POLİNOMLAR HALKASININ OTOMORFİZMLERİ

Nesrin TUTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

1996

873

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POLİNOMLAR HALKASININ OTOMORFİZMLERİ

Nesrin TUTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../1996 tarihinde aşağıdaki juri tarafından ... (.......) not takdir edilerek oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

JÜRİ: Prof.Dr. H. İbrahim KARAKAŞ ....
(Danışman)
Prof.Dr. T KARAÇAY ....
Yrd. Doç.Dr. T. SOYUMER ....

ÖZ

POLİNOMLAR HALKASININ OTOMORFİZMLERİ

Nesrin TUTAŞ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Haziran 1996, sayfa 51

Bu tezde, C kompleks sayılar cismi üzerinden n değişkenli polinomlar halkası $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin bir otomorfizmi için ters bulma formülü verilmiştir. Bu formül ilk olarak iki değişkenli durumda J.H. McKay, S.Sui-S.Wang ve genel durumda Jieta Yu tarafından elde edilmiştir. McKay, S.Sui- S.Wang'ın formülü resultant ve Jacobiana göre; Jietai Yu'nun formülü ise sınır polinomu ve bir çeşit minimal polinom fikri kullanılarak elde edilmiştir. Bu çeşit formüller, polinomlar halkasının otomorfizmleri grubunun yapısını belirlemek için önemlidir ve böyle formüllerin Jacobian Probleminin çözümü için yeni teknikler kazandıracağına inanıyoruz.

ANAHTAR KELİMELER: Polinomlar Halkası, asal ideal, bir asal idealin yüksekliği Krull boyutu, polinomlar için resultant, sınır polinomları, cebirsel bağımlılık-bağımsızlık, otomorfizmler

JÜRİ: Prof.Dr. H. İbrahim KARAKAŞ...
(Danışman)
Prof.Dr. T.KARAÇAY...
Yrd. Doç.Dr. T. SOYUMER...

ABSTRACT

AUTOMORPHISMS OF POLYNOMIALS RING

Nesrin TUTAŞ

M.Sc.Thesis in Mathematics
Adviser: Prof. Dr. H.İbrahim KARAKAŞ
Haziran 1996, 51 pages

In this thesis, an inversion formula is given for an automorphism of the polinomoial ring $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ in n variables over the field C of complex numbers. This formula was first obtained in the two variables case by J.H. McKay and S.S-S.Wang and then in general case Jieta Yu. J.H. McKay and S.Sui-S.W Wang 's formula is obtained in terms of resultants and the Jacobian; The formula of Jieta Yu is obtained by using the idea of face polynomials and a kind of minimal polynomials associated to face polynomials. Obtaining this sort of formulas is important to know the structure of polynomial ring and we belive that such formulas may suggest new techniques for the solution of the Jacobian Problem.

KEY WORDS: Polynomial rings, prime ideal, height of a prime ideal, Krull dimension, resultant for polynomials, face polynomials, algebraic dependent-independent, automorphisms.

COMMITEE: Prof.Dr.H.İ.KARAKAŞ ....

Prof.Dr. T. KARAÇAY ....

Yrd.Doç.T.SOYUMER ....

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ileriki bölümlerde kullanılacak olan bazı kavramlar hakkında ön bilgiler verilmiştir. Özellikle halkalar ve modüller üzerinde durulmuş ve bazı özelliklerinden bahsedilmiştir. Flat modül ve Krull boyutu kavramlarının genel yapısı incelenmiş, daha sonra da polinomlar için resultant, bir cisim üzerinden cebirsel bağımsız eleman kavramlarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde ise resultant ile tanımlanan polinomların özellikleri incelenmiştir. Bu özellikler kullanılarak iki değişkenli polinomlar için ters bulma formülü elde edilmeye çalışılmıştır. Daha sonra ise çok değişkenli polinomlar için ters bulma formülü, minimal polinom kavramı kullanılarak elde edilmiştir.

Bu çalışma boyunca bana destek olan sayın hocam Prof.Dr. H. İbrahim Karakaş'a tüm yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

C kompleks sayılar cismi üzerinde iki değişkenli polinom halkasının otomorfizmler grubu ile ilgili ilk çalışma 1942 yılında H.W.E. Jung tarafından yapılmıştır. Aslında ulaşılmak istenen amaç n ≥ 2 için $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin otomorfizmler grubunun yapısını belirlemektir.

J.H.Mc.Kay ve S.Sui-S.Wang Ocak 1986 de yayınlanan çalışmalarında iki değişkenli polinomlar halkasının otomorfizmleri için ters bulma formülü ile ilgilenmişlerdir. Sonuç olarak, $C\,[x, y]$ nin herhangi bir C-cebir otomorfizminin sınır polinomları ile tektürlü belirlenebileceğini göstermişlerdir. Ekim 1988 da yayınlanan çalışmalarında ise iki değişkenli durumda elde ettikleri sonucu daha farklı bir açıdan incelemişler ve çok değişkenli polinomlar halkası üzerinde tanımlanan bir otomorfizmin sınır polinomları ile tek türlü belirli olduğunu ispatlamışlardır.

Ağustos 1992 de yayınlanan Jietai Yu'nun makalesi ise minimal polinom kavramını kullanarak $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin C-otomorfizmlerini ve onların terslerini karakterize etmeğe çalışmaktadır.

Bu tezde $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin bir C-otomorfizminin tersi yukarıda sözü edilen çalışmalar ışığında yeniden üretilmiş ve bazı örnekler sunulmuştur.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Halkalarla ve Modüllerle İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan bazı kavramların tanımı yapılacak ve bazı özelliklerinden bahsedilecektir. En çok kullanılan kavramların başında halka ve modül kavramları gelmektedir. Bunların bilindiğini kabul ediyor ve bazı özelliklerinden bahsediyoruz.

Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe, tüm halkalar birimli, değişmeli halka ve modüller ise birimcil modül kabul edilmektedir. Bir R halkası üzerinden sonlu R-modülden, R üzerinde sonlu üretilmiş R-modül anlaşılmalıdır.

R halkasının asal ideallerinden oluşan kümeye R nin spektrumu denir ve Spec(R) ile gösterilir. R halkasının sıfırlayıcı idealini Ann(R) ile göstereceğiz. R halkasının maksimal ideallerinin kesişimine R halkasının Jacobson radikali denir ve rad(R) ile gösterilir. $J\neq R$, R nin bir ideali olsun. $V(J)=\{P\in Spec(R) : J\subseteq P\}$ kümesinin minimal elemanına J nin bir minimal asal üst-ideali denir. I, J R halkasının idealleri olsun. Bu durumda, $(I:J)=\{a\in R: aJ\subseteq I\}$ olarak tanımlanır.

R ve R′ iki halka, $\phi:R\to R'$ bir halka homomorfizmi ise ϕ nin çekirdeği Çekϕ ve görüntüsü Gör ϕ ile gösterilecektir. Ayrıca bire-bir halka homomorfizmine monomorfizm, örten halka homomorfizmine ise epimorfizm denir. Bire-bir, örten halka homomorfizmine izomorfizm denir. R den R ye bir izomorfizme R halkasının bir otomorfizmi denir.

$\phi:R\to R'$ bir halka homomorfizmi olsun. $P\in Spec(R')$, $P\cap R=Q$(yani; $\phi^{-1}(P)=Q$) ise P ideali Q idealini örter denir.

R bir halka ve A, bir R-modül olsun. A nın $A_0\subset A_1\subset \ldots \subset A_n\subset \ldots$ biçimindeki her altmodül dizisi için $i\geq n$ olunca $A_i=A_n$ olacak biçimde bir pozitif n tamsayısı varsa A ya alt modüller üzerinde artan zincir koşulunu sağlar denir. Eğer A nın $A_0\supset A_1\supset \ldots \supset A_n\supset \ldots$ biçimindeki her altmodül dizisi için $n\geq i$ olunca $A_i=A_n$ olacak biçimde bir pozitif n tamsayısı varsa A ya alt modüller üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar denir. R halkası R-modül olarak düşünüldüğünde altmodüleri R nin idealleridir. R halkası idealleri üzerinde artan zincir koşulunu sağlarsa R ye, Noetherian halka, azalan zincir koşulunu sağlarsa Artinian halka denir.

R noetherian halka ve M, R-modül olsun. M nin yandaş asal(associated prime) ideallerinden oluşan kümeyi Ass(M) ile göstereceğiz. $Ass(M)=\phi$ olması için gerekli ve yeterli koşul $M=0$ olmasıdır. $M\neq 0$, sonlu R-modül olsun. Öyle bir $0=M_0\subset M_1\subset \ldots \subset M_n=M$ altmodül dizisi vardır ki uygun bir $P_i\in Spec(R)$ için $M_i/M_{i-1}=R/P_i$ dir, $1\leq i\leq n$. Böylece, her sonlu R-modül $M\neq 0$ için Ass(M) sonludur.

R bir halka ve S, R nin çarpımsal altkümesi ise R nin S ye göre yerellenişini $S^{-1}R$ ile göstereceğiz. Benzer şekilde M bir R-modül ise M nin bir çarpımsal altküme S de yerellenişini $S^{-1}M$ ile göstereceğiz. $P\in Spec(R)$ ise R nin $S=R-P$ ye göre yerellenişi R_P ile gösterilecek ve R nin P de yerellenişi diye isimlendirilecektir. PR_P, R_P nin tek maksimal idealidir. Başka bir deyimle R_P bir yerel halkadır.

$\phi:R\to R'$ bir halka homomorfizmi S, R nin çarpımsal altkümesi ve $S'=\phi(S)$ olsun. Bu durumda $S'^{-1}R'=S^{-1}R'=R'\otimes_R S^{-1}R$ dür. I, R nin bir ideali ve S', R/I da S nin görüntüsü ise

$$S'^{-1}(R/I)=S^{-1}R\,/I(S^{-1}R). \tag{2.1.1}$$

R ve R' maksimal idealleri M ve M' olan yerel halkalar olsun. Eğer $\varphi:R\to R'$ bir halka homomorfizmi ve $\varphi(M)\subseteq M'$ ise φ ye yerel homomorfizm denir. R', R yi kapsayan bir halka $P\in Spec(R')$ ve $P\cap R=Q$ ise

$$\varphi_P : R_Q\to R'_P\,,\quad \varphi_P\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{r}{s}$$

bir yerel homomorfizmdir.

R bir halka ve M bir R-modül ise M nin destek kümesi(supportu) $Supp(M)=\{P\in Spec(R): M_P\neq 0\}$ ile tanımlanır. M sonlu R-modül ise $Supp(M)=V(Ann(M))$ dir. R noetherian halka ve M bir R-modül olsun. Bu durumda $Ass(M)\subseteq Supp(M)$ ve Supp(M) nin her minimal elemanı Ass(M) içindedir.

A ve M, R-modüller olsun. Bu durumda A ile M nin tensör çarpımını $A \otimes_R M$ ile göstereceğiz. R ve T halkalar $\phi: R \to T$ halka homomorfizmi ve $Q \in Spec(R)$ için $k(Q) = R_Q/QR_Q$ olsun. $P \in Spec(T)$, Q yu örten asal ideal ise $P^* = PT_Q/QT_Q$, $T \otimes_R k(Q) = T_Q/QT_Q$ nun P ye karşılık gelen asal idealidir. Bu durumda $T \otimes_R k(Q)_{P^*}$ ile $T_P/QT_P = T \otimes_R k(Q)$ özdeşlenebilir. Şöyleki; $(T_Q)_{PT_Q} = T_P$ ve (2.1.1) den $(T \otimes_R k(Q))_{P^*} = (T_Q/QT_Q)_{PT_Q/QT_P} = T_P/QT_P$ dir.

R bir halka ve M bir R-modül olsun. Bu durumda $i \neq j$ için $M_i \neq M_j$ olmak üzere

$$M = M_0 > M_1 > M_2 \ldots > M_r = (0)$$

sonlu artan altmodüller dizisine M nin bir normal serisi, r tamsayısına da normal serinin uzunluğu denir. Yukarıdaki gibi bir normal seriye altmodülller eklenerek elde edilen normal seriye bu serinin bir inceltmesi (refinement) denir. Bir M R-modülünün

$$M = M_0 > M_1 > M_2 \ldots > M_r = (0)$$

gibi bir normal serisi verilmiş olsun. Eğer bu serinin kendisinden başka hiç inceltmesi yoksa bu seriye M nin bir kompozisyon serisi denir. M modülünün tüm kompozisyon serilerinin uzunluğu aynıdır. Bu ortak uzunluğa M modülünün uzunluğu denir ve $\ell(M)$ ile gösterilir. (0) modülünün uzunluğu sıfırdır ve M nin kompozisyon serisi yoksa $\ell(M) = \infty$ tanımlanır. Bu durumda M nin herhangi bir uzunlukta normal serisi vardır. N ve L, M nin altmodülleri olsun. $M\text{-}N = \{x\text{-}y : x \in M, y \in N\}$ olmak üzere,

$$\ell(M) = \ell(N) + \ell(M\text{-}N)$$
$$\ell(L) + \ell(N) = \ell(L+N) + \ell(L \cap N)$$

bilinen özelliklerdendir.

Bir R halkasının artinian halka olması için gerekli ve yeterli koşul R-modül olarak uzunluğunun sonlu olmasıdır. Bu önermenin sonucu olarak; $R \neq 0$ nin artinian olması için gerekli ve yeterli koşul R nin noetherian halka ve her asal idealinin maksimal ideal olmasıdır.

R bir halka M, M′ ve M″ R-modüller, $f: M' \to M$ ve $g: M \to M''$ R-modül homomorfizmler olsun. Böylece oluşan,

$$X: M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \qquad (2.1.2)$$

dizide, Çek g=Görf ise bu dizi M de görçektir denir. Benzer biçimde M_i ler R-modüller ve f_i ler modül homomorfizmler olmak üzere

$$\Delta : \ldots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \ldots$$

dizisinde her i için Çek f_i= Gör f_{i-1} ise bu diziye bir görçek dizi denir. (2.1.2) de verilen bir R-modül homomorfizmler dizisinde gf=0 ise bu diziye sıfır-dizisi denir. Daha genel olarak Δ gibi bir dizide her r için $M_{r-1} \to M_r \to M_{r+1}$ üçlü dizisi sıfır dizisi ise bu diziye bir kompleks denir. (2.1.2) de verilen R-modül dizisi bir kompleks ise, bu kompleksin homoloji modülü H(X)=Çekg /Gör f olarak tanımlanır.

2.2. Polinom Halkaları ve Otomorfizmleri

Bu bölümde, önce tek değişkenli polinomlar halkası tanımlanacak ve daha sonra bu tanım n değişkenli polinomlara genişletilecektir.

R bir halka olsun. $a_i \in R$ ve sonlu sayıda a_i hariç diğerleri sıfır olmak üzere,

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

biçimindeki bir sonsuz toplama R halkası üzerinde x'e göre tek değişkenli polinom, a_i lere f(x) polinomunun katsayıları denir. $a_i \neq 0$ olacak biçimde i>0 varsa böyle en büyük i ye f(x) polinomunun derecesi denir ve der f(x) ile gösterilir. i>o olacak biçimde i yoksa, f(x) polinomunun derecesi sıfır olarak tanımlanır. İki polinomun eşit olması için dereceleri ve tüm katsayıları eşit olmalıdır. R nin elemanlarına sabit polinomlar denir.

R üzerinde x değişkenine göre tüm polinomlar kümesi R[x] ile gösterilir. f, g∈ R[x] için $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ve $g(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ olmak üzere,

$$f+g=\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i , \quad c_i = a_i + b_i$$

$$fg=\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i , \quad d_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n-i}$$

biçiminde tanımlı toplama ve çarpma işlemleri altında R[x] bir halkadır.

x ve y iki değişken, R bir halka ise katsayıları x e göre polinomlar olan y ye göre polinomlar halkası $R[x][y]$ tanımlanabilir. $R[x][y]$ nin $R[y][x]$ e izomorf olduğu açıktır. Bu halkalar, $R[x,y]$ ile gösterilir ve katsayıları R içinde x, y ye göre iki değişkenli polinomlar halkası olarak adlandırılır. Benzer biçimde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ R üzerinde değişkenler olmak üzere n değişkenli $R[x_1,x_2,\ldots x_n]$ polinomlar halkası oluşturulabilir. $a_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$, R nin sonlu sayıdası hariç diğerleri sıfır olan elemanları olmak üzere $f\in R[x_1,x_2,\ldots x_n]$ polinomu,

$$f=\sum a_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n} \tag{2.2.1}$$

biçimindedir. $a\in R\text{-}\{o\}$, $R[x_1,x_2,\ldots x_n]$ nin $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}$ biçimindeki elemanlara monomial denir. f polinomunun (2.2.1) de görünen monomiallerine, f polinomunun terimleri denir. Sıfırdan farklı $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}\in R[x_1,x_2,\ldots x_n]$ monomialinin derecesi $i_1+i_2+\ldots+i_n$ dir. Sıfırdan farklı f polinomunun derecesi terimlerinin derecelerinin maksimumudur ve der f ile gösterilir. Sıfırdan farklı bir f polinomunun tüm terimlerinin derecesi aynı ise f ye homojen polinom denir. Her f , $g\in R[x_1,x_2,\ldots x_n]$ için,

$$\text{der}(f+g) \leq \max(\text{der } f+\text{der } g)$$

dir. Eğer $fg\neq 0$ ise

$$\text{der}(fg)\leq \text{der } f + \text{der } g$$

dir. R halkası tamlık bölgesi ise

$$\text{der}(fg)=\text{der } f+\text{der } g$$

dir.

