

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DİFERANSİYEL KUADRATÜR METODUNUN ELEKTROMANYETİK
PROBLEMLERE UYGULANMASI**

Ahmet Rifat GÖRGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

2011

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DİFERANSİYEL KUADRATÜR METODUNUN ELEKTROMANYETİK
PROBLEMLERE UYGULANMASI**

Ahmet Rifat GÖRGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİMDALI

Bu tez .././2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından(...) not takdir edilerek oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr.Şükrü ÖZEN (Danışman)

Yrd.Doç.Dr.Selçuk HELHEL

Yrd.Doç.Dr.Mehmet Fatih ÇAĞLAR

ÖZET

DİFERANSİYEL KUADRATÜR METODUNUN ELEKTROMANYETİK PROBLEMLERE UYGULANMASI

Ahmet Rifat GÖRGÜN

Yüksek lisans Tezi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr Şükrü ÖZEN

Haziran 2011, 106 Sayfa

Bu çalışmada öncelikle problem çözümlerinde kullanılan bazı nümerik yöntemler tanıtılmış ve bu yöntemlerin tarihi gelişmeleri sırasıyla verilmiştir. Ardından diferansiyel alan hesabı metodu (DQM), polinom tabanlı diferansiyel alan hesabı metodu (PDQM) ve fourier açılımı tabanlı diferansiyel alan hesabı metodu (FDQM) açıklanmış ve diğer metotlara olan üstünlüklerine değinilmiştir. Birinci ve ikinci dereceden türevlerin ağırlık katsayıları hem PDQM hem de FDQM için hesaplanmıştır. Birçok elektromanyetik problemin matematiksel tanımını ifade eden iki boyutlu Helmholtz denkleminin çözümü PDQM ve FDQM yoluyla gerçekleştirilmiştir.

Problemlerin analitik, PDQM ve FDQM çözümleri hesaplanmış ve karşılaştırılmıştır. Dalga sayısı ve düğüm sayısı sabitken problemler PDQM ve FDQM yoluyla çözülmüş ve karşılaştırılmıştır. Ardından düğüm sayısı sabitken dalga sayısı artırılmış ve dalga sayısı değişiminin doğruluğa olan etkileri incelenmiştir.

Bu çalışmadaki tüm hesaplamalara ait hazırlanan MATLAB kodları tezde ayrıntılı olarak sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: DQM, FDQM, PDQM, Helmholtz Denklemi,

Elektromanyetik Hesaplama, Elektromanyetik Çözümler

JÜRİ: Doç. Dr. Şükrü ÖZEN (Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Selçuk HELHEL

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Fatih ÇAĞLAR

ABSTRACT

THE IMPLEMENTATION OF DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD (DQM) FOR ELECTROMAGNETIC PROBLEMS

Ahmet Rifat GORGUN

M.Sc. Thesis in Electric Electronic Engineering

Adviser: Assoc. Prof. Dr.Sukru OZEN

May, 2011, 106 pages

Firstly, some numerical methods used in the problem solutions introduced and historical developments of these methods are given in this study. Then DQM, PDQM and FDQM are explained and mentioned to the superiority of the other methods. The weighting coefficients of the first and second order derivatives are computed for both PDQM and FDQM. Solution of the two dimensional Helmholtz equation are performed by the PDQM and FDQM.

Analytic, PDQM and FDQM solutions of the problems are calculated and compared. While grid node and wave number are steady, problems are calculated by the PDQM and FDQM and compared. Then, wave number is increased while grid node is steady and the effects of the change in wave number to the accuracy are examined.

MATLAB codes are prepared for all the calculations in this study are presented in detail in the thesis.

KEY WORDS: DQM, FDQM, PDQM, Helmholtz Equation, Computational
Electromagnetic, Solution of Electromagnetic Problems.

COMMITTEE: Assoc. Prof.Dr. Sukru OZEN (Adviser)

Assist. Prof.Dr. Selcuk HELHEL

Assist. Prof.Dr. Mehmet Fatih CAGLAR

ÖNSÖZ

Birçok mühendislik problemi, uygun sınır şartlarıyla birlikte (PDE) kısmi diferansiyel eşitliklerin bir seti yoluyla yönetilir. Örneğin ses dalgaları ve mikrodalgalar Helmholtz eşitliği yoluyla simule edilebilir. Genellikle bu eşitliklerin kapalı-form çözümlerini elde etmek çok zordur. Ayrıca verilen bir diferansiyel eşitliğe bazı yaklaşık çözümler geliştirmek çözüm için önemlidir. Birçok durumda yaklaşık çözüm ayrık noktalarda fonksiyonel değerler yoluyla ifade edilir.

Diferansiyel Alan Hesabı Metodu (DQM)' unda konvansiyonel düşük dereceli FDM (Sonlu Farklar Metodu) ve FEM (Sonlu Elemanlar Metodu) gibi diğer nümerik çözüm yöntemlerine göre daha az sayıda düğüm noktası kullanılarak çok doğru nümerik sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca nümerik hesabın yapılabilmesi için gereken çaba da azaltılmış olur.

Günümüzde, DQ metodu; Helmholtz eşitlikleri, Helmholtz özvektör problemleri, Burgers eşitlikleri, iki boyutlu Poisson eşitlikleri ve bastırılmayan Navier-Stokes eşitliklerinin çözümü ile yapısal ve titreşim analizi uygulamaları, ısı transferi uygulamaları, kimyasal reaktör uygulamaları ve dalga klavuzu uygulamaları gibi mühendislik ve fizik bilimlerindeki değişik problem ve uygulamalarda etkili bir şekilde kullanılmaktadır.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren danışmanım Sayın Doç. Dr. Şükrü ÖZEN' e (A.Ü.M.F.), yardımlarını gördüğüm Sayın Doç. Dr. Ömer CİVALEK' e (A.Ü.M.F.), Sayın Yrd. Doç. Dr. Selçuk HELHEL' e (A.Ü.M.F.), Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman BİLGİN' e (A.Ü.M.F.)ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Cumhuri BAŞARAN' a (A.Ü.M.F.) teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. DİFERANSİYEL ALAN HESABI METODU (DQM)' NUN MATEMATİKSEL TEMELLERİ.....	3
2.1 Giriş.....	3
2.2 DQM YOLUYLA TÜREV YAKLAŞIMI.....	4
2.2.1 İntegral alan hesabı(IQ).....	4
2.2.2 Diferansiyel alan hesabı(DQ).....	5
2.3 KİSMİ DİFERANSİYEL EŞİTLİKLERİN ÇÖZÜMÜ VE FONKSİYONEL YAKLAŞIMI.....	6
2.3.1 Yüksek dereceli polinom yaklaşımı.....	6
3. POLİNOM TABANLI DİFERANSİYEL ALAN HESABI METODU (PDQM).....	10
3.1. Giriş.....	10
3.2. BİRİNCİ DERECE TÜREVLER İÇİN AĞIRLIK KATSAYILARININ HESAPLANMASI.....	11
3.2.1 Bellman'ın yaklaşımları.....	11
3.2.2 Quan ve chang'in yaklaşımı.....	13
3.2.3 Shu'nun genel yaklaşımı.....	14
3.3. İKİNCİ DERECE TÜREVLER İÇİN AĞIRLIK KATSAYILARININ HESABI.....	16
3.3.2. Shu'nun genel yaklaşımı.....	17
4. HERHANGİ BİR GENEL FONKSİYON İÇİN FOURIER AÇILIMI TABANLI DİFERANSİYEL ALAN HESABI METODU(FDQM).....	18
5. BULGULAR.....	20
5.1. UYGULAMA1.....	20
5.1.1. Uygulama1'in PDQM ile çözümü.....	22
5.2. UYGULAMA2.....	24
5.2.1. Uygulama2'nin PDQM ile çözümü.....	26
5.2.2. Uygulama2'nin FDQM ile çözümü.....	35
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	48
7. EKLER.....	49
EK 1. MATLAB PROGRAMLARI.....	49

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

c_k	Sabit
$M(x)$	Lagrange interpolasyon polinomu
$M^{(1)}(x_i)$	Lagrange interpolasyon polinomunun birinci dereceden türevinin x_i noktasındaki değeri
$M^{(1)}(x_j)$	Lagrange interpolasyon polinomunun birinci dereceden türevinin x_j noktasındaki değeri
$M^{(3)}(x_i)$	Lagrange interpolasyon polinomunun üçüncü dereceden türevinin x_i noktasındaki değeri
$M^{(m)}(x)$	Lagrange interpolasyon polinomunun m'inci dereceden türevi
V_N	N boyutlu lineer vektör uzayı
$l_k(x)$	V_N 'nin bir bazı
$r_k(x)$	Baz vektörü
$s_k(x)$	Baz vektörü
$P_N(x)$	Yaklaşım polinomu
$f_x^{(1)}(x)$	$f(x)$ Fonksiyonunun birinci derece türevi
$f_x^{(2)}(x)$	$f(x)$ Fonksiyonunun ikinci dereceden türevi
N	Düğüm sayısı
$L_N(x)$	N. dereceden legendre polinomu
$L_N^{(1)}(x)$	N. dereceden legendre polinomu' nun birinci dereceden türevi
w_{ij}	Ağırlık katsayısı
a_{ij}	Fonksiyonun birinci dereceden türevinin $i \neq j$ durumundaki ağırlık katsayısı
a_{ii}	Fonksiyonun birinci dereceden türevinin $i = j$ durumundaki ağırlık katsayısı
b_{ij}	Fonksiyonun ikinci dereceden türevinin $i \neq j$ durumundaki ağırlık katsayısı

b_{ii}	Fonksiyonun ikinci dereceden türevinin $i = j$ durumundaki ağırlık katsayısı
δ_{ij}	Kronecker operatörü
ϕ	Potansiyel
k	Dalga sayısı
L_x	Çözüm bölgesinin uzunluğu
L_y	Çözüm bölgesinin genişliği
DQ	Diferansiyel Alan Hesabı
DQM	Diferansiyel Alan Hesabı Metodu
PDQM	Polinom Tabanlı Diferansiyel Alan Hesabı Metodu
FDQM	Fourier Açılımı Tabanlı Diferansiyel Alan Hesabı Metodu
FEM	Sonlu Elemanlar Metodu
FDM	Sonlu Farklar Metodu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Bir aralık üzerinde $f(x)$ 'in integrali.....	4
Şekil 2.2. Tek boyutlu problem.....	5
Şekil 5.1. İki boyutlu Helmholtz problemi.....	20
Şekil 5.2. İki boyutlu Helmholtz problemi.....	24
Şekil 5.3. İki boyutlu Helmholtz problemi.....	35
Şekil 5.4. Uygulama2'nin FDQM ile çözümünde grid sayıları ($N=M=7$) ve çözüm aralığı ($L_x = L_y = \pi$) sabitken, dalga sayısı (k) ile elde edilen potansiyel değerdeki maksimum hata ($\Delta\phi$) arasındaki değişimi.....	46
Şekil 5.5. Uygulama2'nin FDQM ile çözümünde çözüm aralığı ($L_x = L_y = \pi$) ve dalga sayısı (k) sabitken, grid sayısı ($N=M$) ile elde edilen potansiyel değerdeki maksimum hata ($\Delta\phi$) arasındaki değişimi.....	47

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1 Uygulama1' in $N=M=5$, $L_x = L_y = 1$ ve $k^2=0.5$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	22
Çizelge 5.2 Uygulama1' in $N=M=5$, $L_x = L_y = 1$ ve $k^2=0.5$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	22
Çizelge 5.3 Uygulama1' in $N=M=5$, $L_x = L_y = 1$ ve $k^2=0.5$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	22
Çizelge 5.4 Uygulama1' in $N=M=7$, $L_x = L_y = 1$ ve $k^2=0.5$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	23
Çizelge 5.5 Uygulama1' in $N=M=7$, $L_x = L_y = 1$ ve $k^2=0.5$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	23
Çizelge 5.6 Uygulama1' in $N=M=7$, $L_x = L_y = 1$ ve $k^2=0.5$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen $\Delta\phi$	24
Çizelge 5.7 Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	26
Çizelge 5.8 Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	26
Çizelge 5.9 Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	27
Çizelge 5.10 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	27
Çizelge 5.11 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	28
Çizelge 5.12 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	28

Çizelge 5.13 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	29
Çizelge 5.14 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	29
Çizelge 5.15 Uygulama2'in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	30
Çizelge 5.16 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	30
Çizelge 5.17 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	31
Çizelge 5.18 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	31
Çizelge 5.19 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	32
Çizelge 5.20 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	32
Çizelge 5.21 Uygulama2 'in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	33
Çizelge 5.22 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	33
Çizelge 5.23 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	34
Çizelge 5.24 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için PDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	34
Çizelge 5.25 Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	37

Çizelge 5.26 Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	37
Çizelge 5.27 Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	37
Çizelge 5.28 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	38
Çizelge 5.29 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	38
Çizelge 5.30 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	39
Çizelge 5.31 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	39
Çizelge 5.32 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	40
Çizelge 5.33 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	40
Çizelge 5.34 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	41
Çizelge 5.35 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	41
Çizelge 5.36 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	42
Çizelge 5.37 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	42
Çizelge 5.38. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	43

Çizelge 5.39 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	43
Çizelge 5.40 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen ϕ_{ij}	44
Çizelge 5.41 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$	44
Çizelge 5.42 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için FDQ metotla çözümünden elde edilen hata $\Delta\phi$	45
Çizelge 5.43 Uygulama2'nin FDQM ile çözümünde grid sayıları ($N=M=7$) ve çözüm aralığı ($L_x = L_y = \pi$) sabitken, dalga sayısı(k) ile elde edilen potansiyel değerdeki maksimum hata ($\Delta\phi$) arasındaki değişimi.....	46

1. GİRİŞ

Lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözüm yöntemleri fizik, biyoloji ve mühendislik içinde büyük bir öneme sahiptir. Birçok durumda, ilgili fiziksel bölgedeki birkaç noktada kısmen doğru çözümlerin hızlıca hesaplanabilmesi arzu edilmiştir.

FDM (Sonlu Farklar Metodu), FEM (Sonlu Element Metodu) ve BEM (Sınır Element Metodu) yoluyla elde edilen çözümler çevreleyen çok sayıdaki noktalar üzerinde hesap edilmek zorundadır. Bunun nedeni, bahsedilen metotların doğruluk ve kararlılığının, ayrılmış bölgenin inceliğine ve doğallığına güçlü bir şekilde bağlı olmasıdır. Sonuç olarak bu standart metotlar için hesapsal zorluklar sıklık göz önünde bulundurulur.

Hem diğer metotlardaki bu gibi zorlukları ortadan kaldırmak amacıyla hem de lineer veya lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin hızlı çözümü için Bellmann ve arkadaşları tarafından “Diferansiyel Alan Hesabı” adı verilen etkili bir yöntem geliştirilmiştir [1–6]. Mingle diferansiyel alan hesabı metodu lineer olmayan difüzyon eşitliğine uygulamıştır [7–8]. Civan ve Sliepcevich diferansiyel alan hesabı metodunu genişletmiş ve genelleştirmişlerdir. Ayrıca bu metodu poisson eşitliğine ve çok boyutlu problemlere uygulamışlardır [9–12]. 1996’da Bert ve Malik Diferansiyel Alan hesabı Metot’un tarihsel gelişimini kavram olarak ortaya koymuşlardır. Shu ve Chew 1997 yılında fourier açılımı tabanlı diferansiyel alan hesabı metodunun Helmholtz özvektör problemlerine uygulamasını göstermiştir [13]. Shu ve Xue 1999 yılında diferansiyel alan hesabı metot yoluyla Helmholtz denklemini çözmüştür [14]. Shu ve Chew 1999 yılında çoklu bölge genelleştirilmiş diferansiyel alan hesabı (GDQ) metotla dikdörtgen sınırlı dalga klavuzlarının analizini gerçekleştirmişlerdir [15].

Diferansiyel alan hesabı metodu (DQM), diferansiyel eşitlikleri çözmek için kullanılan nümerik metolardan bir tanesidir. İlk olarak Bellmann ve çalışma arkadaşları tarafından 1970’lerde gerçekleştirilmiş olan DQM herhangi bir noktada bir fonksiyonun türevine; bir ağ çizgisi boyunca tüm fonksiyonel değerlerin lineer toplamı yoluyla yaklaşır. DQM uygulamalarındaki temel işlem ağırlık katsayıların belirlenmesidir.

