf{h}\in\mathbb{P}$ olsun. f afin dönüşümünde $\mathbf{z}$ hiperbolik sayının görüntüsü,

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} \sinh\theta & -\cosh\theta \\ \cosh\theta & -\sinh\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} z_1\sinh\theta - z_2\cosh\theta \\ z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta \end{bmatrix} \\
&= (z_1\sinh\theta - z_2\cosh\theta) + (z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta)\mathbf{h}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Böylece, $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının f dönüşümü altındaki $f(\mathbf{z})$ sayısının casual karakteri ve uzunluğu, skaler çarpım vasıtasıyla bulunabilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned}
\langle f(\mathbf{z}), f(\mathbf{z})\rangle_L &= (z_1 \sinh\theta - z_2\cosh\theta)(z_1\sinh\theta - z_2\cosh\theta) + \\
&\quad -(z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta)(z_1\cosh\theta - z_2\sinh\theta) \\
&= z_1^2\sinh^2\theta - 2z_1z_2\cosh\theta\sinh\theta + z_2^2\cosh^2\theta + \\
&\quad -(z_1^2\cosh^2\theta - 2z_1z_2\cosh\theta\sinh\theta + z_2^2\sinh^2\theta) \\
&= z_1^2(\sinh^2\theta - \cosh^2\theta) - z_2^2(\sinh^2\theta - \cosh^2\theta) \\
&= -z_1^2 + z_2^2 = -\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle_L
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuca göre,

$$\langle f(\mathbf{z}), f(\mathbf{z})\rangle_L = -\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle_L$$

olduğundan $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayılarının casual karakteri farklıdır. Fakat, boyu eşittir.

b) Burada $\mathbf{z}$ sayısının f dönüşümü altındaki dönme miktarı skaler çarpım ile hesaplana bilir. $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayılarının arasındaki açı α olsun. $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ sayılarının casual karakterleri farklı olduğundan, skaler çarpım,

$$|\langle \mathbf{z}, f(\mathbf{z})\rangle_L| = \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}} \|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}} \sinh\alpha$$

şeklinde kullanılır. Böylece, $\mathbf{z}$ sayısının f dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} \sinh\theta & -\cosh\theta \\ \cosh\theta & -\sinh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} & -\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \\ \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} & -\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{z_1e^\theta - z_1e^{-\theta} - z_2e^\theta - z_2e^{-\theta}}{2} \\ \frac{z_1e^\theta + z_1e^{-\theta} - z_2e^\theta + z_2e^{-\theta}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(z_1 - z_2)e^\theta - (z + z_2)e^{-\theta}}{2} \\ \frac{(z_1 - z_2)e^\theta + (z + z_2)e^{-\theta}}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ konum vektörlerinin Lorentz anlamındaki skaler çarpımı,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{z}, f(\mathbf{z})\rangle_L &= \frac{z_1^2e^\theta - z_1^2e^{-\theta} - z_1z_2e^\theta - z_1z_2e^{-\theta} - z_1z_2e^\theta - z_1z_2e^{-\theta} + z_2^2e^\theta - z_2^2e^{-\theta}}{2} \\
&= \frac{(z_1 - z_2)^2e^\theta - (z_1 + z_2)^2e^{-\theta}}{2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}} = \|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}} = \sqrt{z_1^2 - z_2^2}$ olduğu kullanılırsa,

$$|\langle \mathbf{z}, f(\mathbf{z})\rangle_L| = \|\mathbf{z}\|_{\mathbb{H}} \|f(\mathbf{z})\|_{\mathbb{H}} \sinh\alpha$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{(z_1-z_2)^2 e^{\theta} - (z_1+z_2)^2 e^{-\theta}}{2} &= \left[z_1^2 - z_2^2\right]\sinh\alpha \\ \frac{(z_1-z_2)^2 e^{\theta} - (z_1+z_2)^2 e^{-\theta}}{2\left[z_1^2 - z_2^2\right]} &= \sinh\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, α değerini bulmak için