S bir halka, R onun bir alt halkası, $f\in R[x]$ ve $c\in S$ olsun. Eğer $f(c)=0$ ise, c ye f nin S içinde bir sıfır yeri veya kökü denir. Daha genel olarak, $f\in R[x_1,x_2,\ldots x_n]$ ve $c_1,c_2,\ldots,c_n\in S$ olsun. Eğer $f(c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$ ise $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ ye f polinomunun bir sıfır yeri veya kökü denir.

D bir tamlık bölgesi, E D yi kapsayan bir cisim, $f\in D[x]$ ve $\text{der}f=n>0$ ise, f nin E içinde ençok n kökü bulunduğu bilinmektedir. Eğer D tek çarpanlama bölgesi (T.Ç.B) ise $D[x_1,x_2,\ldots x_n]$ polinomlar halkasının da bir T.Ç.B olduğu çok iyi bilinen sonuçlardandır.

R ve R′ halka Φ, R den R′ ye bir halka homomorfizmi olsun. K yı R ve R′ nin alt halkası kabul edelim. Φ nin K ya kısıtlanışı birim homomorfizm ise Φ

ye bir K-homomorfizm denir. Yani; Φ nin bir K-homomorfizm olması için gerekli ve yeterli koşul her $c \in K$ için $\Phi(c)=c$ olmasıdır.

C, kompleks sayılar cismi olmak üzere ileriki bölümlerde polinom halkalarının C-homomorfizmleri ve C-otomorfizmleri ile ilgileneceğiz. $C[x_1,x_2,...x_n]$ den herhangi bir halkaya bir C-homomorfizmi $\Phi(x_i)$ $i=1,2,...,n$ ile tam olarak belirlidir. Özel olarak, $\Phi:C[x_1,x_2,...x_n]\rightarrow C[t_1,t_2,...t_n]$ bir C-homomorfizmi, $\Phi(x_1)=f_1(t_1,t_2,...,t_n)$, ..., $\Phi(x_n)=f_n(t_1,t_2,...,t_n)$ ise $\Phi=(f_1,...,f_n)$ gösterimi kullanılır.

2.3. Flat Modüller

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak olan bazı kavramların tanımı yapılacak ve bazı özelliklerinden bahsedilecektir.

R bir halka, M R-modül ve $\Delta: ...\rightarrow N\rightarrow N' \rightarrow N'' \rightarrow ...$ R-modüller dizisi,

$$\Delta \otimes_R M: ...N\otimes_R M\rightarrow N'\otimes_R M\rightarrow N''\otimes_R M ...$$

ise Δ ile M nin tensör çarpımı olsun. Δ görçek R-modül dizisi olduğunda $\Delta\otimes_R M$ de görçek R-modül dizisi ise M ye R üzerinde flat modül denir. Eğer Δ nin görçek olması için gerekli ve yeterli koşul $\Delta\otimes_R M$ nin görçek olması ise M ye faithfully flat modül denir. Örneğin, R üzerinde her serbest modül R üzerinde faithfully flat modüldür.

Teorem 2.3.1. R bir halka olsun Aşağıdaki koşullar denktir.
1) M, R üzerinde flat modüldür.
2) $0\rightarrow N'\rightarrow N$ R-modül dizisi görçek ise $0\rightarrow N'\otimes_R M \rightarrow N\otimes_R M$ dizisi de görçektir.

İspat. (1:$\Rightarrow$2) tanımdan görülebilir.
(2:$\Rightarrow$1) Bir görçek R-modüller dizisi

$$...\rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \rightarrow ...$$

verilmiş olsun.

$$...\rightarrow M_{i-1}\otimes_R M \xrightarrow{f_{i-1}\otimes 1_M} M_i\otimes_R M \xrightarrow{f_i\otimes 1_M} M_{i+1}\otimes_R M \rightarrow ...$$

dizisinin de görçek olduğunu göstermeliyiz. $M_{i-1}\otimes_R M$ nin her $(x\otimes_R m)$ üreteci için

$$(f_i\otimes_R 1_M)(f_{i-1}\otimes_R 1_M)(x\otimes_R m)=f_i f_{i-1}(x) \otimes_R m=0\otimes_R m =0$$

olduğundan $Çek(f_i \otimes_R 1_M) \supset Gör(f_{i-1} \otimes_R 1_M)$ dir. Gör $f_{i-1} = M'_i = Çek\ f_i$ olsun. $N_i = M_i / M'_i$ tanımlıyalım. O zaman $g_i : N_i \to M_{i+1}$, $g_i(x+M'_i) = f_i(x)$, N_i den M_{i+1} e iyi tanımlı bire-bir homomorfizmdir. Yani; $0 \to N_i \xrightarrow{g_i} M_{i+1}$ görçektir. Varsayımdan,

$$0 \to N_i \otimes_R M \xrightarrow{g_i \otimes 1_M} M_{i+1} \otimes_R M$$

da görçek dizidir. Şimdi $\sum_j (x_j \otimes_R m_j) \in Çek(f_i \otimes_R 1_M)$ olsun. Bu takdirde,

$$0 = (f_i \otimes_R 1_M)(\sum_j x_j \otimes_R m_j) = \sum_j (f_i(x_j) \otimes_R m_j) = (g_i \otimes_R 1_M)(\sum_j (x_j + M'_i) \otimes_R m_j)$$

ve dolayısıyla $N_i \otimes_R M$ de $\sum_j (x_j + M'_i) \otimes_R m_j = 0$,

$$\sum_j (x + M'_i) \otimes_R m_j \in M'_i \otimes_R M = Gör(f_{i-1} \otimes_R 1_M)$$

dir. Böylece $Çek(f_i \otimes_R 1_M) \subseteq Gör(f_{i-1} \otimes_R 1_M)$ olur.

R, T halkalar ve $\varphi : R \to T$ bir halka homomorfizmi olsun. $r \in R$, $s \in T$ için $rs = \varphi(r).s$ ile T, bir R-modül olur. Eğer φ ,T yi R-modül olarak flat(faithfully flat) modül yaparsa φ ye flat(faithfully flat) homomorfizm denir. N, T-modül olarak flat modül ise R-modül olarak da flat modül olur. Şöyleki; Δ, R-modül dizisi için

$$\Delta \otimes_R N = \Delta \otimes_R (T \otimes_T N) = (\Delta \otimes_R T) \otimes_T N$$

olur. Böylece Δ görçek ise $\Delta \otimes_R T$ de görçektir. $\Delta \otimes_R T$ görçek ise $\Delta \otimes_R N$ de görçektir.

R, T halkalar ϕ: $R \to T$ bir halka homomorfizmi ve M ,R-modül olarak flat olsun. O zaman $M \otimes_R T$, T-modül olarak flattir. Çünkü Δ, T- modül dizisi ise $\Delta \otimes_T (M \otimes_R T) = \Delta \otimes_T (T \otimes_R M) = \Delta \otimes_R M$ dir. Δ görçek ise $\Delta \otimes_R M$ de görçektir. Dolayısıyla $T \otimes_R M$ de flattir.

Teorem 2.3.2. R bir halka ve S ,R nin çarpımsal alt kümesi olsun. Bu takdirde $S^{-1}R$, R üzerinde flat modüldür.

İspat. M bir R-modül ve N, M nin altmodülü olsun. $M \otimes_R S^{-1}R = S^{-1}M$ ve

$N\otimes_R S^{-1}R= S^{-1}N$ dır. $S^{-1}N$ nin bir elemanı $x\in N$, $s\in S$ olmak üzere $\frac{x}{s}$ biçimindedir. $S^{-1}M$ içinde $\frac{x}{s}=o$ ise öyle $s'\in S$ vardır ki M içinde $s'x=0$ dır. Bu ise N içinde $s'x=0$ olmasını gerektirir ve bu nedenle $\frac{x}{s}=0\in S^{-1}N$ dir. Böylece $0\to S^{-1}N\to S^{-1}M$ görçek dizidir. Dolayısıyla $S^{-1}R$, Teorem 2.3.1 den R üzerinde flat modüldür.

R ve T iki halka, $\varphi: R\to T$ flat homomorfizm ve I_1, I_2 R nin idealleri olsun. Bu durumda $(I_1\cap I_2)T=I_1T\cap I_2T$ olur. $(I_1\cap I_2)\to R\to R/I_1\oplus R/I_2$ görçek R-modül dizisini dikkate alalım. Bu dizinin T ile tensör çarpımından,

$$(I_1\cap I_2)\otimes_R T=(I_1\cap I_2)T\to T\to T/I_1T\oplus T/I_2T$$

görçek dizisini elde ederiz. Yani; $(I_1\cap I_2)\otimes_R T= I_1T\cap I_2T$ olur.

Örnek. k bir cisim $R=k[x,y]$ ve $T=R/Rx=k[y]$ olsun. Bu durumda T, R üzerinde flat modül değildir. $I_1=R(x+y)$, $I_2=Ry$ alınırsa $I_1\cap I_2=R(xy+y^2)$, $I_1T=I_2T=yT$ olur ama $(I_1\cap I_2)T\neq I_1T\cap I_2T$ dir.

Önerme 2.3.3. R, T iki halka $\varphi:R\to T$ bir flat homomorfizm olsun. Bu takdirde her $P\in Spec(T)$, $Q=P\cap R$ için T_P, R_Q üzerinde flattir.

İspat. $T_Q= T\otimes_R R_Q$, R_Q üzerinde flatdir. T_P, T_Q nun yerellenişidir. Böylece Teorem 2.3.2 den önceki bilgilerle T_P, R_Q üzerinde flat modüldür.

Teorem 2.3.4. R bir halka M ve bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.
1) M, R üzerinde faithfully flat modüldür.
2) M, R üzerinde flat modüldür ve her R-modül $N\neq 0$ için $N\otimes_R M\neq 0$ olur.
3) M, R üzerinde flat , R nin her L maksimal ideali için $LM\neq M$ dir.

İspat. (1:⇒2) Kabul edelimki $N\otimes_R M=0$ olsun. $O\to N\to O$ dizisini dikkate alalım. $0\to N\otimes_R M\to 0$ görçek dizi olduğundan $0\to N\to 0$ görçek R-modül dizisidir. Dolayısıyla $N=0$ dır. Bu ise hipotezle çelişir. Böylece $N\otimes_R M\neq 0$ olmalıdır.
(2:⇒3) $R/L\neq 0$ olduğundan $R/L\otimes_R M=M/LM\neq 0$ ve bu nedenle $LM\neq M$ dir.
(3:⇒2) $x\in N$-{0} alalım. R nin uygun bir $I\neq R$ ideali için $Rx=R/I$ dır. R nin I yı kapsayan bir maksimal ideali L olsun. $IM\subset LM\subset M$ ve bu nedenle $(R/I)\otimes_R M=M/IM\neq 0$ olur. M üzerinde flat modül olduğu için $0\to (R/I)\otimes_R M\to N\otimes_R M$ görçek ve $N\otimes_R M\neq 0$ dır.

$(2:\Rightarrow 1)$ $\Delta : N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ R-modül dizisi olsun.
$\Delta\otimes_R M : N'\otimes_R M \to N\otimes_R M \to N''\otimes_R M$ dizisini görçek kabul edelim. Bu takdirde, Gör $f\otimes_R 1_M$ =Çek $g\otimes_R 1_M$ ve böylece Gör $(gf)\otimes_R 1_M$ =Gör $(g\otimes_R 1_M)\otimes_R (f\otimes_R 1_M)=0$ olur. Kabulümüzden Gör $(gf)=0$ dır. Yani; $gf=0$ elde ederiz. Böylece Δ bir kompleksdir. Δ nın N deki homoloji modülü $H(\Delta)$ için $H(\Delta)\otimes_R M=H(\Delta\otimes_R M)=0$ elde ederiz. Yine (2) den $H(\Delta)=0$ dır. Tüm bunlar Δ nın görçek olduğunu göstermek için yeterlidir. Dolayısıyla M, R üzerinde faithfully flat modüldür.

Souç 2.3.5. R ve T yerel halkalar ve $\psi : R \to T$ yerel homomorfizm ve M sonlu T-modül olsun. M nin R üzerinden flat modül olması için gerekli ve yeterli koşul R üzerinde faithfully flat modül olmasıdır. Özel olarak T nin R üzerinde flat olması için gerekli ve yeterli koşul R üzerinde faithfully flat modül olmasıdır.

İspat. M, R üzerinde faithfully flat modül ise flat modül olduğu tanımdan kolayca görülebilir. Bu nedenle gerekliliği ispatlıyalım. M, R üzerinde flat modül olsun. D ve E sırasıyla R ve T nin maksimal idealleri olsun. ψ yerel homomorfizm olduğundan $DM \subset EM$ ve Nakayama Lemasından (Hungerford 1989, Matsumura 1970) $EM \neq M$ dir. Teorem 2.3.4. (3) den M, R üzerinde faithfully flat modüldür.

Teorem 2.3.6. $\psi : R \to T$ bir halka homomorfizmi olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.
1) ψ faithfully flat homomorfizmdir.
2) ψ flat homomorfizmdir ve ${}^a\psi$: Spec T $\to$ Spec R örten homomorfizmdir.
3) ψ flat homomorfizmdir ve R nin her maksimal ideali N için T nin N yi örtenN' maksimal İdeali vardır.

İspat. $(1:\Rightarrow 2)$. $P \in \mathrm{Spec}(R)$ alalım. $T_P = T\otimes_R R_P$, R_P üzerinde faithfully flatdir. Teorem 2.3.4 dan $PT_P \neq T_P$ dir. M, T_P nin PT_P yi kapsayan maksimal ideali olsun. O zaman $M\cap R_P \supseteq PR_P$ olur. PR_P, R_P nin maksimal ideali olduğundan $M\cap R_P = PR_P$ dir. $Q=M\cap T$ alınırsa,

$$Q\cap R = (M\cap T)\cap R = M\cap R = (M\cap R_P)\cap R = PR_P \cap R = P$$

elde ederiz. Dolayısıyla ${}^a\psi$, örten dönüşüm olur.

$(2:\Rightarrow 3)$. $P'\cap R = N$ olacak biçimde $P' \in \mathrm{Spec}(T)$ alalım. N', T nin P' yü kapsayan maksimal ideali ise N maksimal ideal olduğundan $N'\cap R = N$ dir.

(3:⇒1). T nin N′ maksimal idealinin varlığı $NT \neq T$ gerektirir. Teorem 2.3.4 dan T, R üzerinde faithfully flat modüldür.

2.4. Krull Boyutu

R bir halka ve $P_0, P_1, \ldots, P_n$ R nin asal idealleri olmak üzere $P_n \subset \ldots \subset P_1 \subset P_0$ biçimindeki sonlu diziye n uzunluğunda asal ideal zinciri denir. P, R nin asal ideali ise $P=P_0$ olan asal ideal zincirlerinin uzunluklarının supremumuna P nin yüksekliği denir ve ht(P) ile gösterilir. ht(P)=0 olması, P nin R nin minimal asal ideali olmasıdır. R nin herhangi bir I ideali için

$$ht(I)=\inf\{ht(P):I \subseteq P\}$$

sayısına I nın yüksekliği denir.

R halkasının Krull boyutu, R nin asal ideallerinin yüksekliklerinin supremumu olarak tanımlanır ve dim R ile gösterilir. Yani,

$$\dim R = \sup \{ ht(P) : P, \text{ R nin asal ideali } \}$$

dır. Örneğin, her tek üreteçli ideal bölgesinin Krull boyutu 1 dir. $P \in Spec(R)$ ise $\dim(R_P)=ht(P)$ ve I, R nin bir ideali ise $\dim(R/I)+ht(I) \leq \dim(R)$ olduğu tanımdan kolayca görülebilir.

$M \neq 0$ bir R-modül olsun. Bu durumda M nin Krull Boyutu $\dim(M)=\dim(R/Ann(M))$, $M=0$ için $\dim(M)=-1$ olarak tanımlanır. R noetherian halka, $M \neq 0$ bir sonlu R-modül ise aşağıdaki koşulların denkliği kolayca görülür.

1) M, uzunluğu sonlu olan bir R-modüldür.
2) R/Ann(M) artinian halkadır.
3) $\dim(M)=0$.