Bellmann ve arkadaşları ağırlık katsayılarını hesaplamak için iki metot önermişlerdir. Bunlardan birinci metot karmaşık cebirsel eşitlik sistemine dayanır. İkinci metot ise basit cebirsel bir formülü kullanır. İkinci metotta düğüm noktalarının koordinatları Legendre polinomunun kökleri yoluyla tespit edilir.

Bellmann'ın ilk uygulamalarında rastgele düğüm noktası dağıtımına izin vermemesinden dolayı genellikle birinci metot kullanılıyordu. Ancak bu metodun eşitlik sistemi karmaşık olduğundan düğüm noktaları sayısı 13'ten az oluyordu. Bu da DQM uygulamalarını sınırlandırıyordu.

Chang Shu, Navier-Stokes eşitliğini çözmek için Bellman'ın birinci metodunu seçti ve ağırlık katsayılarını elde etmek için her yöne 21 düğüm kullandı. Ancak yakınsanmış çözüm elde edemedi. Daha sonra bu hatanın karmaşık eşitlik sistemleri için yüksek sayılı düğüm noktaları kullanılmasından kaynaklandığının farkına vardı. Chang Shu dikkatli şekilde göz önüne aldıktan sonra bu sorunun lineer vektör uzay analizi problemsel yaklaşım kullanılarak aşılabileceğini gördü. Düğüm noktalarının seçiminde herhangi bir kısıtlama olmaksızın 1. derece türevlerin ağırlık katsayılarının hesaplanması için basit cebirsel bir formül ortaya koydu. İkinci ve yüksek dereceli ağırlık katsayılarına ise tekrar bağıntısı kullanarak ulaştı. Benzer analizleri fonksiyon ayrık fourier serisi yoluyla yaklaşım bir fonksiyon olduğunda da uygulanarak Diferansiyel Alan hesabı ağırlık katsayılarını hesaplayacak basit cebirsel formülleri türetti.

2. DİFERANSİYEL ALAN HESABI METODU (DQM)' NUN MATEMATİKSEL TEMELLERİ

2.1 Giriş

Günümüzde birçok kullanılabilir nümerik analiz metodu bulunmaktadır. Düşük dereceli metotlar kategorisinde bulunan FE metodu, değişken prensipleri veya ağırlık rezidüleri prensiplerine dayanır. FD metodu ise Taylor Serisi açılımı veya polinomsal yaklaşımlara dayanır.

Düşük dereceli metotlarla (FEM, FDM) bu özel noktalarda doğru çözümlerin elde edilmesi için hala çok fazla düğüm noktası kullanılması gerekir. Kabul edilebilir derecede küçük sayıda düğüm noktaları kullanılarak doğru nümerik çözümleri elde etmek için etkili bir ayırma tekniği araştırması sonucunda Bellmann, 1971'de DQ metodunu tanımlamıştır. DQ metodunda bir koordinat yönüne göre bir fonksiyonun kısmi türevi, bu koordinat yönü boyunca tüm ayırık noktalarda, tüm fonksiyon değerlerinin lineer ağırlıkları toplamı olarak ifade edilir. DQ metodunun anahtarı herhangi bir dereceli bir türevin ayırık noktalara ayrılması için ağırlık katsayılarının hesaplanmasıdır.

1989 da Civan, Bellmann'ın birinci yaklaşım yoluyla ağırlık katsayılarının, yüksek sayıdaki düğüm noktaları için hesaplanmasındaki zorluğun gerçekte Vandermonde matrisinin karmaşık karakterine bağlı olduğunu farkına vardı.

Quan ve Chang 1989'da test fonksiyonu olarak Lagrange interpolasyon polinomunu uygulamıştır ve bunun sonucunda 1. ve 2. derece türevlerin ayırık noktalarının ağırlık katsayılarını hesaplayacak açık formüller elde etmişlerdir.

Shu ve Richard 1990'da ve Shu 1991'de ağırlık katsayılarının hesaplanmasındaki tüm metotları lineer vektör uzayı analizi ve yüksek dereceli polinomsal yaklaşım analizi altında gerçekleştirmişlerdir.

Bu ana kadar yapılan çalışmalar polinomsal yaklaşım temelli olduğundan bunlar polinom tabanlı diferansiyel alan hesabı (PDQ) metodu olarak göz önünde bulundurulabilir.

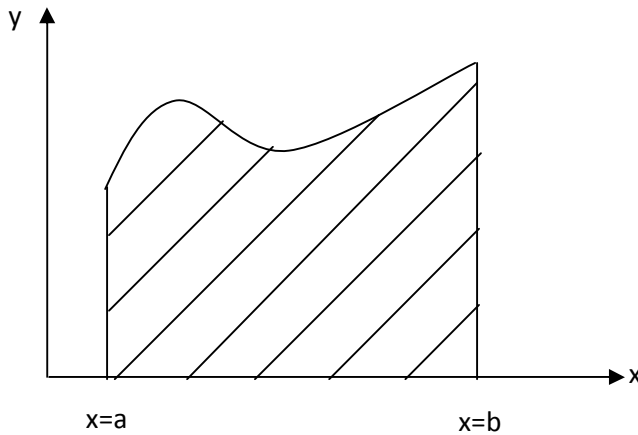
Shu ve Chew (1997) ve Shu ve Xue (1997), fonksiyona ya da kısmi diferansiyel eşitliğinin (PDE) çözümüne, fourier serileri açılımı yoluyla yaklaşıldığı zaman DQ yaklaşımı içinde 1. ve 2. derece türevlerin ağırlık katsayılarının hesaplanabileceği bazı basit cebirsel formüller geliştirdiler. Bu yaklaşım FDQ olarak bilinir. Gelişmiş FDQ aynı zamanda lineer vektör uzayı analizinde de kullanılmaktadır.

2.2 DQM yoluyla türev yaklaşımı

DQ metodu, türevlerin yaklaşımı için bir nümerik ayırma tekniği olup konvensiyonel integral alan hesabı fikrinden ortaya çıkmıştır.

2.2.1 İntegral alan hesabı(IQ)

Sınırlı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde $\int_a^b f(x) dx$ 'in hesaplanması fizik ve mühendislikte sıklıkla ortaya çıkan bir problemdir. Eğer F fonksiyonu $dF/dx=f$ gibi bir eşitlik içeriyorsa bu integralin değeri $F(b)-F(a)$ ' dır. Ancak pratik problemlerde eğer F için kesin bir ifade elde etmek olanaksızsa bu integralin değerini hesaplamak çok zor olur. Zaten f 'in değeri sadece ayrık noktalarda bilinebilir. Dolayısıyla nümerik yaklaşım zorunludur.



Şekil 2.1. Bir aralık üzerinde $f(x)$ 'in integrali

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrali f(x) eğrisinin altında kalan alanı gösterir. Yani integral hesabı alan yaklaşımı olarak da yapılabilir. Bu özellik kullanılarak birçok nümerik teknik geliştirilmiştir.

$$\int_a^b f(x) dx$$

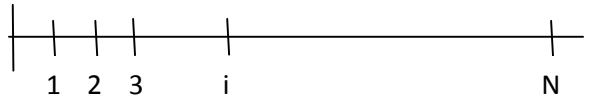
İntegraline,

$$\int_a^b f(x) dx = w_1 f_1 + w_2 f_2 + \dots + w_n f_n = \sum_{k=1}^n w_k f_k \quad (2.1)$$

ifadesiyle yaklaşılabilir. Burada $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ 'ler ağırlık kasayıları $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ 'ler ayrı noktalardaki fonksiyon değerleridir.

(2.1) eşitliği integral alan hesabı olarak isimlendirilir ve sınırlı bir aralık üzerinde integral yaklaşımı elde etmek için bütün integral alanındaki tüm fonksiyonel değerleri kullanır.

2.2.2 Diferansiyel alan hesabı(DQ)



Şekil 2.2. Tek boyutlu problem

Bir boyutlu bir problemi göz önüne alalım ve f(x) fonksiyonun tüm bölge üzerinde yeteri kadar düzgün olduğunu varsayalım. Bellmann integral alan hesabı fikrini takiben x_i düğüm noktasında f(x) fonksiyonun x'e göre birinci dereceden türevine tüm bölge içindeki tüm fonksiyonel değerlerin lineer toplamı yoluyla yaklaşılmasını önerdi.

$$f_x(x_i) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot f(x_j) \quad i=1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

Burada, a_{ij} ağırlık katsayılarını, N tüm bölgedeki düğüm nokta sayısını verir. 2.2 formülü DQ olarak adlandırılır. Ağırlık katsayılarının (a_{ij}) x_i ' nin farklı değerleri için farklı olduğu söylenebilir. DQ yaklaşımındaki anahtar nokta ağırlık katsayılarının belirlenmesidir. Ağırlık katsayıları fonksiyon yaklaşım analizi içerisinde belirlenebilir.

2.3 Kısmi diferansiyel eşitliklerin çözümü ve fonksiyonel yaklaşımı

Kısmi Diferansiyel eşitliğinin çözümü veya yaklaşık çözümü kapalı bir fonksiyon yaklaşımına sahiptir.

2.3.1 Yüksek dereceli polinom yaklaşımı

Pratik uygulamalarda eğer $f(x)$ kısmi diferansiyel eşitliğinin çözümünü gösteriyorsa $f(x)$ 'e N 'den daha düşük dereceli bir polinom yoluyla yaklaşılabilir. Bu yaklaşımın konvensiyonel yorumu 2.3 eşitliğindeki gibidir.

$$f(x) = P_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k x^k \quad (2.3)$$

Burada c_k sabittir. $P_N(x)$ N boyutlu lineer vektör uzayı V_N ' i meydana getirir. V_N lineer vektör uzayı içinde, polinom vektörlerinin bir dizisi $(1, x, x^2, \dots, x^{N-1})$ lineer bağımsızdır. Dolayısıyla,

$$s_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

$S_k(x)$ V_N 'in bir bazıdır. Kısmi diferansiyel eşitliğin nümerik çözümü için ayırık noktadaki fonksiyonel değerleri bulmaya ihtiyacımız vardır.

Kapalı $[a, b]$ aralığı içinde $a = x_1, x_2, x_3, \dots, x_N = b$ koordinatlarında N tane ayırık nokta olsun ve bir x_i ayırık noktasında fonksiyonel değeri $f(x_i)$ olsun. 2.3 eşitliğindeki sabitler aşağıdaki eşitlik sisteminde hesaplanabilir.

d_1, d_2, \dots, d_n bir F alanı içindeki elemanlar olsun ve kapalı bir $[a, b]$ aralığında doğru olduğunu varsayalım.

$$d_1 l_1(x) + d_2 l_2(x) + \dots + d_N l_N(x) = \sum_{k=1}^N d_k l_k(x) = 0 \quad (2.8)$$

Böylece $l_1(x), l_2(x), \dots, l_N(x)$ 'in lineer bağımsız olduğunu ve V_N içinde bir baz olarak alınabileceğini söyleyebiliriz. Yaklaşım polinomu $P_N(x)$ aynı zamanda Newton interpolasyon polinomu ile hesaplanabilir.

$$P_N(x) = a_1 + \sum_{k=2}^N a_k (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1}) \quad (2.9)$$

2.9 eşitliği vektörel toplam ve skaler çarpım kurallarını sağlar. Bu eşitlikte verilen polinom derecesi N 'den küçüktür. Aynı zamanda Newton interpolasyon polinomunun polinom vektör uzayı V_N içindedir.

$$n_1(x) = 1, \quad n_k(x) = n_{k-1}(x) \cdot (x - x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (2.10)$$

2.10 eşitliği V_N içinde bir polinom dizisidir. Biz kolaylıkla bu vektör dizisinin lineer bağımsız olduğunu söyleyebiliriz.

$$d_1 n_1(x) + d_2 n_2(x) + \dots + d_N n_N(x) = \sum_{k=1}^N d_k n_k(x) = 0 \quad (2.11)$$

d_1, d_2, \dots, d_n bir F alanının elemanları ve 2.11 eşitliği bir $[a, b]$ aralığı içinde herhangi bir noktada sağlanıyor olsun. Eğer sırasıyla $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ayrık noktalarında 2.11 eşitliği sağlanırsa $d_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$ diyebiliriz. Böylece $n_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, N$ lineer bağımsızdır ve V_N içinde bir baz olarak göz önüne alınabilir.

2.9 eşitliği içindeki sabitler ayrık noktadaki fonksiyonel değerlere dayanarak ifade edilebilir. 2.9 eşitliği içindeki a_N , $P_N(x)$ polinomunun en yüksek katsayısına eşittir.

$$a_1 + \sum_{k=2}^N a_k (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})$$

Yukarıdaki polinom, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ noktalarında fonksiyon değerlerini sağlayan $m-1$ dereceli polinomdur. 2.6 eşitliğinden direk olarak 2.12 eşitliğini elde ederiz.

$$a_m = \sum_{k=1}^m \frac{f(x_k)}{M_m^{(1)}(x_k)}, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

$$M_m^{(1)}(x_k) = (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_m) = \prod_{j=1, j \neq k}^m x_k - x_j$$

Burada $M^{(1)}(x_k)$, lagrange interpolasyon polinomunun birinci dereceden türevinin x_k noktasındaki değeridir.

Kıscacası bir lineer polinom vektör uzayı V_N içinde birçok vektör dizisi vardır. Tipik üç tane baz vektör tipi aşağıda verilmiştir.

$$r_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.13a)$$

$$r_k(x) = \frac{M(x)}{M^{(1)}(x_k)(x - x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.13b)$$

$$r_1(x) = 1, \quad r_k(x) = r_{k-1}(x) \cdot (x - x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (2.13c)$$

3. POLİNOM TABANLI DİFERANSİYEL ALAN HESABI METODU (PDQM)

3.1. Giriş

Bu bölümde, DQ yaklaşımı içinde, kısmi diferansiyel eşitliğin çözümüne yüksek dereceli bir polinom yoluyla yaklaştığımızda, ağırlık katsayılarının hesaplanmasını inceleyeceğiz. PDQ metodu içinde ağırlık katsayılarının hesabı ilk olarak Bellmann ve arkadaşları tarafından yapıldı. Onlar birinci dereceden türevlerin ağırlık katsayılarının hesaplanması için iki yol önerdiler. Birinci yol cebirsel eşitlik sistemini içerir. İkinci yol ise basit cebirsel formül kullanır fakat ayırık noktaların koordinatları ötelenmiş legendre polinomunun kökleri olarak seçilir. PDQ ile ilgili ilk uygulamalarda ağırlık katsayılarının eldesinde Bellmann'nın ilk yaklaşımı kullanıldı. Bunun nedeni birinci yaklaşımın ayırık noktaların koordinatlarının rastgele seçilebilmesine izin vermesiydi. Ancak cebirsel eşitlik sisteminin derecesi ayırık noktaların sayısına eşit olduğunda çözüm matrisi çok büyük olur ve çözümü zor olur. Dolayısıyla büyük ayırık nokta sayıları için ağırlık katsayılarını elde etmek çok zordur. Quan ve Chang 1989 yılında test fonksiyonu olarak Lagrange interpolasyon polinomu kullanarak birinci ve ikinci derece türevler için ağırlık katsayılarını hesaplayacak açık formüller elde ettiler. Ancak bu durumda iki soru akla geliyordu. Birincisi ağırlık katsayılarını hesaplamak için birçok yol nasıl bulunabiliyordu? İkincisi ise farklı yaklaşımlarla hesaplanan ağırlık katsayılarının aynı olduğundan nasıl emin olabilirdik? Lineer vektör uzay analizinin uygulanmasıyla bu sorular cevaplanabildi.

Shu ve Richards 1990 yılında ve Shu 1991 yılında lineer vektör uzayının özelliklerini kullanarak, PDQ içinde ağırlık katsayılarını hesaplayan tüm metotların, lineer vektör uzayı içinde uygun baz vektörlerinin seçilmesiyle genelleştirilebileceğini buldu. Shu, düğüm noktalarının seçiminde herhangi bir kısıtlama olmadan birinci derece türevlerin ağırlık katsayılarının hesaplanması için basit cebirsel bir formül ortaya koydu. Ayrıca ikinci ve daha yüksek dereceli türevlerin ağırlık katsayılarını hesaplamak için bir tekrar bağıntısı buldu.

