İÇİNDEKİLER

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERMİTE APOSTOL-BERNOULLİ POLİNOMLARI

BURAK KURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2009

HERMİTE APOSTOL-BERNOULLİ POLİNOMLARI

BURAK KURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2009

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERMİTE APOSTOL-BERNOULLİ POLİNOMLARI

BURAK KURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ..../..../2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından .... (   ) not takdir edilerek oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK ....
(Danışman)
Prof. Dr. Nuri ÜNAL ....
Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN ....

ÖZET

HERMİTE APOSTOL-BERNOULLİ POLİNOMLARI

Burak KURT

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Aralık 2009, 37 Sayfa

Bu tezin amacı Bernoulli polinomlarının yeni bir genellemesini vermektir.

Tezin ilk bölümünde klasik Bernoulli polinomları, klasik Euler polinomları hakkında bilgi verilmiştir. Sonra Apostol-Bernoulli polinomları ve Apostol-Euler polinomlarının sağladığı bazı teoremler ispatlanmıştır.

Son bölümde Bernoulli polinomlarının ve Apostol-Bernoulli polinomlarının yeni genelleştirilmesi verilmiştir. Ayrıca bazı teoremler ispatlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER : Bernoulli polinomları, Euler polinomları, Hermite polinomları, Appell polinomları, Apostol-Bernoulli polinomları, Appell dizileri, Hermite Kame de Feriet polinomları

JÜRİ: Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Yard. Doç. Dr. Mümün CAN

ABSTRACT

HERMİTE APOSTOL-BERNOULLİ POLİNOMLARI

Burak KURT

M.Sc. Thesis in Mathematics

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

DECEMBER 2009, 37 Pages

The aim of this thesis is to new generalazation of Bernoulli polynomials.

In the first section of the thesis we introduce ordinary Bernoulli polynomials and ordinary Euler polynomials. After, some theorems which are satisfies these polynomials are proven.

In the final section, a new generalization of the Bernoulli polynomials and Apostol-Bernoulli polynomials are given. Also some theorems are proved.

KEY WORDS: Bernoulli polynomials, Euler polynomials, Hermite polynomials, Appell polynomials, Apostol-Bernoulli polynomials, Appell sequences, Hermite Kame de Feriet polynomials.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Asst. Prof. Dr. Mümün CAN

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, esas olarak önbilgiler ve bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. İlk önce klasik Bernoulli polinomları, klasik Euler polinomları, Hermite polinomları verilmiştir. Daha sonra Apostol-Bernoulli polinomları, Apostol-Euler polinomları ve Appell polinomları verilmiştir. Bunların sağladığı bazı bağıntılar ispatlanmıştır.

Bulgular bölümünde genelleştirilmiş Bernoulli polinomları, genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomları verilmiştir. Bazı önermeler ispatlanmıştır.

Bu tez çalışmasının, bu alandaki çalışmalara önemli katkılar sağlayacağı inancındayım.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Doç.Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e, yardımlarını gördüğüm, Yrd. Doç. Dr. Mümün Can ve Prof. Dr. Veli KURT'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Bernoulli sayıları ve polinomları Matematiğin bir çok alanında çok önemli uygulama alanlarına sahiptir. Bu alanlar trigonometrik fonksiyon serileri, sonlu farklar analizi, sayısal türev ve integral, diferansiyel denklemler, sayılar teorisinde, istatistik ve olasılık kuramı gibi alanlardır. Ayrıca son yıllarda Bernoulli polinomları yaklaşım teorisinde, elementer fonksiyonlarin Euler gama ve poligama fonksiyonları cinsinden asimtotik açılımlarında da kullanılmaktadır. Hermite polinomlarını da Kompleks analiz, Yaklaşım teorisi, Diferansiyel denklemler, Ortogonal polinomlar vs. gibi alanalarda kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasında amaç; farklı yollarla tanımlanan Bernoulli polinomları, Bernoulli sayıları yardımıyla yüksek mertebeli Apostol-Bernoulli polinomlarının ve Apostol-Bernoulli sayılarının bazı özelliklerini incelemektir, aralarındaki farklı rekürsiyon bağıntılarını vermektir. Ayrıca yüksek mertebeli Bernoulli polinomları ile Cauchy tipi integral arasındaki bağıntı verilmiştir.

16 yy. da Jahann Faulhaber sonlu doğal sayıların kuvvetlerinin toplama yöntemini bulmaya çalışmıştır. Bulduğu sonuçları 1631' de Academia Algebra adlı bir kitapta yayınlamıştır. Faulhaber toplamlarından Faulhaber-kritoptolojiside ortaya çıkmıştır (Knuth, 1993). Daha sonra Bernoulli kardeşlerden Jacob Bernoulli (1654-1705) doğal sayıların kuvvetlerinin toplamının seri ifadesini Bernoulli sayıları olarak adlandırılan sayılar cinsinden vermiştir. Çalışmaları ölümünden altı yıl sonra " Ars Conjectandi " yapıtında yayınlanmıştır. Bu tip çalışmalar günümüzde bir çok değişik yöntemle hala çalışılmaktadır. Örneğin p-adik Volkenborn integralinin simetri özelliği, Hipergeometrik seriler, kombinatorik analiz, üreteç fonksiyonları gibi alanlar kullanılmaktadır. Bu tez de geometrik seriler ve üreteç fonksiyonları kullanılarak sonlu doğal sayıların kuvvetlerinin toplamları incelenmiştir.

Bernoulli sayıları ve polinoları bir çok özel sayı ve polinomlarla ilişkisi vardır. Bu sayılar ve polinomlar özellikle Euler, Genocchi, Stirling, Tanjant, Bell sayıları ve polinomları aynı zamanda Hermite polinomları, Bernstein polinomlarıdır.

Riemann zeta fonksiyonu negatif tam sayılarda Bernoulli sayılarını ve Hurwitz zeta fonksiyonu da Bernoulli polinomlarını üretmektedir. Yüksek mertebeli Bernoulli polinomları da katlı zeta fonksiyonları tarafından üretilmektedir. Ayrıca birden büyük tek indisli Bernoulli sayıları Riemann zeta fonksiyonu aşikar sıfırlarıdır. Bundan dolayı, zeta fonksiyonlar ailesinde bütün Bernoulli tipi sayılar ve polinomlar önemli bir rol oynamaktadır.

Bu tezde ilk olarak Bernoulli polinomları ve Euler polinomlarının üreteç fonksiyonları ve bazı temel özellikleri verildi. Bu tezin temelini teşkil edecek olan Apostol-Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonları ve bu polinomların bazı özellikleri incelendi. Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonlarının temel özellikleri geometrik seriler cinsinden incelendi. Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomlarının sağladığı rekürsiyon bağıntıları ispatlandı. Bu polinomların Cauchy tipi integral bağıntısı verildi.

1.2. Temel Kavramlar ve Gösterimler

1.2.1. Bernoulli Polinomları ve Bazı Özellikleri

Bernoulli polinomlarını tetkik etmede altı farklı yaklaşım vardır. Raabe (1851)

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} B_m(x+\frac{k}{m}) = m^{-n}B_n(mx)$$

ifadesi ile ilk olarak Bernoulli polinomu terimini kullanmıştı. Bu tarihten daha önce Jacob Bernulli 1690 da

$$S_n(m) = \sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(m) - B_{n+1}(0))$$

toplamını ifade etmiştir. İkinci olarak L. Euler Bernoulli polinomlarını

$$F(x,t) = \begin{cases} e^{xt}\frac{t}{e^t-1}, & t \neq 0 \\ \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

doğuray fonksiyonu ile tanımladı. Burada t karmaşık sabittir. $F(x,t)$ fonksiyonu $|t| < 2\pi$ diskinde analitik fonksiyondur. Bernoulli polinomlarını üçüncü olarak P.