R bir noetherian yarı-yerel halka, $\mathfrak{m}=rad(R)$ ve I, R nin bir ideali olsun. Uygun $n>0$ için $\mathfrak{m}^n \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$ ise I ya R nin bir tanım ideali denir. I nın, R nin bir tanım ideali olması için gerekli ve yeterli koşul $I \subseteq \mathfrak{m}$ ve R/I nın artinian halka olmasıdır.

I, R nin bir tanım ideali ve M sonlu R-modül olsun. Bu durumda yeterince büyük n için $\ell(M/I^nM)$ bir polinomdur. M nin I ye göre Hilbert polinomu olarak adlandırılan bu polinomu $\chi(M,I;n)=\ell(M/I^nM)$ ile göstereceğiz. $J \neq R$, R nin bir başka tanım ideali olsun. Bu durumda $\chi(M,I;n)$ ve $\chi(M,J;n)$ polinomlarının derecelerinin aynı olduğu kolaylıkla görülebilir. Yani; Hilbert polinomunun derecesi I nın seçiminden bağımsızdır. Bu dereceyi d(M) ile göstereceğiz. $I=Rx_1+Rx_2+\ldots+Rx_r$ olsun. Bu durumda $B=(R/I)[x_1,x_2,\ldots,x_r]$,

$R^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}$ nin homomorf görüntüsüdür ve $M^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^nM/I^{n+1}M$ sonlu R^*-modüldür. Yeterince büyük $n>o$ için $\ell(I^nM/I^{n+1}M)$ n ye göre derecesi r-1 den küçük veya r-1'e eşit olan bir polinomdur. Buradan yeterince büyük $n>o$ için $\chi(M,I;n)= \ell(M/I^nM)$ nin n ye göre derecesi r den küçük veya r ye eşit olan bir polinom yani $d(M)\leq r$ olduğu görülebilir (Matsumura 1970).

Teorem 2.4.1. R bir noetherian yarı yerel halka I, R nin tanım ideali, M',M,M'' sonlu R-modüller ve $0\to M'\to M\to M''\to 0$ görçek dizi olsun. Bu takdirde, $d(M)=\max(d(M'),d(M''))$ ve yeterince büyük $n>0$ için $\chi(M,I;n)-\chi(M',I;n)-\chi(M'',I;n)$ derecesi $d(M')$ den küçük olan bir polinomdur.

İspat. $\ell(M''/I^nM'')=\ell(M/M'+I^nM)\leq \ell(M/I^nM)$ olduğundan $d(M'')\leq d(M)$ dir. Ayrıca $\chi(M,I;n) - \chi(M'',I;n)=\ell(M/I^nM)-\ell(M/M'+I^nM) =\ell(M'+{}^nM/I^nM)=\ell(M'/M'\cap I^nM)$ dir. Artin Rees Teoreminden $n>r$ için $M'\cap I^nM\subseteq I^{n-r}M'$ olacak biçimde $r>0$ vardır. Böylece,

$$\ell(M'/I^nM') \geq \ell(M'/M'\cap I^nM) \geq \ell(M'/I^{n-r}M')$$

dir. Buradan $\ell(M'/I^nM')$ ve $\ell(M'/I^{n-r}M')$ polinomlarının başkatsayıları ve dereceleri eşittir. Dolayısıyla $\ell(M'/M'\cap I^nM)$ polinomunun başkatsayısı ve derecesi de aynıdır. Sonuç olarak $\chi(M,I;n) - \chi(M'',I;n)$ ve $\chi(M',I;n)$ polinomlarının başkatsayıları ve dereceleri aynıdır.

Lema 2.4.2. R bir noetherian ve yarı-yerel halka olsun. Bu takdirde, $d(R) \geq \dim(R)$ dir.

İspat. $d(R)$ üzerinde tümevarım uygulayalım. $d(R)=0$ ise uygun $n>0$ için $\mathfrak{m}^n=\mathfrak{m}^{n+1} = \dots$ dir. Krull kesişim teoremi $\mathfrak{m}^n=(0)$ olmasını gerektirir (Matsumura 1970, Hungerford 1989). Böylece $\ell(R)$ sonludur ve $\dim(R)=0$ dır. Bu nedenle $d(R)>0$ olsun. $\dim(R)=0$ ise ispat açıktır. $\dim(R)>0$ kabul edelim. $P=P_e\subset P_{e-1} \dots \subset P_1\subset P_0$ uzunluğu $e>0$ olan asal ideal zinciri olsun ve $x\in P_{e-1}-P$ alalım. Bu durumda $\dim(R/xR+P) \geq e-1$ dir.

$$0\to R/P\to R/P\to R/xR+P \to 0$$

görçek dizisine önerme 2.4.1 uygulanırsa $d(R/xR+P) < d(R/P) \leq d(R)$ elde ederiz. Tümevarım hipotezinden,

$$e-1\leq \dim(R/xR+P) \leq d(R/xR+P) < d(R)$$

olur. Böylece $e\leq d(R)$, bu nedenle $\dim(R) \leq d(R)$ dir.

R bir noetherian halka $P\in Spec(R)$ olduğu takdirde $ht(P)=dim(R_P)$ den dolayı ht(P) nin sonlu olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme 2.4.3. R Lema 2.4.2 de olduğu gibi olsun. $M\neq 0$ bir sonlu R-modül ve $x\in Rad(R)$ olsun. Bu durumda $d(M)\geq d(M/xM)\geq d(M)-1$ dir.

İspat. $x\in I$ olacak biçimde bir tanım ideali I olsun. O zaman $\chi(M/xM,I;n)=\ell(M/xM+I^nM)=\ell(M/I^nM)-\ell(xM+I^nM/I^nM)$ ve $(xM+I^nM)/I^nM = xM/(xM\cap I^nM) = M/(I^nM:x)$ ve $I^{n-1}M\subseteq(I^nM:x)$ dir. Bu nedenle,

$$\chi(M/xM,I;n)\geq \ell(M/I^nM)-\ell(M/I^{n-1}M)=\chi(M,I;n)-\chi(M,I;n-1)$$

ve dolayısıyla $d(M/xM)\geq d(M)-1$ dir.

Lema 2.4.4. R, M Lema 2.4.3 de olduğu gibi ve $dim(M)=r$ olsun. Bu durumda Rad(R) nin öyle r tane $x_1, x_2, \ldots, x_r$ elemanı vardır ki $\ell(M/x_1M+\ldots+x_rM)<\infty$ dur.

İspat. I, R nin bir tanım ideali olsun. $r=0$ ise $\ell(M)<\infty$ olur ve önerme bu durumda doğrudur. Kabul edelimki $r>0$ ve $P_1,P_2,\ldots,P_t$, Ann(M) nin $dim(R/P_i)=r$ koşulunu sağlayan minimal üst-idealleri olsun. Bu durumda P_i lerden hiçbirisi maksimal ideal değildir ve $Rad(R)\not\subset P_i$ dir, $1\leq i\leq t$. Böylece hiçbir P_i içinde olmayan $x_1\in Rad(R)$ vardır. $dim(M/x_1M)\leq r-1$ ve önermenin ispatı dim(M) üzerinde tümevarımla tamamlanır.

Teorem 2.4.5. R, M Lema 2.4.3 de olduğu gibi olsun. $d(M)=dim(M)=$"rad(R) nin $\ell(M/x_1M+\ldots+x_rM)<\infty$ koşulunu sağlayan r tane $x_1, x_2, \ldots, x_r$ elemanı bulunacak biçimde en küçük r tamsayısı" dır.

İspat. Lema 2.4.3 den $\ell(M/x_1M+\ldots+x_rM)<\infty$ ise $d(M)\leq r$ dir. r, bu özelliğe sahip en küçük pozitif tamsayı olduğu zaman Lema 2.4.4 den $r\leq dim(M)$ dir. İspatı tamamlamak için $dim(M)\leq d(M)$ olduğunu göstereceğiz. $M=M_1\supset M_2\supset\ldots\supset M_{k+1}=(0)$ R-altmodül dizisi; öyle ki $P_i\in Spec(R)$, $M_i/M_{i-1}=R/P_i$ olsun. $P_i\supseteq Ann(M)$ ve $Ass(M)\subseteq\{P_1,\ldots,P_k\}$ dir. $Supp(M)=V(Ann(M))$ olduğundan Ann(M) nin minimal üst-idealleri Ass(M) içindedir. Bu nedenle,

$$d(M)=\max(d(R/P_i))\geq\max dim(R/P_i)=dim(R/Ann(M))=dim(M)$$

dir.

Teorem 2.4.6. R noetherian bir halka ve $I=(a_1, a_2, ..., a_r)$ olsun. I nın minimal asal üst-ideali P nin yüksekliği , r den küçük veya r ye eşittir. Özel olarak $ht(I) \leq r$ dir.

İspat. PR_P, R_P nin IR_P yi kapsayan tek asal ideali olduğundan, $R_P/a_1R_P+...+a_rR_P$ artinian halkadır. Teorem 2.4.5 den $ht(P)=\dim(R_P)=d(R_P)$ dir. Sonuç olarak, $ht(P) \leq r$ ve dolayısıyla $ht(I) \leq r$ dir.

R, maksimal ideali m, kesirler cismi k olan bir noetherian, yerel halka ve $\dim(R)=d$ olsun. Yukarıdaki teoremden dolayı R nın bir tanım idealinin d den az elemanla üretilemiyeceğini biliyoruz ve R nin tam d elemanla üretilen bir tanım ideali vardır. Eğer $(x_1, x_2, ..., x_d)$, R nin bir tanım ideali ise $\{x_1, x_2, ..., x_d\}$ ye R nin bir parametreler sistemi denir.

Teorem 2.4.7. R maksimal ideali m olan bir yerel halka ve $\{x_1, x_2, ..., x_d\}$ R nin bir parametreler sistemi olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq d$ için

$$\dim(R/(x_1, x_2, ..., x_i)) = d-i = \dim R - i$$

dir.

İspat. $R_1=R/(x_1, x_2, ..., x_i)$ olsun. $\{x'_{i+1}, x'_2, ..., x'_d\}$, R_1 in bir tanım idealini ürettiği için $\dim(R_1) \leq d-i$ dir. Diğer yandan $\dim(R_1)=p$ ise $y'_1, y'_2, ..., y'_p$ R_1 in parametreler sistemi olsun. Bu durumda $x_1, x_2, ..., x_i, y_1, y_2, ..., y_p$ R nin bir tanım idealini üretir. Teorem 2.4.5 den dolayı $d \leq p+i$ olmalıdır. Çünkü bir tanım ideali enaz d elemanla üretilebilir. Buradan, $d-i \leq \dim(R_1)$ dir. Sonuç olarak; $\dim(R_1)=d-i$ dir.

2.5. İniş ve Çıkış Teoremleri

R ve T halkalar, $\phi: R \to T$ bir halka homomorfizmi olsun.

1) $P, P' \in Spec(R)$, $P \subset P'$ ve $Q \in Spec(T)$, $Q \cap R = P$ olunca daima $Q \subset Q'$ ve $Q' \cap R = P'$ olacak biçimde bir $Q' \in Spec(T)$ bulunabiliyorsa bu takdirde ϕ için Çıkış(Going-up) teoremi geçerlidir denir.

2) $P, P' \in Spec(R)$, $P \subset P'$ ve $Q' \in Spec(T)$, $Q' \cap R = P'$ olunca daima $Q \subset Q'$ ve $Q \cap R = P$ olacak biçimde bir $Q \in Spec(T)$ bulunabiliyorsa bu takdirde ϕ için İniş(Going-down) teoremi geçerlidir denir.

Teorem 2.5.1. $\phi: R \to T$ bir flat homomorfizm ise ϕ için İniş teoremi geçerlidir.

İspat. $P,P'\in Spec(R)$, $P\subset P'$ ve $Q'\in Spec(T)$, $Q'\cap R=P'$ olsun. Teorem 2.3.5 den $T_{Q'}$, $R_{P'}$, üzerinde flat modüldür. $\psi:R_{P'}\to T_{Q'}$ yerel homomorfizm olduğundan $T_{Q'}$ $R_{P'}$ üzerinde faithfully flat modüldür. Bu nedenle Teorem 2.3.6 dan ${}^{a}\psi:Spec(T_{Q'})\to Spec(R_{P'})$ örtendir. Q^*, T_Q nun $PR_{P'}$ yü örten asal ideali olsun. Bu durumda $Q=Q^*\cap T$,T nin P yi örten ve Q' tarafından kapsanan asal idealidir.

Teorem 2.5.2. $\phi:R\to T$ noetherian halkalar üzerinde bir halka homomorfizmi olsun. $P\in$ Spec T, $Q=P\cap R$ olsun.

1) $ht(P)\leq ht(Q)+ht(P/QT)$ dir. Başka bir deyimle, $\dim(T_P)\leq \dim(R_Q)+\dim(T_P\otimes_R k(Q))$

2) İniş teoremi geçerli ise $ht(P)=ht(Q)+ht(P/QT)$ dir.

İspat. 1) R_Q ve T_P yerine sırasıyla R ve T yazılırsa R maksimal ideali Q, T maksimal ideali P olan yerel halkalar olur. Bu durumda $\dim T\leq \dim R+\dim(T/QT)$ eşitsizliğini ispatlamak zorundayız. $a_1, a_2, \ldots, a_r$, R nin parametreler sistemi ve $I=a_1R+a_2R\ldots+a_rR$ olsun. Uygun $n>0$ için $I\supseteq Q^n$ ve bu nedenle $Q^nT\subset IT\subset QT$ dir. Böylece QT ve IT aynı radikale sahiptirler. Tanımdan, $\dim(T/QT)=\dim(T/IT)$ dir. $\dim(T/IT)=s$ ve $\{b'_1, b'_2\ldots, b'_s\}$, T/IT nin parametreler sistemi ise $b_1, b_2\ldots, b_s, a_1, a_2, \ldots, a_r$ T nin tanım idealini üretirler. Böylece $\dim(T)\leq r+s$ dir.

2) (1) deki gösterimleri aynen kullanalım. $ht(P/QT)=s$ ise $P_s\supseteq QT$ olmak üzere uzunluğu s olan $P=P_0\supset P_1\supset\ldots\supset P_s$ asal ideal zinciri vardır. $Q=P\cap R\supseteq P_i\cap R\supseteq Q$ olduğunda $1\leq i\leq s$, $P_i\cap R=Q$ dur. Eğer $ht(Q)=r$ ise R içinde $Q\supset Q_1\supset\ldots\supset Q_r$ asal ideal zinciri vardır ve İniş teoreminden T nin $P_s=K_0\supset K_1\supset\ldots\supset K_r$ asal ideal zinciri vardır ki $K_i\cap R=Q_i$ dur. Böylece $P=P_0\supset P_1\supset\ldots\supset P_s\supset K_1\supset\ldots\supset K_r$ uzunluğu r+s olan asal ideal zinciridir ve bu nedenle $ht(P)\geq r+s$ dir. Sonuç olarak, $ht(P)=r+s=ht(Q)+ht(P/QT)$ dir.

Teorem 2.5.3. R Noetherian halka ve $R[x_1,x_2,\ldots x_n]$ n değişkenli polinomlar halkası olsun. O zaman,

$$\dim R[x_1,x_2,\ldots x_n]=\dim R+n$$

dir.

İspat. Teoremi n=1 için ispatlamak yeterlidir. $B=R[x]$ olsun. p, R nin asal ideali ve P, B nin $P\cap R=p$ olan asal idealleri arasında maksimal olanı olsun. R-p çarpımsal alt kümesiyle R ve B yi yerelleştirerek p yi maksimal kabul edebiliriz. $B/pB=(R/p)[x]$, (R/p) cismi üzerinde tek değişkenli polinomlar halkasıdır. Bu nedenle, B/pB tek üreteçli ideal bölgesidir ve her maksimal idealinin yüksekliği bir dir. Böylece $ht(P/pB)=1$ dir. B, R üzerinde bir serbest R-modüldür. Serbest modül olduğundan faithfully flat modüldür. Dolayısıyla, Teorem 2.5.2 den ht(P)=ht(p)+1 dir. B nin asal idealleri ve R nin asal idealleri arasında örten dönüşüm olduğundan ,

$$\dim(B)=\dim R+1$$

dir.

Sonuç 2.5.4. F bir cisim olsun. $\dim F[x_1,x_2,...x_n]=n$ ve $1\leq i\leq n$ için $(x_1,x_2,...,x_i)$, yüksekliği i olan bir asal idealdir.

İspat. F cisim olduğundan Teorem 2.5.3 in koşullarını sağlar. Böylece, $\dim F[x_1,x_2,...x_n]=\dim F+n$ olur. $\dim F=0$ olduğundan, $\dim F[x_1,x_2,...x_n]=n$ dir.

$$(0)\subset(x_1)\subset(x_1,x_2)\subset...\subset(x_1,x_2,...,x_i)\subset...\subset(x_1,x_2,...,x_n)$$

$F[x_1,x_2,...x_n]$ içinde uzunluğu n olan asal ideal zinciridir. $\dim F[x_1,x_2,...x_n]=n$ olduğundan $(x_1,x_2,...,x_i)$ nin yüksekliği i dir.