3.2. Birinci derece türevler için ağırlık katsayılarının hesaplanması

Türevlerin DQ yaklaşımı integral kuadratur fikrinden ortaya çıkmıştır. [a,b] kapalı aralığı üzerinde bir boyutlu bir problem göz önüne alalım.

$$a = x_1, x_2, \dots, x_N = b.$$

olarak dizilmiş N adet düğüm noktası olduğunu varsayalım. Bellman bir $f(x)$ fonksiyonunun [a,b] kapalı aralığı üzerinde yeterli derecede düzgün olduğunu, dolayısıyla $f(x)$ 'in herhangi bir düğüm noktasında birinci derece türevine 3.1 formülüyle yaklaşılabilirini varsaydı.

$$f_x^{(1)}(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot f(x_j), \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

Burada $f(x_j)$, x_j düğüm noktasında fonksiyonel değeri; $f_x^{(1)}(x_i)$, x_i 'de $f(x)$ 'in birinci derece türevini a_{ij} 1. derece türevinin ağırlık katsayısını gösterir.

3.1 eşitliğinde a_{ij} ağırlık katsayılarının determinasyonu DQ yaklaşımında anahtar uygulamadır. Ağırlık katsayılarıyla birlikte türevleri hesaplamak için fonksiyon değerleri kolaylıkla kullanılabilir.

3.2.1 Bellman'ın yaklaşımları

Bellman 3.1 eşitliğinde a_{ij} ağırlık katsayılarını hesaplamak için iki yaklaşım kurdu. Bu iki yaklaşım iki farklı test fonksiyonunun kullanımını temel almıştır.

3.2.1.1 Bellman'ın birinci yaklaşımı

Bu yaklaşımda test fonksiyonları aşağıdaki gibi seçilir.

$$g_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.2)$$

3.2 eşitliği N adet test fonksiyonu verir. 3.1 eşitliğindeki a_{ij} ağırlık katsayıları için i ve j 1’den N’e kadar alınır. Bu nedenle toplam ağırlık katsayıları sayısı $N \times N$ ’ dir. Bu ağırlık katsayıları elde etmek için N test fonksiyonları $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ N düğüm noktalarında uygulanmalıdır. Sonuç olarak a_{ij} için $N \times N$ cebirsel eşitlik elde edilir.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N a_{ij} = 0 \\ \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot x_j = 1 \\ \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot x_j = k \cdot x_i^{k-1}, & k = 2, 3, \dots, N-1 \\ & i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (3.3)$$

3.3 eşitlik sistemi matrisi, vandermonde formunda olduğunda tek bir çözüme sahiptir. Ancak N büyük olduğu zaman matris karmaşık olur ve bunun tersini almak zordur. Bellman’ın birinci yaklaşımında N genellikle 13’ten küçük seçilir.

3.2.1.2 Bellman’ın ikinci yaklaşımı

Bu yaklaşım birinci yaklaşıma benzer fakat farklı test fonksiyonları kullanır. Bu yaklaşımda kullanılan test fonksiyonu ifadesi 3.4 eşitliği ile verilmiştir.

$$g_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k) \cdot L_N^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

Burada $L_N(x)$ N inci dereceden legendre polinomu ve $L_N^{(1)}(x)$, $L_N(x)$ ’in birinci dereceden türevidir. Bellman, legendre polinomunun kökleri olarak x_k seçerek ve N adet düğüm noktasında 3.4 eşitliğine uygulayarak a_{ij} ağırlık katsayılarını hesaplayabileceğimiz basit cebirsel bir formül geliştirmiştir.

$$a_{ij} = \frac{L_N^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) \cdot L_N^{(1)}(x_j)}, \text{ for } j \neq i \quad (3.5a)$$

$$a_{ij} = \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)} \quad (3.5b)$$

3.5'in kullanılmasıyla ağırlık katsayılarının hesabı çok basit hale gelir. Ancak bu yaklaşımda düğüm noktalarının koordinatları rastgele seçilemeyeceğinden, bu yaklaşım birinci yaklaşım kadar esnek değildir. Bunun yerine düğüm noktaları, N inci dereceden Legendre Polinomunun kökleri olarak seçilmelidir. İkinci yaklaşım düğüm noktalarının seçiminde esneklik içermediğinden pratik uygulamalarda genellikle birinci yaklaşım benimsenmiştir.

3.2.2 Quan ve chang'in yaklaşımı

Ağırlık katsayılarının hesaplanmasında Bellman'ın yaklaşımlarını geliştirmek için araştırmacıların yaptıkları birçok deneme içerisinde, en yararlı yaklaşım Quan ve Chang tarafından üretileniydi. Quan ve Chang, test fonksiyonu olarak 3.6' da gözüken lagrange interpolasyon polinomunu kullanmışlardır.

$$g_k(x) = \frac{M(x)}{(x - x_k).M^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

$$M(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) \quad (3.7)$$

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (3.8)$$

Daha sonra 3.6 eşitliğini N adet düğüm noktasında uygulayarak a_{ij} ağırlık katsayılarını hesaplamak için aşağıda gösterilen cebirsel formülleri geliştirmişlerdir.

$$a_{ij} = \frac{1}{x_j - x_i} \prod_{k=1, k \neq j}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}, \text{ for } j \neq i \quad (3.9a)$$

$$a_{ii} = \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_k} \quad (3.9b)$$

3.2.3 Shu'nun genel yaklaşımı

Shu'nun genel yaklaşımı Quan ve Chang'in yaklaşımıyla beraber tüm yaklaşımları kapsar. Shu'nun genel yaklaşımı Bellman'ın yaklaşımlarından esinlenmiştir. Bellman'ın iki yaklaşımından Shu'nun aklında iki soru oluştu. Birincisi, ağırlık katsayılarının elde etmek için neden iki yaklaşım kullanabiliyorduk. İkincisi de bu iki yaklaşımın aynı ağırlık katsayılarını verip vermediği idi. Eğer veriyorsa ağırlık katsayılarını hesaplamak için bazı diğer yaklaşımlarda olabilirdi.

Bu soruların polinomsal yaklaşım ve lineer vektör uzay analizi yoluyla cevaplanabileceğini görmüştür.

Bir kısmi diferansiyel denklem (PDE)'nin çözümüne yüksek dereceli bir polinom yoluyla direk yaklaşılabilir. Yaklaşım polinomunun derecesinin $N-1$ olduğunu varsayalım. Bu yaklaşım polinomu, vektörel toplam ve skaler çarpım operasyonlarıyla birlikte N boyutlu lineer vektör uzayı V_N 'den meydana gelir bu da farklı formlarda belirtilebilir. Bu durum için kullanılan formlardan birisi 3.10 eşitliğidir.

$$f(x) = \sum_{k=1}^N c_k \cdot x^{k-1} \quad (3.10)$$

c_k bir sabittir. Lineer vektör uzayı V_N içerisinde birçok baz vektörleri seti bulunur.

Baz vektörleri aynı zamanda baz polinomları olarak adlandırılır. Tipik baz polinomları setinin 4 tanesi aşağıda listelenmiştir.

$$r_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.11a)$$

$$r_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k)L_N^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.11b)$$

$$r_k(x) = \frac{M(x)}{(x - x_k)M^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.11c)$$

$$r_1(x) = 1, \quad r_k(x) = (x - x_{k-1})r_{k-1}(x), \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (3.11d)$$

Baz polinom setlerinin dördü içinde 3.11b ve 3.11c lagrange interpolasyon polinomlarıdır. 3.11a Bellman'ın birinci yaklaşımının test fonksiyonlarıyla aynı, 3.11b ise Bellman'ın ikinci yaklaşımının test fonksiyonlarıyla aynıdır. Yani Bellman'ın yaklaşımları V_N içinde baz polinomlarının setlerinden iki tanesidir.

3.1 eşitliği Lineer operatördür. Lineer vektör uzayı özelliklerinden biliyoruz ki eğer baz polinomlarının bir seti eşitlik 3.1 gibi bir lineer operatörü sağlıyorsa baz polinomlarının diğer setleri de sağlar.

Yani baz polinomlarının her seti aynı ağırlık katsayılarını verir. Bundan dolayı ağırlık katsayıları test fonksiyonlarının seçimine bağlı değildir.

Genelde biz baz polinomlarının iki setini kullanırız. Lagrange interpolasyon polinomları yani 3.11c eşitliği baz polinomlarının birinci seti olarak alınır.

$$N(x_i, x_j) = M^{(1)}(x_i) \cdot \delta_{ij}$$

$$M(x) = N(x, x_k) \cdot (x - x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.12)$$

Basit olarak biz 3.12'yi set ederiz. Burada δ_{ij} kronecker operatörüdür. 3.12 eşitliğini kullanarak 3.11c eşitliği 3.13 eşitliğine sadeleştirilebilir.

$$r_k(x) = \frac{N(x, x_k)}{M^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.13)$$

3.13 eşitliğininin 3.1 eşitliğinde yerine koyulması bize 3.14 eşitliğini verir.

$$a_{ij} = \frac{N^{(1)}(x_i, x_j)}{M^{(1)}(x_j)} \quad (3.14)$$

3.14 eşitliğinde $M^{(1)}(x_j)$, 3.8 eşitliğinden kolaylıkla hesaplanabilir. $N^{(1)}(x_i, x_j)$ 'i ölçmek için, 3.12 eşitliğini x 'e göre ayırırız ve aşağıdaki tekrar formülünü elde ederiz.

$$M^{(m)}(x) = N^{(m)}(x, x_k)(x - x_k) + m \cdot N^{(m-1)}(x, x_k) \quad (3.15)$$

$$m = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

$M^{(m)}(x)$ ve $N^{(m)}(x, x_k)$ sırasıyla $M(x)$ ve $N(x, x_k)$ in m inci dereceden türevlerini gösterir. 3.15 eşitliğinden $N^{(1)}(x_i, x_j)$ ifadesini aşağıdaki şekilde elde edebiliriz.

$$N^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(1)}(x_i)}{x_i - x_j}, \quad \text{for } i \neq j \quad (3.16a)$$

$$N^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(2)}(x_i)}{2} \quad (3.16b)$$

3.16 eşitliğini 3.14 eşitliği içerisinde yerine koyarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$a_{ij} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j).M^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (3.17b)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \quad (3.18)$$

3.17a ve 3.18 eşitlikleri a_{ij} ağırlık katsayılarını hesaplanmasına olanak sağlayan iki formüldür.

3.3. İkinci derece türevler için ağırlık katsayılarının hesabı

İkinci derece türevlerin ağırlık katsayılarının hesaplanmasında 3.19 eşiliği ile verilen benzer bir yaklaşım formu kullanılır.

$$f_x^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^N b_{ij} \cdot f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.19)$$

Burada $f_x^{(2)}(x_i)$ $f(x)$ in x_i de ikinci derece türevidir. b_{ij} ikinci derece türevin ağırlık katsayısıdır. 3.19 eşitliği bir lineer operaördür. 3.19 eşiliği 3.1 eşitliği ile aynı formdadır. Bu iki eşilik arasındaki tek fark, farklı ağırlık katsayılarının kullanılmasıdır. b_{ij} 'i hesaplamak için Shu'nun genel yaklaşımı ile Quan ve Chang'in yaklaşımı kullanılabilir.

3.3.1. Quan ve chang'in yaklaşımı

Bu yaklaşımda Quan ve Chang test fonksiyonu olarak lagrange interpolasyon polinomu kullanmışlar ve aşağıdaki formülleri elde etmişlerdir.

$$b_{ij} = \frac{2}{x_j - x_i} \left(\prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \right) \left(\sum_{l=1, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \quad \text{for } i \neq j \quad (3.20a)$$

$$b_{ii} = 2 \sum_{k=1, k \neq i}^{N-1} \left[\frac{1}{x_i - x_k} \left(\sum_{l=k, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \right] \quad (3.20b)$$

3.3.2. Shu'nun genel yaklaşımı

Birinci derece türevlerinkine benzer olarak Shu'nun genel yaklaşımı, polinom yaklaşımı ve lineer vektör uzay analizini temel alır. Baz polinomlarının iki seti olan 3.11a ve 3.11c kullanılmış ve şu formüller türetilmiştir.

$$b_{ij} = 2a_{ij} \left(a_{ii} - \frac{1}{x_i - x_j} \right), \quad i \neq j \quad (3.21)$$

$$b_{ii} = \frac{M^{(3)}(x_i)}{3M^{(1)}(x_i)} \quad (3.22)$$

$$\sum_{j=1}^N b_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad b_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ij} \quad (3.23)$$

b_{ij} 3.21 eşitliğinden kolayca hesaplanabilir ancak b_{ii} üçüncü dereceden türev içerdiğinden kolayca hesaplanamaz. Bu zorluk lineer vektör uzayının özellikleri kullanılarak giderilebilir. Birinci derece türev durumundaki analize benzer olarak, lagrange interpolasyon polinomundan türetilen b_{ij} için eşitlik sistemi, başka bir baz fonksiyonu olan x^{k-1} , $k=1, 2, \dots, N$ fonksiyonundan türetilene eşittir. Dolayısıyla b_{ij} aynı zamanda $k=1$ durumunda x^{k-1} baz polinomundan türetilen 3.23 formüllerini de sağlar. Shu'nun genel yaklaşımının uygulaması için önce 3.21 eşitliğinden $i \neq j$ durumunda b_{ij} hesaplanır. Hemen ardından b_{ii} 3.23 eşitliğinden hesaplanır.

4. HERHANGİ BİR GENEL FONKSİYON İÇİN FOURİER AÇILIMI TABANLI DİFERANSİYEL ALAN HESABI METODU(FDQM)

Birinci bölümde elektromanyetik problemlerin özelliğine bağlı olarak, bir kısmi diferansiyel denklemin çözümüne yüksek dereceli bir polinomla veya fourier serisi açılımıyla yaklaşılabileceğini söylemiştik. İkinci bölümde ise PDQ için ağırlık katsayıları hesabını detaylı olarak tanımlamıştık. Polinomsal yaklaşım birçok mühendislik problemi için uygundur. Ancak bazı problemler için örneğin periyodik özelliklere sahip Helmholtz denkleminde PDQ doğru çözüm için en iyi seçim olmayacaktır. Bu tür problemlerde fourier açılımı tabanlı diferansiyel alan hesabı (FDQ) en iyi seçim olur.

$f(x)$ fonksiyonu'na bir fourier serileri genişleme formu yoluyla yaklaşıldığını varsayalım.

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N/2} (c_k \cos kx + d_k \sin kx) \quad (4.1)$$

Yukarıdaki eşitlik $N+1$ boyutlu bir V_{N+1} lineer vektör uzayı oluşturur. V_{N+1} içerisindeki iki tipik baz vektörleri seti vardır.

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos(Nx/2), \sin(Nx/2) \quad (4.2a)$$

$$s_k(x) = \frac{S(x)}{q(x_k) \cdot \sin\left(\frac{x - x_k}{2}\right)}, \quad k=0,1,2,\dots,N \quad (4.2b)$$

$$S(x) = \prod_{k=0}^N \sin \frac{x - x_k}{2} \quad (4.3a)$$

$$q(x_i) = \prod_{k=0, k \neq i}^N \sin \frac{x_i - x_k}{2} \quad (4.3b)$$

$$f_x^{(1)} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot f(x_j), \quad i=1, 2, 3, \dots, N \quad (4.3.c)$$

$$f_x^{(2)} = \sum_{j=1}^N b_{ij} \cdot f(x_j), \quad i=1, 2, 3, \dots, N \quad (4.3d)$$

Birinci, ikinci ve üçüncü dereceli türevlerin ağırlık katsayılarını hesaplayacak açık formülleri türetebilmek için baz vektörlerin yukarıdaki iki tipini kullanacağız. Daha yüksek dereceli türevlerde ağırlık katsayılarının hesaplanmasında matris çarpım metodu önerilmektedir. Biz sadece 4.2a yı 4.3c ve 4.3d de yerine koyarak 4.4a ve 4.4b eşitliklerini elde ederiz.

$$\sum_{j=0}^N a_{ij} = 0 \quad \text{ya da} \quad a_{ii} = - \sum_{j=0, j \neq i}^N a_{ij} \quad (4.4a)$$

$$\sum_{j=0}^N b_{ij} = 0 \quad \text{ya da} \quad b_{ii} = - \sum_{j=0, j \neq i}^N b_{ij} \quad (4.4b)$$

4.4a ve 4.4b'de ki eşitlikler diagonal ağırlık katsayılarını hesaplamada kullanılabilir. Diagonal olmayan ağırlık katsayılarının hesabında baz vektörlerinin ikincisi yani 4.2b'nin kullanılması gerekir.