$$\sinh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

eşitliğini bu son eşitlikte yerine yazıldığında,

$$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \frac{(z_1-z_2)^2 e^{\theta} - (z_1+z_2)^2 e^{-\theta}}{2\left[z_1^2 - z_2^2\right]}$$

eşitliği elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında, α açısı

$$\begin{aligned} \frac{e^{\alpha}}{2} &= \frac{(z_1-z_2)^2 e^{\theta}}{2\left[z_1^2 - z_2^2\right]} \\ \alpha &= \ln\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right) + \theta \end{aligned}$$

bulunur. □

Bu durum $f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ dönüşümü $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayısı ile $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının arasındaki açının yalnızca θ açısına olmadığını, aynı zamanda, $\mathbf{z}$ hiprerbolik sayısının bileşenlerine de bağlı olduğunu gösterir. Bundan dolayı bu f dönüşümü, sabit bir θ açısı için farklı hiperbolik sayıları farklı miktarda döndürecektir. Fakat bu durum $\mathbf{z}$ null sayı olduğunda geçerli değildir. Çünkü null sayılar için α açısı tanımsızdır.

Teorem 4.58. *$f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ bir dönme dönüşümü ve $\forall\ \mathbf{z} = a + b\mathbf{h} \in \mathbb{P}$ null olmayan hiperbolik sayı olmak üzere, $\mathbf{z} \perp_L f(\mathbf{z})$ olması için gerek ve yeter şart*

$$\theta = \ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$$

olmasıdır.

İspat $\mathbf{z} = a + b\mathbf{h} \in \mathbb{P}$ olsun. f afin dönüşümünde $\mathbf{z}$ hiperbolik sayının görüntüsü,

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} \sinh\theta & -\cosh\theta \\ \cosh\theta & -\sinh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} & -\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} \\ \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} & -\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{ae^{\theta}-ae^{-\theta}-be^{\theta}-be^{-\theta}}{2} \\ \frac{ae^{\theta}+ae^{-\theta}-be^{\theta}+be^{-\theta}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(a-b)e^{\theta}-(a+b)e^{-\theta}}{2} \\ \frac{(a-b)e^{\theta}+(a+b)e^{-\theta}}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Önce,

$$\mathbf{z} \perp_L f(\mathbf{z}) \text{ ise } \theta = \ln(\frac{a+b}{a-b})$$

olduğu gösterilsin. Bunun için,

$$\mathbf{z} \perp_L f(\mathbf{z}) \text{ ise } \langle \mathbf{z}, f(\mathbf{z}) \rangle_L = 0$$

önermesi kullanılabilir. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{z}, f(\mathbf{z}) \rangle_L &= \frac{a^2e^{\theta} - a^2e^{-\theta} - abe^{\theta} - abe^{-\theta} - abe^{\theta} - abe^{-\theta} + b^2e^{\theta} - b^2e^{-\theta}}{2} \\
&= \frac{(a-b)^2e^{\theta} - (a+b)^2e^{-\theta}}{2} = 0 \\
\theta &= \ln(\frac{a+b}{a-b})
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Şimdi, $\theta = \ln(\frac{a+b}{a-b})$ olduğunda $\mathbf{z} \perp_L f(\mathbf{z})$ olduğunu gösterilsin, f afin dönüşümünde, θ yerine $\ln(\frac{a+b}{a-b})$ yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} \frac{(a-b)e^{\ln(\frac{a+b}{a-b})}-(a+b)e^{-\ln(\frac{a+b}{a-b})}}{2} \\ \frac{(a-b)e^{\ln(\frac{a+b}{a-b})}+(a+b)e^{-\ln(\frac{a+b}{a-b})}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(a-b)\frac{a+b}{a-b}-(a+b)\frac{a-b}{a+b}}{2} \\ \frac{(a-b)\frac{a+b}{a-b}+(a+b)\frac{a-b}{a+b}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \\
&= b + a\mathbf{h}
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Buna göre, $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayılarının Lorentz anlamında dik olduğu görülebilir. □