2.6. Resultantlar

Bu bölümde resultant kavramının tanımı yapılacak ve bazı özelliklerinden bahsedilecektir.

R bir halka, n>o veya m>0 olmak üzere $R[x]$ içinde $f=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ ve $g=b_0+b_1x+...+b_mx^m$ polinomlarının x e göre resultantı $Res_x(f,g)$,

$$\begin{vmatrix}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & . & . & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & . & . & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & . & . & a_0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & . & & & & & & & & & \\
 & & . & & & & & & & & & \\
 & & . & & & & & & & & & \\
0 & . & . & . & a_n & a_{n-1} & . & . & . & a_2 & a_1 & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & . & . & . & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & . & . & . & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & . & & & & & & & & & \\
 & & . & & & & & & & & & \\
0 & . & . & . & b_m & b_{m-1} & . & . & . & b_2 & b_1 & b_0
\end{vmatrix}$$

$(m+n)x(m+n)$ determinant olarak tanımlanır. Burada m satır a_n, n satır b_m ler yazılır. $n=0$ ve $m=0$ ise $Res_x(f,g)=1$ olarak tanımlanır. der $f=n$, der $g=m$ ve $a\in R$ olsun. Bu durumda, şu sonuçlar görülebilir.

1)$Res_x(a, g)=a^m$,

2)$Res_x(x-a,g)=g(a)$,

3)$Res_x(f,g)=(-1)^{mn}Res_x(g,f)$.

Teorem 2.6.1. R bir T.Ç.B olsun. $f, g\in R[x]$, der $f=n$, der $g=m$ $m, n \geq 1$ olmak üzere f ve g polinomlarının $R[x]$ içinde sabitten farklı bir ortak çarpana sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $R[x]$ içinde $\psi f=g\phi$, der $\psi<m$, der $\phi<n$ olacak biçimde sıfırdan farklı ψ ve ϕ polinomlarının var olmasıdır.

İspat. f ve g nin sabitten farklı ortak çarpanı h olsun. Bu durumda der$\psi<m$ der$\phi<n$ olmak üzere $f=h\phi$, $g=h\psi$ olacak biçimde $\phi,\psi\in R[x]$ vardır ve böylece $\psi f=g\phi$ dır.

Karşıt olarak; $\phi,\psi\in R[x]$ der $\psi<m$, der $\phi<n$ ve $\psi f=g\phi$ olsun. g nin $R[x]$ içinde indirgenemez çarpanlarına ayrılışını düşünelim. g nin sabitten farklı çarpanları ve onların yandaşları, ψf nin indirgenemez çarpanları arasında olmalıdır. Bu çarpanlar, der $\psi<$der g olduğundan, ψ nin indirgenemez çarpanları arasında değildirler. Bunlardan enaz bir tanesi f nin çarpanıdır. Böylece f ve g sabitten farklı bir ortak çarpana sahiptir.

Teorem 2.6.2. R bir cisim $f, g\in R[x]$ olsun. f ve g nin $R[x]$ içinde sabitten farklı ortak bir çarpana sahip olması için gerekli ve yeterli koşul f ve g nin resultantının sıfır olmasıdır.

İspat. $f = a_0 + a_1x+\ldots+a_nx^n$, $g= b_0 + b_1+\ldots+b_mx^m$ olsun. f, g nin $R[x]$ içinde sabitten farklı bir ortak çarpanının olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Teorem 2.6.1 den $R[x]$ içinde der$\psi<m$, der$\phi<n$ $\psi f=g\phi$ olacak biçimde ψ ve ϕ polinomları vardır. En az bir i için $\alpha_i\neq 0$ veya $\beta_i\neq 0$ olmak üzere

$$\phi=\alpha_1+\alpha_2x+\ldots+\alpha_nx^{n-1}$$
$$\psi=\beta_1+\beta_2x+\ldots+\beta_mx^{m-1}$$

kabul edelim. O zaman $\psi f=g\phi$,

$$a_0\beta_1 = b_0\alpha_1$$
$$a_1\beta_1 + a_0\beta_2 = b_1\alpha_1 + b_0\alpha_2$$
$$\vdots$$
$$a_n\beta_m = b_m\alpha_n$$

olmasını gerektirir.

Bu denklemler $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ye göre $m+n$ değişkenli homojen doğrusal denklemler olarak dikkate alınırsa sıfırdan farklı bir çözüme sahip olduklarını biliyoruz. Bu nedenle, denklem sisteminin katsayılar determinantı sıfırdır. $Res_x(f,g)=0$ dır.

$Res_x(f,g)=0$ ise yukarıda sözü edilen denklem sisteminin sıfırdan farklı en az bir çözümü vardır. Bu nedenle en az bir $\alpha_i \neq 0$ veya en az bir $\beta_j \neq 0$ dır. Eğer sözgelimi $\alpha_i \neq 0$ ise $\phi \neq 0$ dır ve bu nedenle $\psi \neq 0$ koşulu da sağlanmak üzere $\psi f = g\phi$ dır. Bu, f ve g nin sabitten farklı ortak çarpanının olmasını gerektirir (Walker 1978).

Teorem 2.6.3. R bir cisim, f ve g $R[x]$ içinde sırasıyla n ve m -inci dereceden iki polinom olsun. $R[x]$ içinde $Res_x(f,g)=Af+Bg$ olacak biçimde dereceleri ençok m-1 ve n-1 olan A ve B polinomları vardır.

İspat.
$$
\begin{aligned}
f &= a_0 + a_1x + \ldots a_nx_n \\
xf &= a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_nx^{n+1} \\
&\vdots \\
x^{m-1}f &= a_0x^{m-1} + a_1x^m + \ldots a_nx^{n+m-1} \\
g &= b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^{m+1} \\
xg &= b_0x + b_1x^2 + \ldots + b_mx^{m+2} \\
&\vdots \\
x^{n-1}g &= b_0x^{n-1} + b_1x^n + \ldots + b_mx^{m+n-1}
\end{aligned}
$$

sistemini ele alalım. $Res_x(f,g)$ nin ilk kolonundaki elemanların kofaktörleri $A_0, A_1, \ldots, A_{m+n}$ olsun. Her $i=1,2,\ldots,m+n$ için yukarıdaki denklemlerden i-inci denklemi A_i ile çarparak ve determinantın genel özelliklerinden faydalanarak,

$$\mathrm{Res}_x(f,g)=(A_0+A_1x+\ldots+A_m\,x)f+(A_{m+1}+A_{m+2}\,x+\ldots+A_{m+n}\,x^{n-1})g$$

elde ederiz. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.64. R bir halka $f,\ g,\ h\in R[x]$ olsun. Bu takdirde,

$$\mathrm{Res}_x(fg,h)=\mathrm{Res}_x(f,h)\mathrm{Res}_x(g,h)$$

dir.

İspat. $f=a_0+a_1x+\ldots a_nx_n$, $g=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$, $h=c_0+c_1+\ldots+c_rx^r$, $fg=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{m+n}x^{m+n}$ ve $gh=\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{m+r}x^{m+r}$ olsun. $\mathrm{Res}_x(f,h)$ ye ait matrisi M ile gösterelim. M yi aşağıdaki $(n+m+r)x(n+m+r)$ matrise genişletelim.

$$A=\begin{bmatrix} M_{(n+r)x(n+r)} & 0_{(n+r)xm} \\ 0_{mx(n+r)} & I_{mxm} \end{bmatrix}$$

Bu takdirde det $A=\mathrm{Res}_x(f,h)$ olur. h ye bağlı olarak tanımlanan

$$\overline{h}=0x^{n+r}+\ldots+0x^{r+1}+c_rx^r+\ldots+c_1+c_0$$

polinomunu düşünelim. $\mathrm{Res}_x(g,\overline{h})$'ye ait matris,

$$B=\begin{bmatrix} (n+r) & \text{satır} & b & \text{ler} & \\ & c_r & \ldots & c_0 & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0_{mxn} & & c_r & & c_0 \end{bmatrix}$$

olur. $\mathrm{Res}_x(g,\overline{h})=\det B=b_m^n\ \mathrm{Res}_x(g,h)$, A ve B matrislerinin çarpımının determinantı

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{m+n} & \alpha_{m+n-1} & \cdot & \cdot & \alpha_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & \alpha_{m+n} & \alpha_{m+n-1} & \cdot & \cdot & \alpha_0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
 & & \cdot & & & \cdot & & & & \\
0 & \cdot & \cdot & \alpha_{m+n} & \alpha_{m+n-1} & & & \cdot & & \alpha_0 \\
\beta_{m+r} & \beta_{m+r-1} & \cdot & \cdot & \beta_0 & 0 & & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & \beta_{m+r} & \beta_{m+r-1} & \cdot & \cdot & \beta_0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
 & & & & & \cdot & & & & \\
0 & \cdot & 0 & \beta_{m+r} & \beta_{m+r-1} & \cdot & & \cdot & \cdot & \beta_0 \\
 & & & & c_r & \cdot & & c_0 & 0 & 0 \\
 & & & & \cdot & & & & \cdot & \\
 & & & & & & \cdot & & & \\
0_{mxn} & & & & & & c_r & \cdot & \cdot & c_0
\end{vmatrix}$$

olur. AB den $Res_x(fg,h)$ ye ait matris elde edilebilir. Bunu gerçeklemek için n satır β lar, n satır c lere dönüştürülmelidir. Bu amaçla; AB matrisi, $\bar{I}_{(n+r)}$ ile çarpılmalıdır. $\bar{I}_{(n+r)}$, (m+n+r)x(m+n+r) birim matrisin n+r-inci satırının,

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n+r-1} \quad \frac{1}{b_m} \quad -\frac{b_{m-1}}{b_m} \quad -\frac{b_{m-2}}{b_m} \quad \ldots \quad -\frac{b_0}{b_m})$$

ile değiştirilmesi ile elde edilen matristir. i=1,2,...,n-1 için $\bar{I}_{(n+r)}$ nin n+r-inci satırı ile AB nin i-inci sütununun çarpımı sıfırdır. $\bar{I}_{(n+r)}$ nin n+r-inci satırı ile AB nin n-inci sütununun çarpımından elde edilen satırda sadece c_r girdisi vardır. Böyle devam edersek, $Res_x(fg,h)$ ye ait matrisi elde ederiz. det $\bar{I}_{(n+r)}=\frac{1}{b_m}$ olduğundan teorem ispatlanmış olur (Serhan 1989).

Teorem 2.6.5. R bir halka f, g ve h$\in$R[x], der f=n, der g=m, der h=r olsun. O zaman, $Res_x(f,gh)=Res_x(f,g)Res_x(f,h)$ dir.

İspat. $Res_x(f,gh)=(-1)^{(m+r)n}Res_x(gh,f)$

$=(-1)^{(m+r)n}Res_x(g,f)Res_x(h,f)$

$=(-1)^{mn}Res_x(g,f)(-1)^{rn}Res_x(h,f)$

$=Res_x(f,g)Res_x(f,h)$

dir.

Sonuç 2.6.6. R bir halka olsun. $f_1,\ldots,f_r$ ve $g_1,\ldots,g_s$ R[x] içinde polinomlar ise

Sonuç 2.6.6. R bir halka olsun. $f_1, \ldots, f_r$ ve $g_1, \ldots, g_s$ $R[x]$ içinde polinomlar ise

$$\mathrm{Res}_x\left(\prod_{j=1}^{r} f_j, \prod_{i=1}^{s} g_i\right) = \prod_{i,j} \mathrm{Res}_x(f_i, g_j)$$

dir.

İspat. Teorem 2.6.5 den elde edilebilir.

Teorem 2.6.7. R bir cisim, $f, g \in R[x]$ $f = a_n \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i)$, $g = b_m \prod_{j=1}^{m} (x-\beta_j)$ ile verilen polinomlar olsun. Bu takdirde,

$$\mathrm{Res}_x(f,g) = a_n^m b_m^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$$

dir.

İspat. $\mathrm{Res}_x(f,g) = \mathrm{Res}_x\left(a_n \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i),\ b_m \prod_{j=1}^{m} (x-\beta_j)\right)$

$$= \mathrm{Res}_x\left(a_n, b_m \prod_{j=1}^{m} (x-\beta_j)\right) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_x\left((x-\alpha_i), b_m \prod_{j=1}^{m} (x-\beta_j)\right)$$

$$= \mathrm{Res}_x(a_n, b_m) \prod_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_x(a_n, x-\beta_j) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_x(x-\alpha_i, b_m) \prod_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_x(x-\alpha_i, (x-\beta_j))$$

$$= \mathrm{Res}_x(a_n, b_m) \prod_{i=1}^{n} b_m \prod_{j=1}^{m} a_n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$$

$$= a_n^m b_m^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$$

dir.

Sonuç 2.6.8. f, g polinomları yukarıdaki teoremde olduğu gibi olsun. Bu takdirde,

$$\mathrm{Res}_x(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i), \quad \mathrm{Res}_x(f,g) = (-1)^{mn} b_m^n \prod_{j=1}^{m} f(\beta_j)$$

dir.

İspat. $Res_x(f,g)=Res_x(a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i), g(x))=Res_x(a_n, g(x))\, Res_x(\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i), g(x))$

$=Res_x(a_n, g(x))\prod_{i=1}^{n} Res_x((x-\alpha_i), g(x))=a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i)$

ve diğer sonuç benzer biçimde görülebilir.

Şimdi çok değişkenli polinomlar için ağırlık kavramını tanımlıyalım. R bir halka $a\in R$, $ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}\in R[x_1, x_2, ..., x_n]$ olsun. Her $i=1,2,...,n$ için negatif olmayan sabit bir v(i) tamsayısı seçilir ve buna x_i nin ağırlığı denir. $ax_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ nin ağırlığı,

$$\alpha_1 v(1)+...+\alpha_n v(n)$$

ile tanımlanır. $h(x_1,x_2,...,x_n)\in R[x_1, x_2, ..., x_n]-\{0\}$ polinomunun ağırlığı terimlerinin ağırlıklarının maksimumu olarak tanımlanır. $h(x_1,x_2,...,x_n)\in R[x_1, x_2, ..., x_n]-\{0\}$ ın tüm terimleri aynı ağırlıkta ise h polinomuna bir izobarik polinom denir. Tüm terimlerinin ağırlığı n ise bu polinoma n ağırlıklı izobarik polinom denir.

$f = a_0 + a_1x+...+a_nx^n$ ve $g= b_0 + b_1+...+b_mx^m$ $R[x]$ içinde iki polinom olsunlar. $Res_x(f,g)$, f ve g nin R üzerindeki katsayılarına göre bir polinom olarak dikkate alınabilir. Böylece her $i=0,...,n$ ve $j=0,...,m$ için a_i ye (n-i), b_j ye (m-j) ağırlığını atayarak $Res_x(f,g)$ için bir ağırlık elde edebiliriz.

Teorem 2.6.9. R bir halka, $f = a_0 + a_1x+...+a_nx^n$ ve $g= b_0 + b_1+...+b_mx^m$ $R[x]$ içinde iki polinom olsunlar. $Res_x(f,g)$ mn ağırlıklı izobariktir.

İspat. m+n mertebeli bir determinant $D=|c_{ij}|$ olsun.

$$c_{ij}=\begin{cases} a_{n+i-j} & , \quad 1\le i\le m \\ b_{j-i} & , \quad m+1\le i\le m+n \end{cases} \qquad (2.6.1)$$

olmak üzere,

$$a_k=0 \ (k<0 \text{ veya } k>n) \ , \ b_k=0 (k<0 \text{ veya } k>m)$$

alınırsa $D=Res_x(f,g)$ olur. $1',2', \ldots ,(m+n)'$, $1,2, \ldots ,m+n$ nin permütasyonu olmak üzere D nin $\mp c_{11}, \ldots , c_{(m+n)(m+n)}$, terimlerini dikkate alalım. Bu terimler (2.6.1) de yerleştirildiğinde indisler toplamının mn olacağını ispatlamak yeterli olacaktır. Bu toplam,

$$\sum_{i=1}^{m} (i'-i)+\sum_{i=m+1}^{m+n} (m+i'-i)=mn+\sum_{i=1}^{m+n} (i'-i)$$

olacaktır ve burada son terim sıfırdır.

Resultant kavramı çok değişkenli polinomlara genişletilebilir. $f, g\in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]-\{0\}$ $r,m>0$, $R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}]$ üzerinde x_n e göre polinomlar olarak dikkate alınabilir ve a_i, $b_i \in R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}]$ olmak üzere,

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx_n^{\,r}$$
$$g(x_1,x_2,\ldots x_n)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx_n^{\,m}$$

dir. f ve g nin x_n e göre resultantı $R(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$, n-1 değişkenli bir polinomdur.