E. Appell, Appell dizileri ile tanımladı. Sonra 1890' da A. Hurwitz $B_n(x)$ Bernoulli fonksiyonu için

$$B_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{-n} e^{2\pi ikx}, o < x < 1$$

Fourier serisi ifadesini vermiştir. Bu yöntemle inceledi. Daha sonra Lucas umbral analizi kullanarak

$$B_n(x) = (B + x)^n$$

özelliğini verdi. Son olarak da Lehmer Raabe bağıntısını ve Appell dizilerini birlikte ele alarak inceleme yapmıştır. 2006 da Costabile $B_n(x)$ Bernoulli polinomlarını matris yöntemi ile inceledi. $B_n(x)$ Bernoulli polinomunu, $B_0(x) = 1$ olmak üzere;

$$B_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} \end{vmatrix}$$

matrisiyle tanımladı (Costabile; Dell'Accio; Gualtieri 2006). Bu yayında yazarlar Bernoulli katsayılarını matris olarak vermiştir.

Tanım 1.1 *Herhangi bir x karmaşık sayı olmak üzere $B_n(x)$ Bernoulli Polinomu*

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi \tag{1.1}$$

ifadesi ile verilir. Bu eşitlikte $x = 0$ için $B_n(0)$ ifadesi n. Bernoulli sayısı olarak adlandırılır ve B_n ile gösterilir. Böylece (1.1) eşitliğinde $x = 0$ alınırsa ,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

ifadesi elde edilir (Apostol 1976).

Önerme 1.2 *Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları aşağıdaki özellikleri sağlarlar:*

i.
$$B_n(x+1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\left(x\right),$$

ii.
$$B_n\left(x+y\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)y^{n-k},$$

iii.
$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1},\ n\geqslant 1,$$

iv.
$$B_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kx^{n-k},\ n\geqslant 0,$$

v.
$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k,\ n\geqslant 2.$$

Bu önermenin ispatı (1.1) eşitliği yardımıyla yapılabilir.

Bernoulli sayılarının, Bernoulli polinomlarında n' ye değerler verilerek sırasıyla;

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\cdots$$

ve

$$\begin{aligned}B_0\left(x\right)&=1,\ B_1\left(x\right)=x-\frac{1}{2},\ B_2\left(x\right)=x^2-x+\frac{1}{6},\ B_3\left(x\right)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\\ B_4\left(x\right)&=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},\ B_5\left(x\right)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x,\cdots\ .\end{aligned}$$

Bernoulli sayıları ve Bernoulli polinomları elde edilir.

Önerme 1.3 *(Raabe)* $m\geq 0,n\geq 0$ *olmak üzere*

$$\sum_{r=0}^{m-1}B_n(\frac{x+r}{m})=m^{1-n}B_n(x)$$

ifadesini gerçekler (Sun Zhi-Wei 2002).

1.2.2. Euler Polinomları ve Bazı Özellikleri

Tanım 1.4 *Herhangi bir x karmaşık sayı olmak üzere $E_n(x)$ Euler polinomu*

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi \tag{1.2}$$

eşitliği ile tanımlanır (Abramowitz ve A. Stegun 1972). E_n Euler sayısı

$$\frac{2e^{t}}{e^{2t}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \frac{\pi}{2} \tag{1.3}$$

doğuray fonksiyonu ile tanımlanır (Abramowitz ve I. A. Stegun;Luo 1972; Qiu-Ming 2005).

(1.2) ve (1.3) den bazı Euler sayıları ve Euler polinomları sırasıyla

$$E_0 = 1,\ E_1 = 0,\ E_2 = -1,\ E_3 = 0,\ E_4 = 5,\ E_5 = -61, \cdots$$

ve

$$E_0(x) = 1,\ E_1(x) = x - \frac{1}{2},\ E_2(x) = x^2 - x,\ E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, \cdots$$

elde edilir.

(1.2) ve (1.3) den

$$E_n(1) = 2^n E_n(\frac{1}{2})$$

eşitliği yazılabilir.

Önerme 1.5 *Euler polinomları aşağıdaki eşitlikleri gerçekler.*

i.

$$E_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} E_k(x),$$

ii. $n > 0$ için

$$E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n,$$

iii.

$$\begin{aligned} E_n(x+y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x) y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(y) x^{n-k}, \end{aligned}$$

iv. $n \geq 1$ için

$$\frac{d}{dx}E_k(x) = nE_{n-1}(x).$$

Önermenin ispatı (1.2) den elde edilir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMA

Bernoulli Polinomlarının Trigonometrik Gösterimi $B_n(x)$ Bernoulli polinomu olmak üzere $\overline{B_n(x)} = B_n(x-[x])$ ifadesi ile Bernoulli fonksiyonu tanımlanır. Bernoulli fonkiyonu 1 ile periyodik bir fonksiyondur. Bernoulli fonksiyonunun Fourier serisine açılım ifadesi

$$B_{2n-1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n-1)!}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k^{2n-1}}, \tag{2.1}$$

ve

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^{2n}} \tag{2.2}$$

dir (Abramowitz-Stegun 1972). Diğer taraftan Riemann zeta fonksiyonu $\zeta(s)$, Hurwitz zeta fonksiyonu $\zeta(s,a)$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ için sırasıyla,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{2.3}$$

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \ (a \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{2.4}$$

ifadeleriyle tanımlanır (Srivastava-Choi 2001).

Teorem 2.1 *$B_n(x)$ Bernoulli polinomlarının Hurwitz zeta fonksiyonu cinsinden trigonometrik ifadesi*

$$B_{2n-1}(\frac{p}{q}) = (-1)^n \frac{2(2n-1)!}{(2q\pi)^{2n-1}} \sum_{j=1}^{q} \zeta(2n-1, \frac{j}{q}) \sin(\frac{2jp\pi}{q}),$$

burada $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$, $p \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq q$ ve

$$B_{2n}(\frac{p}{q}) = (-1)^{n-1} \frac{2(2n)!}{(2q\pi)^{2n}} \sum_{j=1}^{q} \zeta(2n, \frac{j}{q}) \cos(\frac{2jp\pi}{q}),$$

burada $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq q$ dir (Cvijovic, Djurdje, 1995; Klinowski, Jacek; Srivastava, H. M. 2000).

Hermite Polinomları

Hermite polinomları $H_n(x)$,

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0 \tag{2.5}$$

differensiyel denklemini sağlayan polinoma denir (Saran N 2006). Burada Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}. \tag{2.6}$$

Hermite polinomları ortogonal polinomlardır. Bu bölümde Hermite polinomlarının temel özelliklerini inceliyeceğiz.

(2.5) in çözümü

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{k+r}$$

şeklinde seri olsun. Bu çözümün türevlerini alınıp (2.5) de yerine yazılır ve bazı işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} y_1 &= c_0\left[1 - \frac{2\lambda}{2!}x^2 + \frac{2^2(\lambda-2)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-2)^m\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2m+2)}{(2m)!}x^{2m} + \cdots\right] \\ y_2 &= c_0\left[x - \frac{2(\lambda-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 + \cdots\right. \\ &\quad \left. + \frac{(-2)^m\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-2m+1)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Hermite differensiyel denkleminin çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

olarak elde edilir. λ nın çift ve tek olmasına göre irdelenerek n. dereceden Hermite polinomu

$$y_n = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} + \cdots \tag{2.7}$$

ya da

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{n!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m} \tag{2.8}$$

ifadesiyle verilir. Burada

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2}, n\ ciftse \\ \frac{n-1}{2}, n\ tekse \end{cases}$$

dir.

Teorem 2.2 *$H_n(x)$ Hermite polinomu*

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} \tag{2.9}$$

doğuray fonksiyonu ile de elde edilir (Saran N 2006).

İspat.

$$e^{2xt-t^2} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2x)^r t^r}{r!}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t^{2s}}{s!}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (2x)^r t^{r+2s}}{r!s!} \tag{2.10}$$

$r + 2s = n$ den $r = n - 2s$ dir. n çiftse; s, 0' dan $\frac{n}{2}$ ye kadar, n tekse; s, 0' dan $\frac{n-1}{2}$ kadar değer alır.