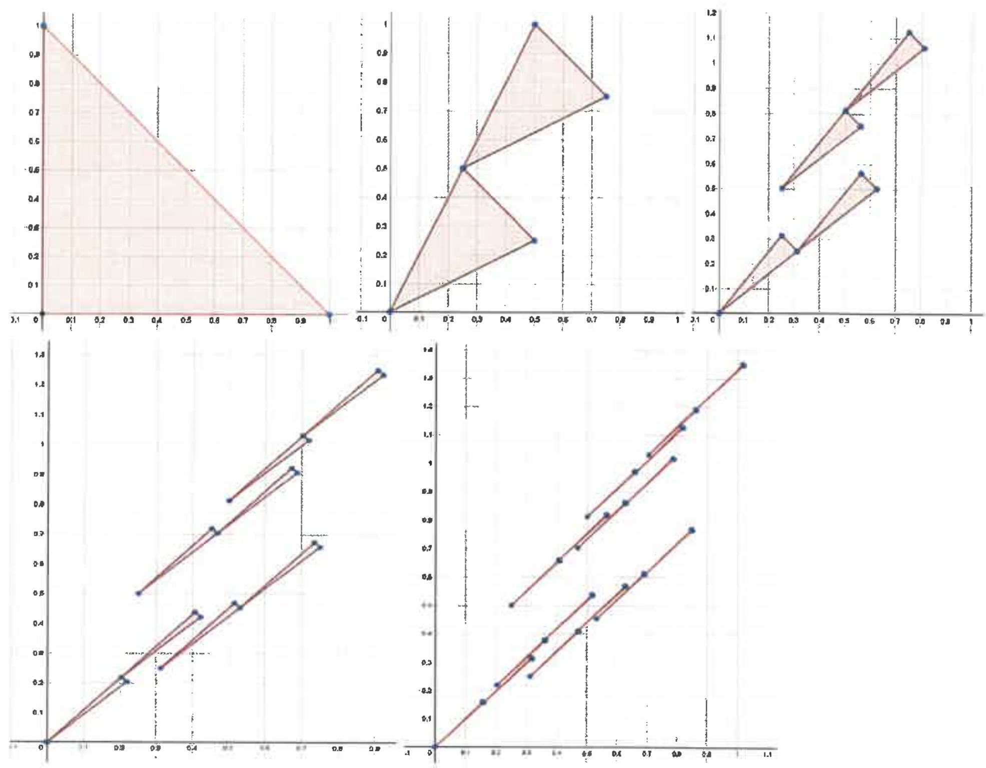
4.2. Hiperbolik Düzlemde Afin Dönüşümlerin Uygulaması: Fraktaller

Hiperbolik düzlemde bir fraktal afin dönüşüm sistemleri ile oluşturulabilir. Bu afin dönüşüm sistemleri bir noktalar kümesine özyinelemeli bir şekilde uygulandığında bir fraktal elde edilebilir. Dönüşümün küçültme oranı $F(\mathbf{z}) = \mathbf{Az} + \mathbf{b}$ afin dönüüşümündeki $\mathbf{A}$ hiperbolik sayısının normuna eşittir.

Örnek 4.59. *Köşeleri $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \mathbf{h}$ sayıları olan üçgenin noktalarına aşağıda verilen afin dönüşüm sistemini öz yinelemeli bir şekilde uygulansın.*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \frac{1}{4}(1+2\mathbf{h})\mathbf{z} \\ g(\mathbf{z}) &= \frac{1}{4}(2+\mathbf{h})\mathbf{z} + \frac{1}{4}(1+2\mathbf{h}) \end{aligned}$$

***Bu afin dönüşüm sisteminide verilen noktalar yerine yazıldığında, her adımda elde edilen görüntü kümelerinin resimleri** Şekil 4.6'da verilmiştir. Buna göre ilk dört adım Şekil 4.6'da görüldüğü gibi resmedilebilir.*