2.7. Sınır Polinomları

C, kompleks sayılar cismini göstermek ve $n\geq 2$ olmak üzere $C[z_1, z_2, \ldots, z_n]$, $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ve $C[t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}]$ polinomlar halkalarını düşünelim. Her $i=1,2,\ldots,n$ için

$$\pi_i(x_j) = \begin{cases} t_j & , \ j<i \\ 0 & , \ i=j \\ t_{j-1} & , \ j>i \end{cases}$$

olacak biçimde tektürlü $\pi_i : C[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to C[t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}]$ C-homomorfizmi tanımlıdır.

Tanım 2.5.1. $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomu için $\pi_1(f)=f(0,t_1,\ldots,t_{n-1})$, $\pi_2(f)=f(t_1,0,t_2,\ldots,t_{n-1})$, $\ldots$, $\pi_n(f)=f(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},0)$ polinomlarına $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nin sınır (face) polinomları denir.

İspat. Hipotez $\pi_1\phi=\pi_1\overline{\phi},\ldots,\pi_n\phi=\pi_n\overline{\phi}$ şeklinde söylenebilir. Başka bir deyişle her $i=1,2,\ldots,n$ için $\sigma_i=\pi_i\phi=\pi_i\overline{\phi}$ olmak üzere aşağıdaki değişmeli diyagrama sahibiz.

$$\begin{array}{ccc} C[x_1,x_2,\ldots,x_n] & \xrightarrow{\phi^{-1}} & C[z_1,z_2,\ldots,z_n] \\ \downarrow \phi^{-1} & & \downarrow \sigma_i \\ C[z_1,z_2,\ldots,z_n] & \xrightarrow{\sigma_i} & C[t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}] \end{array}$$

Her $j=1,2,\ldots,n$ için $R_j=\phi^{-1}(x_j)$ ile $R_1,R_2,\ldots,R_n\in C[z_1,z_2,\ldots,z_n]$, tanımlayalım. Benzer $\overline{R}_j=\overline{\phi}(x_j)$ şekilde olsun, $1\leq j\leq n$.

Önce $R_1=\overline{R}_1$ olduğunu göstereceğiz. $\pi_1\phi$ örten , $C[z_1,z_2,\ldots,z_n]$ nin Krull boyutu n ve $C[t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}]$ Krull boyutu n-1 olan tamlık bölgesi olduğundan $\pi_1\phi$ nin çekirdeği, yüksekliği bir olan bir asal idealdir. Bundan başka $C[z_1,z_2,\ldots,z_n]$ T.Ç.B olduğundan Çek $\pi_1\phi$ içindeki her indirgenemez eleman Çek $\pi_1\phi$ için bir üreteçtir. Böylece, R_1 ve $\overline{R}_1$ nin her ikisi de Çek $\pi_1\phi$ =Çek $\pi_1\overline{\phi}$ tek üreteçli ideali için bir üreteçdirler. Bu nedenle R_1ve $\overline{R}_1$, $C[z_1,z_2,\ldots,z_n]$ nin tersinir bir elemanı çarpımı ile farklanırlar. Yani, uygun $\lambda_1\in C$-{0} için $R_1=\lambda_1\overline{R}_1$ dir. $\overline{\phi}$ uygulanarak $\overline{\phi}(R_1)=\lambda_1 x_1$ elde edilir. Ayrıca, R_1 in tanımından $\phi(R_1)=x_1$ dir. π_2 uygulanarak ($n\geq 2$ olduğundan mümkündür),

$$\pi_2\overline{\phi}(R_1)=\lambda_1 t_1$$
$$\pi_2\phi(R_1)=t_1$$

elde edilir. $\pi_2\phi=\pi_2\overline{\phi}$ olduğundan $\lambda_1 t_1=t_1$ ve buradan $\lambda_1=1$ olduğu görülür. Böylece $R_1=\overline{R}_1$ dir. Benzer şekilde $R_i=\overline{R}_i$, $i=2,3,\ldots,n$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\phi=\overline{\phi}$ dir.

2.8. Cebirsel Bağımsızlık ve Aşkınlık Tabanı

Bu bölümde cebirsel bağımsızlık ve aşkınlık tabanı kavramları tanımlanacak, bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.8.1. K bir cisim, F onun bir cisim genişlemesi ve $s_1,s_2,\ldots,s_n\in F$, $n>0$ olsun. Eğer $f(s_1,s_2,\ldots,s_n)=0$ olacak biçimde bir $f\in K[x_1,x_2,\ldots x_n]$-{0} polinomu

Tanım 2.8.1. K bir cisim, F onun bir cisim genişlemesi ve $s_1,s_2,\dots,s_n \in F$, $n>0$ olsun. Eğer $f(s_1,s_2,\dots,s_n)=0$ olacak biçimde bir $f\in K[x_1,x_2,\dots x_n]-\{0\}$ polinomu varsa $s_1,s_2,\dots,s_n$ elemanları K üzerinde cebirsel bağımlıdırlar denir. $S\subseteq F$ verildiğinde, eğer S içinde K üzerinde cebirsel bağımlı olan n farklı eleman $s_1,s_2,\dots,s_n$ ($n>0$) varsa, S kümesi K üzerinde cebirsel bağımlıdır denir. F nin bir S altkümesi K üzerinden cebirsel bağımlı değilse S ye K üzerinde cebirsel bağımsızdır denir.

Böylece F nin bir S altkümesinin K üzerinde cebirsel bağımsız olması için gerekli ve yeterli koşul şöyle ifade edilebilir:

$n>0$ olmak üzere $f\in K[x_1,x_2,\dots x_n]$ ve farklı $s_1,s_2,\dots,s_n\in S$ için $f(s_1,s_2,\dots,s_n)=0$ ise $f=0$ dır.

K bir cisim, F onun bir cisim genişlemesi olsun. F içinde K üzerinden cebirsel bağımsız bir kümenin her alt kümesi de K üzerinde cebirsel bağımsızdır. Boş küme K üzerinde cebirsel bağımsızdır. $u\in F$ olmak üzere $\{u\}$ kümesinin K üzerinde cebirsel bağımlı olması için gerekli ve yeterli koşul u nun K üzerinde cebirsel olmasıdır. K üzerinde cebirsel bağımsız bir kümenin her elemanı K üzerinde aşkın olmalıdır. Böylece F, K üzerinde cebirsel ise boş küme F nin cebirsel bağımsız olan tek altkümesidir.

Cebirsel bağımlılık(bağımsızlık), doğrusal bağımlılık (bağımsızlık) kavramının bir genellemesi olarak görülebilir. Cebirsel bağımsız bir küme doğrusal bağımsızdır ama tersi doğru değildir.

Teorem 2.8.2. F, K nın bir cisim genişlemesi ve $\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$, F nin K üzerinde cebirsel bağımsız altkümesi olsun. Bu takdirde, $K(s_1,s_2,\dots,s_n)\cong K(x_1,x_2,\dots,x_n)$ K-izomorfizmi vardır.

İspat. $\sigma: K[x_1,x_2,\dots x_n] \to K[s_1, s_2, \dots s_n]$, $\sigma(x_i)=s_i$ ile verilen K-epimorfizmi olsun. $\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$, F nin K üzerinde cebirsel bağımsız alt kümesi olduğundan σ monomorfizmdir. σ, $\theta:K(x_1,x_2,\dots,x_n)\to K(s_1,s_2,\dots,s_n)$ $\theta(f/g)=f(s_1,s_2,\dots,s_n)/g(s_1,s_2,\dots,s_n)$ olacak biçimde $K(x_1,x_2,\dots,x_n)$ den $K(s_1,s_2,\dots,s_n)$ ye K-monomorfizme genişletilebilir. Böylece elde edilen K-monomorfizm bir epimorfizmdir ve dolayısıyla izomorfizmdir.

Sonuç 2.8.3. $i=1,2$ için F_i, K_i nin cisim genişlemesi olsun. $S_i \subset F_i$ K_i üzerinden cebirsel bağımsız olsun. $\varphi:S_1 \to S_2$ bire-bir dönüşüm, $\tau:K_1 \to K_2$ cisim homomorfizmi ise öyle bir $\overline{\tau}:K_1(S_1) \to K_2(S_2)$ cisim homomorfizmi vardır ki $\overline{\tau}|_{S_1}=\varphi$ ve $\overline{\tau}|_{K_1}=\tau$ dur. Ayrıca, φ bire-bir örten ve τ bir izomorfizm ise $\overline{\tau}$ de bir izomorfizmdir.

İspat. $n\geq 1$, $\tau:K_1 \to K_2$ cisim homomorfizmi için

$$\sigma:K_1[x_1,x_2,\ldots x_n] \to K_2[x_1,x_2,\ldots x_n]$$

$\sigma(\sum_i r_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n})=\sum_i \tau(r_{i_1,\ldots,i_n}) x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ ile tanımlanan monomorfizmdir. $K_1(S_1)=\{f(s_1,s_2,\ldots,s_n)/g(s_1,s_2,\ldots,s_n):s_i \in S_1\}$ biçimindedir.

$\overline{\tau}:K_1(S_1) \to K_2(S_2)$, $\overline{\tau}(f/g)=\tau f(\varphi s_1,\varphi s_2,\ldots,\varphi s_n)/\tau g(\varphi s_1,\varphi s_2,\ldots,\varphi s_n)$ olarak tanımlansın. $\{s_1,s_2,\ldots,s_r\}\subset S_1$, $\overline{\tau}$ nın K $(s_1,s_2,\ldots,s_r)$ ye kısıtlanışı,

$$K_1(s_1,s_2,\ldots,s\ ) \xrightarrow{\theta_1^{-1}} K_1(x_1,x_2,\ldots,x_r) \xrightarrow{\overline{\sigma}}$$

$$K_2(x_1,x_2,\ldots,x_r) \xrightarrow{\theta_2} K_2(s_1,s_2,\ldots,s_r)$$

bileşkesidir. Burada $i=1,2$ için $\theta_i:K_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) \to K_i(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ Teorem 2.82 de olduğu gibi K_i - izomorfizmdir ve $\overline{\sigma}:K_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \to K_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $\overline{\sigma}(f/g)=\sigma f/\sigma g$ ile verilen monomorfizmdir. Buradan $\overline{\tau}$ iyi tanımlı bire-bir cisim homomorfizmidir. $\overline{\tau}$, τ nun genişlemesidir ve $\overline{\tau}|_{S_1}=\varphi$ ve $\overline{\tau}|_{K_1}=\tau$ dir. τ izomorfizm ise $\theta_2\ \overline{\sigma}\theta_1^{-1}$ de izomorfizmdir. φ bire-bir, örten ve τ izomorfizm ise $\overline{\tau}$ izomorfizmdir.

Tanım 2.8.4. F, K nın bir cisim genişlemesi olsun. F nin K üzerinde cebirsel bağımsız altkümeleri içinde maksimal olan kümeye F nin K üzerinde aşkınlık tabanı denir.

Bu aşamada, F nin K üzerinde cebirsel bağımsız altkümeleri içinde maksimal olan bir kümenin olup olmadığı sorusu ortaya çıkar.

$A=\{S : S$, F nin K üzerinde cebirsel bağımsız altkümesi$\}$

kümesini dikkate alalım. Bu küme, boş değildir ve küme kapsama bağıntısına göre kısmi sıralıdır. Zorn Lema'dan bir maksimal elemana sahiptir. Dolayısıyla F, K üzerinde cebirsel bağımsız altkümeleri içinde maksimal altkümeye sahiptir.

Teorem 2.8.5. F, K nın cisim genişlemesi ve $S \subset F$, K üzerinde cebirsel bağımsız, $u \in F-K(S)$ olsun. $S \cup \{u\}$ nun K üzerinde cebirsel bağımsız olması için gerekli ve yeterli koşul u nun K(S) üzerinde aşkın olmasıdır.

İspat. ($\Leftarrow$:) $f(s_1,s_2,\dots,s_{n-1},u)=0$ olacak biçimde bir $f \in K[x_1,x_2,\dots x_n]$ ve farklı $s_1,s_2,\dots,s_{n-1} \in S$ varsa u, $f(s_1,s_2,\dots,s_{n-1},x_n)$ polinomunun bir köküdür.
$f \in K[x_1, x_2, \dots x_n]=K[x_1, x_2, \dots x_{n-1}]\,[x_n], f=h_r x_n^r + h_{r-1}x_n^{r-1}+\dots+h_1x_n+h_0$ ve her $i=0,1,\dots,n$ için $h_i \in K[x_1, x_2, \dots x_{n-1}]$ dır. u, K(S) üzerinden aşkın olduğu için $f(s_1,s_2,\dots s_{n-1},x_n)=0$ dır. Sonuç olarak, her $i=o,2,\dots,r$ için $h_i(s_1,s_2,\dots s_{n-1})=0$ dır. S nın cebirsel bağımsız olması, her $i=1,2,\dots,n$ için $h_i=0$ olmasını gerektirir. Böylece $f=0$ dır. Bu nedenle $S \cup \{u\}$ cebirsel bağımsızdır.
($:\Rightarrow$) $f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K(S)[x]$, $f(u)=0$ kabul edelim. Her $i=0,1,\dots n$ için
$a_i \in K(s_1,s_2,\dots,s_r)$ olacak biçimde sonlu bir $\{s_1,s_2,\dots,s_r\}$ alt kümesi vardır. Burada, $a_i=f_i(s_1,s_2,\dots,s_r)/g_i(s_1,s_2,\dots,s_r)$ $g_i, f_i \in K[x_1,x_2,\dots x_r]$ dır. $g=g_1g_2\dots g_n \in K[x_1,x_2,\dots x_r]$ ve her $i=0,1\dots,n$ için $\bar{f}_i=f_i g \dots g_{i-1}g_{i+1}\dots g_n \in K[x_1,x_2,\dots x_r]$ olsun. O zaman, $a_i=\bar{f}_i(s_1,s_2,\dots,s_r)/g(s_1,s_2,\dots,s_r)$ ve

$$f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i=\sum_{i=0}^{n} (\bar{f}_i(s_1,s_2,\dots,s_r)/g(s_1,s_2,\dots,s_r)\, x^i$$

$$= g(s_1,s_2,\dots,s_r)^{-1} \sum_{i=0}^{n} \bar{f}_i(s_1,s_2,\dots,s_r)\, x^i$$

dır. $h(x_1,x_2,\dots,x_r,x)= \sum_{i=0}^{n} \bar{f}_i (x_1,x_2,\dots,x_r)x^i \in K[x_1,x_2,\dots x_r,x]$, $f(u)=0$ ve $g(s_1,s_2,\dots,s_r)^{-1} \neq 0$ olduğundan $h(s_1,s_2,\dots,s_2,u)=0$ olmalıdır. $S \cup \{u\}$ nun cebirsel bağımsız olmasından $h=0$ olmasını gerektirir. Her i için $\bar{f}_i=0$ dır. Böylece $a_i=0$ ve $f=0$ dır. Bu nedenle u, K(S) üzerinde aşkındır.

Sonuç 2.8.6. F, K nın bir cisim genişlemesi ve S,F nin K üzerinden cebirsel bağımsız alt kümesi olsun. S, F nin K üzerinden aşkınlık tabanı olması için gerekli ve yeterli koşul F nin K(S) üzerinde cebirsel olmasıdır.

İspat. F, K(S) nin cebirsel genişlemesi olmasın. O zaman K(S) üzerinde aşkın olan $u \in F$ vardır. $u \in F-K(S)$ dir. $S \cup \{u\}$ cebirsel bağımsızdır. Ama S, F nin K üzerinde aşkınlık tabanı olduğundan cebirsel bağımsız maksimal altkümesidir. Bu bir çelişkidir. F, K(S) üzerinde cebirsel olmalıdır.

S cebirsel bağımsız ve $u \in F-S$ olsun. u K(S) üzerinde cebirsel olduğundan $S \cup \{u\}$ Teorem 2.8.5 den cebirsel bağımlıdır. O zaman S, F nin aşkınlık tabanıdır.

F bir cisim ve $S \subset F$,K üzerinde cebirsel bağımsız olsun. F=K(S) ise F cismine K nın pür aşkın genişlemesi denir.

Sonuç 2.8.7. F, K nın cisim genişlemesi ve uygun $X \subset F$ için F, K(X) üzerinde cebirsel ise X, F'nin K üzerinden bir aşkınlık tabanını içerir.

İspat. $X \subset F$ nin cebirsel bağımsız altkümeleri içinde maksimal olan altküme S olsun. Her $u \in X-S$ K(S) üzerinde cebirseldir (Teorem2.6.5). Böylece K(X), K(S) üzerinde cebirseldir. Sonuç olarak F, K(S) üzerinde cebirseldir. Sonuç 2.8.6 dan S, K üzerinde F nin aşkınlık tabanıdır.

Teorem 2.8.8. F, K nın bir cisim genişlemesi olsun. S, F nin K üzerinden sonlu aşkınlık tabanı ise F nin K üzerinde her aşkınlık tabanının eleman sayısı S nin eleman sayısı ile aynıdır.