Gerekli matematiksel işlemler ve yerine koyma işlemlerinden sonra sonuç olarak şu açık formüllere ulaşılr.

$$a_{ij} = \frac{q(x_i)}{2 \cdot \sin \frac{x_i - x_j}{2} \cdot q(x_j)}, \quad j \neq i \text{ iken} \quad (4.5)$$

$$b_{ij} = a_{ij} \left[2a_{ii} - \cot \frac{x_i - x_j}{2} \right], \quad j \neq i \text{ iken} \quad (4.6)$$

Yukarıdaki formüller diagonal olmayan ağırlık katsayılarının hesaplanması için kullanılır. Bu formülleri hesaplayacak program MATLAB programı ile yazılmış ve bu alanda çalışan araştırmacılara ışık olabilmesi adına tamamı EK 1'de sunulmuştur.

5. BULGULAR

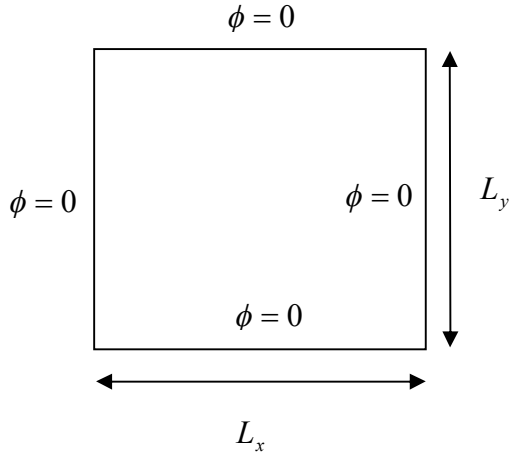
Bu kısımda, iki boyutlu Helmholtz denklemi tabanlı elektromanyetik uygulamalar ele alınmış ve bu uygulamalar hem PDQ hem de FDQ metot kullanılarak çözülmüş ve karşılaştırılmıştır.

5.1. Uygulama1

Bu örnekte iki boyutlu Helmholtz problemini ele aldım. Çözüm bölgesi olarak $L_x=L_y=1$ alınarak kare bir çözüm bölgesi belirlendi. Dalga sayısı olarak $k= 0,5$ ve kaynak olarak $f(x, y) = (-2\pi^2 + 0,5) \sin \pi x \cdot \sin \pi y$ kaynağı alındı. Sınır şartı, tüm sınırlarda $\phi=0$ 'dır. Amacımız potansiyeli hem PDQM hem de analitik olarak bulup karşılaştırarak bazı sonuçlara ulaşmak.

Problemin gerçek çözümü aşağıdaki eşilikle verilmiştir.

$$\phi = \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$



Şekil 5.1. İki boyutlu Helmholtz problemi

Hesap bölgesi L_x uzunluğunda ve L_y genişliğinde bir dikdörtgenel bölgedir. Örneğimizde iki boyutlu Helmholtz denklemini çözmek için PDQ uygulanacaktır.

Öncelikle 5.1a ve 5.1b deki Chebychev-Gauss-Lobatto düğüm dağıtımını kullanılarak düğüm noktalarının x ve y koordinatları belirlendi.

$$0 \leq X \leq L_x, \quad 0 \leq Y \leq L_y,$$

$$X_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1} \pi\right) \right] L_x \quad i=1, 2, \dots, N \quad (5.1a)$$

$$Y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{j-1}{M-1} \pi\right) \right] L_y \quad j=1, 2, \dots, M \quad (5.1b)$$

Yukarıdaki formüllerin MATLAB kodu yazılmış ve EK 1 de sunulmuştur. Biz örneğimizi N=M=5 ve N=M=7 için gerçekleştirdik.

İki boyutlu Helmholtz denkleminin genel formu,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = f(x, y)$$

Helmholtz denkleminin PDQ karşılığı

$$\sum_{k=1}^N W_{ik}^{(2)} \phi_{kj} + \sum_{k=1}^M \overline{W}_{jk}^{(2)} \phi_{ik} + k^2 \phi_{ij} = f_{ij}$$

N ve M sırasıyla x ve y yönlerinde düğüm noktaları sayısı , $W_{ik}^{(2)}$ ve $\overline{W}_{jk}^{(2)}$ sırasıyla x ve y yönlerindeki ağırlık katsayılarıdır.

Ağırlık katsayılarının hesabında Quan ve Chang'in yaklaşımı kullanılmıştır. Quan ve Chang yaklaşımlarında lagrange interpolasyon polinomu kullanılmaktadırlar.

$$b_{ij} = \frac{2}{x_j - x_i} \left(\prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \right) \left(\sum_{l=1, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \quad for \quad i \neq j \quad (5.1c)$$

$$b_{ii} = 2 \sum_{k=1, k \neq i}^{N-1} \left[\frac{1}{x_i - x_k} \left(\sum_{l=1, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \right] \quad for \quad i = j \quad (5.1d)$$

5.1c ve 5.1d formüllerinin matlab kodları yazılmış ve EK 1 de sunulmuştur.

PDQ yaklaşımının performansını 5.1e eşitliği ile ölçülmüştür.

$$\Delta\phi = |\phi_{ij} - \phi_{exact}(x_i, y_j)| \quad (5.1e)$$

Burada ϕ_{ij} , (x_i, y_j) ağ noktasındaki nümerik çözüm, $\phi_{exact}(x_i, y_j)$ ise ağ noktasındaki gerçek çözümdür.

5.1.1. Uygulama1'in PDQM ile çözümü

Çizelge 5.1. Uygulama1' in $N=M=5$, $L_x = L_y = 1$ ve $k^2 = 0.5$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.1464$	$X_3 = 0.5000$	$X_4 = 0.8536$	$X_5 = 1.00$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.1464$	0	0.1975	0.4457	0.1975	0
$Y_3 = 0.5000$	0	0.4457	1.0055	0.4457	0
$Y_4 = 0.8536$	0	0.1975	0.4457	0.1975	0
$Y_5 = 1.00$	0	0	0	0	0

Çizelge 5.2. Uygulama1' in $N=M=5$, $L_x = L_y = 1$ ve $k^2 = 0.5$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.1464$	$X_3 = 0.5000$	$X_4 = 0.8536$	$X_5 = 1.00$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.1464$	0	0.1972	0.4440	0.1972	0
$Y_3 = 0.5000$	0	0.4440	1.0000	0.4440	0
$Y_4 = 0.8536$	0	0.1972	0.4440	0.1972	0
$Y_5 = 1.00$	0	0	0	0	0

Çizelge 5.3. Uygulama1' in $N=M=5$, $L_x = L_y = 1$ ve $k^2 = 0.5$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.1464$	$X_3 = 0.5000$	$X_4 = 0.8536$	$X_5 = 1.00$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.1464$	0	0.0004	0.0017	0.0004	0
$Y_3 = 0.5000$	0	0.0017	0.0055	0.0017	0
$Y_4 = 0.8536$	0	0.0004	0.0017	0.0004	0

$Y_5 = 1.00$	0	0	0	0	0
--------------	---	---	---	---	---

Çizelge 5.4. Uygulama1' in $N=M=7$, $L_x = L_y=1$ ve $k^2=0.5$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.06$	$X_3 = 0.25$	$X_4 = 0.5$	$X_5 = 0.75$	$X_6 = 0,93$	$X_7 = 1$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.06$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_3 = 0.25$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_4 = 0.5$	0	0.2089	0.7071	1.0000	0.7071	0.2089	0
$Y_5 = 0.75$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_6 = 0.93$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_7 = 1$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.5. Uygulama1' in $N=M=7$, $L_x = L_y=1$ ve $k^2=0.5$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.06$	$X_3 = 0.25$	$X_4 = 0.5$	$X_5 = 0.75$	$X_6 = 0,93$	$X_7 = 1$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.06$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_3 = 0.25$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_4 = 0.5$	0	0.2089	0.7071	1.0000	0.7071	0.2089	0
$Y_5 = 0.75$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_6 = 0.93$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_7 = 1$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.6. Uygulama1' in $N=M=7$, $L_x = L_y = 1$ ve $k^2 = 0.5$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\Delta\phi$

1.0e-004 *

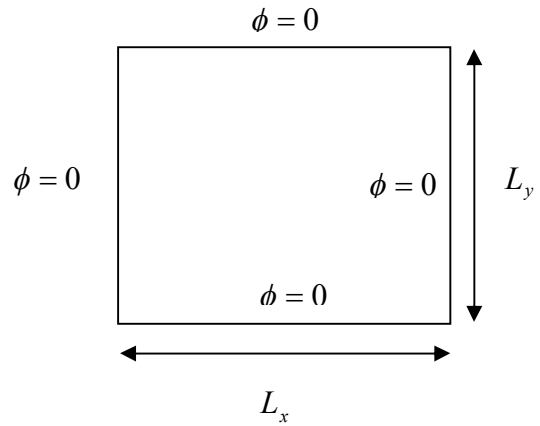
	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.06$	$X_3 = 0.25$	$X_4 = 0.5$	$X_5 = 0.75$	$X_6 = 0.93$	$X_7 = 1$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.06$	0	0.0213	0.0564	0.0235	0.0564	0.0213	0
$Y_3 = 0.25$	0	0.0564	0.1376	0.0041	0.1376	0.0564	0
$Y_4 = 0.5$	0	0.0235	0.0041	0.2637	0.0041	0.0235	0
$Y_5 = 0.75$	0	0.0564	0.1376	0.0041	0.1376	0.0564	0
$Y_6 = 0.93$	0	0.0213	0.0564	0.0235	0.0564	0.0213	0
$Y_7 = 1$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0

$N=M=5$ ve $N=M=7$ için PDQ MATLAB programı yazılmış ve EK 1 de sunulmuştur.

5.2. Uygulama2

Bu uygulamada L_x ve L_y π olarak alınmıştır. $k=1, k=2, k=3, k=4$ ve $k=5$ için $f(x, y) = k^2 \cdot [1 - \pi^2 (\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2})] \sin \frac{k\pi x}{L_x} \sin \frac{k\pi y}{L_y}$ dir. Sınır şartı tüm sınırlarda $\phi = 0$ 'dır. Problemin gerçek çözümü aşağıdaki eşitlikte verilmiştir.

$$\phi = \sin \frac{k\pi x}{L_x} \sin \frac{k\pi y}{L_y}$$



Şekil 5.2. İki boyutlu Helmholtz problemi

Hesap bölgesi L_x uzunluğunda ve L_y genişliğinde bir dikdörtgensel bölgedir. Örneğimizde iki boyutlu Helmholtz denklemini çözmek için PDQ uygulanacaktır.

Öncelikle 5.1a ve 5.1b deki Chebychev-Gauss-Lobatto düğüm dağıtımı kullanılarak düğüm noktalarının x ve y koordinatları belirlendi.

$$0 \leq X \leq L_x, \quad 0 \leq Y \leq L_y$$

$$X_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1} \pi\right) \right] L_x \quad i=1, 2, \dots, N \quad (5.2a)$$

$$Y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{j-1}{M-1} \pi\right) \right] L_y \quad j=1, 2, \dots, M \quad (5.2b)$$

Yukarıdaki formüllerin MATLAB kodu yazılmış ve EK 1 de sunulmuştur. Biz örneğimizi $N=M=5$ ve $N=M=7$ için gerçekleştirdik.

İki boyutlu Helmholtz denkleminin genel formu

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = f(x, y)$$

Helmholtz denkleminin PDQ karşılığı

$$\sum_{k=1}^N W_{ik}^{(2)} \phi_{kj} + \sum_{k=1}^M \overline{W}_{jk}^{(2)} \phi_{ik} + k^2 \cdot \phi_{ij} = f_{ij}$$

Ağırlık katsayılarının hesabında Quan ve Chang'in yaklaşımı kullanılmıştır. Quan ve Chang yaklaşımlarında lagrange interpolasyon polinomu kullanılmaktadırlar.

$$b_{ij} = \frac{2}{x_j - x_i} \left(\prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \right) \left(\sum_{l=1, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \quad \text{for } i \neq j \quad (5.2c)$$

$$b_{ii} = 2 \sum_{k=1, k \neq i}^{N-1} \left[\frac{1}{x_i - x_k} \left(\sum_{l=1, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \right] \quad \text{for } i = j \quad (5.2d)$$

5.2c ve 5.2d formüllerinin matlab kodları yazılmış ve EK 1 de sunulmuştur.

PDQ yaklaşımının performansını 5.2e eşitliği ile ölçülmüştür.

$$\Delta\phi = |\phi_{ij} - \phi_{exact}(x_i, y_j)| \quad (5.2e)$$

Burada ϕ_{ij} , (x_i, y_j) ağ noktasındaki nümerik çözüm, $\phi_{exact}(x_i, y_j)$ ise ağ noktasındaki gerçek çözümdür.

5.2.1. Uygulama2'nin PDQM ile çözümü

Çizelge 5.7. Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.46$	$X_3 = 1.57$	$X_4 = 2.68$	$X_5 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.46$	0	0.1984	0.4476	0.1984	0
$Y_3 = 1.57$	0	0.4476	1.0102	0.4476	0
$Y_4 = 2.68$	0	0.1984	0.4476	0.1984	0
$Y_5 = 3.14$	0	0	0	0	0

Çizelge 5.8. Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.46$	$X_3 = 1.57$	$X_4 = 2.68$	$X_5 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.46$	0	0.1972	0.4440	0.1972	0
$Y_3 = 1.57$	0	0.4440	1.0000	0.4440	0
$Y_4 = 2.68$	0	0.1972	0.4440	0.1972	0
$Y_5 = 3.14$	0	0	0	0	0

Çizelge 5.9. Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.46$	$X_3 = 1.57$	$X_4 = 2.68$	$X_5 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.46$	0	0.0012	0.0036	0.0012	0
$Y_3 = 1.57$	0	0.0036	0.0102	0.0036	0
$Y_4 = 2.68$	0	0.0012	0.0036	0.0012	0
$Y_5 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0

Çizelge 5.10. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_4 = 1.57$	0	0.2089	0.7071	1.0000	0.7071	0.2089	0
$Y_5 = 2.35$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_6 = 2.93$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.11. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_4 = 1.57$	0	0.2089	0.7071	1.0000	0.7071	0.2089	0
$Y_5 = 2.35$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_6 = 2.93$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.12. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

1.0e-004 *

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.0566	0.1366	0.1196	0.1306	0.0468	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.1366	0.2758	0.1411	0.2558	0.1033	0
$Y_4 = 1.57$	0	0.1196	0.1411	0.1526	0.1128	0.0725	0
$Y_5 = 2.35$	0	0.1306	0.2558	0.1128	0.2358	0.0974	0
$Y_6 = 2.93$	0	0.0468	0.1033	0.0725	0.0974	0.0369	0
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0

Çizelge 5.13. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.1705	0.4121	-0.0000	-0.4121	-0.1705	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.4121	0.9960	-0.0000	-0.9961	-0.4121	0
$Y_4 = 1.57$	0	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0
$Y_5 = 2.35$	0	-0.4121	-0.9961	0.0000	0.9961	0.4121	0
$Y_6 = 2.93$	0	-0.1705	-0.4121	0.0000	0.4122	0.1705	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.14. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.1669	0.4086	0.0000	-0.4086	-0.1669	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.4086	1.0000	0.0000	-1.0000	-0.4086	0
$Y_4 = 1.57$	0	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0
$Y_5 = 2.35$	0	-0.4086	-1.0000	-0.0000	1.0000	0.4086	0
$Y_6 = 2.93$	0	-0.1669	-0.4086	-0.0000	0.4086	0.1669	0
$Y_7 = 3.14$	0	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0