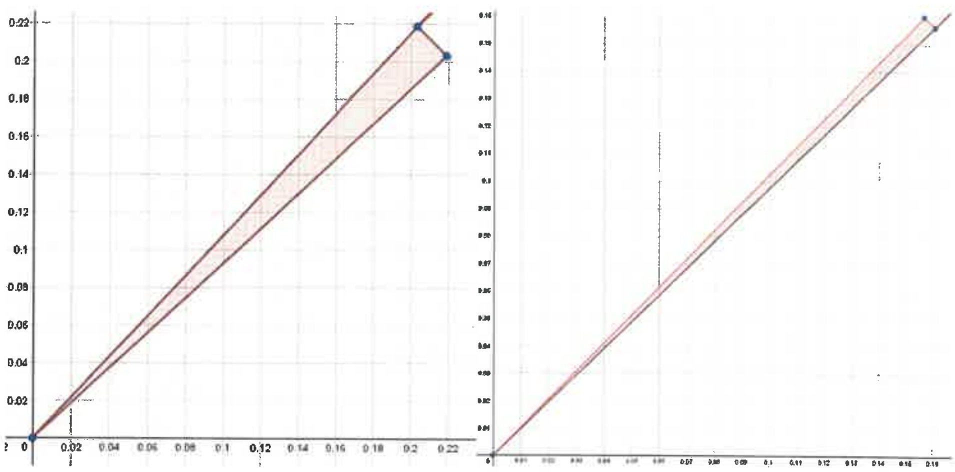


Şekil 4.6. Köşeleri $\mathbf{z}_1 = 0$, $\mathbf{z}_2 = 1$, $\mathbf{z}_3 = \mathbf{h}$ sayıları olan üçgenin f ve g fonksiyonlarının yinelemeli olarak uygulanması ile elde edilen fraktalin ilk dört adımı

İlk adım için işlemler yapıldıktan sonra şu sayılar bulunabilir.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= \frac{1}{2}\mathbf{h} + \frac{1}{4} \\ f(\mathbf{h}) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathbf{h} \\ g(0) &= \frac{1}{2}\mathbf{h} + \frac{1}{4} \\ g(1) &= \frac{3}{4}\mathbf{h} + \frac{3}{4} \\ g(\mathbf{h}) &= \mathbf{h} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bu sayıların oluşturduğu, başlangıç adımının $\overrightarrow{O\mathbf{z}_1}$ ve $\overrightarrow{O\mathbf{z}_2}$ vektörlerine karşılık gelen $\overrightarrow{f(0)f(1)}$ ve $\overrightarrow{f(0)f(\mathbf{h})}$ vektörlerinin ve $\overrightarrow{g(0)g(1)}$ ve $\overrightarrow{g(0)g(\mathbf{h})}$ Lorentz anlamında diktir. Aynı zamanda küçültme oranı f ve g afin dönüşümlerinin $\frac{1}{4}(1{+}2\mathbf{h})$ ve $\frac{1}{4}(2{+}\mathbf{h})$ sayılarının normuna eşittir. Fraktalin üçüncü ve dördüncü adımını oluşturan üçgenlerded bir tanesi Şekil 4.7'de gösterilmiştir. Sağdaki üçgen üçüncü adım, soldaki üçgen dördüncü adıma aittir.