İspat. $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ ve T, F nin aşkınlık tabanı olsun. Uygun $t_1 \in T$ nin $K(s_2,\dots,s_n)$ üzerinde aşkın olduğunu göstermeliyiz. Aksi takdirde T nin her elemanı $K(s_2,\dots,s_n)$ üzerinde cebirseldir ve böylece $K(s_2,\dots,s_n)(T)$, $K(s_2,\dots,s_n)$ üzerinde cebirseldir. F, K(T) üzerinde cebirsel olduğundan F, $K(T)(s_2,\dots,s_n)=K(s_2,\dots,s_n)(T)$ üzerinde de cebirsel olmalıdır. Bu nedenle F, $K(s_2,\dots,s_n)$ üzerinde cebirseldir. Özel olarak $s_1 \in F$, $K(s_2,\dots,s_n)$ üzerinde cebirseldir. Bu ise Teorem 2.8.5 ile çelişir. Böylece uygun $t_1 \in T$ için $K(s_2,\dots,s_n)$ üzerinde aşkındır. Sonuç olarak $\{ t_1,s_2,\dots,s_n\}$ cebirsel bağımsızdır.

s_1, $K(t_1,s_2,\ldots,s_n)$ üzerinde aşkın olsaydı $\{t_1,s_1,\ldots,s_n\}$ cebirsel bağımsız olacaktır (Teorem 2.8.5). Ama bu S aşkınlık tabanı olduğundan dolayı olamaz. Bu nedenle s_1, $K(t_1,s_2,\ldots,s_n)$ üzerinde cebirseldir. Sonuç olarak, $K(S)(t_1)=K(t_1,s_2,\ldots,s_n)(s_1)$, $K(t_1,s_2,\ldots,s_n)$ üzerinde cebirseldir ve böylece F, $K(t_1,s_2,\ldots,s_n)$ üzerinde cebirseldir. Sonuç 2.8.6 den $\{t_1,s_2,\ldots,s_n\}$ K üzerinde F nin aşkınlık tabanıdır.

Benzer tartışma ile uygun $t_2 \in T$ nin $K(t_1,s_3,\ldots,s_n)$ üzerinde aşkın ve $\{t_2,t_1,s_3,\ldots,s_n\}$ nin K üzerinde aşkınlık tabanı olduğu görülebilir. Böyle devam edilerek sonuçta $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ $\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$, F nin K üzerinde aşkınlık tabanı olacak biçimde elde edilir.

Teorem 2.8.9. F, K'nın cisim genişlemesi olsun. S, F nin K üzerinde sonsuz aşkınlık tabanı ise F nin K üzerinde her aşkınlık tabanının kardinalitesi S nin kaardinelitesi ile aynıdır.

İspat. T, F nin K üzerinden başka bir aşkınlık tabanı olsun. $s \in S$ ise sonuç 2.8.6 dan s, K(T) üzerinde cebirseldir. K(T) üzerinde s yi kök kabul eden en küçük dereceli indirgenemez f polinomunun tüm katsayıları $K(T_s)$ içinde olacak biçimde sonlu $T_s \subset T$ vardır. Sonuç olarak $f \in K(T_s)[x]$ ve s, $K(T_s)$ üzerinde cebirseldir. Her $s \in S$ için sonlu $T_s \subset T$ alt kümesini seçelim.

$\bigcup_{s\in S} T_s$ nin K üzerinde F nin aşkınlık tabanı olduğunu göstereceğiz. $\bigcup_{s\in S} T_s \subset T$ olduğundan cebirsel bağımsızdır. Ayrıca S nin her elemanı $K(\bigcup_{s\in S} T_s)$ üzerinde cebirseldir. Sonuç olarak $K(\bigcup_{s\in S} T_s)(S)$, $K(\bigcup_{s\in S} T_s)$ üzerinden cebirseldir. $K(S) \subset K(\bigcup_{s\in S} T_s)(S)$ olduğundan K(S) nin her elemanı $K(\bigcup_{s\in S} T_s)$ üzerinde cebirseldir. F, K(S) üzerinde cebirsel olduğundan Sonuç 2.8.6 dan F, $K(\bigcup_{s\in S} T_s)$ üzerinde cebirseldir. Yine sonuç 2.8.6 dan $\bigcup_{s\in S} T_s$, F için aşkınlık tabanıdır.

Şimdi $|S| \geq |T|$ olduğunu gösterelim. T_s ler ayrık kümeler olmak zorunda değildirler ve S iyi sıralı kümedir. İlk elemanına 1 diyelim. Her $1 < s \in S$ için $T_1' = T_1$ olsun. $T_s' = T_s - \bigcup_{i \angle s} T_i$ tanımlıyalım. T_s' nin sonlu olduğu açıktır ve T_s' ler kesinlikle ayrık kümelerdir. Her $s \in S$ için T_s' nün elemanlarını sıralayalım, $t_1,t_2,\dots,t_{k_S}$ olsun. $f : \bigcup_{s\in S} T_s' \to S\times N$, $f(t_i)=(s,i)$ ile tanımlı bire-bir dönüşümdür. Bu nedenle, $|T| = |\bigcup_{s\in S} T_s| = |\bigcup_{s\in S} T_s'| < |S\times N| = |S|\,|N| = |S|$ dir. Benzer yolla $|T| \geq |S|$ olduğu görülür. Böylece Schroeder-Bernstein teoreminden $|S|=|T|$ dir.

Tanım 2.8.10. F, K nın bir cisim genişlemesi ve S, F nin K üzerinden aşkınlık tabanı olsun. $|S|$ sayısına ,K üzerinden F nin aşkınlık derecesi denir. tr.d.F/K ile gösterilir.

Yukarıdaki iki teorem tr.d.F/K nın, S nin seçiminden bağımsız olduğunu ifade eder.

Teorem 2.8.11. F, E nin ve E, K nın cisim genişlemesi olsun. Bu takdirde,

$$\text{tr.d.}F/K=\text{tr.d.}F/E+\text{tr.d.}E/K$$

dır.

İspat. S, E nin K üzerinden T de E üzerinden F nin aşkınlık tabanı olsunlar. $S\subset E$ olduğundan E üzerinden cebirsel bağımlıdır ve böylece $S\cap T=\varnothing$ dır. Amacımız, $S\cup T$ nin K üzerinden F nin aşkınlık tabanı olduğunu göstermek olacaktır.

E nin her elemanı K(S) üzerinde cebirseldir.Çünkü,S K üzerinde E nin aşkınlık tabanıdır.O zaman E nin elemanları $K(S\cup T)$ üzerinde de cebirseldir. $K(S\cup T)(E)$, $K(S\cup T)$ üzerinden cebirseldir. Çünkü,

$$K(S\cup T)=K(S)(T)\subset E(T)\subset K(S\cup T)(E),$$

$E(T)$, $K(S\cup T)$ üzerinde cebirseldir. Ama F, E(T) üzerinde cebirseldir ve bu nedenle $K(S\cup T)$ üzerinde de cebirseldir. Bu durumda $S\cup T$ nin cebirsel bağımsız olduğunu gösterirsek $S\cup T$, F nin K üzerinde aşkınlık tabanı olacaktır (sonuç 2.8.6).f polinomu; K üzerinde, uygun farklı $s_1,s_2,\dots,s_n \in S$, $t_1,t_2,\dots,t_m\in T$ için $f(s_1,s_2,\dots,s_n,t_1,t_2,\dots,t_m)=0$ olacak biçimde m+n değişkenli polinom olsun $g=g(y_1,y_2,\dots,y_m)= f(s_1,s_2,\dots,s_n,y_1,y_2,\dots,y_m)\in K(S)[y_1,y_2,\dots,y_m]\subset E[y_1,y_2,\dots,y_m]$ olur. $g(t_1,t_2,\dots,t_m)=0$ ve T nin E üzerinden cebirsel bağımsızlığı $g=0$ olmasını gerektirir. $h_i \in K[x_1,x_2,\dots x_n]$, $k_i \in K[y_1,y_2,\dots,y_m]$ olmak üzere,

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)=\sum_{i=1}^{r} h_i\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)\;k_i\,(y_1,y_2,\ldots,y_m)$$

dır. $g=0$ olduğundan $f(s_1,s_2,\ldots,s_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)=0$ dır. Bu durumda $i=0,1,2,\ldots,r$ için $h_i=(s_1,s_2,\ldots,s_n)=0$ olmalıdır. S, K üzerinde cebirsel bağımsız olduğundan her $i=0,\ldots,r$ için $h_i=0$ dır. Böylece $f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)=0$ dır. Bu nedenle $S\cup T$, K üzerinde cebirsel bağımsızdır. Yani; $S\cup T$, F nin K üzerinde aşkınlık tabanıdır. Dolayısıyla,

$$\mathrm{tr.d.}\,F/K=|S\cup T|=|T|+|S|=\mathrm{tr.d.}\,F/E+\mathrm{tr.d.}\,E/K$$

olur.

Teorem 2.8.12. F_1, F_2 cisimleri sırayla K_1ve K_2 cisimlerinin cebirsel kapalı genişlemesi olsun. $\mathrm{tr.d.}\,F_1/K_1\cong \mathrm{tr.d.}\,F_2/K_2$ ise her $K_1\cong K_2$ cisim izomorfizmi bir $F_1\cong F_2$ izomorfizmine genişletilebilir.

İspat. S_i , F_i nin K_i üzerinden aşkınlık tabanı olsun. $i=1,2$ $|S_1|=|S_2|$ olduğundan $\tau:K_1\cong K_2$ izomorfizmi Sonuç 2.8.3'den $\overline{\tau}:K_1(S_1)\cong K_2(S_2)$ izomorfizmine genişletilebilir. F, cebirsel kapalı ve $K_i(S_i)$ üzerinde cebirsel olduğundan ve Sonuç 2.8.6 dan $K_i(S_i)$ nin cebirsel kapanışıdır. Bu nedenle $\overline{\tau}$, $F_1\cong F_2$ izomorfizmine genişletilebilir.

3. BULGULAR

3.1. Resultant ile Tanımlanan Polinomlar

C, kompleks sayılar cismini göstermek üzere $C[t]$, C üzerinde polinomlar halkası ve der u(t)=n, der v(t)=m olmak üzere,

$$u(t)=u_1t+\dots+u_nt^n$$
$$v(t)=v_1t+\dots+v_mt^m$$

$C[t]$ içinde sabit terimleri sıfır olan iki polinom olsun. Bu şekilde alınan $u(t),v(t)\in C[t]$ için $R(u(t),v(t);Z,W)\in C[Z,W]$ aşağıdaki biçimde tanımlanır: $u(t)\neq 0$ veya $v(t)\neq 0$ ise

$$R(u(t),v(t);Z,W)=Res_t(u(t)-Z,v(t)-W)$$

t ye göre iki polinomun resultantı olarak oluşturulur. R(u(t),v(t);Z,W),

$$\begin{vmatrix} u_n & \cdots & u_1 & -Z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_n & \cdots & u_1 & -Z & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_n & \cdots & & u_1 & -Z \\ v_m & \cdots & v_1 & -W & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & v_m & \cdots & v_1 & -W & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & v_m & & \cdots & & v_1 & -W \end{vmatrix} \qquad (3.1.1)$$

(m+n)x(m+n) determinanttır. u(t)=0 ve v(t)=0 ise R(0,0;Z,W)=1 dir. R(u(t),v(t);Z,W) gösterimi yerine kısaca R(Z,W) kullanacağız. Örneğin; $u(t)=u_2t^2$ ve $v(t)=v_2t^2$ ise

$$R(Z,W)=R(u(t),v(t);Z,W)=\begin{vmatrix} u_2 & 0 & -Z & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & -Z \\ v_2 & 0 & -W & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & -W \end{vmatrix}=(v_2Z-u_2W)^2$$

dir ve R(Z,W) indirgenemez bir polinomun kuvvetidir.

Aşağıdaki teorem, R(Z,W) nin indirgenemez bir polinomun kuvveti ve bu kuvvetin, C(t) nin C(u(t),v(t)) üzerinden boyutu olduğunu ifade eder. Bu teorem Abhyankar Teoremi olarak bilinir.

Teorem 3.1.1. u(t), v(t) sabit terimleri sıfır ve en az biri sıfırdan farklı polinomlar ve q=[C(t):C(u(t),v(t))] olsun. Bu takdirde, C[Z,W] içinde öyle bir indirgenemez h(Z,W) polinomu vardır ki

$$\mathrm{Res}_t\ (u(t)-Z,v(t)-W)=h(Z,W)^q$$

dir.

İspat. u(t) polinomunun başkatsayısının u_n , v(t) polinomunun başkatsayısının v_m ve der u(t)≥1, der v(t)≥1 olduğunu kabul edelim. u(t)-Z, C[t][Z] içinde indirgenemez polinomdur ve C[Z][t] içinde de indirgenemezdir. Bu durumda Gauss lemasından C(Z)[t] içinde indirgenemezdir. E, F=C(Z) üzerinden u(t)-Z nin parçalanış cismi olsun. O zaman, her 1 ≤i≤ n için öyle $\theta_i \in$ E vardır ki

$$u(t)-Z= u_n(t-\theta_1)(t-\theta_2)\ldots(t-\theta_n)$$

olur. Galois teorisinden E nin F nin Galois genişlemesi olduğunu biliyoruz. G Galois grubu, $\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n\}$ üzerine geçişli etki eder. Sonuç 2.6.8 den ,

$$\begin{aligned} R(Z,W)&=\mathrm{Res}_t\ (u(t)-Z,v(t)-W)=\mathrm{Res}_t(u_n \prod_{i=1}^{n} (t-\theta_i),\ v(t)-W\ ) \\ &=u_n^m \prod_{i=1}^{n} (v(t)-W)(\theta_i)=u_n^m \prod_{i=1}^{n} (v(\theta_i)-W) \\ &=(-1)^n\ u_n^m \prod_{i=1}^{n} (W-v(\theta_i)) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

elde ederiz.

Bir süre için R(Z,W) yi W ye göre polinom olarak dikkate alalım. O zaman (3.1.2) R(Z,W) nin E[W] içindeki çarpanlara ayrılışını tam olarak verir. Her 1≤i≤n için $v(\theta_i)$, F[W] içinde R(Z,W) nin uygun bir monik indirgenemez çarpanının köküdür. R(Z,W) nin monik indirgenemez çarpanları, uygun 1≤i≤n için F üzerinden $v(\theta_i)$ nin minimal polinomu olmalıdır. $k(W)\in F[W]$, $v(\theta_i)$ nin F üzerinden minimal polinomu olsun. O zaman her $\sigma\in G$ için $k(v(\sigma\theta_1))=k(\sigma v(\theta_1))=\sigma k(v(\theta_1))=0$. Buradan, G grubu $\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n\}$ üzerine geçişli etkidiğinden $1\le i\le n$ için $k(v(\theta_i))=0$ dır. Bu nedenle $v(\theta_1),\ldots,v(\theta_n)$, F üzerinde aynı minimal polinoma sahiptir. $h(Z,W)$, $C[Z,W]$ içinde $R(Z,W)$ nin herhangi bir indirgenemez çarpanı olsun. Gauss lemasından $h(Z,W)$, $C(Z)[W]$ içinde de indirgenemezdir. $h(Z,W)$, W ye göre monik polinom kabul edilebilir. Bu nedenlerden dolayı $h(Z,W)$, $k(W)$ polinomuna eşit olmalıdır ve dolayısıyla $v(\theta_i)$ nin minimal polinomudur. Başka bir deyişle $R(Z,W)$, $C[Z,W]$ içinde C nin sıfırdan farklı bir elemanının çarpımı farkıyla yalnız bir indirgenemez elemana sahiptir. Böylece, n nin uygun bir q böleni için

$$R(Z,W)=(-1)^n u_n^m\,[h(Z,W)]^q \tag{3.1.3}$$

olur. $R(Z,W)$ ifadesinde satırların yerleri değiştirilirse,

$$R(Z,W)=(-1)^{mn}\mathrm{Res}_t\,(v(t)-W,\ u(t)-Z)$$

olur ve q, m ninde bir bölenidir. (3.1.2) eşitliğinden $n=\mathrm{der}_W R(Z,W)$ dur. q nun $C(u(t),v(t))$ üzerinden $C(t)$ cisim genişlemesinin derecesi olduğu şöyle görülebilir.

$$[C(t):C(u(t),v(t))][C(u(t),v(t)):C(u(t))] = [C(t):C(u(t))] = n$$

dir. İki polinomun ortak çarpanı varsa resultantlarının sıfır olması, resultantın temel özelliklerinden birisidir. Buradan,

$$R(u(t),v(t))=\mathrm{Res}_s\,(u(s)-u(t),v(s)-v(t))=0$$

olur. Çünkü s-t, $u(s)-u(t)$ ve $v(s)-v(t$ nin ortak çarpanıdır. (3.1.3) eşitliğinden $h(u(t),v(t))=0$ dır. Ayrıca $u(t)$, C üzerinden aşkın olduğundan $h(u(t),W)$,$C(u(t))[W]$ içinde indirgenemez polinomdur. Bu nedenle $h(u(t),W)$, $C(u(t))$ üzerinden $v(t)$ için minimal polinomdur. $\mathrm{der}_W\,h(Z,W)=[C(u(t),v(t)):C(u(t))]$ ve (3.1.3) eşitliğinden,

$$q=\frac{\mathrm{der}_W R(Z,W)}{\mathrm{der}_W h(Z,W)}=[C(t):C(u(t),v(t))]$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.2. u(t) ve v(t) nin dereceleri aralarında asal ise R(Z,W), C[Z,W] içinde indirgenemezdir.