Çizelge 5.15. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.0036	0.0035	0.0000	0.0035	0.0036	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.0035	0.0040	0.0000	0.0039	0.0036	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.0035	0.0039	0.0000	0.0039	0.0036	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	0.0036	0.0036	0.0000	0.0036	0.0036	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.16. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.3921	0.4568	-0.6906	0.4569	0.3922	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.4568	0.5321	-0.8055	0.5322	0.4569	0
$Y_4 = 1.57$	0	-0.6906	-0.8055	1.2137	-0.8057	-0.6908	0
$Y_5 = 2.35$	0	0.4569	0.5322	-0.8057	0.5323	0.4570	0
$Y_6 = 2.93$	0	0.3922	0.4569	-0.6908	0.4570	0.3922	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.17 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.3484	0.4174	-0.5902	0.4174	0.3484	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.4174	0.5000	-0.7071	0.5000	0.4174	0
$Y_4 = 1.57$	0	-0.5902	-0.7071	1.0000	-0.7071	-0.5902	0
$Y_5 = 2.35$	0	0.4174	0.5000	-0.7071	0.5000	0.4174	0
$Y_6 = 2.93$	0	0.3484	0.4174	-0.5902	0.4174	0.3484	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.18 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.0437	0.0395	0.1004	0.0396	0.0438	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.0395	0.0321	0.0984	0.0322	0.0396	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	0.1004	0.0984	0.2137	0.0986	0.1005	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.0396	0.0322	0.0986	0.0323	0.0397	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	0.0438	0.0396	0.1005	0.0397	0.0439	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.19. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.2939	0.0412	-0.0000	-0.0412	-0.2940	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.0412	-0.0936	-0.0000	0.0937	-0.0411	0
$Y_4 = 1.57$	0	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0
$Y_5 = 2.35$	0	-0.0412	0.0937	0.0000	-0.0937	0.0411	0
$Y_6 = 2.93$	0	-0.2940	-0.0411	0.0000	0.0411	0.2941	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.20 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.5563	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.5563	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	-0.5563	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.5563	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.21 Uygulama2 'in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.2624	0.0412	0.0000	0.0412	0.2623	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.0412	0.0936	0.0000	0.0937	0.0411	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.0412	0.0937	0.0000	0.0937	0.0411	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	0.2623	0.0411	0.0000	0.0411	0.2622	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.22. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	-0.7592	-1.0336	3.0758	-1.0333	-0.7590	0
$Y_3 = 0.78$	0	-1.0336	-0.1210	0.1125	-0.1210	-1.0337	0
$Y_4 = 1.57$	0	3.0758	0.1125	-0.8932	0.1122	3.0765	0
$Y_5 = 2.35$	0	-1.0333	-0.1210	0.1122	-0.1210	-1.0334	0
$Y_6 = 2.93$	0	-0.7590	-1.0337	3.0765	-1.0334	-0.7588	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.23. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.7543	-0.6141	0.8685	-0.6141	0.7543	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	-0.6141	0.5000	-0.7071	0.5000	-0.6141	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	0.8685	-0.7071	1.0000	-0.7071	0.8685	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	-0.6141	0.5000	-0.7071	0.5000	-0.6141	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	0.7543	-0.6141	0.8685	-0.6141	0.7543	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.24 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için PDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	1.5136	0.4195	2.2073	0.4192	1.5134	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.4195	0.6210	0.8196	0.6210	0.4195	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	2.2073	0.8196	1.8932	0.8193	2.2080	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.4192	0.6210	0.8193	0.6210	0.4192	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	1.5134	0.4195	2.2080	0.4192	1.5132	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

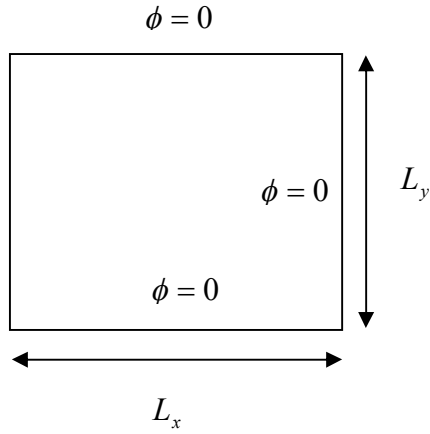
$N=M=5$ ve $N=M=7$ için PDQ MATLAB programı yazılmış ve EK 1 de sunulmuştur.

5.2.2. Uygulama2'nin FDQM ile çözümü

Bu örnekte L_x ve L_y π olarak alınacak. $k=1$, $k=2$, $k=3$, $k=4$ ve $k=5$ için $f(x, y) = k^2 \cdot [1 - \pi^2 (\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2})] \sin \frac{k\pi x}{L_x} \sin \frac{k\pi y}{L_y}$ dir. Sınır şartı, tüm sınırlarda $\phi=0$ 'dır.

Problemin gerçek çözümü aşağıdaki eşitlik ile verilmiştir.

$$\phi = \sin \frac{k\pi x}{L_x} \sin \frac{k\pi y}{L_y}$$



Şekil 5.3. İki boyutlu Helmholtz problemi

Hesap bölgesi L_x uzunluğunda ve L_y genişliğinde bir dikdörtgenel bölgedir.

İki boyutlu Helmholtz denklemini çözmek için bu sefer de FDQ uygulanacaktır.

Öncelikle 5.1a ve 5.1b deki Chebychev-Gauss-Lobatto düğüm dağıtımını kullanılarak düğüm noktalarının x ve y koordinatları belirlendi.

$$0 \leq X \leq L_x,$$

$$0 \leq Y \leq L_y$$

$$X_i = \frac{1}{2} [1 - \cos(\frac{i-1}{N-1} \cdot \pi)] \cdot L_x \quad i=1,2,\dots,N \quad (5.2a)$$

$$Y_j = \frac{1}{2} [1 - \cos(\frac{j-1}{M-1} \cdot \pi)] \cdot L_y \quad j=1, 2, \dots, M \quad (5.2b)$$

Yukarıdaki formüllerin MATLAB kodu yazılmış ve EK 1 de sunulmuştur. Biz örneğimizi N=M=5, k=1 ve N=M=7, k=1, 2, 3, 4, 5 için gerçekleştirdik.

İki boyutlu Helmholtz denkleminin genel formu

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = f(x, y)$$

Helmholtz denkleminin FDQ karşılığı

$$\sum_{k=1}^N W_{ik}^{(2)} \phi_{kj} + \sum_{k=1}^M \overline{W}_{jk}^{(2)} \phi_{ik} + k^2 \cdot \phi_{ij} = f_{ij}$$

Ağırlık katsayılarının hesabında Shu ve Chew'in birinci ve ikinci derece türevlerin ağırlık katsayıları hesaplamak için geliştirdikleri aşağıdaki açık formüller kullanıldı.

$$q(x_i) = \prod_{k=0, k \neq i}^N \sin \frac{x_i - x_k}{2} \quad (5.3b)$$

$$a_{ii} = - \sum_{j=0, j \neq i}^N a_{ij} \quad (5.4a)$$

$$b_{ii} = - \sum_{j=0, j \neq i}^N b_{ij} \quad (5.4b)$$

$$a_{ij} = \frac{q(x_i)}{2 \cdot \sin \frac{x_i - x_j}{2} \cdot q(x_j)}, \quad j \neq i \text{ iken} \quad (5.5)$$

$$b_{ij} = a_{ij} \left[2a_{ii} - \cot \frac{x_i - x_j}{2} \right], \quad j \neq i \text{ iken} \quad (5.6)$$

Yukarıdaki formüllerin MATLAB kodları yazılmış ve EK 1 de sunulmuştur.

FDQ yaklaşımının performansını 5.2e eşitliği ile ölçülmüştür.

$$\Delta \phi = |\phi_{ij} - \phi_{exact}(x_i, y_j)| \quad (5.2e)$$

Burada ϕ_{ij} , (x_i, y_j) ağ noktasındaki nümerik çözüm, $\phi_{exact}(x_i, y_j)$ ise ağ noktasındaki gerçek çözümdür.

Çizelge 5.25. Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.46$	$X_3 = 1.57$	$X_4 = 2.68$	$X_5 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.46$	0	0.1972	0.4440	0.1972	0
$Y_3 = 1.57$	0	0.4440	1.0000	0.4440	0
$Y_4 = 2.68$	0	0.1972	0.4440	0.1972	0
$Y_5 = 3.14$	0	0	0	0	0

Çizelge 5.26. Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.46$	$X_3 = 1.57$	$X_4 = 2.68$	$X_5 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.46$	0	0.1972	0.4440	0.1972	0.0000
$Y_3 = 1.57$	0	0.4440	1.0000	0.4440	0.0000
$Y_4 = 2.68$	0	0.1972	0.4440	0.1972	0.0000
$Y_5 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.27 Uygulama2' in $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

1.0e-004 *

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.46$	$X_3 = 1.57$	$X_4 = 2.68$	$X_5 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.46$	0	0.0616	0.1087	0.0543	0.0000
$Y_3 = 1.57$	0	0.1087	0.1770	0.0922	0.0000
$Y_4 = 2.68$	0	0.0543	0.0922	0.0470	0.0000
$Y_5 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.28. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_4 = 1.57$	0	0.2089	0.7071	1.0000	0.7071	0.2089	0
$Y_5 = 2.35$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_6 = 2.93$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.29. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	0.2089	0.7071	1.0000	0.7071	0.2089	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.30 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

1.0e-005 *

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.1151	0.2332	0.2921	0.1856	0.0098	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.2332	0.2595	0.2397	0.0987	0.1235	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	0.2921	0.2397	0.1591	0.0123	0.2122	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.1856	0.0987	0.0123	0.0621	0.1710	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	0.0098	0.1235	0.2122	0.1710	0.0956	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.31. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.1669	0.4085	-0.0000	-0.4086	-0.1669	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.4085	0.9999	-0.0000	-1.0000	-0.4086	0
$Y_4 = 1.57$	0	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0
$Y_5 = 2.35$	0	-0.4086	-1.0000	0.0000	1.0001	0.4086	0
$Y_6 = 2.93$	0	-0.1669	-0.4086	0.0000	0.4086	0.1670	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.32. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.1669	0.4086	0.0000	-0.4086	-0.1669	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.4086	1.0000	0.0000	-1.0000	-0.4086	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	-0.4086	-1.0000	-0.0000	1.0000	0.4086	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	-0.1669	-0.4086	-0.0000	0.4086	0.1669	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.33 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=2$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

1.0e-004 *

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.2129	0.4238	0.1748	0.0983	0.0017	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.4238	0.7995	0.4278	0.0027	0.0930	0
$Y_4 = 1.57$	0	0.1748	0.4278	0.0000	0.4278	0.1748	0
$Y_5 = 2.35$	0	0.0983	0.0027	0.4278	0.7942	0.4186	0
$Y_6 = 2.93$	0	0.0017	0.0930	0.1748	0.4186	0.2095	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.34. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.3483	0.4173	-0.5902	0.4174	0.3484	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.4173	0.4999	-0.7071	0.5000	0.4174	0
$Y_4 = 1.57$	0	-0.5902	-0.7071	1.0000	-0.7072	-0.5903	0
$Y_5 = 2.35$	0	0.4174	0.5000	-0.7072	0.5001	0.4174	0
$Y_6 = 2.93$	0	0.3484	0.4174	-0.5903	0.4174	0.3485	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.35. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.3484	0.4174	-0.5902	0.4174	0.3484	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.4174	0.5000	-0.7071	0.5000	0.4174	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	-0.5902	-0.7071	1.0000	-0.7071	-0.5902	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.4174	0.5000	-0.7071	0.5000	0.4174	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	0.3484	0.4174	-0.5902	0.4174	0.3484	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.36 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=3$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

1.0e-003 *

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.0725	0.0662	0.0730	0.0009	0.0056	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.0662	0.0545	0.0525	0.0237	0.0274	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	0.0730	0.0525	0.0394	0.0582	0.0592	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.0009	0.0237	0.0582	0.1020	0.0927	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	0.0056	0.0274	0.0592	0.0927	0.0836	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.37.Uygulama2'in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.3738	0.0651	-0.0000	-0.0651	-0.3739	0
$Y_3 = 0.78$	0	0.0651	-0.0875	-0.0000	0.0876	-0.0650	0
$Y_4 = 1.57$	0	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0
$Y_5 = 2.35$	0	-0.0651	0.0876	0.0000	-0.0877	0.0651	0
$Y_6 = 2.93$	0	-0.3739	-0.0650	0.0000	0.0651	0.3740	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.38. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.5563	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.5563	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	-0.5563	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.5563	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.39 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=4$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.1825	0.0651	0.0000	0.0651	0.1824	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.0651	0.0875	0.0000	0.0876	0.0650	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.0651	0.0876	0.0000	0.0877	0.0651	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	0.1824	0.0650	0.0000	0.0651	0.1823	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.40 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen ϕ_{ij}

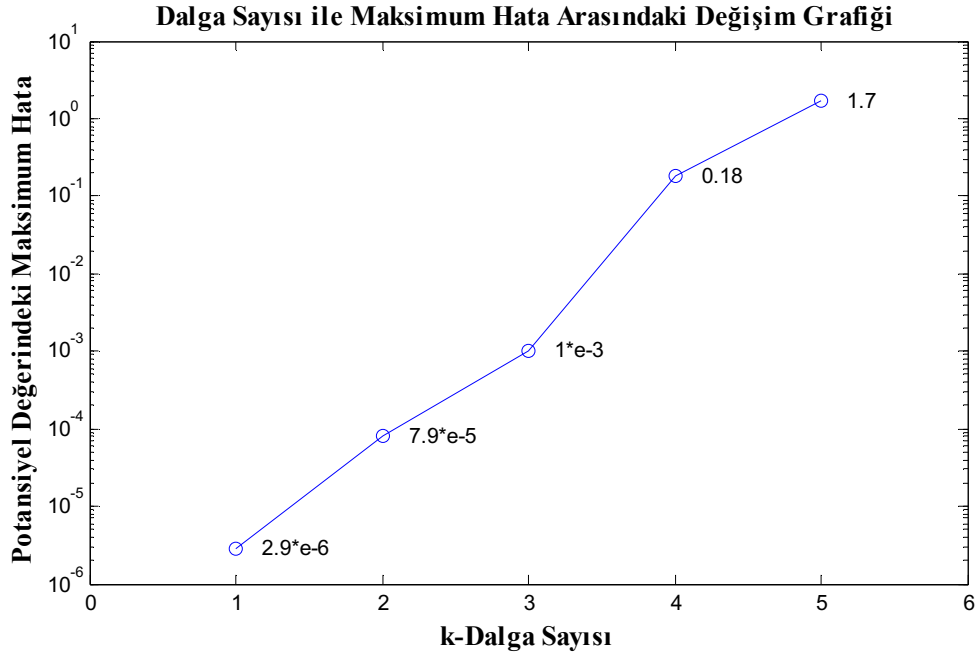
	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	-0.3854	-0.7966	2.6478	-0.7963	-0.3854	0
$Y_3 = 0.78$	0	-0.7966	-0.0632	-0.1438	-0.0631	-0.7973	0
$Y_4 = 1.57$	0	2.6478	-0.1438	-0.2900	-0.1438	2.6477	0
$Y_5 = 2.35$	0	-0.7963	-0.0631	-0.1438	-0.0630	-0.7970	0
$Y_6 = 2.93$	0	-0.3854	-0.7973	2.6477	-0.7970	-0.3855	0
$Y_7 = 3.14$	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 5.41. Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen $\phi_{exact}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	0.7543	-0.6141	0.8685	-0.6141	0.7543	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	-0.6141	0.5000	-0.7071	0.5000	-0.6141	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	0.8685	-0.7071	1.0000	-0.7071	0.8685	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	-0.6141	0.5000	-0.7071	0.5000	-0.6141	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	0.7543	-0.6141	0.8685	-0.6141	0.7543	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000

Çizelge 5.42 Uygulama2' in $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=5$ değerleri için FDQ metodu ile çözümlenerek elde edilen hata $\Delta\phi$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.21$	$X_3 = 0.78$	$X_4 = 1.57$	$X_5 = 2.35$	$X_6 = 2.93$	$X_7 = 3.14$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.21$	0	1.1398	0.1824	1.7792	0.1821	1.1398	0.0000
$Y_3 = 0.78$	0	0.1824	0.5632	0.5633	0.5631	0.1832	0.0000
$Y_4 = 1.57$	0	1.7792	0.5633	1.2900	0.5633	1.7792	0.0000
$Y_5 = 2.35$	0	0.1821	0.5631	0.5633	0.5630	0.1829	0.0000
$Y_6 = 2.93$	0	1.1398	0.1832	1.7792	0.1829	1.1398	0.0000
$Y_7 = 3.14$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