Bu durumda (2.9) eşitliğinde Hermite polinomunun tanımı alınarak

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2x)^{n-2s} t^n}{(n-2s)!s!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^s n!(2x)^{n-2s}}{(n-2s)!s!}\right)\frac{t^n}{n!}$$

olarak elde edilir. (2.8) gözönüne alınırsa (2.9) ifadesi bulunur. ∎

(2.6) dan $H_n(x)$ polinomu için Rodrigues formülü olarak bilinen

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2)\frac{d^n}{dx^n}\left\{\exp(-x^2)\right\} \tag{2.11}$$

eşitlik elde edilir.

Bir kaç Hermite polinomu aşağıdadır. (2.11) de $n = 0, 1, 2, \cdots$ alarak bu polinomlar bulunur.

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,\ H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,\ H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x,$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^3 + 720x^2 - 120,\ H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x,\ \cdots .$$

Herhangi bir polinom Hermite polinomları cinsinden ifade edilebilir. Örneğin

$$H(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 3$$

olsun. x^4, x^3, x^2, x, 1 terimlerinde $H_4(x)$, $H_3(x)$, $H_2(x)$, $H_1(x)$, $H_0(x)$ yazılırsa

$$H(x) = \frac{1}{16}H_4(x) + \frac{1}{4}H_3(x) + \frac{5}{4}H_2(x) + H_1(x) - \frac{5}{4}H_0(x)$$

elde edilir.

(2.9) dan aşağıdaki bağıntılar elde edilir (Saran 2006):

i)

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Eğer n tek tam sayı ise $H_n(x)$ tek fonksiyondur. Eğer n çift tam sayı ise $H_n(x)$ çift fonksiyondur.

ii)

$$2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x).$$

iii) $n > 0$ için

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x).$$

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Apostol-Bernoulli Polinomları ve Apostol-Euler Polinomları

Tanım 3.1 *α. mertebeden Bernoulli polinomları ve α. mertebeden Euler polinomları sırasıyla*

$$\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^\alpha e^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(\alpha)}(x)\frac{z^n}{n!},\ \ |z|<2\pi \tag{3.1}$$

ve

$$\left(\frac{2}{e^z+1}\right)^\alpha e^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(\alpha)}(x)\frac{z^n}{n!},\ \ |z|<\pi \tag{3.2}$$

ifadeleri ile verilir. (3.1) ve (3.2)' den $B_n(x)=B_n^{(1)}(x)$, $E_n(x)=E_n^{(1)}(x)$ dır. $x=0$ için α. mertebeden Bernoulli sayısı ve α. mertebeden Euler sayısı sırasıyla

$$\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(\alpha)}\frac{z^n}{n!},\ \ |z|<2\pi \tag{3.3}$$

ve

$$\left(\frac{2}{e^z+1}\right)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(\alpha)}\frac{z^n}{n!},\ \ |z|<\pi \tag{3.4}$$

dır. $B_n=B_n(0)=B_n^{(1)}(0)$, $E_n=E_n(0)=E_n^{(1)}(0)$ dır.

(3.1) ve (3.3) den

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(\alpha)}(x)\frac{z^n}{n!} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(\alpha)}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{z^n}{n!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{(\alpha)}x^{n-k}\right)\frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

$$B_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{(\alpha)}x^{n-k} \tag{3.5}$$

elde edilir. Benzer olarak (3.2) ve (3.4) bağıntılarından

$$E_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k^{(\alpha)}x^{n-k} \tag{3.6}$$

elde edilir.

Teorem 3.2 *α. mertebeden Bernoulli polinomları ve α. mertebeden Euler polinomları*

$$B_n^{(\alpha)}(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(x),$$

$$\begin{aligned}
B_n^{(\alpha)}(x+y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(x) y^{n-k}, \\
B_n^{(\alpha)}(x+1) &= B_n^{(\alpha)}(x) + nx^{n-1}, \\
B_n^{(\alpha)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}, \\
E_n^{(\alpha)}(x+1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k^{(\alpha)}(x), \\
E_n^{(\alpha)}(x+y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k^{(\alpha)}(x) y^{n-k}, \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k^{(\alpha)}(y) x^{n-k},
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlarlar.

İspat. (3.1) ve (3.2) den yukarıdaki eşitlikler kolayca bulunur. ■

(3.4) de tanımlanan $E_n^{(\alpha)}$ Euler sayısı

$$\left(\frac{2e^t}{e^{2t}+1}\right)^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(\alpha)} \frac{t^k}{k!}, \quad |t| < \frac{\pi}{2} \tag{3.7}$$

ifadesi ile de tanımlanır (Luo, Qiu-Ming 2005).

Teorem 3.3 *$k, n \in \mathbb{N}$ ise*

$$B_o^{(n)} = 1$$

$$B_k^{(n)} = -\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \frac{(-1)^{n-l} k!}{j!(n+k-j)!} l^{n+k-j} B_j^{(n)}$$

dir.

İspat. (3.3) den

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{e^t-1}{t}\right)^{(n)} \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)} \frac{t^k}{k!} = \left((e^t-1)^n t^{-n}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)} \frac{t^k}{k!}\right) \\
&= \left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} e^{lt} (-1)^{n-l} t^{-n}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)} \frac{t^k}{k!}\right) \\
&= \left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{n-l} t^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{l^k}{k!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)} \frac{t^k}{k!}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} (-1)^{n-l} l^k\right) \frac{t^{k-n}}{k!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)} \frac{t^k}{k!}\right) \\
1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \frac{(-1)^{n-l}}{j!(n+k-j)!} l^{n+k-j} B_j^{(n)}\right) t^k
\end{aligned}$$

dan istenilen bulunur. ■

Teorem 3.4 $k, l, n \in \mathbb{N}$

$$B_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j^{(l)} B_{k-j}^{(n-l)} \tag{3.8}$$

ve

$$B_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j^{(n-1)} B_{k-j} \tag{3.9}$$

$B_j^{(n)}$ yüksek mertebeden Bernoulli ve B_j klasik Bernoulli sayısıdır.

İspat.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)} \frac{t^k}{k!} &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n = \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^l \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{n-l} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(l)} \frac{t^k}{k!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n-l)} \frac{t^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j^{(l)} B_{k-j}^{(n-l)}\right) \frac{t^k}{k!}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\frac{t^k}{k!}$' in katsayıları karşılaştırılarak (3.8) elde edilir. Benzer olarak (3.9) da ispatlanır. ■

Teorem 3.5 $k, n \in \mathbb{N}$ *ise*

$$E_k^{(n)} = -\frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{n} \binom{k}{j} \binom{n}{l} (2l-n)^{k-j} E_j^{(n)} \tag{3.10}$$

dir.

İspat.

$$\left(\frac{2e^t}{e^{2t}+1}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(n)} \frac{t^k}{k!}$$

den

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{(e^t+e^{-t})^n}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(n)} \frac{t^k}{k!} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} e^{lt} e^{-(n-l)t} \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(n)} \frac{t^k}{k!} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (2l-n)^k\right] \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(n)} \frac{t^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{n} \binom{k}{j} \binom{n}{l} (2l-n)^{k-j} E_j^{(n)}\right] \frac{t^k}{k!}
\end{aligned}$$

gerekli işlemler yapılırsa (3.10) elde edilir. ■

Teorem 3.6 $k, n, l \in \mathbb{N}$ *ise*

$$E_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} E_j^{(l)} E_{k-j}^{(n-l)} \tag{3.11}$$

ve

$$E_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} E_j E_{k-j}^{(n-1)} \tag{3.12}$$

dir.

İspat. (3.7) den

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(n)} \frac{t^k}{k!} &= \left(\frac{2e^t}{e^{2t}+1}\right)^{(n)} \\
&= \left(\frac{2e^t}{e^{2t}+1}\right)^{(l)} \left(\frac{2e^t}{e^{2t}+1}\right)^{(n-l)} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(l)} \frac{t^k}{k!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(n-l)} \frac{t^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} E_j^{(l)} E_{k-j}^{(n-l)}\right] \frac{t^k}{k!}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^k}{k!}$' in katsayıları karşılaştırılarak (3.11) elde edilir. Benzer yolla da (3.12) in ispatı bulunur. ■

Teorem 3.7 *$k,n,l\in\mathbb{N}$ ise*

$$\sum_{l=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{n}{l}2^{2j-n}(n+l)^{k-j}B_j^{(n)}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B_j^{(n)}E_{k-j}^{(n)} \tag{3.13}$$

dir.