İspat. der u(t)=n, der v(t)=m ve (m,n)=1 olsun. Önceki teoremden $q|m$ ve $q|n$ dir. Bu takdirde q=1, ve R(Z,W)=h(Z,W) olur. Dolayısıyla R(Z,W) indirgenemezdir.

Sonuç 3.1.3. R(Z,W) nin lineer terimlerinin (dereceleri bir olan terimlerin) toplamı sıfırdan farklı ise R(Z,W) C[Z,W] içinde indirgenemezdir

İspat. (3.1.1) determinantında Z, W yerine sıfır yazılırsa matrisin son kolonunun yalnızca sıfırı olduğu görülür. Bu nedenle R(0,0)=0 dır. R(Z,W) nin sabit terimi sıfır olduğundan Teorem 3.1.1 h(Z,W) nin de sabit terimi sıfırdır. Böylece $[h(Z,W)]^q$ nun en küçük dereceli teriminin derecesi q dan büyük veya q ya eşit olmalıdır. Hipotezden R(Z,W) nin en küçük dereceli teriminin derecesi bir dir ve R(Z,W) indirgenemezdir.

Teorem 3.1.4. u(t), v(t), C üzerinden sabit terimleri sıfır ve der u(t)=n, der v(t)=m olan iki polinom olsun. n≥1 veya m≥1 ise R(Z,W) aşağıdaki gibidir.

$$R(Z,W)= (-1)^{n+1}\, Res_t\left(\frac{u(t)}{t}, \frac{v(t)}{t}\right)(v_1Z - u_1W)+(\, Z\, ,\, W \text{ ye göre yüksek dereceli terimler}).$$

İspat. n=0 veya m=0 ise teoremin doğruluğu kolayca görülür. Bu nedenle n≥1 ve m≥1 kabul edelim. Sonuç 3.1.3 ün ispatından R(Z,W) nin sabit teriminin sıfır olduğu gözlenebilir. Z nin katsayısı,

$$\left.\frac{\partial R(Z,W)}{\partial Z}\right|_{Z=0,W=0}$$

ile hesaplanır.

R(Z,W) nin kısmi türevi, R(Z,W) ifadesinde sırasıyla her satırın türevinin alınmasıyla elde edilen (m+n) tane determinantın toplamıdır. Z=W=0 yazılırsa (3.1.1) determinantının m-inci satırının türevlenmesiyle elde edilen determinant hariç diğerleri sıfır olur. Bu determinantın sıfırdan farklı tek girdisi -1 , son kolondadır ve determinant bu kolona göre açılır. m-inci satır ve (m+n)-inci kolon silinerek elde edilen minörün de son kolonunda sıfırdan farklı tek bir girdisi vardır. Bu girdi, v_1 dir ve minörün sağında en allta köşededir.

$$\begin{vmatrix}
u_n & u_{n-1} & \cdots & u_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & u_n & u_{n-1} & \cdots & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1 \\
v_m & v_{m-1} & \cdots & v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & v_m & v_{m-1} & \cdots & v_1 & 0 & \cdots & 0 \\
& & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
0 & 0 & 0 & v_m & v_{m-1} & \cdots & v_1 & 0
\end{vmatrix}$$

determimantının değeri

$$(-1)^{n+1} v_1 \mathrm{Res}_t \left(\frac{u(t)}{t}, \frac{v(t)}{t} \right)$$

dir. Bu ifade Z nin katsayısını verir. Benzer işlemler W için yapılırsa W nin katsayısı,

$$\begin{vmatrix}
u_n & u_{n-1} & \cdots & u_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & u_n & u_{n-1} & \cdots & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & u_n & u_{n-1} & \cdots & u_1 & 0 \\
v_m & v_{m-1} & \cdots & v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & v_m & v_{m-1} & \cdots & v_1 & 0 & \cdots & 0 \\
& & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1
\end{vmatrix}$$

determinantıdır ve bu determinantın değeri

$$(-1)^{n+1} u_1 \mathrm{Res}_t \left(\frac{u(t)}{t}, \frac{v(t)}{t} \right)$$

olarak elde edilir.

Daha önce Teorem 2.6.9 de a_i nin ağırlığı n-i, b_j nin ağırlığı m-j olmak üzere R(Z,W) nin mn ağırlıklı izobarik olduğunu gördük. R(Z,W) yi Z ve W ye göre polinomlar olarak dikkate alalım. der u(t)=n ve der v(t)=m olmak üzere Z nin ağırlığını n, W nin ağırlığını m tanımlıyalım. $Z^i W^j$, R(Z,W) içinde sıfırdan farklı bir katsayıya sahip ise $ni+mj\leq mn$ dir. R(Z,W) nin $ni+mj=mn$ ağırlıklı $r_{ij}Z^i W^j$ terimlerinin toplamına R(Z,W)'nin baş kısmı denir ve $R^+(Z,W)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.5. $R^+(Z,W)$ yukarıda olduğu gibi tanımlansın, $n\geq 1$ veya $m\geq 1$ olsun. d, m ve n'nin ortak bölenlerinin en büyüğü olmak üzere,

$$R^+(Z,W)=\mathrm{Res}_t\,(u_n t^n-Z, v_m t^m-W)=(-1)^n\,(u_n^{m/d}W^{n/d}-v_m^{n/d}Z^{m/d})^d$$

dir.

İspat. n=0 veya m=0 ise teoremin doğruluğu kolayca görülür. Bu nedenle $n\geq 1$ ve $m\geq 1$ kabul edelim. $R^+(Z,W)$ nin her teriminin katsayısının ağırlığı sıfırdır. Böyle bir katsayı yalnız u_n ve v_m içerir. Bu (3.1.1) ifadesinde $u_1=u_2=\ldots=u_{n-1}=0$ ve $v_1=v_2=\ldots=v_{m-1}=0$ yazarak $R^+(Z,W)$ hesaplanabilir anlamına gelir. Yani,

$$R^+(Z,W)=\mathrm{Res}_t\,(u_n t^n-Z, v_m t^m-W)$$

dir. Abhyankar teoreminin ispatındaki yöntemi izleyelim. E, $u_n t^n-Z$ polinomunun F=C(Z) üzerinden parçalanış cismi olsun. Bu takdirde ω, birimin n-inci ilkel kökü ve θ∈E olmak üzere,

$$u_n t^n-Z=u_n\,(t-\omega\theta)(t-\omega^2\theta)\ldots(t-\omega^{n-1}\theta)(t-\theta)$$

dır. $\zeta=\omega^m$ olsun. O zaman, ζ birimin (n/d)-inci ilkel kökü olur.

$$\begin{aligned}R^+(Z,W) &=(-1)^n u_n^m \prod_{i=1}^{n}[W-v_m(\omega^i\theta)^m]\\ &=(-1)^n u_n^m \prod_{i=1}^{n}[W-v_m\zeta^i\theta^m]\\ &=(-1)^n u_n^m\,[W^{n/d}-v_m^{n/d}\theta^{mn/d}]^d\\ &=(-1)^n\,(u_n^{m/d}W^{n/d}-v_m^{n/d}Z^{m/d})^d\end{aligned}$$

dir.

3.2. İki Değişkenli Polinomlar için Ters Bulma Formülü

Bu bölümde, $C[x,y]$ halkasının verilen C-izomorfizmlerinin tersleri için resultant kavramına bağlı olarak bir formül elde edilmeye çalışılacaktır.

Teorem 3.2.1 β, α, γ, $\delta \in C$ olmak üzere

$$\phi(z_1)=f(x_1,x_2)= \alpha x_1+\beta x_2 \text{ +yüksek dereceli terimler}$$

$$\phi(z_2)=g(x_1,x_2)= \gamma x_1+\delta x_2 \text{ +yüksek dereceli terimler,}$$

polinomları ile verilen $\phi:C[z_1,z_2]\to C[x_1,x_2]$ C-izomorfizmini düşünelim. $J=\delta\alpha-\beta\gamma$, $c=Res_S(\frac{f(0,s)}{s},\frac{g(0,s)}{s})$, $d=Res_S(\frac{f(s,0)}{s},\frac{g(s,0)}{s})$ ve $n=\text{der } f(0,s)$, $k=\text{der } f(s,0)$ olmak üzere ϕ nin tersi aşağıdaki formüller ile verilir,

$$\phi^{-1}(x_1) = \frac{(-1)^{n+1}}{Jc} Res_s(f(0,s)-z_1,g(0,s)-z_2)$$

$$\phi^{-1}(x_2) = \frac{(-1)^{k}}{Jd} Res_s(f(s,0)-z_1,g(s,0)-z_2).$$

İspat. $\pi_1 :C[x_1,x_2]\to C[t]$, $\pi_1(x_1)=0$ ve $\pi_1(x_2)=t$ ile tanımlanmıştı. $\pi_1\phi$'nin çekirdeği tek üreteçli idealdir ve $C[z_1,z_2]$ nin Çek $\pi_1\phi$ içindeki her indirgenemez elemanı Çek $\pi_1\phi$ için üreteç olarak alınabilir. $\phi^{-1}(x_1)$ nin böyle bir eleman olduğu açıktır.

$$R(z_1,z_2)=Res_s(f(0,s)-z_1,g(0,s)-z_2)$$

olsun. İki polinomun lineer bir çarpanı varsa resultantları sıfırdır. Bu nedenle,

$$\pi_1 \phi(R(z_1,z_2))=Res_s(f(0,s)- f(0,t),g(0,s)- g(0,t)) =0$$

dır. Çünkü s-t polinomu f(0,s)-f(0,t) ile g(0,s)-g(0,t) nin ortak çarpanlarıdır. Böylece,

$$R(z_1,z_2)\in \text{Çek } \pi_1\phi$$

dir. Şimdi $R(z_1,z_2)$ nin $C[z_1,z_2]$ içinde indirgenemez olduğunu göstereceğiz.

$u(t)=f(0,t)$ ve $v(t)=g(0,t)$ olsun. O zaman $C[t]$, $C[u(t)]$ üzerinde rankı der $u(t)=n$ olan bir serbest modüldür, ve böylece $[C(t):C(u(t))]=n$ dir. $\pi_1\phi$ örten olduğundan $C[u(t),v(t)]=C[t]$ dir. Böylece $C(u(t),v(t))=C(t)$ ve $[C(u(t))(v(t)):C(u(t))]=n$ dir. $R(z_1,z_2)$, z_2 ye göre katsayıları $C[z_1]$ içinde olan polinom olarak dikkate alınırsa, $R(z_1,z_2)$ nin derecesi n ve başkatsayısı $(-1)^n u_n^m$ dir. Burada u_n, $u(t)$ nin başkatsayısı ve $m=$der $g(0,t)$ dir. Yukarıdaki paragrafta $R(u(t),v(t))=0$ olduğunu gördük. Böylece $R(u(t),z_2)$, sıfırdan farklı bir sabit çarpan farkıyla $C(u(t))$ üzerinden $v(t)$ nin minimal polinom olmalıdır. Sonuç olarak, $R(u(t),z_2)$, $C(u(t))[z_2]$ içinde indirgenemezdir. $u(t)$ C üzerinden aşkın olduğundan $R(z_1,z_2)$, $C(z_1)[z_2]$ içinde indirgenemezdir. $R(z_1,z_2)$ katsayıları $C[z_1]$ içinde z_1 e göre polinom olarak dikkate alınırsa, başkatsayısı $(-1)^n u_n^m$ dir. Bu nedenle $R(z_1,z_2)$, $C[z_1][z_2]=C[z_1,z_2]$ içinde indirgenemezdir.

Sonuç olarak, $R(z_1,z_2)$ ve $\phi^{-1}(x_1)$, Çek $\pi_1\phi$ asal ideali için üreteçtirler. Böylece uygun $\lambda_1\in C-\{0\}$ için $\phi^{-1}(x_1)=\lambda_1 R(z_1,z_2)$ veya

$$x_1=\lambda_1\phi(R(z_1,z_2)) \qquad (3.2.1)$$

dir. Teorem 3.1.4 ve bu eşitliğe ϕ uygulanırsa,

$R(z_1,z_2)=(-1)^{n+1}c[\delta z_1-\beta z_2]+z_1,z_2$ ye göre yüksek dereceli terimleri

$$\phi(R(z_1,z_2))=(-1)^{n+1}c\,Jx_1+x_1,\ x_2 \text{ ye göre } \ldots \qquad (3.2.2)$$

elde edilir. (3.2.1) ve (3.2.2) denklemi karşılaştırılırsa $x_1=\lambda_1(-1)^{n+1}c\,Jx_1$ sonucuna varılır ve buradan,

$$\phi^{-1}(x_1) = \frac{(-1)^{n+1}}{Jc}\operatorname{Res}_s(f(0,s)-z_1, g(0,s)-z_2)$$

formülü elde edilir. Diğer formül benzer şekilde elde edilir.

3.3. Çok Değişkenli Polinomlar için Ters Bulma Formülü

Bu bölümde $C[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ nin bir otomorfizmi için ters otomorfizmi veren bir formül elde edilmeye çalışılacaktır. Öncelikle minimal polinom kavramı verilecek daha sonra bu kavram kullanılarak verilen bir otomorfizmin sınır polinomları ile tektürlü belirli olduğu ispatlanacaktır. Sonuç olarak, iki değişkenli polinomlar halkası ve çok değişkenli polinomlar halkası üzerinde tanımlanan otomorfizmler için ters bulma formülü yer alacaktır.

Lema 3.3.1. $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$ n-1 i cebirsel bağımsız polinomlar ise $h(f_1, f_2, \ldots, f_n)=0$ olacak biçimde sabit çarpan farkıyla tek türlü belirli indirgenemez bir $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ vardır.

İspat. $f_1, \ldots, f_n$ nin cebirsel bağımlı olduğu açıktır. Bu nedenle, h polinomunun varlığı söylenebilir. Genelliği bozmadan $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ cebirsel bağımsız alınabilir. $k(f_1, f_2, \ldots, f_n)=0$ olacak biçimde başka bir indirgenemez $k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ polinomu varsa $Res_{x_n}(h,k)=R(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ için $R(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})=0$ dır. $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ in cebirsel bağımsız olması $R(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})=0$ olmasını gerektirir. Bu ise h, k nın $C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})[x_n]$ içinde sabitten farklı ortak çarpanının olmasını gerektirir. Böylece k, $C[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}][x_n]$ içinde sabit değildir ve k indirgenemez polinom olduğundan uygun bir $c \in C^*$ için $k=ch$ dir.

h polinomuna $f_1, f_2, \ldots, f_n$ polinomlarının, $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ içinde minimal polinomu denir.

Lema 3.1.2. $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]=C[f_1, f_2, \ldots, f_n]$ olacak biçimde $f=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin bir otomorfizmi ve $f^{-1}=g=(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ olsun. Bu takdirde, her $i=1, \ldots, n$ için

1) $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ (3.3.1)

n-1 i cebirsel bağımsız polinomlardır.

2) $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, (3.3.1) de verilen polinomlar için minimal polinomdur.

İspat. 1) $C[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n] =$
$C[f_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)]$ olduğundan ve $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ cebirsel bağımsız elemanlar olduğundan (3.3.1), n-1 cebirsel bağımsız eleman içerir.

2) g otomorfizm olduğundan

$$g_i(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n))=x_i$$

dir. g_i indirgenemez ve

$$g_i(f_1(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n))=0$$

dir. (3.3.1) de verilen polinomlar Lema 3.3.1 in koşullarını sağlar. Bu nedenle, bu polinomlar için $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ minimal polinom olur.

Teorem 3.3.3. $\overline{f}=(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\ldots,\overline{f}_n):C[x_1,x_2,\ldots,x_n]\to C[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ ve $f=(f_1,\ldots,f_n):C[x_1,x_2,\ldots,x_n]\to C[x_1,x_2,\ldots,x_n]$,

$$f_1(0,x_2,\ldots,x_n)=\overline{f}_1(0,x_2,\ldots,x_n)$$

$$f_1(x_1,0,\ldots,x_n)=\overline{f}_1(x_1,0,\ldots,x_n)$$

$$\vdots$$

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},0)=\overline{f}_1(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},0)$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},0)=\overline{f}_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},0)$$

olacak biçimde iki C-otomorfizm olsun. Bu takdirde, $f=\overline{f}$ dir.