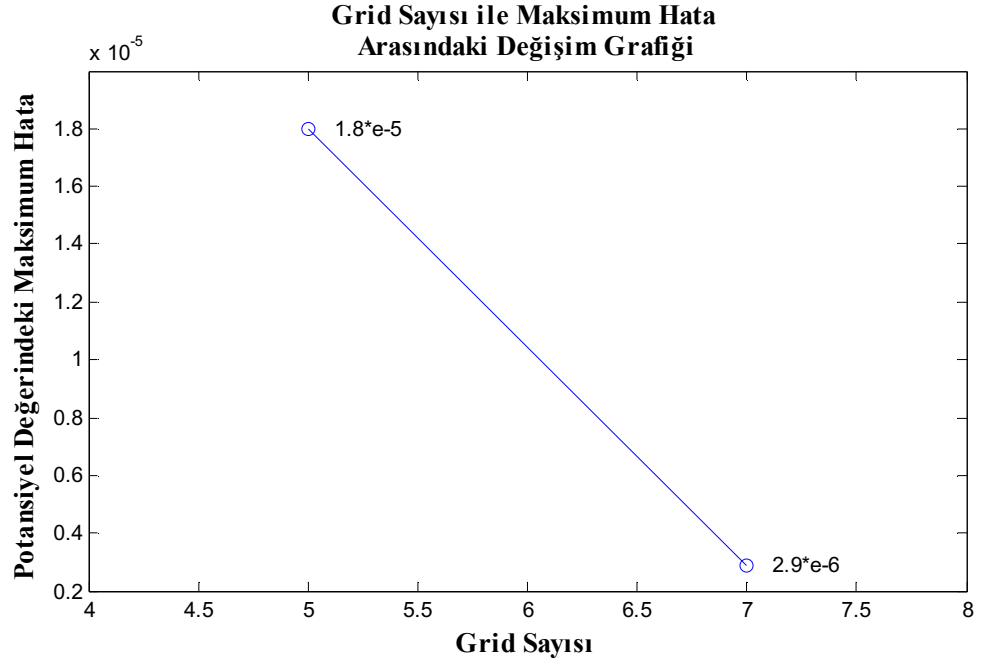


Şekil 5.4. Uygulama2' nin FDQM ile çözümünde grid sayıları ($N=M=7$) ve çözüm aralığı ($L_x = L_y = \pi$) sabitken, dalga sayısı(k) ile elde edilen potansiyel değerdeki maksimum hata ($\Delta\phi$)arasındaki değişimi

Çizelge 5.43. Uygulama2' nin FDQM ile çözümünde grid sayıları ($N=M=7$) ve çözüm aralığı ($L_x = L_y = \pi$) sabitken, dalga sayısı(k) ile elde edilen potansiyel değerdeki maksimum hata ($\Delta\phi$)arasındaki değişimi

Dalga Sayısı	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
$\Delta\phi_{FDQM} (N=M=7)$	$2,9 \times 10^{-6}$	$7,9 \times 10^{-5}$	$1,0 \times 10^{-3}$	$1,8 \times 10^{-1}$	$1,7 \times 10^0$

Yukarıdaki tabloda da görüldüğü gibi grid sayısı ve çözüm aralığı sabitken dalga sayısının artırılması elde edilen potansiyelin doğruluğunu azaltmaktadır.



Şekil 5.5. Uygulama2' nin FDQM ile çözümünde çözüm aralığı ($L_x = L_y = \pi$) ve dalga sayısı (k) sabitken, Grid sayısı ($N=M$) ile elde edilen potansiyel değerdeki maksimum hata ($\Delta\phi$)arasındaki değişimi

Yukarıdaki tabloda da görüldüğü gibi çözüm aralığı ve dalga sayısı sabitken grid sayısının artırılması elde edilen potansiyelin doğruluğunu arttırmaktadır.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Uygulama1'in düğüm sayısı $N=5$ iken PDQM ile çözümünde analitik değerle karşılaştırıldığında maksimum hata $5,5 \times 10^{-3}$ iken $N=7$ yapıldığında maksimum hata $2,6 \times 10^{-5}$ olduğu görülmüştür. Buda k dalga sayısı sabitken, PDQM'de çözüm bölgesindeki düğüm sayısının arttırılmasının doğruluğu arttırdığını göstermektedir.

Uygulama2'nin $N=M=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k=1$ değerleri için PDQM ile çözümünde maksimum hatanın $3,6 \times 10^{-3}$ olarak elde edildiği, aynı değerler için FDQM ile çözümünde ise maksimum hatanın $1,0 \times 10^{-5}$ olarak elde edildiği görülmüştür. Bu bize Helmholtz problemleri gibi periyodik davranışları olan fonksiyonların çözümünde FDQM'nin PDQM'e göre doğruluğu daha yüksek sonuçlar verdiğini göstermektedir.

Uygulama2'nin $N=M=7$, $L_x = L_y = \pi$ değerleri sabitken dalga sayısı k 'nın, $k=1, 2, 3, 4, 5$ değerleri için FDQM ile çözümündeki maksimum hatalar, $k=1$ için $2,9 \times 10^{-6}$, $k=2$ için $7,9 \times 10^{-5}$, $k=3$ için $1,0 \times 10^{-3}$, $k=4$ için $1,8 \times 10^{-1}$ ve $k=5$ için $1,7 \times 10^0$ olarak bulunmuştur. Bu bize harmonik problemlerde çözüm aralığı ve düğüm sayısı sabitken, dalga sayısının arttırılmasının doğruluğu azalttığını göstermektedir.

Ayrıca Uygulama2'nin çözüm sonuçlarından, k nın arttırılması durumunda PDQM ve FDQM sonuçlarını daha doğru elde etmek için düğüm sayısının da arttırılması gerektiği görülmektedir.

Gerek İki boyutlu Helmholtz denklemi ile tanımlı elektromanyetik problemlerin PDQM ve FDQM ile çözümü sonucu elde edilen bu sonuçların tanımlanmış olması gerekse çözüm için geliştirilen MATLAB kodlarının EK 1'de sunulmuş olması bu konuda çalışan araştırmacılara önemli kolaylık sağlayacaktır. Bu çalışma ayrıca farklı alanlardaki 1D, 2D ve 3D kısmi diferansiyel eşitlikleri temel alan problemlerin çözümünün araştırılması yönündeki çalışmalara ışık tutacaktır.

7. EKLER

EK 1. MATLAB PROGRAMLARI

EK 1.1. Chebychev-Gauss-Lobatto düğüm dağıtımını kullanılarak düğüm noktalarının x ve y koordinatlarını tespit eden 5.1a ve 5.1b formüllerinin MATLAB kodu ($L_x=L_y=1, N=M=7$)

$$X_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1} \cdot \pi\right) \right] L_x \quad i=1, 2, \dots, N \quad (5.1a)$$

$$Y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{j-1}{M-1} \cdot \pi\right) \right] L_y \quad j=1, 2, \dots, M \quad (5.1b)$$

```
n=7;
x=zeros(1,n)
x(n)=1
for i=2:n-1
x(i)=1/2*[1-cos((i-1)*pi/(n-1))]*1
end
```

EK 1.2. PDQM ta İkinci derece türevlerin ağırlık katsayılarını bulan 5.1c ve 5.1d formüllerinin MATLAB kodu

$$b_{ij} = \frac{2}{x_j - x_i} \left(\prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \right) \left(\sum_{l=1, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \quad for \quad i \neq j$$

```
n=5;
b2=zeros(5);
for i=1:n
for j=1:n
r=zeros(5);
p=ones(5);
if i~=j
for k=1:n
```

```

if k~=i && k~=j
p(i,j)=p(i,j)*((x(i)-x(k))/(x(j)-x(k)))
end
end
for l=1:n
if l~=i && l~=j
r(i,j)=r(i,j)+(2/(x(j)-x(i)))*(1/(x(i)-x(l))))
end
end
end
b2(i,j)=p(i,j)*r(i,j)
end
end

```

$$b_{ii} = 2 \sum_{k=1, k \neq i}^{N-1} \left[\frac{1}{x_i - x_k} \left(\sum_{l=k, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \right]$$

```

n=5;
b1=zeros(n)
for i=1:n
for k=1:n-1
if k~=i
for l=k+1:n
if l~=i
b1(i,i)=b1(i,i)+2*(1/(x(i)-x(k)))*(1/(x(i)-x(l))))
end
end
end
end
end

```

EK 1.3. FDQM ta birinci ve ikinci derece türevlerin ağırlık katsayılarını bulan formüllerin MATLAB kodu

$$q(x_i) = \prod_{k=0, k \neq i}^N \sin \frac{x_i - x_k}{2} \quad 4.3b$$

```

q=ones(1,n);
for i=1:7
for k=1:7
if k~=i
q(1,i)=q(1,i)*sin((x(i)-x(k))/2);
end
end
end

```

$$a_{ii} = - \sum_{j=0, j \neq i}^N a_{ij} \quad 4.4a$$

```

a2=zeros(n);
for i=1:7
for j=1:7
if j~=i
a2(i,i)=a2(i,i)+a1(i,j);
end
end
end
a2=-a2;
a=a1+a2;

```

$$b_{ii} = - \sum_{j=0, j \neq i}^N b_{ij} \quad 4.4b$$

```

b2=zeros(n);
for i=1:7
for j=1:7
if j~=i
b2(i,i)=b2(i,i)+b1(i,j);
end
end
end

```


end

b2=-b2;

b=b1+b2;

$$a_{ij} = \frac{q(x_i)}{2 \cdot \sin \frac{x_i - x_j}{2} \cdot q(x_j)}, \quad j \neq i \text{ iken} \quad 4.5$$

a1=zeros(n);

for i=1:7

for j=1:7

if j~=i

a1(i,j)=q(1,i)/[2*sin((x(i)-x(j))/2)*q(1,j)];

end

end

end

$$b_{ij} = a_{ij} \left[2a_{ii} - \cot \frac{x_i - x_j}{2} \right], \quad j \neq i \text{ iken} \quad 4.6$$

b1=zeros(n);

for i=1:7

for j=1:7

if j~=i

b1(i,j)=a1(i,j)*[2*a2(i,i)-cot((x(i)-x(j))/2)]

end

end

end

EK 1.4. Hata oranı $\Delta\phi$ 'yi bulan formülün MATLAB kodu

$$\Delta\phi = |\phi_{ij} - \phi_{exact}(x_i, y_j)| \quad 5.1e$$

for i=1:5

for j=1:5

E(i,j)=abs((sin(pi*x(i))*sin(pi*x(j)))-Q(i,j))

end

end

EK 1.5. Uygulama1'in $M=N=5$, $L_x = L_y = 1$ ve $k^2 = 0.5$ PDQM çözümü MATLAB

kodu

```
%chebychev_gauss_lab_point_distribution
```

```
n=5;
```

```
x=zeros(1,n)
```

```
x(n)=1
```

```
for i=2:n-1
```

```
x(i)=1/2*[1-cos((i-1)*pi/(n-1))]*1
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%
```

```
n=5;
```

```
b1=zeros(n)
```

```
for i=1:n
```

```
for k=1:n-1
```

```
if k~=i
```

```
for l=k+1:n
```

```
if l~=i
```

```
b1(i,i)=b1(i,i)+2*(1/(x(i)-x(k)))*(1/(x(i)-x(l)))
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%
```

```
n=5;
```

```
b2=zeros(5);
```

```
for i=1:n
```

```
for j=1:n
```

```
r=zeros(5);
```



```

n=7;
x=zeros(1,n)
x(n)=1
for i=2:n-1
x(i)=1/2*[1-cos((i-1)*pi/(n-1))]*1
end
n=7;
b1=zeros(n)
for i=1:n
for k=1:n-1
if k~=i
for l=k+1:n
if l~=i
b1(i,i)=b1(i,i)+2*(1/(x(i)-x(k)))*(1/(x(i)-x(l)))
end
end
end
end
end
n=7;
b2=zeros(7);

for i=1:n
for j=1:n
r=zeros(7);
p=ones(7);
if i~=j
for k=1:n
if k~=i && k~=j
p(i,j)=p(i,j)*((x(i)-x(k))/(x(j)-x(k)))
end
end
end

```



```

0000000000000000000000000000000000000000000000000000000001000
000;
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000100
000;
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000010
000;
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000001
000;
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
100;
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
010;
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
001]

```

`L=zeros(49,1)`

- `L(9,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.0670)*sin(pi*0.0670)`
- `L(10,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.2500)*sin(pi*0.0670)`
- `L(11,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.5000)*sin(pi*0.0670)`
- `L(12,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.7500)*sin(pi*0.0670)`
- `L(13,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.9330)*sin(pi*0.0670)`
- `L(16,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.0670)*sin(pi*0.2500)`
- `L(17,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.2500)*sin(pi*0.2500)`
- `L(18,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.5000)*sin(pi*0.2500)`
- `L(19,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.7500)*sin(pi*0.2500)`
- `L(20,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.9330)*sin(pi*0.2500)`
- `L(23,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.0670)*sin(pi*0.5000)`
- `L(24,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.2500)*sin(pi*0.5000)`
- `L(25,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.5000)*sin(pi*0.5000)`
- `L(26,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.7500)*sin(pi*0.5000)`
- `L(27,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.9330)*sin(pi*0.5000)`
- `L(30,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.0670)*sin(pi*0.7500)`
- `L(31,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.2500)*sin(pi*0.7500)`

```

L(32,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.5000)*sin(pi*0.7500)
L(33,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.7500)*sin(pi*0.7500)
L(34,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.9330)*sin(pi*0.7500)
L(37,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.0670)*sin(pi*0.9330)
L(38,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.2500)*sin(pi*0.9330)
L(39,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.5000)*sin(pi*0.9330)
L(40,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.7500)*sin(pi*0.9330)
L(41,1)=(-2*pi*pi+0.5)*sin(pi*0.9330)*sin(pi*0.9330)
Q=inv(K)*L
Q=[Q(1,1) Q(2,1) Q(3,1) Q(4,1) Q(5,1) Q(6,1) Q(7,1) ;
Q(8,1) Q(9,1) Q(10,1) Q(11,1) Q(12,1) Q(13,1) Q(14,1);
Q(15,1) Q(16,1) Q(17,1) Q(18,1) Q(19,1) Q(20,1) Q(21,1);
Q(22,1) Q(23,1) Q(24,1) Q(25,1) Q(26,1) Q(27,1) Q(28,1);
Q(29,1) Q(30,1) Q(31,1) Q(32,1) Q(33,1) Q(34,1) Q(35,1);
Q(36,1) Q(37,1) Q(38,1) Q(39,1) Q(40,1) Q(41,1) Q(42,1);
Q(43,1) Q(44,1) Q(45,1) Q(46,1) Q(47,1) Q(48,1) Q(49,1)]
for i=1:7
for j=1:7
Qexact(i,j)=sin(pi*x(i))*sin(pi*x(j))
end
end
for i=1:7
for j=1:7
E(i,j)=abs((sin(pi*x(i))*sin(pi*x(j)))-Q(i,j))
end
end

```

EK 1.7. Uygulama2’ in $M=N=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k = 1$ iken PDQM çözümü

MATLAB kodu

```

%chebychev_gauss_lab_point_distribution
n=5;
x=zeros(1,n)
x(n)=pi

```

```

for i=2:n-1
x(i)=1/2*[1-cos((i-1)*pi/(n-1))]*pi
end
%%%%%%%%%%
n=5;
b1=zeros(n)
for i=1:n
for k=1:n-1
if k~=i
for l=k+1:n
if l~=i
b1(i,i)=b1(i,i)+2*(1/(x(i)-x(k)))*(1/(x(i)-x(l)))
end
end
end
end
end
%%%%%%%%%%
n=5;
b2=zeros(5);

for i=1:n
for j=1:n
r=zeros(5);
p=ones(5);
if i~=j
for k=1:n
if k~=i && k~=j
p(i,j)=p(i,j)*((x(i)-x(k))/(x(j)-x(k)))
end
end
for l=1:n

```

```

if l~=i && l~=j
    r(i,j)=r(i,j)+(2/(x(j)-x(i)))*(1/(x(i)-x(l)))
end
end
end
end
b2(i,j)=p(i,j)*r(i,j)
end
end
b=b1+b2
K=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 (2*b(2,2)+1) b(2,3) b(2,4) 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(2,2)+1) b(3,4) 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(2,2)+1) 0 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 b(2,4) 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 0 (b(2,2)+b(3,3)+1) b(2,3) b(2,4) 0 0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(3,3)+1) b(3,4) 0 0 0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(3,3)+1) 0 0 0 0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 (b(2,2)+b(4,4)+1) b(2,3) b(2,4) 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(4,4)+1) b(3,4) 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(4,4)+1) 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;