İspat.

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_k^{(n)}\frac{t^k}{k!}=\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n,\quad |t|<2\pi$$

den

$$\begin{aligned}\left[\frac{2te^t}{(e^t-1)(e^{2t}+1)}\right]^n &= 2^{-n}\left(\frac{4t}{e^{4t}-1}\right)^n(e^{2t}+e^t)^n \qquad (3.14)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left[2^{2k-n}B_k^{(n)}\right]\frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}(n+l)^k\right]\frac{t^k}{k!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{l}\binom{k}{j}2^{2j-n}(n+l)^{k-j}B_j^{(n)}\right)\frac{t^k}{k!}\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\left[\frac{2te^t}{(e^t-1)(e^{2t}+1)}\right]^n &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n\left(\frac{2e^t}{e^{2t}+1}\right)^n \qquad (3.15)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}B_k^{(n)}\frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}E_k^{(n)}\frac{t^k}{k!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B_j^{(n)}E_{k-j}^{(n)}\right)\frac{t^k}{k!} \qquad (3.16)\end{aligned}$$

(3.14) ve (3.15) in sol tarafları eşit olduğu için buradan (3.13) elde edilir. ■

Tanım 3.8 *α ve λ keyfi gerçel ya da karmaşık parametri olmak üzere α. mertebeden genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomu ve α. mertebeden genelleştirilmiş Apostol-Euler polinomları sırasıyla*

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^{\alpha}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(\alpha)}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!},\quad |t+\log\lambda|<2\pi \tag{3.17}$$

ve

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t+1}\right)^{\alpha}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(\alpha)}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!},\quad |t+\log\lambda|<\pi \tag{3.18}$$

eşitlikleriyle verilir (Luo, Qiu-Ming,Luo-Srivastava 2005).

Tanım 3.9 *Apostol-Bernoulli polinomu ve Apostol-Euler polinomları sırasıyla*

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t - 1}\right) e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x,\lambda)\frac{t^n}{n!}, \quad |t + \log \lambda| < 2\pi$$

ve

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t + 1}\right) e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x,\lambda)\frac{t^n}{n!}, \quad |t + \log \lambda| < \pi$$

dir.

Apostol-Bernoulli polinomu ve Apostol-Euler polinomundan

$$\begin{aligned} B_n(x,\lambda) &= B_n^{(1)}(x,\lambda), \\ E_n(x,\lambda) &= E_n^{(1)}(x,\lambda) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bundan başka Apostol-Bernoulli sayısı $B_n(\lambda)$, Apostol-Euler sayısı $E_n(\lambda)$ için

$$\begin{aligned} B_n(\lambda) &= B_n(0,\lambda) \\ E_n(\lambda) &= 2^n E_n(\frac{1}{2},\lambda) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır.

Teorem 3.10 *α. mertebeden genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomu ve α. mertebeden genelleştirilmiş Apostol-Euler polinomları aşağıdaki eşitlikleri sağlar.*

$$B_n^{(\alpha+\beta)}(x+y,\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(x,\lambda) B_{n-k}^{(\beta)}(y,\lambda) \tag{3.19}$$

$$E_n^{(\alpha+\beta)}(x+y,\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E_k^{(\alpha)}(x,\lambda) E_{n-k}^{(\beta)}(y,\lambda) \tag{3.20}$$

$$\lambda B_n^{(\alpha)}(x+1,\lambda) - B_n^{(\alpha)}(x,\lambda) = nB_{n-1}^{(\alpha-1)}(x,\lambda) \tag{3.21}$$

$$\lambda E_n^{(\alpha)}(x+1,\lambda) + E_n^{(\alpha)}(x,\lambda) = 2E_n^{(\alpha-1)}(x,\lambda) \tag{3.22}$$

dir.

İspat. (3.17) den

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha+\beta)}(x+y,\lambda)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^{(\alpha+\beta)} e^{(x+y)t} \\ &= \left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt}\left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^{\beta} e^{yt} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\beta)}(y,\lambda)\frac{t^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(x,\lambda)B_{n-k}^{(\beta)}(y,\lambda)\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{t^n}{n!}$' in katsayıları karşılaştırılırsa (3.19) denklemi elde edilir.

(3.17) den

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} \lambda B_n^{(\alpha)}(x+1,\lambda)\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} \\ &= \lambda\left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^{\alpha} e^{(x+1)t} - \left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda B_n^{(\alpha)}(x+1,\lambda) - B_n^{(\alpha)}(x,\lambda)\right)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt}\left(\lambda e^t-1\right) \\ &= te^{xt}\left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^{\alpha-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, B_n^{(\alpha-1)}(x,\lambda)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nB_{n-1}^{(\alpha-1)}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$' in katsayılarını karşılaştırılarak (3.21) elde edilir. (3.20) ve (3.22) bağıntıları da benzer olarak ispatlanır. ■

Teorem 3.11 *$\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Apostol-Bernoulli polinomu ile Apostol Euler polinomu arasında*

$$B_n^{(\alpha)}(x+y,\lambda) = \frac{1}{2^{\beta}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\beta}{m}\lambda^m B_{n-k}^{(\alpha)}(y+m,\lambda)\right)E_k^{(\beta)}(x,\lambda) \qquad (3.23)$$

eşitliği vardır.

İspat. Tanım 3.8' den

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^\beta}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}\lambda^m B_{n-k}^{(\alpha)}(y+m,\lambda)\right)E_k^{(\beta)}(x,\lambda)\right)\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{m\geq 0}\frac{1}{2^\beta}\binom{\beta}{m}\lambda^m\sum_{k\geq 0}E_k^{(\beta)}(x,\lambda)\frac{t^k}{k!}\sum_{n\geq k}B_{n-k}^{(\alpha)}(y+m,\lambda)\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\\
&= \left(\frac{2}{\lambda e^t+1}\right)^\beta e^{xt}\left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^\alpha e^{yt}\frac{1}{2^\beta}\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}\lambda^m e^{mt}\\
&= \left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^\alpha e^{(x+y)t}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(\alpha)}(x+y,\lambda)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

bulunur. Sol taraf doğuray fonksiyonu olduğu için (3.23) bağıntısı elde edilir. ■

Sonuç 3.12 $\alpha,\beta,\lambda\in\mathcal{C}$, $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$
B_n^{(\alpha)}(x+y,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(B_k^{(\alpha)}(y,\lambda)+\frac{k}{2}B_{k-1}^{(\alpha-1)}(y,\lambda)\right)E_{n-k}^{(1)}(x,\lambda) \tag{3.24}
$$

ve

$$
B_n^{(\alpha)}(x+y)=\frac{1}{2^\beta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}B_{n-k}^{(\alpha)}(y+m)\right)E_k^{(1)}(x) \tag{3.25}
$$

dir.

İspat. Teorem 3.11' dan $\beta=1$ alalım.

$$
B_n^{(\alpha)}(x+y,\lambda)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(B_{n-k}^{(\alpha)}(y,\lambda)+\lambda B_{n-k}^{(\alpha)}(y+1,\lambda)\right)E_k^{(1)}(x,\lambda)
$$

elde edilir, (3.21) denklemi de gözönüne alınırsa (3.24) elde edilir. Teorem 3.11 da $\lambda=1$ alalım. (3.25) elde edilir. ■

Sonuç 3.12' in özel hali

$$
B_n^{(\alpha)}(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}B_k^{(\alpha)}(y)+\frac{k}{2}B_{k-1}^{(\alpha-1)}(y)\right)E_{n-k}(x)
$$

dır (Wang-jia 2008).