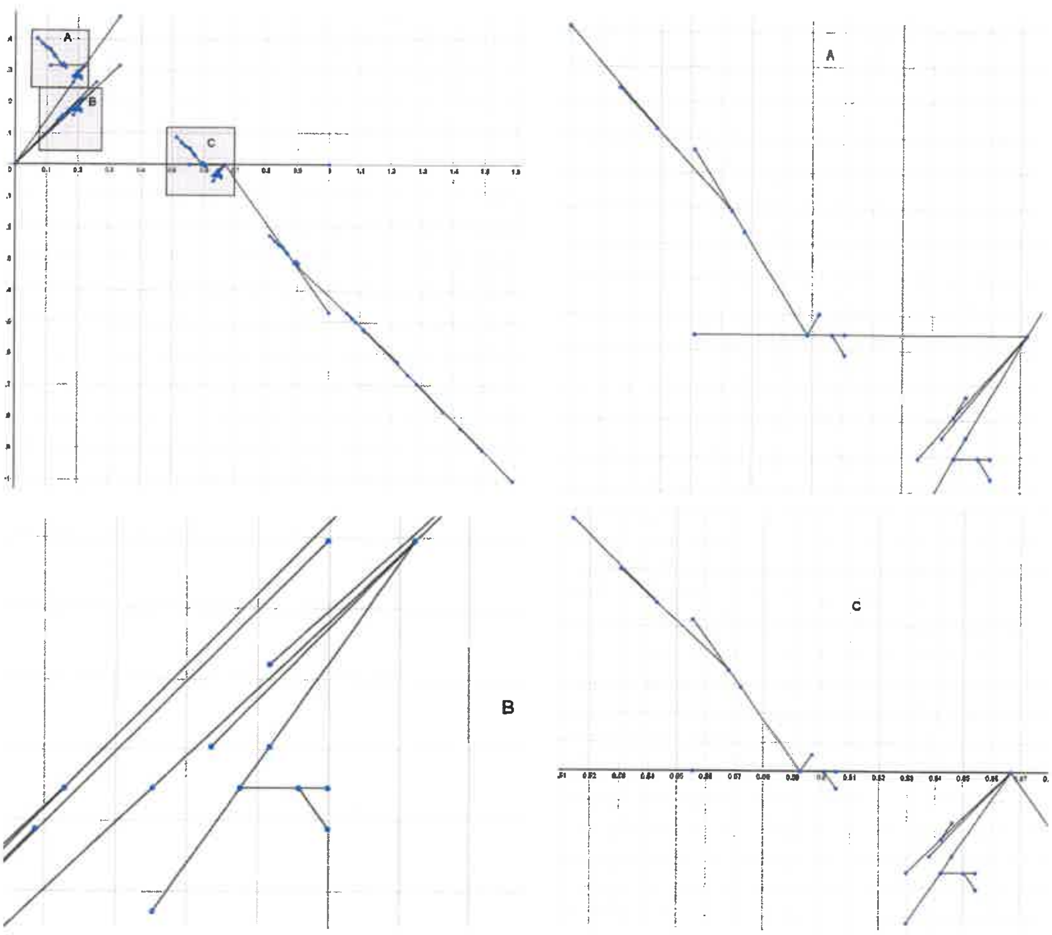
Şekil 4.7. Üçüncü ve dördüncü adımı oluşturan üçgen

Örnek 4.60. $[0,1]$ *aralığındaki hiperbolik sayılara aşağıda verilen afin dönüşüm sistemi öz yinelemeli bir şekilde uygulansın.*

$$
\begin{aligned}
f_1(\mathbf{z}) &= \frac{\mathbf{z}}{3} \\
f_2(\mathbf{z}) &= \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}h)\mathbf{z} \\
f_3(\mathbf{z}) &= \frac{1}{3}(1-\sqrt{2}h)\mathbf{z}+\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Bu afin dönüşüm sisteminde $[0,1]$ *aralığındaki hiperbolik sayılar yerine yazıldığında Şekil 4.8 elde edilir. Bu şekil dört kez öz yineleme yapılarak oluşturulmuştur. Şekil 4.8'de A, B, C kareleri ile gösterilen alanlar büyütülerek gösterilmiştir.*

Bu karelerin içindeki parçaların bütün ile uyum içinde olduğu görülmektedir.



Şekil 4.8. $[0,1]$ aralığındaki sayılara f_1, f_2 ve f_3 dönüşüm sisteminin oluşturduğu fraktal

5. SONUÇLAR

Bu tezde aşağıdaki sonuçlar ortaya konulmuştur:

1. Reel düzlemdeki afin dönüşümler ve özellikleri verilmiştir.

2. Reel düzlemdeki konikler dönme ve öteleme dönüşümlerini kullanarak merkezil hale getiren afin dönüşüm Teorem 2.17'de verilmiştir. Buna göre,

   $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

   $$\mathcal{K} : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

   koniğinin kuadratik kısmının matrisi M olsun. M matrisinin öz değerleri λ_1, λ_2 ve bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler ise sırasıyla $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ ve $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ olmak üzere, $\lambda_1 > \lambda_2$ olarak alınırsa, afin dönüşümü oluşturan dönme matrisi ve öteleme vektörünün bileşenleri, aşağıdaki Çizelge5.1'de özetlenmiştir.