İspat. $\overline{f}^{-1}=\overline{g}=(\overline{g}_1,\overline{g}_2,\ldots,\overline{g}_n)$, $f^{-1}=g=(g_1,\ldots,g_n)$ olsun. Lema 3.3.2 ye göre g_i ve $\overline{g}_i$ her ikisi de

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

$$f_2(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

için minimal polinomlardır. Böylece Lema 3.3.1 e göre her $i=1,2,\ldots,n$ için $g_i=a_i\overline{g}_i$ olacak biçimde $a_i\in C^*$ vardır. Dolayısıyla her $j=1,2,\ldots,n$ için $x_j=f_j(a_1\overline{g}_1,a_2\overline{g}_2,\ldots,a_n\overline{g}_n)$ dır. Bu ifadede sırasıyla $x_1,x_2,\ldots,x_n$ yerine $\overline{f}_1,\overline{f}_2,\ldots,\overline{f}_n$ yazılırsa, her j için

$$\overline{f}_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f_j(a_1x_1,a_2x_2,\ldots,a_nx_n)$$

elde edilir. f tersinir olduğundan, $1 \le i \le n$, f_j de x_i nin katsayısı sıfırdan farklı olacak biçimde bir j vardır. $k \neq i$ olacak biçimde k seçelim.

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \overline{f}_j(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

$$= f_j(a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_{k-1}x_{k-1}, 0, a_{k+1}x_{k+1}, \ldots, a_nx_n)$$

işitliklerinde x_i nin katsayıları karşılaştırılırsa $a_i = 1$ elde edilir. Böylece $\overline{g} = g$ ve $f = \overline{f}$ dir.

Teorem 3.3.4. $f = (f_1, \ldots, f_n) : C[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ bir C-otomorfizmi ve $f^{-1} = g = (g_1, \ldots, g_n)$ olsun. Kabul edelim ki, $h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{array}$$

polinomlarının minimal polinomu olsun. O zaman 1, i-inci değişkenin yerinde olmak üzere,

$$g_i = \frac{h_i}{h_i(f_1(0, 0, \ldots 1, \ldots, 0), \ldots, f_n(0, 0, \ldots, 1, \ldots 0))}$$

dir.

İspat. Lema 3.3.2 ve Lema 3.3.1 den uygun $c \in C^*$ için $cg_i = h_i$ yazılabilir.

$$cg_i(f_1, \ldots, f_n) = h_i(f_1, \ldots, f_n)$$

ve $x_i = 1$ alınırsa,

$$c = h_i((f_1(0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, f_n(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0))$$

olur. Bu değer yukarıda yerine yazılırsa g_i için istenilen ifade elde edilir.

Teorem 3.3.5. $f = (f_1, f_2) : C[x, y] \to C[x, y]$, $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$ olacak biçimde C-otomorfizm olsun. Bu durumda $f^{-1} = g = (g_1, g_2)$,

$$g_1(x,y)=\frac{Res_t(f_1(0,t)-x,f_2(0,t)-y)}{Res_t(f_1(0,t)-f_1(1,0),f_2(0,t)-f_2(1,0))}$$

$$g_2(x,y)=\frac{Res_t(f_1(t,o)-x,f_2(t,0)-y)}{Res_t(f_1(t,0)-f_1(0,1),f_2(t,0)-f_2(0,1))}$$

dir.

İspat. $C[x,y]=C[f_1(x,y), f_2(x,y)]$ olduğundan,

$$C[t]=C[f_1(0,t), f_2(0,t)]=C[f_1(t,0), f_2(t,0)]$$

olur. Abhyankar Teoremi'nden,

$$Res_t(f_1(0,t)-x,f_2(0,t)-y)$$

$$Res_t(f_1(t,0)-x,f_2(t,0)-y)$$

indirgenemezdir. Bu resultantlar sırasıyla,

$$(f_1(0,y), f_2(0,y)), (f_1(x,0), f_2(x,0)),$$

için minimal polinomlardır. Teorem 3.3.4. kullanılırsa $g_1(x,y)$ ve $g_2(x,y)$ için istenen formüller elde edilir.

Sonuç 3.3.6. $f=(f_1, f_2) : C[x,y] \to C[x,y]$, $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$ olacak biçimde C-otomorfizm olsun. n=der f_1 (0,t), k=der f_1 (t,0) ve $J=\partial(f_1,f_2)/\partial(x,y)$ olmak üzere,

$$Res_t(f_1(0,t)-f_1(1,0),f_2(0,t)-f_2(1,0))$$

$$=(-1)^{n+1}J\ Res_t(\frac{f_1(0,t)}{t},\frac{f_2(0,t)}{t})$$

$$Res_t(f_1(t,0)-f_1(0,1),f_2(t,0)-f_2(0,1))$$

$$=(-1)^{k}J\ Res_t(\frac{f_1(t,0)}{t},\frac{f_2(t,0)}{t})$$

dir.

İspat. Teorem 3.3.5 ve Teorem 3.1.4 karşılaştırılarak görülebilir.

4. TARTIŞMA

k bir cisim olmak üzere katsayıları k içinde olan çok değişkenli polinomlardan oluşan $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ halkasının yapısı ve bu halka ile ilgili problemler pek çok matematikçi için ilgi odağı olmuştur. $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin yapısı ilk bakışta oldukça basit görünmektedir. Ancak, bu halka ile ilgili pek çok zor ve henüz çözülmemiş problemler bulunduğu da bir gerçektir.

Çok değişkenli polinomlar halkası $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ile ilgili araştırma konularından biri de $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin k-otomorfizmlerinin oluşturduğu $Oto_k(k[x_1, x_2, \ldots, x_n])$ grubunun yapısının belirlenmesidir. Bu bağlamda $n \leq 2$ durumunda söz konusu grubun yapısı tamamen belirlenmiş olmakla beraber $n>2$ için çalışmalar devam etmektedir(Nagata 1972).

$k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ile ilgili bir diğer problemde Jakobyen problemi olarak bilinen problemdir. "k, karakteristiği sıfır olan bir cisim; $f_1, \ldots, f_n \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ve $(\partial f_i/\partial x_j)$ Jakobyen matrisinin determinantının sıfırdan farklı bir sabit olması $\phi: k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\phi(x_i)=f_i$, $1 \leq i \leq n$, homomorfizminin bir otomorfizm olmasını gerektirir mi ?" sorusu ile ifade edilebilen Jakobyen problemi henüz $n=2$ için dahi çözülememiştir.

Tez çalışmamızın konusunu oluşturan polinom halkalarının otomorfizmleri için ters bulma formüllerinin, otomorfizmler grubunun yapısına da ışık tutacağı inancındayız. Ayrıca, ters bulma formülleri elde edilirken kullanılan yöntem ve tekniklerin Jakobyen Problemi ve benzer problemlerin çözümü için yeni yaklaşımlar getireceği kanısındayız. Bu doğrultuda, Jakobyen probleminin hipotezini sağlayan $f_1, \ldots, f_n$ polinomlarının sınır polinomlarının ve onlara karşılık gelen minimal polinomların araştırılması yeni sonuçlar doğurabilir.

5. SONUÇ

Polinom halkalarının otomorfizmleri için ters bulma formüllerini konu alan bu çalışmada, J.H. McKay, S.Sui-S.Wang ve J.Yu' nun makaleleri incelenmiş, iki ve daha çok değişkenli polinomlar halkasının her hangi bir otomorfizminin tersi için formüller yeniden üretilmiştir.

İki değişkenli polinomlar halkasının otomorfizmleri için ters bulma formülü resultant kavramını ve sınır polinomları kullanılarak elde edildikten sonra değişkenin sayısının ikiden çok olması durumunda yine sınır polinomları kullanılarak, resultant kavramının yerine minimal polinom kavramı getirilerek elde edilmiştir.

6. ÖZET

Bu çalışmada esas amacımız, C kompleks sayılar cismi olmak üzere $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin bir otomorfizmi için bir ters bulma formülü elde etmektir. Yapılan çalışmalar göstermiştir ki $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin bir C izomorfizmi bazı özel polinomlar yardımıyla belirlenebilir. Şöyle ki ; $\pi_i : C[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to C[t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}]$,

$$\pi_i(x_j) = \begin{cases} t_j & , \ j < i \\ 0 & , \ i = j \\ t_{j-1} & , \ j > i \end{cases}$$

olacak biçimde tektürlü belirli bir C-homomorfizmidir. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomu için $\pi_1(f) = f(0, t_1, \ldots, t_{n-1})$, $\pi_2(f) = f(t_1, 0, t_2, \ldots, t_{n-1})$, $\ldots$, $\pi_n(f) = f(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 0)$ polinomlarına $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nin sınır (face) polinomları denir ve $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin her C- otomorfizmi bu polinomlarla tek türlü belirlenir.

$u(t) \neq 0$ veya $v(t) \neq 0$,der $u(t)=n$, der $v(t)=m$ olmak üzere $R(Z,W) = \mathrm{Res}(u(t)-Z, v(t)-W) \in C[Z,W]$ t ye göre iki polinomun resultantı olarak oluşturulur. Bu kavram kullanılarak $C[x_1, x_2]$ nin bir C-izomorfizmi için ters bulma formülü elde edilmiştir. Bu formülü aşağıdaki biçimde ifade edebiliriz.

$\beta, \alpha, \gamma, \delta \in C$ olmak üzere,

$$\phi(z_1) = f(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \text{yüksek dereceli terimler}$$

$$\phi(z_2) = g(x_1, x_2) = \gamma x_1 + \delta x_2 + \text{yüksek dereceli terimler},$$

polinomları ile verilen $\phi : C[z_1, z_2] \to C[x_1, x_2]$ bir C-izomorfizmi olsun. $J = \delta\alpha - \beta\gamma$ $c = \mathrm{Res}_s\left(\frac{f(0,s)}{s}, \frac{g(0,s)}{s}\right)$, $d = \mathrm{Res}_s\left(\frac{f(s,0)}{s}, \frac{g(s,0)}{s}\right)$ ve $n = \operatorname{der} f(0,s), k = \operatorname{der} f(s,0)$ olmak üzere ϕ nin tersi aşağıdaki formüller ile verilir,

$$\phi^{-1}(x_1) = \frac{(-1)^{n+1}}{Jc} \mathrm{Res}_s(f(0,s)-z_1, g(0,s)-z_2)$$

$$\phi^{-1}(x_2) = \frac{(-1)^k}{Jd} \mathrm{Res}_s(f(0,s)-z_1, g(0,s)-z_2).$$

$f_1, f_2, \ldots, f_n \in C[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$ n-1 i cebirsel bağımsız polinomlar ise $h(f_1, f_2, \ldots, f_n)=0$ olacak biçimde sabit çarpan farkıyla tek türlü belirli indirgenemez bir $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ vardır. Bu polinoma $f_1, f_2, \ldots, f_n$ polinomlarının $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ içindeki minimal polinomu denir.

$f=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin bir otomorfizmi ve $f^{-1}=g=(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ olsun. Bu takdirde, her $i=1, \ldots, n$ için

$$\begin{aligned} & f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ & f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ & \ldots \\ & f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{aligned} \qquad (7.1.1)$$

n-1 i cebirsel bağımsız polinomlardır. $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, (7.1.1)de verilen polinomlar için minimal polinomdur. Ayrıca böyla bir C-otomorfizmi $f_1(0, x_2, \ldots, x_n), f_1(x_1, 0, x_3, \ldots, x_n), \ldots, f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0), \ldots, f_n(0, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, 0)$ polinomları ile tektürlü belirlidir. $h_i(x_1, \ldots, x_n)$, (7.1.1) de verilen polinomların minimal polinomu olsun. Bu durumda 1, i- inci değişkenin yerinde olmak üzere,

$$g_i = \frac{h_i}{h_i(f_1(0, 0, \ldots 1, \ldots, 0), \ldots, f_n(0, 0, \ldots, 1, \ldots 0))}$$

dir.

Eğer $n \geq 2$ için f, $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nin bir C-otomorfizmi ise minimal polinom kavramı kullanılarak f nin tersi belirlenebilir.

7. SUMMARY

Our basic aim in this thesis is; to obtain an inversion formula for a given automorphism of the polinomial ring $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ in n variables over the field C of complex numbers.
It is shown that C- automorphism of the polinomial ring $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ are completely determined by some special polinomials. In fact, for each $i=1,2,\ldots,n$

$$\pi_i : C[x_1, x_2, \ldots, x_n] \rightarrow C[t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}],$$

is defined to be the C-homomorphism such that

$$\pi_i(x_j) = \begin{cases} t_j & , \quad j<i \\ 0 & , \quad i=j \\ t_{j-1} & , \quad j>i \end{cases}$$

For each $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ $\pi_1(f)=f(0,t_1,\ldots,t_{n-1})$, $\pi_2(f)=f(t_1,0,t_2,\ldots,t_{n-1}), \ldots, \pi_n(f)=f(t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},0)$ are called the face polinomials of $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, and a C-automorphism of $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ is completely determined by its face polinomials.

If $u(t)\neq 0$ or $v(t)\neq 0$,degr $u(t)=n$, deg $v(t)=m$, we set $R(Z,W)=\mathrm{Res}(u(t)-Z,v(t)-W) \in C[Z,W]$ to be the resultant of the two polynomials $u(t)$ and $v(t)$ in t. Using this concept, an inversion formula is obtained for a C-automorphism of $C[x_1, x_2]$ as follows.

Let $\phi : C[z_1,z_2] \rightarrow C[x_1,x_2]$ be a C-isomorphism such that

$\phi(z_1)=f(x_1,x_2)= \alpha x_1+\beta x_2$ +higher terms,

$\phi(z_2)=g(x_1,x_2)= \gamma x_1+\delta x_2+$ higher terms,

where $\beta, \alpha, \gamma, \delta \in C$. Then the inversion formula of ϕ is given by the following formulas.

$$\phi^{-1}(x_1) = \frac{(-1)^{n+1}}{Jc} \mathrm{Res}_s(f(0,s)-z_1, g(0,s)-z_2)$$
$$\phi^{-1}(x_2) = \frac{(-1)^{k}}{Jd} \mathrm{Res}\ (f(s,0)-z_1, g(s,0)-z_2\ ,$$

where $J=\delta\alpha-\beta\gamma$, $c=\mathrm{Res}_s(\frac{f(0,s)}{s},\frac{g(0,s)}{s})$, $d=\mathrm{Res}_s(\frac{f(s,0)}{s},\frac{g(s,0)}{s})$ and $n=\mathrm{der} f(0,s)$, $k=\mathrm{der}\ f(s,0)$.

Let $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$ contain n-1 algebraiclly independent polynomials. Then there exists a unique (up to a constant) irreducible polinomial $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ such that $h(f_1, f_2, \ldots, f_n)=0$. Such a polinomial h is called the minimal polinomial of $f_1, f_2, \ldots, f_n$ in $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Let $f=(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ be an automorphism and $f^{-1}=g=(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ Then for each $i=1, \ldots, n$

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$\cdots \qquad (7.1.1)$$
$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

contain algebraically independent elements and $g_i(x_2, \ldots, x_n)$ is a minimal polynomial for (7.1.1). Such a C-automorphism is completely determined by $f_1(0, x_2, \ldots, x_n), f_1(x_1, 0, \ldots, x_n), \ldots, f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0), \ldots, f_n(0, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, 0)$. Suppose that $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ is a minimal polynomial for (1). Then,

$$g_i = \frac{h_i}{h_i(f_1(0,0,\ldots 1,\ldots,0),\ldots,f_n(0,0,\ldots,1,\ldots 0))}$$

where each 1 is at the i-th component.

Thus we see that, if f is a C-automorphism of $C[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $n\geq 2$,the inverse of f can be obtained by using the concept of minimal polynomial.

8. KAYNAKLAR

HUNGERFORD, J. W. 1989. Algebra. Springer-Vargler, 310-317, New York.

Lı, W. 1989. On a face Polynomials. Journal of Pure and Applied Algebra, 69, 262-272, North-Holland.

MATSUMURA, H. 1970. Commutative Algebra. 17-38,70,84,New York.

McKAY, J.H and SUI,S-WANG,S.1986. An İnversion Formula For Two Polinomials in Two Variables. Journal of Pure And Applied Algebra, 247-257, North-Holland.

McKAY, J.H and SUI,S-WANG,S.1988. On The Inversion Formüla for Two in Two Variables. Journal of Pure And Applied Algebra, 52,103-119, Nort-Holland.

NAGATA, M.1972.On the Automorphism Grup of k[x,y], Lectures Math. Kyoto Univ., Konokuniya, Tokyo.

SERHAN, D.S.K.1989. Isomorphism of polinomial Rings in Two Variables, Yarmouk University (Yüksek Lisans Tezi),Ürdün.

WALKER, R.J. 1978. Algebraic Curves. Springer-Verlag, 20-30, New York.

YU, J. 1992. Face Polinomials and inversion formula. Journal of Pure And Applied Algebra, 78, 213-219, North-Holland

ÖZGEÇMİŞ

Nesrin TUTAŞ, 1973 yılında Bozkır-Konya da doğdu. İlk öğrenimini İzmir'de, orta ve lise öğrenimini Isparta'da tamamladı. 1994 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 1994 yılından beri aynı bölümde araştırma görevlisidir ve yüksek lisans öğrencisi olarak öğrenimine devam etmektedir.