Sonuç 3.13 $\beta,\lambda\in\mathbb{C}$, $j,n\in\mathbb{N}_0$ *olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.*

$$
x^n=\frac{1}{2^\beta}\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}\lambda^m E_n^{(\beta)}(x+m,\lambda) \tag{3.26}
$$

ve

$$(n)_j x^{n-j} = \sum_{m\geq 0}(-1)^{j-m}\binom{j}{m}\lambda^m B_m^{(j)}(x+m,\lambda) \tag{3.27}$$

burada $(n)_j = n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)$ *dir.*

İspat. Teorem 3.11 da $\alpha = 0$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \frac{1}{2^\beta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}\lambda^m(y+m)^{(n-k)}\right)E_k^{(\beta)}(x,\lambda)\\ &= \frac{1}{2^\beta}\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}\lambda^m\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k^{(\beta)}(x,\lambda)(y+m)^{(n-k)}\\ &= \frac{1}{2^\beta}\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}\lambda^m E_n^{(\beta)}(x+y+m;\lambda)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $y = 0$ alınırsa (3.26) elde edilir. Üreteç fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}(-1)^{j-m}\binom{j}{m}\lambda^m B_n^{(j)}(x+m,\lambda)\frac{t^n}{n!}\\ &= \left(\frac{t}{\lambda e^t - 1}\right)^j e^{xt}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{j}{m}(-1)^{j-m}\lambda^m e^{mt}\\ &= t^j e^{xt}\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. İlk ve son eşitlikte $\frac{t^n}{n!}$' in katsayıları karşılaştırılarak (3.27) bulunur. ■

Sonuç 3.13 de $\lambda = 1$ alınırsa,

$$x^n = \frac{1}{2^\beta}\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}E_n^{(\beta)}(x+m)$$

$$(n)_j x^{n-j} = \sum_{m\geq 0}(-1)^{j-m}\binom{j}{m}B_m^{(j)}(x+m)$$

elde edilir.

Sonuç 3.14 *Apostol-Bernoulli polinomları ve Apostol-Euler polinomları arasında aşağıdaki bağıntı vardır (Wang. W.; Wi Wang Ti 2008).*

$$\begin{aligned}E_n^{(\alpha)}(x+y,\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{k+1}\binom{n}{k}\left(E_{k+1}^{(\alpha-1)}(y,\lambda) - E_{k+1}^{(\alpha)}(y,\lambda)\right)B_{n-k}(x,\lambda)\\ &\quad + \frac{\lambda-1}{n+1}E_0^{(\alpha)}(y,\lambda)B_{n+1}(x,\lambda)\end{aligned} \tag{3.28}$$

Apostol-Bernoulli polinomlarının çarpımının toplamı

$$S_m(n;x_1,x_2,\cdots,x_m)=\sum\binom{n}{j_1,j_2,\cdots,j_m}B_{j_1}(x_1;\lambda)\cdots B_{j_m}(x_m;\lambda)$$

$j_1+j_2+\cdots+j_m=n$ olarak tanımlansın.

Teorem 3.15 *$y=x_1+x_2+\cdots+x_m$, $m\leq n$ için*

$$S_m(n;x_1,x_2,\cdots,x_m)=(-1)^{m-1}m\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}B_k^{(m)}(y)\frac{B_{n-k}(y;\lambda)}{n-k}$$

eşitliği vardır (Wang. W. Jia; Wi Wang Ti 2008).

Apostol-Euler polinomlarının çarpımının toplamı

$$T_m(n;x_1,x_2,\cdots,x_m)=\sum\binom{n}{j_1,j_2,\cdots,j_m}E_{j_1}(x_1;\lambda)\cdots E_{j_m}(x_m;\lambda)$$

olsun.

Teorem 3.16 *$y=x_1+x_2+\cdots+x_m$, $m\leq n$ için*

$$T_m(n;x_1,x_2,\cdots,x_m)=\frac{2^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}B_k^{(m)}(y)E_{n+m-1-k}(y,\lambda)$$

eşitliği vardır (Wang. W. Jia Wi Wang Ti 2008).

α. mertebeden Apostol-Euler polinomları ve α. mertebeden Euler polinomları arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(\alpha)}(x,\lambda)\frac{z^n}{n!} &= e^{(-x\log\lambda)}\left(\frac{2}{e^{z+\log\lambda}+1}\right)^{\alpha}e^{x(z+\log\lambda)}\\ &= e^{(-x\log\lambda)}\sum_{n=0}^{\infty}E_k^{(\alpha)}(x)\sum_{n=0}^{k}\frac{z^n(\log\lambda)^{k-n}}{(k-n)!n!}\\ &= e^{(-x\log\lambda)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}E_{n+k}^{(\alpha)}(x)\frac{(\log\lambda)^k}{k!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{(-x\log\lambda)}\sum_{k=0}^{\infty}E_{n+k}^{(\alpha)}(x)\frac{(\log\lambda)^k}{k!}\right)\frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$E_n^{(\alpha)}(x,\lambda)=e^{(-x\log\lambda)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\log\lambda)^k}{k!}E_{n+k}^{(\alpha)}(x)\right),\ n\in\mathbf{N}_0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$B_n^{(l)}(x,\lambda) = e^{(-x\log\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-l}{k} \binom{n+k}{k}^{-1} \frac{(\log\lambda)^k}{k!} B_{n+k}^{(l)}(x).$$

(3.19) ve (3.21) de $\beta = 0$ ve $y = 1$ alınırsa

$$B_n^{(\alpha-1)}(x,\lambda) = \frac{1}{n+1}\left[\lambda \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k^{(\alpha)}(x,\lambda) - B_{n+1}^{(\alpha)}(x,\lambda)\right] \tag{3.29}$$

elde edilir. $\alpha = 1$ için

$$x^n = \frac{1}{n+1}\left[\lambda \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k(x,\lambda) - B_{n+1}(x,\lambda)\right] \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) da $\lambda = 1$ alınırsa

$$x^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(x) \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.20) ve (3.22) den

$$E_n^{(\alpha-1)}(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left[\lambda \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k^{(\alpha)}(x,\lambda) + E_n^{(\alpha)}(x,\lambda)\right] \tag{3.32}$$

ve

$$x^n = \frac{1}{2}\left[\lambda \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x,\lambda) + E_n(x,\lambda)\right] \tag{3.33}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 3.17 *Apostol Bernoulli polinomu*

$$B_n(x;\lambda^2) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(\lambda) E_k(2x;\lambda) \tag{3.34}$$

ya da

$$2^n B_n(\frac{x}{2};\lambda^2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(\lambda) E_{n-k}(x;\lambda) \tag{3.35}$$

denklemlerini sağlar.

İspat. (3.4) de verilende $\alpha = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x;\lambda^2)\frac{t^n}{n!} &= \frac{te^{xt}}{\lambda^2 e^t - 1} \\
&= \left(\frac{\frac{t}{2}}{\lambda e^{\frac{t}{2}} - 1}\right)\left(\frac{2e^{xt}}{\lambda e^{\frac{t}{2}} + 1}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} B_n(\lambda)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} E_n(2x;\lambda)\frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_{n-k}(\lambda)E_k(2x;\lambda)\right]\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$' in katsayıları karşılaştırılarak (3.34) denklemi bulunur. (3.34) ve (3.35) de $\lambda = 1$ alınarak klasik Euler polinomu ve klasik Bernoulli polinomu arasında

$$B_n(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_{n-k}E_k(2x) \tag{3.36}$$

ya da

$$2^n B_n(\frac{x}{2}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k E_{n-k}(x) \tag{3.37}$$

eşitlikleri elde edilir. ■

Teorem 3.18 *(LUO; SRIVASTAVA 2006) Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomları ve genelleştirilmiş Apostol Euler polinomları arasında aşağıdaki eşitlik vardır.*

$$E_n^{(\alpha)}(x+y,\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{k+1}\binom{n}{k}\left[E_{k+1}^{(\alpha-1)}(y,\lambda) - E_{k+1}^{(\alpha)}(y,\lambda)\right]B_{n-k}^{(\alpha)}(x,\lambda)$$

dır.