Çizelge 5.1. *f* afin dönüşümü oluşturan dönme matrisi ve öteleme vektörü

Asal eksen x		
Konik \ Dönüşüm	Dönme matrisi (P)	Öteleme
Elips	$\begin{bmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{bmatrix}$	$x_0 = -\frac{Dv_1+Ev_2}{2\lambda_2},\ y_0 = -\frac{Du_1+Eu_2}{2\lambda_1}$
Hiperbol	$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$	$x_0 = -\frac{Du_1+Eu_2}{2\lambda_1},\ y_0 = -\frac{Dv_1+Ev_2}{2\lambda_2}$
Parabol	$\begin{bmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{bmatrix}$	$x_0 = 0,\ y_0 = -\frac{Du_1+Eu_2}{2\lambda_1},\ \lambda_1 \neq 0$
Asal eksen y		
Konik \ Dönüşüm	Dönme matrisi (P)	Öteleme
Elips	$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$	$x_0 = -\frac{Du_1+Eu_2}{2\lambda_1},\ y_0 = -\frac{Dv_1+Ev_2}{2\lambda_2}$
Hiperbol	$\begin{bmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{bmatrix}$	$x_0 = -\frac{Dv_1+Ev_2}{2\lambda_2},\ y_0 = -\frac{Du_1+Eu_2}{2\lambda_1}$
Parabol	$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$	$x_0 = -\frac{Du_1+Eu_2}{2\lambda_1},\ y_0 = 0,\ \lambda_1 \neq 0$

3. Karmaşık düzlemdeki afin dönüşümler $A, B, C \in \mathbb{C}$, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ afin dönüşümü ile verilmiştir. Bu dönüşümün katsayıları ile dönüşümün türü arasındaki ilişki incelenmiştir.

4. Karmaşık düzlemde afin dönüşümün uygulaması olarak fraktal örnekleri verilmiştir.

5. Hiperbolik düzlemdeki afin dönüşümler $A, B, C \in \mathbb{P}$, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ afin dönüşümü ile verilmiştir. Bu dönüşümün katsayıları ile dönüşümün türü arasındaki ilişki Çizelge 5.2 verilmiştir.

Çizelge 5.2. $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\overline{\mathbf{z}} + C$ afin dönüşümün katsayıları ile dönüşümün türü

$f(\mathbf{z})$	$\mathbf{Az}$	$\mathbf{B\overline{z}}$
Dönüşüm	Dönme Casual karakteri değiştirmez. Dönme açısı = $\theta = \arg A$	Yansıma Casual karakteri değiştirmez. $\theta = \arg B$ Yansıma ekseni: $y = \tanh \frac{\theta}{2} x$
$f(\mathbf{z})$	$\mathbf{Ahz}$	$\mathbf{Bh\overline{z}}$
Dönüşüm	Sıçramalı dönme Casual karakteri değiştirir. Dönme açısı = $\theta = \arg A$	Yansımalı sıçramalı dönme Casual karakteri değiştirir. $\theta = \arg B, \ \mathbf{z} = (z_1, z_2)$ Dönme açısı = $\left[\ln\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right) + \theta\right]$

6. $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$ afin dönüşümü $z = a + a\mathbf{h} \in \mathbb{H}$ null hiperbolik sayısını $\theta = \ln k$ alındığında, $f(\mathbf{z}) = k(a + a\mathbf{h})$ null sayına dönüştürür.