```

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]
L=zeros(25,1)
L(7,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*0.4601)/pi)*sin((1*pi*0.4601)/pi)
L(8,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*1.5708)/pi)*sin((1*pi*0.4601)/pi)
L(9,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*2.6815)/pi)*sin((1*pi*0.4601)/pi)
L(12,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*0.4601)/pi)*sin((1*pi*1.5708)/pi)
L(13,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*1.5708)/pi)*sin((1*pi*1.5708)/pi)
L(14,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*2.6815)/pi)*sin((1*pi*1.5708)/pi)
L(17,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*0.4601)/pi)*sin((1*pi*2.6815)/pi)
L(18,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*1.5708)/pi)*sin((1*pi*2.6815)/pi)
L(19,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*2.6815)/pi)*sin((1*pi*2.6815)/pi)
Q=inv(K)*L
Q=[Q(1,1) Q(2,1) Q(3,1) Q(4,1) Q(5,1);
Q(6,1) Q(7,1) Q(8,1) Q(9,1) Q(10,1);
Q(11,1) Q(12,1) Q(13,1) Q(14,1) Q(15,1);
Q(16,1) Q(17,1) Q(18,1) Q(19,1) Q(20,1);
Q(21,1) Q(22,1) Q(23,1) Q(24,1) Q(25,1)]
for i=1:5
for j=1:5
Qexact(i,j)=sin(((1)*pi*x(i))/pi)*sin(((1)*pi*x(j))/pi)
end
end

```

```

for i=1:5
for j=1:5
E(i,j)=abs(Q(i,j)-Qexact(i,j))
end
end

```

EK 1.8. Uygulama2'in $M=N=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k = 1$ iken PDQM çözümü

MATLAB kodu

```

%chebychev_gauss_lab_point_distribution
n=7;
x=zeros(1,n)
x(n)=pi
for i=2:n-1
x(i)=1/2*[1-cos((i-1)*pi/(n-1))]*pi
end
n=7;
b1=zeros(n)
for i=1:n
for k=1:n-1
if k~=i
for l=k+1:n
if l~=i
b1(i,i)=b1(i,i)+2*(1/(x(i)-x(k)))*(1/(x(i)-x(l)))
end
end
end
end
n=7;
b2=zeros(7);
for i=1:n
for j=1:n
r=zeros(7);

```

```

p=ones(7);
if i~=j
for k=1:n
if k~=i && k~=j
p(i,j)=p(i,j)*((x(i)-x(k))/(x(j)-x(k)))
end
end
for l=1:n
if l~=i && l~=j
r(i,j)=r(i,j)+(2/(x(j)-x(i)))*(1/(x(i)-x(l)))
end
end
end
b2(i,j)=p(i,j)*r(i,j)
end
end
b=b1+b2
K=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;

```

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 (b(2,2)+b(2,2)+1) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 0 0
 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 b(2,5) 0 0 0 0 0 0 b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(2,2)+1) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 0 0
 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 b(2,5) 0 0 0 0 0 0 b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(2,2)+1) b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 0 0
 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 b(2,5) 0 0 0 0 0 0 b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) b(5,3) b(5,4) (b(5,5)+b(2,2)+1) b(5,6) 0 0 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 0
 0 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 b(2,5) 0 0 0 0 0 0 b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(2,2)+1) 0 0 0 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0
 0 0 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 b(2,5) 0 0 0 0 0 0 b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 0 0 0 0 (b(2,2)+b(3,3)+1) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 0 0
 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(3,3)+1) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 0 0 0
 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(3,3)+1) b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0
 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 b(5,2) b(5,3) b(5,4) (b(5,5)+b(3,3)+1) b(5,6) 0 0 0 0
 0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(3,3)+1) 0 0 0 0
 0 0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 0 0 0 (b(2,2)+b(4,4)+1) b(2,3) b(2,4)
 b(2,5) b(2,6) 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(4,4)+1) b(3,4)
 b(3,5) b(3,6) 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(4,4)+1)
 b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 b(5,2) b(5,3) b(5,4)
 (b(5,5)+b(4,4)+1) b(5,6) 0 0 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5)
 (b(6,6)+b(4,4)+1) 0 0 0 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 0 0
 (b(2,2)+b(5,5)+1) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 0 b(3,2)
 (b(3,3)+b(5,5)+1) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3)
 (b(4,4)+b(5,5)+1) b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 b(5,2) b(5,3)
 b(5,4) (b(5,5)+b(5,5)+1) b(5,6) 0 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 b(6,2) b(6,3)
 b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(5,5)+1) 0 0 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 b(6,2) 0 0 0 0 0 0 b(6,3) 0 0 0 0 0 0 b(6,4) 0 0 0 0 0 0 b(6,5) 0 0 0 0 0
 (b(2,2)+b(6,6)+1) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 b(6,2) 0 0 0 0 0 0 b(6,3) 0 0 0 0 0 0 b(6,4) 0 0 0 0 0 0 b(6,5) 0 0 0 0
 b(3,2) (b(3,3)+b(6,6)+1) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(6,2) 0 0 0 0 0 0 b(6,3) 0 0 0 0 0 0 b(6,4) 0 0 0 0 0 0 b(6,5) 0 0 0 0
 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(6,6)+1) b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;

$$L(16,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(17,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(18,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(19,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(20,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(23,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(24,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(25,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(26,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(27,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(30,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(31,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(32,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(33,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(34,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(37,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((1*\pi*2.9311)/\pi)$$

```

L(38,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi))))*sin((1*pi*0.7854)/pi)*sin((1*pi*2.9311)/pi)
L(39,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi))))*sin((1*pi*1.5708)/pi)*sin((1*pi*2.9311)/pi)
L(40,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi))))*sin((1*pi*2.3562)/pi)*sin((1*pi*2.9311)/pi)
L(41,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi))))*sin((1*pi*2.9311)/pi)*sin((1*pi*2.9311)/pi)
Q=inv(K)*L

```

```

Q=[Q(1,1) Q(2,1) Q(3,1) Q(4,1) Q(5,1) Q(6,1) Q(7,1) ;
Q(8,1) Q(9,1) Q(10,1) Q(11,1) Q(12,1) Q(13,1) Q(14,1);
Q(15,1) Q(16,1) Q(17,1) Q(18,1) Q(19,1) Q(20,1) Q(21,1);
Q(22,1) Q(23,1) Q(24,1) Q(25,1) Q(26,1) Q(27,1) Q(28,1);
Q(29,1) Q(30,1) Q(31,1) Q(32,1) Q(33,1) Q(34,1) Q(35,1);
Q(36,1) Q(37,1) Q(38,1) Q(39,1) Q(40,1) Q(41,1) Q(42,1);
Q(43,1) Q(44,1) Q(45,1) Q(46,1) Q(47,1) Q(48,1) Q(49,1)]

```

```
for i=1:7
```

```
for j=1:7
```

```
Qexact(i,j)=sin(((1)*pi*x(i))/pi)*sin(((1)*pi*x(j))/pi)
```

```
end
```

```
end
```

```
for i=1:7
```

```
for j=1:7
```

```
E(i,j)=abs(Qexact(i,j)-Q(i,j))/100
```

```
end
```

```
end
```

EK 1.9. Uygulama2'in $M=N=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k = 2$ iken PDQM çözümü

MATLAB kodu

```
%chebychev_gauss_lab_point_distrubition
```

```
n=7;
```

```
x=zeros(1,n)
```

```
x(n)=pi
```

```

for i=2:n-1
x(i)=1/2*[1-cos((i-1)*pi/(n-1))]*pi
end
n=7;
b1=zeros(n)
for i=1:n
for k=1:n-1
if k~=i
for l=k+1:n
if l~=i
b1(i,i)=b1(i,i)+2*(1/(x(i)-x(k)))*(1/(x(i)-x(l)))
end
end
end
end
end
n=7;
b2=zeros(7);
for i=1:n
for j=1:n
r=zeros(7);
p=ones(7);
if i~=j
for k=1:n
if k~=i && k~=j
p(i,j)=p(i,j)*((x(i)-x(k))/(x(j)-x(k)))
end
end
for l=1:n
if l~=i && l~=j
r(i,j)=r(i,j)+(2/(x(j)-x(i)))*(1/(x(i)-x(l)))
end
end

```

```
end
end
b2(i,j)=p(i,j)*r(i,j)
end
end
b=b1+b2
K=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
    0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 (b(2,2)+b(2,2)+4) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 0 0
b(2,4) 0 0 0 0 0 0 b(2,5) 0 0 0 0 0 0 b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(2,2)+4) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 0 0
b(2,4) 0 0 0 0 0 0 b(2,5) 0 0 0 0 0 0 b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(2,2)+4) b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 0 0
b(2,4) 0 0 0 0 0 0 b(2,5) 0 0 0 0 0 0 b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) b(5,3) b(5,4) (b(5,5)+b(2,2)+4) b(5,6) 0 0 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 0 0
0 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 b(2,5) 0 0 0 0 0 0 b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(2,2)+4) 0 0 0 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0
0 0 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 b(2,5) 0 0 0 0 0 0 b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
```

000000000000000100000000000000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 000000000000000100000000000000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 00000000 b(3,2) 000000 (b(2,2)+b(3,3)+4) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 00
 b(3,4) 000000 b(3,5) 000000 b(3,6) 00000000000000;
 00000000 b(3,2) 00000 b(3,2) (b(3,3)+b(3,3)+4) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 000
 b(3,4) 000000 b(3,5) 000000 b(3,6) 00000000000000;
 0000000000 b(3,2) 0000 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(3,3)+4) b(4,5) b(4,6) 0000
 b(3,4) 000000 b(3,5) 000000 b(3,6) 00000000000000;
 00000000000 b(3,2) 000 b(5,2) b(5,3) b(5,4) (b(5,5)+b(3,3)+4) b(5,6) 0000
 0 b(3,4) 000000 b(3,5) 000000 b(3,6) 000000000000;
 0000000000000 b(3,2) 00 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(3,3)+4) 0000
 00 b(3,4) 000000 b(3,5) 000000 b(3,6) 000000000000;
 000000000000000000000000010000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 000000000000000000000000000100000000000000000000000000000000000000000
 000;
 000000000 b(4,2) 0000000 b(4,3) 0000000 (b(2,2)+b(4,4)+4) b(2,3) b(2,4)
 b(2,5) b(2,6) 00 b(4,5) 0000000 b(4,6) 00000000000000000;
 0000000000 b(4,2) 0000000 b(4,3) 000000 b(3,2) (b(3,3)+b(4,4)+4) b(3,4)
 b(3,5) b(3,6) 000 b(4,5) 0000000 b(4,6) 00000000000000000;
 00000000000 b(4,2) 0000000 b(4,3) 00000 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(4,4)+4)
 b(4,5) b(4,6) 00000 b(4,5) 0000000 b(4,6) 00000000000000000;
 000000000000000 b(4,2) 0000000 b(4,3) 000 b(5,2) b(5,3) b(5,4)
 (b(5,5)+b(4,4)+4) b(5,6) 000000 b(4,5) 0000000 b(4,6) 000000000000;
 0000000000000000000000000000000000 b(4,2) 0000000 b(4,3) 00 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5)
 (b(6,6)+b(4,4)+4) 0000000 b(4,5) 0000000 b(4,6) 00000000000000000;
 000000000000000000000000000000000010000000000000000000000000000000000
 000;
 000000000000000000000000000000000001000000000000000000000000000000000
 000;

$$L(24,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(25,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(26,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(27,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(30,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(31,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(32,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(33,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(34,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(37,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)$$

$$L(38,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)$$

$$L(39,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)$$

$$L(40,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)$$

$$L(41,1)=((2)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)$$

$$Q=\text{inv}(K)*L$$

$$Q=[Q(1,1) Q(2,1) Q(3,1) Q(4,1) Q(5,1) Q(6,1) Q(7,1) ;$$

$$Q(8,1) Q(9,1) Q(10,1) Q(11,1) Q(12,1) Q(13,1) Q(14,1);$$

$$Q(15,1) Q(16,1) Q(17,1) Q(18,1) Q(19,1) Q(20,1) Q(21,1);$$

```

Q(22,1) Q(23,1) Q(24,1) Q(25,1) Q(26,1) Q(27,1) Q(28,1);
Q(29,1) Q(30,1) Q(31,1) Q(32,1) Q(33,1) Q(34,1) Q(35,1);
Q(36,1) Q(37,1) Q(38,1) Q(39,1) Q(40,1) Q(41,1) Q(42,1);
Q(43,1) Q(44,1) Q(45,1) Q(46,1) Q(47,1) Q(48,1) Q(49,1)]

```

```

for i=1:7
for j=1:7
Qexact(i,j)=sin(((2)*pi*x(i))/pi)*sin(((2)*pi*x(j))/pi)
end
end
for i=1:7
for j=1:7
E(i,j)=abs(Qexact(i,j)-Q(i,j))/100
end
end

```

EK 1.10. Uygulama2'in $M=N=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k = 3$ iken PDQM çözümü

MATLAB kodu

```

%chebychev_gauss_lab_point_distribution
n=7;
x=zeros(1,n)
x(n)=pi
for i=2:n-1
x(i)=1/2*[1-cos((i-1)*pi/(n-1))]*pi
end
n=7;
b1=zeros(n)
for i=1:n
for k=1:n-1
if k~=i
for l=k+1:n
if l~=i
b1(i,i)=b1(i,i)+2*(1/(x(i)-x(k)))*(1/(x(i)-x(l)))

```


00100000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 00010000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 00001000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 00000100000000000000000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 00000010000000000000000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 00000001000000000000000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 00000000100000000000000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 000000000 (b(2,2)+b(2,2)+9) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 00 b(2,3) 000000
 b(2,4)000000 b(2,5) 000000 b(2,6) 000000000000;
 000000000 b(3,2) (b(3,3)+b(2,2)+9) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 000 b(2,3) 000000
 b(2,4)000000 b(2,5) 000000 b(2,6) 000000000000;
 000000000 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(2,2)+9) b(4,5) b(4,6) 00000 b(2,3) 000000
 b(2,4)000000 b(2,5) 000000 b(2,6) 000000000000;
 000000000 b(5,2) b(5,3) b(5,4) (b(5,5)+b(2,2)+9) b(5,6) 000000 b(2,3) 000000
 00 b(2,4) 000000 b(2,5) 000000 b(2,6) 000000000000;
 000000000 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(2,2)+9) 0000000 b(2,3) 000000
 00 b(2,4) 000000 b(2,5) 000000 b(2,6) 000000000000;
 00000000000000001000000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 00000000000000000100000000000000000000000000000000000000000000
 000;
 0000000000 b(3,2) 0000000 (b(2,2)+b(3,3)+9) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 00
 b(3,4)000000 b(3,5) 000000 b(3,6) 0000000000000000;
 0000000000 b(3,2) 000000 b(3,2) (b(3,3)+b(3,3)+9) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 000
 b(3,4)000000 b(3,5) 000000 b(3,6) 0000000000000000;
 00000000000 b(3,2) 00000 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(3,3)+9) b(4,5) b(4,6) 00000
 b(3,4)000000 b(3,5) 000000 b(3,6) 0000000000000000;

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 0 b(5,2) b(5,3) b(5,4) (b(5,5)+b(3,3)+9) b(5,6) 0 0 0 0
 0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(3,3)+9) 0 0 0 0
 0 0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 0 0 0 (b(2,2)+b(4,4)+9) b(2,3) b(2,4)
 b(2,5) b(2,6) 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(4,4)+9) b(3,4)
 b(3,5) b(3,6) 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(4,4)+9)
 b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 b(5,2) b(5,3) b(5,4)
 (b(5,5)+b(4,4)+9) b(5,6) 0 0 0 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5)
 (b(6,6)+b(4,4)+9) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 0 0 0
 (b(2,2)+b(5,5)+9) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,2)
 (b(3,3)+b(5,5)+9) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3)
 (b(4,4)+b(5,5)+9) b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 b(5,2) b(5,3)
 b(5,4) (b(5,5)+b(5,5)+9) b(5,6) 0 0 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 b(6,2) b(6,3)
 b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(5,5)+9) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;