3.2. Beroulli Polinomlarının Genelleştirmesi ve Appell Polinomları

Bernoulli polinomlarının farklı bir genelleştirmesi Costabille ve arkadaşları tarafından verilmiştir (Costabille e.t 2006). Bernoulli polinomlarını ve Bernoulli sayılarını matrisle ifade etmişlerdir. Diğer taraftan Bretti, G. ; Natalin P. ; Dattali G. ; gibi matematikçiler Appell polinomlarının özel durumu Bernoulli polinomları olduğu için bu taraftan genelleştirme yapmışlardır. Mourad I. (2003), He M. X. ve Ricci (2002) Bernoulli polinomlarının sağladığı diferansiyel denklemler üzerinde bu çalışmayı yapmışlardır.

Tanım 3.19 *Aşağıdaki özellikleri sağlayan* $P_o(x), P_1(x), P_2(x), \cdots, P_n(x), \cdots$ *polinomlar dizisine Appell (polinomlar) dizisi denir:*

I) Her $n = 0, 1, 2, \cdots$ *için derecesi* $der P_n(x) = n$ *.*

II) Her $n = 1, 2, 3, \cdots$ *için* $P_n'(x) = nP_{n-1}(x)$ *olmalıdır.*

Ek olarak, $P_0(x) = 1$ *ise* $P_n(x)$ *dizisine normalleştirilmiş Appell polinomlar dizisi denir.*

Tanım 3.20 *Appell polinomu*

$$G_A(x,t) = A(t)e^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(x)\frac{t^k}{k!} \tag{3.38}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Bretti, Natalini, Ricci 2002). Burada

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{R}_k \frac{t^k}{k!}, \ A(0) \neq 0$$

$t = 0$ *da analitik fonksiyon ve* $\mathfrak{R}_k = R_k(0)$ *dır.* $R_n(x)$*' in türevi*

$$R_n'(x) = nR_{n-1}(x) \tag{3.39}$$

dir.

1) $A(t) = \frac{t}{e^t-1}$ ise $R_n(x) = B_n(x)$

2) $A(t) = \frac{2}{e^t+1}$ ise $R_n(x) = E_n(x)$

3) $A(t) = \frac{\alpha_1 \ldots \alpha_m t^m}{(e^{\alpha_1 t}-1)\cdots(e^{\alpha_m t}-1)}$ ise $R_n(x)$ m. dereceden Bernoulli polinomudur.

4) $A(t) = \frac{2^m}{(e^{\alpha_1 t}+1)\cdots(e^{\alpha_m t}+1)}$ ise $R_n(x)$ m. dereceden Euler polinomudur.

5) $A(t) = e^{\xi_0 t^0 + \xi_1 t^1 + \cdots + \xi_{d+1} t^{d+1}}$, $\xi_{d+1} \neq 0$ ise $R_n(x)$ genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomudur.

Tanım 3.21 *Genelleştirilmiş Bernoulli polinomu* $B_n^{[m-1]}(x)$, $m \geq 1$

$$G^{[m-1]}(x,t) = \frac{t^m e^{xt}}{e^t - \sum_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{3.40}$$

ifadesiyle $t = 0$ *ın komşuluğunda doğuray fonksiyonu ile tanımlanır (Dattali-Lorenzutta-Cesarano 1999).*

$m=1$ ve $B_n(x)=B_n^{[0]}(x)$ için

$$G^{[0]}(x,t)=\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{[0]}(x)\frac{t^n}{n!}$$

klasik Bernoulli fonksiyonu elde edilir. (3.40) dan

$$e^{xt}=\sum_{h=m}^{\infty}\frac{t^{h-m}}{h!}\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{[m-1]}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{3.41}$$

yazılabilir. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}\frac{h!}{(h+m)!}B_{n-h}^{[m-1]}(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$' in katsayıları karşılaştırılarak

$$x^n=\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}\frac{h!}{(h+m)!}B_{n-h}^{[m-1]}(x) \tag{3.42}$$

bulunur. $n=0,1,2$ için

$$\begin{aligned}B_0^{[m-1]}(x)&=m!,\\ B_1^{[m-1]}(x)&=m!\left(x-\frac{1}{m+1}\right),\\ B_2^{[m-1]}(x)&=m!\left(x^2-\frac{2}{m+1}x+\frac{2}{(m+1)^2(m+2)}\right)\end{aligned}$$

dir. Genelleştirilmiş Bernoulli polinomları elde edilir. $x=0$ için

$$\begin{aligned}B_0^{[m-1]}&=m!,\\ B_1^{[m-1]}&=-\frac{m!}{m+1},\\ B_2^{[m-1]}&=\frac{2m!}{(m+1)^2(m+2)}\end{aligned}$$

genelleştirilmiş Bernoulli sayıları bulunur.

Teorem 3.22 *Genelleştirilmiş $B_n^{[m-1]}(x)$ Bernoulli polinomları*

$$\frac{B_n^{[m-1]}y^{(n)}}{n!}+\frac{B_{n-1}^{[m-1]}y^{(n-1)}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{B_2^{[m-1]}y''}{2!}+(m-1)!\left(\frac{1}{m+1}-x\right)y'+n(m-1)!y=0$$

differesiyel denklemi sağlar (Bretti, Natalini 2002).

Önteorem 3.23 *$n \geq 1$ için genelleştirilmiş Bernoulli polinomu aşağıdaki rekürans bağıntısını sağlar.*

$$B_n^{[m-1]}(x) = \left(x - \frac{1}{m+1}\right) B_{n-1}^{[m-1]}(x) - \frac{1}{n(m+1)!} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} B_{n-k}^{[m-1]} B_k^{[m-1]}(x) \quad (3.43)$$

dir.

İspat. (3.40) ifadesinin her iki tarafından t ye göre kısmi türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} G^{[m-1]}(x,t) &= \frac{mt^{m-1}\left(e^t - \sum_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}\right) - t^m \left(e^t - \sum_{h=0}^{m-1} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!}\right)}{\left(e^t - \sum_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}\right)^2} + \frac{xt^m}{\left(e^t - \sum_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}\right)} e^{xt} \\
&= \left[\frac{m}{t} \frac{t^m}{\left(e^t - \sum_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}\right)} - \frac{t^m}{\left(e^t - \sum_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}\right)} - \frac{1}{(m-1)!} \frac{t^{2m-1}}{\left(e^t - \sum_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}\right)^2} \right] e^{xt} \\
&\quad + xG^{[m-1]}(x,t) \\
&= \frac{1}{(m-1)!t} \left[m! - \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]} \frac{t^n}{n!} \right] G^{[m-1]}(x,t) + (x-1) G^{[m-1]}(x,t)
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Burada gerekli işlemler yapılırsa (3.43) elde edilir. ■

3.3. 2D Bernoulli Polinomu $\mathbf{B}_n^2$(x,y)

Tanım 3.24 *Hermite-Kampe de Feriet polinomu*

$$e^{xt+yt^j} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \quad (3.44)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

(3.44) den

$$H_n^{(j)}(x,y) = n! \sum_{s=0}^{[\frac{n}{j}]} \frac{x^{n-js}}{(n-js)!} \frac{y^s}{s!}$$

ifadesi elde edilir. $H_n^{(j)}(x,y)$ denkleminin genelleştirilmiş hali

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) &= \frac{\partial^j}{\partial x^j} F(x,y), \\
F(x,0) &= x^n
\end{aligned}$$

ısı denkleminin çözümüdür. $H_n^{(j)}(x,y)$ polinomunu kapsayan başka bir genişlemesi

$$e^{x_1t+x_2t^2+\cdots+x_rt^r}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_r)\frac{t^n}{n!} \tag{3.45}$$

ifadesiyle verilir. (3.45) den

$$\begin{aligned} e^{x_1t+x_2t^2+\cdots+x_rt^r} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(x_1t+x_2t^2+\cdots+x_rt^r\right)^k}{k!} \qquad (3.46)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_r=k}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}\left(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_r^{k_r}t^{k_1+\cdots+rk_r}\right)\\ &= \sum_{n=0}\left(\sum_{\pi_k(n|r)}n!\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_r^{k_r}}{k_1!k_2!\cdots k_r!}\right)\frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

dir. Burada $k_1+k_2+\cdots+k_r=k, n=k_1+\cdots+rk_r$ (3.46) dan çok boyutlu Hermite Kampe de Feriet polinomu

$$H_n(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_r)=\sum_{\pi_k(n|r)}n!\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_r^{k_r}}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

dir.