7. $f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\overline{\mathbf{z}}$ bir dönme dönüşümü ve $\forall \mathbf{z} = a + b\mathbf{h} \in \mathbb{H}$ null olmayan hiperbolik sayı olmak üzere, $\mathbf{z} \perp_L f(\mathbf{z})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\theta = \ln(\frac{a+b}{a-b})$$

olmasıdır.

8. $f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\mathbf{z}$ dönüşümü için $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısı ve görüntüsü $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayısını birleştiren doğru parçasının orta noktası, $\mathbf{w}$ olsun. $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ konum vektörleri arasındaki açı $\theta_1$ve $f(\mathbf{z})$ ve $\mathbf{w}$ konum vektörleri arasındaki açı θ_2 olmak üzere,

$$\left|\cosh^2\theta_1 - \sinh^2\theta_2\right| = 2$$

olduğu görülebilir.

9. Hiperbolik düzlemde $f(\mathbf{z}) = \mathbf{h}e^{\mathbf{h}\theta}\mathbf{z}$ dönüşüm verilsin. $\mathbf{z}$ ve $f(\mathbf{z})$ hiperbolik sayıları nın toplamını gösteren hiperbolik sayının konum vektörü $\mathbf{w}$ ve $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{z}f(\mathbf{z})}$ olmak üzere, bu iki vektör arasındaki hiperbolik açı

$$\gamma = \ln\left(\frac{e^\theta + 1}{e^\theta - 1}\right)$$

ile belirlidir.

10. Hiperbolik düzlemde afin dönüşümün uygulaması olarak fraktal örnekleri verilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Bayraktar, B. 2014. Kriptoloji Uygulamalarında Kullanılacak Bir Mikroişlemcinin FPGA Üzerinde Gerçeklenmesi.

Bennett, M. K., 1995. Affine and Projective Geometry, John Wiley & Sons, Inc., 4-12 s.

Berardo, D. Advanced linear algebra ESP: Fractals. http://sun4.vaniercollege.qc.ca/~iti/proj/David.pdf [Son erişim tarihi: 27.05.2019]

Byer, O., Lazebnik, F., Smeltzer, D. L. 2010. Methods For Eucludean Geometry. Mathematical Association of America, 251 - 272 s.

Chand, T. J., Slicer's Coordinate Systems, Neuromuscular Biomechanics Lab, Stanford University. https://slideplayer.com/slide/5759898/ [Son erişim tarihi: 27.05.2019]

Çakır, H. 2017. Hiperbolik Sayilar ve Hiperbolik Sayi Matrislerinin Cebirsel ve Geometrik Uygulamalari. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Universitesi FBE, Antalya, 116 s.

Çayıroğlu. İ. 2019. http://www.ibrahimcayiroglu.com/Dokumanlar/GoruntuIsleme/Goruntu_Isleme_Ders_Notlari-3.Hafta.pdf. [Son erişim tarihi: 15.04.2019]

Hacısalihoğlu, H.H. 1998. 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, Ertem Matbaası, Ankara, 326 s.

Kısıl, V. V. 2013. Induced representations and hypercomplex numbers. Advances in Applied Clifford Algebras, 23(2), 417-440 s.

Kocic L. M. and Majetic, M.M. 2006. Contractive Affine Transformations of Complex Plane and Aplications, Ser. Math. Inform. 21, 65-75 s.

Mathworks. https://www.mathworks.com/discovery/affine-transformation.html. [Son e rişim tarihi: 27.04.2019]

NiBabel web source. https://nipy.org/nibabel/coordinate_systems.html. [Son erişim ta rihi: 27.04.2019]

Özdemir, M. 2018. Analitik geometri, Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 480 s.

Tarrida, A. R., 2011. Affine Maps, Euclidean Motions and Quadrics, Springer, v-xi s.

ÖZGEÇMİŞ

İSKENDER ÖZTÜRK

iskenderogretmen@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2017-2019	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya
Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2012 - 2016	Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya
Lisans	Gazi Üniversitesi
2000 - 2004	Gazi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Bölümü, Ankara

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen	Güzeloba Ortaokulu
2005 - Devam Ediyor	MEB öğretmen.