Tanım 3.25 *2D-Bernoulli polinomu $B_n^2(x,y)$,*

$$G_n^{(2)}(x,y;t)=\frac{t}{e^t-1}e^{xt+yt^2}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(2)}(x,y)\frac{t^n}{n!} \tag{3.47}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Bretti, Gabriella; Natalini, Pierpaolo 2002).

Teorem 3.26 *2D-Bernoulli polinomu aşağıdaki eşitliği gerçekler*

$$\begin{aligned} B_n^{(2)}(x,y) &= \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}B_{n-h}H_h^{(2)}(x,y)\\ &= n!\sum_{h=0}^{n}\frac{B_{n-h}}{(n-h)!}\sum_{s=0}^{[\frac{h}{2}]}\frac{x^{h-2s}y^s}{(h-2s)!s!}. \end{aligned}$$

Burada B_k klasik Bernoulli sayısıdır. Buna ek olarak

$$H_n^{(2)}(x,y)=\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}\frac{1}{n-h+1}B_n^{(2)}(x,y)$$

dir (Bretti, Gabriella; Natalini, Pierpaolo 2002).

İspat. $B_n^{(2)}(x,y)$ nin üreteç fonksiyonundan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}(x,y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t}{e^t-1}e^{xt+yt^2} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} H_l^{(2)}(x,y)\frac{t^l}{l!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}H_l^{(2)}(x,y)B_{n-l}\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\frac{t^n}{n!}$' in katsayıları karşılaştırılarak

$$B_n^{(2)}(x,y) = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}H_l^{(j)}(x,y)B_{n-l}$$

bulunur.Diğer taraftan

$$e^{xt+yt^j} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(j)}(x,y)\frac{t^n}{n!},$$

$$\frac{t}{e^t-1}e^{xt+yt^j} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(j)}(x,y)\frac{t^n}{n!}$$

dan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(j)}(x,y)\frac{t^n}{n!} &= e^{xt+yt^j} \\ &= \left(\frac{e^t-1}{t}\right)\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(j)}(x,y)\frac{t^n}{n!} \\ &= \left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{(l+1)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(j)}(x,y)\frac{t^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n-k+1}B_k^{(j)}(x,y)\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$' in katsayıları karşılaştırılarak

$$H_n^{(j)}(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n-k+1}B_k^{(j)}(x,y)$$

bulunur. ■

4. BULGULAR

Genelleştirilmiş Bernoulli polinomu (3.40) denklemi ile tanımlanmıştı. Buradan genelleştirilmiş Bernoulli sayısı

$$\frac{t^m}{e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]} \frac{t^n}{n!} \tag{4.1}$$

ifadesiyle tanımlanır [Dattali-Lorenzutta-Cesarano 1999].

Önerme 4.1 *Genelleştirilmiş Bernoulli polinomu ile Bernoulli sayısı arasında*

$$B_n^{[m-1]}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]} x^{n-k}$$

bağıntısı vardır.

İspat. (3.40) ve (4.1) den

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x) \frac{t^n}{n!} &= \frac{t^m}{e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}} e^{xt} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]} \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]} x^{n-k} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

yazılabilir. $\frac{t^n}{n!}$' in katsayıları karşılaştırılarak istenilen bulunur. ■

Önerme 4.2 *Genelleştirilmiş Bernoulli polinomu*

$$B_n^{[m-1]}(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(x) \tag{4.2}$$

eşitliğini gerçekler.

İspat. (3.40) dan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x+1)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t^m}{e^t - \sum_{h=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}} e^{(x+1)t} \\
&= \frac{t^m e^{xt}}{e^t - \sum_{h=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}} e^t = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{[m-1]}(x)\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin ilk ve son terimlerinden (4.2) bulunur. ■

Önerme 4.3 *Genelleştirilmiş Bernoulli polinomu*

$$\begin{aligned}
B_n^{[m-1]}(x+y) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{[m-1]}(x)y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{[m-1]}(y)x^{n-k}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ifadesini sağlar.

İspat. (3.40) dan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x+y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t^m}{e^t - \sum_{h=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}} e^{(x+y)t} \\
&= \frac{t^m e^{xt}}{e^t - \sum_{h=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}} e^{yt} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n\frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{[m-1]}(x)y^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son ifadeden karşılaştırmalar yapılarak (4.3) elde edilir. ■

Önerme 4.4 *a negatif olmayan bir tam sayı olsun.*

$$B_n^{[m-1]}(ax) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{[m-1]}(x)(a-1)^{n-k}x^{n-k} \tag{4.4}$$

dır.

İspat. Genelleştirilmiş Bernoulli polinomunun tanımından yararlanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(ax)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t^m}{e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}} e^{axt} \\
&= \frac{t^m e^{xt}}{e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}} e^{(a-1)xt} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(a-1)^n x^n \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(x)(a-1)^{n-k}x^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

den (4.4) elde edilir. ■

Tanım 4.5 *Genelleştirilmiş Apostol Bernoulli sayıları, genelleştirilmiş Apostol Bernoulli polinomları sırasıyla*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(\lambda)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t^m}{\lambda e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}}, \qquad (4.5) \\
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t^m e^{xt}}{\lambda e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}}
\end{aligned}$$

ifadeleri ile tanımlayacağız.

(4.5) bağıntısından

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} = e^{tx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(\lambda)\frac{t^n}{n!}\right)$$

elde edilir. e^{tx} in Taylor serisini bir önceki bağıntıda yerine yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(\lambda)\frac{t^n}{n!}\right)$$

elde edilir. Burda Cauchy çarpımı yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(\lambda)x^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Bu son eşitlikte her iki tarafın $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse, aşağıdaki Teorem ispatnanmış olur.

Teorem 4.6 *n negatif olmayan bir tam sayı olsun.*

$$B_n^{[m-1]}(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(\lambda) x^{n-k}.$$

(4.5) bağıntısında x e göre türev alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} B_n^{[m-1]}(x,\lambda) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x,\lambda) \frac{t^{n+1}}{n!}.$$

Bu bağıntıda gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} B_n^{[m-1]}(x,\lambda) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n B_{n-1}^{[m-1]}(x,\lambda) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte her iki tarafın $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse, aşağıdaki Teorem ispatnanmış olur.

Teorem 4.7 *n negatif olmayan bir tam sayı olsun.*

$$\frac{d}{dx} B_n^{[m-1]}(x,\lambda) = n B_{n-1}^{[m-1]}(x,\lambda).$$

Bu teoremden genelleştirilmiş Apostol Bernoulli polinomlarının derecesi n sonuçu elde edilir.

Önerme 4.8 *Genelleştirilmiş Apostol Bernoulli polinomu*

$$\begin{aligned} B_n^{[m-1]}(x+y;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(x,\lambda) y^{n-k} \qquad (4.6) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(y,\lambda) x^{n-k} \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. (4.5) den

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x+y;\lambda)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t^m e^{(x+y)t}}{\lambda e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}} \\
&= \frac{t^m e^{xt}}{\lambda e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}} e^{yt} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(x,\lambda) y^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

sağ ve sol taraflar eşitlenirse

$$
B_n^{[m-1]}(x+y;\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(x,\lambda) y^{n-k}
$$

elde edilir. ■

Bir çok özel fonksiyon aşağıdaki gibi üreteç fonksiyonu yardımıyla verilebilir:

$$
F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) t^n, \tag{4.7}
$$

burada $F : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ t değişkenine göre analitik bir fonksiyondur. Bu serinin orjini içeren bir yakınsaklık bölgesine sahiptir. p_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\cdots)$ fonksiyonu t değişkenine bağlı değildir. (4.7) bağıntısından $p_n(x)$ fonksiyonun Cauchy tipi integral temsili aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$
p_n(x) = \int_{\mathcal{C}} F(x,t)\frac{dt}{t^{n+1}}, \tag{4.8}
$$

burada $\mathcal{C}$ F fonksiyonun içinde analitik olduğu orjini içeren pozitif yönde yönlendirilmiş çember eğrisidir (Ferreira 2003).

(3.40) bağıntısında

$$
\mathcal{F}(x,t) = \frac{t^m e^{xt}}{\left(e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}\right) m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n^{[m-1]}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{4.9}
$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{F}(z,0)=\mathfrak{B}_0^{[m-1]}(x)=1$$

bulunur. (4.9) üreteç fonksiyonuna (4.7) ve (4.8) bağıntıları uygulandığında aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.9 *m pozitif tam sayı ve n negatif olmayan tam sayıdır.*

$$\mathfrak{B}_n^{[m-1]}(x)=\frac{n!}{2\pi i m!}\int_{\mathcal{C}} t^m e^{xt}\left(e^t-\sum_{h=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}\right)^{-1}\frac{dt}{t^{n+1}},$$

burada $\mathcal{C}$, $t^m e^{xt}\left(e^t-\sum_{h=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}\right)^{-1}$ *fonksiyonun içinde analitik olduğu orjini içeren pozitif yönde yönlendirilmiş yarı çapı* 2π *küçük bir çember eğrisidir.*

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında LUO, Q. M.; LUO, Q. M.-Srivastava H. M.; Wang W.; WANG, W., JIA, C. Z. ve WANG, T.' nin Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler polinomlarında yaptıkları bazı genellemeleri, ispatladıkları teoremleri, buldukları sonuçları; NATALINI, P., DATTOLI, G. anlamında Appell dizilerinin özel durumu olan Bernoulli polinomların da genelleştirilmesi yapılarak bazı teoremler ispatlandı. Elde edilen sonuçlarda $m = 1$ alındığı zaman klasik Apostol-Bernoulli polinomları ve Apostol-Bernoulli sayıları elde edildiği görüldü.

Ayrıca klasik Apostol-Bernoulli polinomunu Apostol-Bernoulli sayısı ve Apostol-Euler polinomu cinsinden

$$B_n(x, \lambda^2) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(\lambda) E_k(2x, \lambda)$$

eşitliği ispatlandı.

6. KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ M.and STEGUN I. A. 1972. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.1046 pp.

APOSTOL, T. M. 1950. Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series. *Duke Math. J.* 17. 147–157.

APOSTOL, T. M. 1951. On the Lerch zeta function. *Pacific J. Math.* 1. 161–167.

APOSTOL, T. M. 1976. Modular functions and Dirichlet series in number theory. Graduate Texts in Mathematics, No. 41. *Springer-Verlag, New York-Heidelberg*, x+198 pp.

BRETTI, G. and RICCI, P. E. 2001. Euler polynomials and the related quadrature rule. Georgian Math. J. 8, no. 3, 447–453.

BRETTI, G., NATALINI, P. and RICCI, P. E. 2004. Generalizations of the Bernoulli and Appell polynomials. *Abstr. Appl. Anal.*, no. 7, 613–623.

BRETTI, G. and RICCI, P. E. 2004. Multidimensional extensions of the Bernoulli and Appell polynomials. *Taiwanese J. Math.* 8, no. 3, 415–428.

CHANG, C.H.and HA, C.W. 2001. On recurrence relations for Bernoulli and Euler numbers. *Bull. Austral. Math. Soc.* 64, no. 3, 469–474.

CHEON, G.S. 2003. A note on the Bernoulli and Euler polynomials. *Appl. Math. Lett.* 16, no. 3, 365–368.

CHOI, J. 1996. Explicit formulas for Bernoulli polynomials of order \$n\$. *Indian J. Pure Appl. Math.* 27, no. 7, 667–674.

COSTABILE, F., DELL'ACCIO, F.; GUALTIERI, M. I. 2006. A new approach to Bernoulli polynomials. *Rend. Mat. Appl.* (7) 26, no. 1, 1–12

CVIJOVIĆ, D. and KLINOWSKI, J. 1995. New formulae for the Bernoulli and Euler polynomials at rational arguments. *Proc. Amer. Math. Soc.* 123, no. 5, 1527–1535.

CVIJOVIĆ, D. and KLINOWSKI, J. 2000. A note on the Hurwitz zeta function. *Mat. Vesnik* 52, no. 1-2, 47–54.

DATTOLI, G.; LORENZUTTA, S.; CESARANO, C. 1999. Finite sums and generalized forms of Bernoulli polynomials. *Rend. Mat. Appl.* (7) 19.

DATTOLI, G.; CESARANO, C.; LORENZUTTA, S. 2002. Bernoulli numbers and polynomials from a more general point of view. *Rend. Mat. Appl.* (7) 22.

DATTOLI, G.; RICCI, P. E.; CESARANO, C. 2002. Differential equations for Appell type polynomials. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 5, no. 1, 69–75.

HE, M. X.; RICCI, P. E. 2002. Differential equation of Appell polynomials via the factorization method. *J. Comput. Appl. Math.* 139, no. 2, 231–237.

KHAN, S., YASMIN, G., KHAN, R., MAKBOUL H. and NADER A. 2009. Hermite-based Appell polynomials: properties and applications. *J. Math. Anal. Appl.* 351, no. 2, 756–764.

KNUTH, D. E. 1993. Johann Faulhaber and sums of powers. *Math. Comp.* 61, no. 203, 277–294.

LUO, Q. M. 2004. On the Apostol-Bernoulli polynomials. *Cent. Eur. J. Math.* 2, no. 4, 509–515.

LUO, Q. M. 2005. Some recursion formulae and relations for Bernoulli numbers and Euler numbers of higher order. *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)* 10, no. 1, 63–70.

LUO, Q. M. 2006. Apostol-Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions. *Taiwanese J. Math.* 10, no. 4, 917–925.

LUO, Q. M. and SRIVASTAVA, H. M. 2005. Some generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* 308, no. 1, 290–302.

LUO, Q. M. and SRIVASTAVA, H. M. 2006. Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Comput. Math. Appl.* 51, no. 3-4, 631–642.

ISMAIL, M. E. 2002. Remarks on: "Differential equation of Appell polynomials via the factorization method" *J. Comput. Appl. Math.* 139, no. 2, 231–237.

NATALINI, P., BERNARDINI, A. A. 2003. A generalization of the Bernoulli polynomials. *J. Appl. Math.*, no. 3, 155–163.

Saran N., SHARMA S. D. and TRIVERDI T.N. 2006. Special Functions *Pragati Prakashan pub.*

SRIVASTAVA, H. M. 2000. Some formulas for the Bernoulli and Euler polynomials at rational arguments. Math. Proc. *Cambridge Philos. Soc.* 129, no. 1, 77–84.

SRIVASTAVA, H. M.; PINTÉR, Á. 2004. Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials.*Appl. Math. Lett.* 17, no. 4, 375–380.

SRIVASTAVA, H. M. and CHOI, J. 2001. Series associated with the zeta and related functions. *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

SUN, Z. W. 2003. Combinatorial identities in dual sequences. *European J. Combin.* 24, no. 6, 709–718.

SUN, Z. W. 2002. Introduction to Bernoulli and Euler Polynomials, *A Lecture note in Taiwan* (1-13).

SUN, Z. W., WU, K.J. and Pan, H. 2004. Some identities for Bernoulli and Euler polynomials. *Fibonacci Quart.* 42, no. 4, 295–299.

WANG, W., JIA, C. Z. and WANG, T. 2008. Some results on the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Comput. Math. Appl.* 55 , no. 6, 1322–1332

FERREIRA C., LOPEZ J. L. and MAINAR E., 2003. Asymptotic approximations of orthogonal polynomials, Monografias del Semin. Matem. *Garcia de Galdeano.* 27: 275-280.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Antalya' da doğdum. İlk-orta ve lise öğrenimimi Antalya' da tamamladım. 2003 yılında girdiğim Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında matematikçi olarak mezun oldum. 2008 yılı bahar döneminde Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimime başladım.