```
00000000000000000000000000000000000000000000000000000010000000000000
000;
00000000000000000000000000000000000000000000000000000010000000000000
000;
000000000b(6,2)0000000b(6,3)0000000b(6,4)0000000b(6,5)0000000
(b(2,2)+b(6,6)+9) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 000000000;
000000000b(6,2)0000000b(6,3)0000000b(6,4)0000000b(6,5)0000000
b(3,2) (b(3,3)+b(6,6)+9) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 000000000;
000000000b(6,2)0000000b(6,3)0000000b(6,4)0000000b(6,5)0000000
b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(6,6)+9) b(4,5) b(4,6) 000000000;
000000000b(6,2)0000000b(6,3)0000000b(6,4)0000000b(6,5)0000000
b(5,2) b(5,3) b(5,4) (b(5,5)+b(6,6)+9) b(5,6) 000000000;
000000000000b(6,2)0000000b(6,3)0000000b(6,4)0000000b(6,5)0000000
b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(6,6)+9) 000000000;
00000000000000000000000000000000000000000000000000000010000000000000
000;
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000010000
000;
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000100
000;
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000010
000;
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001
000;
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
100;
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
010;
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
001]
```

L=zeros(49,1)

$$L(9,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((3*\pi*0.2104)/\pi)$$

$$L(10,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((3*\pi*0.2104)/\pi)$$

$$L(11,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((3*\pi*0.2104)/\pi)$$

$$L(12,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((3*\pi*0.2104)/\pi)$$

$$L(13,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((3*\pi*0.2104)/\pi)$$

$$L(16,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((3*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(17,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((3*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(18,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((3*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(19,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((3*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(20,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((3*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(23,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((3*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(24,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((3*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(25,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((3*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(26,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((3*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(27,1)=(3^2)*(1-\pi^2*((1/(\pi^2\pi))+1/(\pi^2\pi))))*\sin((3*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((3*\pi*1.5708)/\pi)$$

$L(30,1)=((3)^2)*(1-$
 $\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((3*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((3*\pi*2.3562)/\pi)$
 $L(31,1)=((3)^2)*(1-$
 $\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((3*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((3*\pi*2.3562)/\pi)$
 $L(32,1)=((3)^2)*(1-$
 $\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((3*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((3*\pi*2.3562)/\pi)$
 $L(33,1)=((3)^2)*(1-$
 $\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((3*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((3*\pi*2.3562)/\pi)$
 $L(34,1)=((3)^2)*(1-$
 $\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((3*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((3*\pi*2.3562)/\pi)$
 $L(37,1)=((3)^2)*(1-$
 $\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((3*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((3*\pi*2.9311)/\pi)$
 $L(38,1)=((3)^2)*(1-$
 $\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((3*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((3*\pi*2.9311)/\pi)$
 $L(39,1)=((3)^2)*(1-$
 $\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((3*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((3*\pi*2.9311)/\pi)$
 $L(40,1)=((3)^2)*(1-$
 $\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((3*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((3*\pi*2.9311)/\pi)$
 $L(41,1)=((3)^2)*(1-$
 $\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((3*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((3*\pi*2.9311)/\pi)$
 $Q=\text{inv}(K)*L$

$Q=[Q(1,1) Q(2,1) Q(3,1) Q(4,1) Q(5,1) Q(6,1) Q(7,1) ;$
 $Q(8,1) Q(9,1) Q(10,1) Q(11,1) Q(12,1) Q(13,1) Q(14,1);$
 $Q(15,1) Q(16,1) Q(17,1) Q(18,1) Q(19,1) Q(20,1) Q(21,1);$
 $Q(22,1) Q(23,1) Q(24,1) Q(25,1) Q(26,1) Q(27,1) Q(28,1);$
 $Q(29,1) Q(30,1) Q(31,1) Q(32,1) Q(33,1) Q(34,1) Q(35,1);$
 $Q(36,1) Q(37,1) Q(38,1) Q(39,1) Q(40,1) Q(41,1) Q(42,1);$
 $Q(43,1) Q(44,1) Q(45,1) Q(46,1) Q(47,1) Q(48,1) Q(49,1)]$

for i=1:7

for j=1:7

$Q_{\text{exact}}(i,j)=\sin(((3)*\pi*x(i))/\pi)*\sin(((3)*\pi*x(j))/\pi)$

```

end
end
for i=1:7
for j=1:7
E3(i,j)=abs(Qexact(i,j)-Q(i,j))
end
end

```

EK 1.11. Uygulama2'in $M=N=5$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k = 1$ iken FDQM çözümü

MATLAB kodu

```

n=5;
x=zeros(1,n)
x(n)=pi
for i=2:n-1
x(i)=1/2*[1-cos((i-1)*pi/(n-1))]*pi
end
q=ones(1,n);
for i=1:5
for k=1:5
if k~=i
q(1,i)=q(1,i)*sin((x(i)-x(k))/2);
end
end
end
a1=zeros(n);
for i=1:5
for j=1:5
if j~=i
a1(i,j)=q(1,i)/[2*sin((x(i)-x(j))/2)*q(1,j)];
end
end
end
a2=zeros(n);

```



```

0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 (2*b(2,2)+1) b(2,3) b(2,4) 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(2,2)+1) b(3,4) 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(2,2)+1) 0 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 0 (b(2,2)+b(3,3)+1) b(2,3) b(2,4) 0 0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(3,3)+1) b(3,4) 0 0 0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(3,3)+1) 0 0 0 0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 (b(2,2)+b(4,4)+1) b(2,3) b(2,4) 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(4,4)+1) b(3,4) 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(4,4)+1) 0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 ;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]

```

```

L=zeros(25,1)
L(7,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*0.4601)/pi)*sin((1*pi*0.4601)/pi)
L(8,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*1.5708)/pi)*sin((1*pi*0.4601)/pi)
L(9,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*2.6815)/pi)*sin((1*pi*0.4601)/pi)
L(12,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*0.4601)/pi)*sin((1*pi*1.5708)/pi)
L(13,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((1*pi*1.5708)/pi)*sin((1*pi*1.5708)/pi)

```

```

L(14,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi))))*sin((1*pi*2.6815)/pi)*sin((1*pi*1.5708)/pi)
L(17,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi))))*sin((1*pi*0.4601)/pi)*sin((1*pi*2.6815)/pi)
L(18,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi))))*sin((1*pi*1.5708)/pi)*sin((1*pi*2.6815)/pi)
L(19,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi))))*sin((1*pi*2.6815)/pi)*sin((1*pi*2.6815)/pi)
Q=inv(K)*L
Q=[Q(1,1) Q(2,1) Q(3,1) Q(4,1) Q(5,1);
Q(6,1) Q(7,1) Q(8,1) Q(9,1) Q(10,1);
Q(11,1) Q(12,1) Q(13,1) Q(14,1) Q(15,1);
Q(16,1) Q(17,1) Q(18,1) Q(19,1) Q(20,1);
Q(21,1) Q(22,1) Q(23,1) Q(24,1) Q(25,1)]
for i=1:5
for j=1:5
Qexact(i,j)=sin(((1)*pi*x(i))/pi)*sin(((1)*pi*x(j))/pi)
end
end

for i=1:5
for j=1:5
Efdqm_5(i,j)=abs(Q(i,j)-Qexact(i,j))
end
end

```

EK 1.12. Uygulama2'in $M=N=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k = 1$ iken FDQM çözümü
MATLAB kodu

```

n=7;
x=zeros(1,n)
x(n)=pi
for i=2:n-1

```

```

x(i)=1/2*[1-cos((i-1)*pi/(n-1))]*pi
end
q=ones(1,n);
for i=1:7
for k=1:7
if k~=i
q(1,i)=q(1,i)*sin((x(i)-x(k))/2);
end
end
end
a1=zeros(n);
for i=1:7
for j=1:7
if j~=i
a1(i,j)=q(1,i)/[2*sin((x(i)-x(j))/2)*q(1,j)];
end
end
end
a2=zeros(n);
for i=1:7
for j=1:7
if j~=i
a2(i,i)=a2(i,i)+a1(i,j);
end
end
end
a2=-a2;
a=a1+a2;
b1=zeros(n);
for i=1:7
for j=1:7
if j~=i

```


0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 b(5,2) b(5,3) b(5,4)
(b(5,5)+b(4,4)+1) b(5,6) 0 0 0 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5)
(b(6,6)+b(4,4)+1) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 0 0 0
(b(2,2)+b(5,5)+1) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,2)
(b(3,3)+b(5,5)+1) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3)
(b(4,4)+b(5,5)+1) b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 b(5,2) b(5,3)
b(5,4) (b(5,5)+b(5,5)+1) b(5,6) 0 0 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 b(6,2) b(6,3)
b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(5,5)+1) 0 0 0 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(6,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,4) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,5) 0 0 0 0 0 0
(b(2,2)+b(6,6)+1) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(6,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,4) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,5) 0 0 0 0 0
b(3,2) (b(3,3)+b(6,6)+1) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(6,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,4) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,5) 0 0 0 0
b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(6,6)+1) b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(6,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,4) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,5) 0 0 0
b(5,2) b(5,3) b(5,4) (b(5,5)+b(6,6)+1) b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(6,2) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,3) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,4) 0 0 0 0 0 0 0 b(6,5) 0 0
b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(6,6)+1) 0 0 0 0 0 0 0 0 0;

$$L(18,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(19,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(20,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)$$

$$L(23,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(24,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(25,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(26,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(27,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)$$

$$L(30,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(31,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(32,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(33,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(34,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((1*\pi*2.3562)/\pi)$$

$$L(37,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((1*\pi*2.9311)/\pi)$$

$$L(38,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((1*\pi*2.9311)/\pi)$$

$$L(39,1)=((1)^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi))))*\sin((1*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((1*\pi*2.9311)/\pi)$$

```

L(40,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi))))*sin((1*pi*2.3562)/pi)*sin((1*pi*2.9311)/pi)
L(41,1)=((1)^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi))))*sin((1*pi*2.9311)/pi)*sin((1*pi*2.9311)/pi)
Q=inv(K)*L
Q=[Q(1,1) Q(2,1) Q(3,1) Q(4,1) Q(5,1) Q(6,1) Q(7,1) ;
Q(8,1) Q(9,1) Q(10,1) Q(11,1) Q(12,1) Q(13,1) Q(14,1);
Q(15,1) Q(16,1) Q(17,1) Q(18,1) Q(19,1) Q(20,1) Q(21,1);
Q(22,1) Q(23,1) Q(24,1) Q(25,1) Q(26,1) Q(27,1) Q(28,1);
Q(29,1) Q(30,1) Q(31,1) Q(32,1) Q(33,1) Q(34,1) Q(35,1);
Q(36,1) Q(37,1) Q(38,1) Q(39,1) Q(40,1) Q(41,1) Q(42,1);
Q(43,1) Q(44,1) Q(45,1) Q(46,1) Q(47,1) Q(48,1) Q(49,1)]
for i=1:7
for j=1:7
Qexact(i,j)=sin(((1)*pi*x(i))/pi)*sin(((1)*pi*x(j))/pi)
end
end
for i=1:7
for j=1:7
E(i,j)=abs(Qexact(i,j)-Q(i,j))
end
end

```

EK 1.13. Uygulama2'in $M=N=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k = 2$ iken FDQM çözümü

MATLAB kodu

```

n=7;
x=zeros(1,n)
x(n)=pi
for i=2:n-1
x(i)=1/2*[1-cos((i-1)*pi/(n-1))]*pi
end
q=ones(1,n);
for i=1:7
for k=1:7
if k~=i
q(1,i)=q(1,i)*sin((x(i)-x(k))/2);
end

```

```

end
end
a1=zeros(n);
for i=1:7
for j=1:7
if j~=i
a1(i,j)=q(1,i)/[2*sin((x(i)-x(j))/2)*q(1,j)];
end
end
end
a2=zeros(n);
for i=1:7
for j=1:7
if j~=i
a2(i,i)=a2(i,i)+a1(i,j);
end
end
end
a2=-a2;
a=a1+a2;
b1=zeros(n);
for i=1:7
for j=1:7
if j~=i
b1(i,j)=a1(i,j)*[2*a2(i,i)-cot((x(i)-x(j))/2)]
end
end
end
end
b2=zeros(n);
for i=1:7
for j=1:7
if j~=i
b2(i,i)=b2(i,i)+b1(i,j);
end
end
end
end
b2=-b2;
b=b1+b2;
K=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0;
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0];

```


$L(12,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((2*\pi*0.2104)/\pi)$
 $L(13,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((2*\pi*0.2104)/\pi)$
 $L(16,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)$
 $L(17,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)$
 $L(18,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)$
 $L(19,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)$
 $L(20,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)$
 $L(23,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)$
 $L(24,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)$
 $L(25,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)$
 $L(26,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)$
 $L(27,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)$
 $L(30,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)$
 $L(31,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)$
 $L(32,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)$
 $L(33,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)$
 $L(34,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)$
 $L(37,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*0.2104)/\pi)*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)$
 $L(38,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*0.7854)/\pi)*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)$
 $L(39,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*1.5708)/\pi)*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)$
 $L(40,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*2.3562)/\pi)*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)$
 $L(41,1)=(2^2)*(1-\pi*\pi*((1/(\pi*\pi))+1/(\pi*\pi)))*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)*\sin((2*\pi*2.9311)/\pi)$


```

Q=inv(K)*L
Q=[Q(1,1) Q(2,1) Q(3,1) Q(4,1) Q(5,1) Q(6,1) Q(7,1) ;
Q(8,1) Q(9,1) Q(10,1) Q(11,1) Q(12,1) Q(13,1) Q(14,1);
Q(15,1) Q(16,1) Q(17,1) Q(18,1) Q(19,1) Q(20,1) Q(21,1);
Q(22,1) Q(23,1) Q(24,1) Q(25,1) Q(26,1) Q(27,1) Q(28,1);
Q(29,1) Q(30,1) Q(31,1) Q(32,1) Q(33,1) Q(34,1) Q(35,1);
Q(36,1) Q(37,1) Q(38,1) Q(39,1) Q(40,1) Q(41,1) Q(42,1);
Q(43,1) Q(44,1) Q(45,1) Q(46,1) Q(47,1) Q(48,1) Q(49,1)]
for i=1:7
for j=1:7
Qexact(i,j)=sin(((2)*pi*x(i))/pi)*sin(((2)*pi*x(j))/pi)
end
end
for i=1:7
for j=1:7
E(i,j)=abs(Qexact(i,j)-Q(i,j))
end
end

```

EK 1.14. Uygulama2'in $M=N=7$, $L_x = L_y = \pi$ ve $k = 3$ iken FDQM çözümü

MATLAB kodu

```

n=7;
x=zeros(1,n)
x(n)=pi
for i=2:n-1
x(i)=1/2*[1-cos((i-1)*pi/(n-1))]*pi
end
q=ones(1,n);
for i=1:7
for k=1:7
if k~=i
q(1,i)=q(1,i)*sin((x(i)-x(k))/2);
end
end
end
a1=zeros(n);
for i=1:7
for j=1:7
if j~=i
a1(i,j)=q(1,i)/[2*sin((x(i)-x(j))/2)*q(1,j)];
end
end
end
a2=zeros(n);
for i=1:7
for j=1:7
if j~=i
a2(i,i)=a2(i,i)+a1(i,j);
end
end
end

```


0 0 0 0 0 0 0 0 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(2,2)+9) 0 0 0 0 0 0 b(2,3) 0 0 0 0
0 0 b(2,4) 0 0 0 0 0 0 b(2,5) 0 0 0 0 0 0 b(2,6) 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 0 0 0 (b(2,2)+b(3,3)+9) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 0 0
b(3,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(3,3)+9) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 0 0 0
b(3,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(3,3)+9) b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0
b(3,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 0 b(5,2) b(5,3) b(5,4) (b(5,5)+b(3,3)+9) b(5,6) 0 0 0 0
0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(3,2) 0 0 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(3,3)+9) 0 0 0 0
0 0 b(3,4) 0 0 0 0 0 0 b(3,5) 0 0 0 0 0 0 b(3,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 0 0 (b(2,2)+b(4,4)+9) b(2,3) b(2,4)
b(2,5) b(2,6) 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 0 b(3,2) (b(3,3)+b(4,4)+9) b(3,4)
b(3,5) b(3,6) 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3) (b(4,4)+b(4,4)+9)
b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 0 b(5,2) b(5,3) b(5,4)
(b(5,5)+b(4,4)+9) b(5,6) 0 0 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(4,2) 0 0 0 0 0 0 b(4,3) 0 0 b(6,2) b(6,3) b(6,4) b(6,5)
(b(6,6)+b(4,4)+9) 0 0 0 0 0 0 b(4,5) 0 0 0 0 0 0 b(4,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 0 0
(b(2,2)+b(5,5)+9) b(2,3) b(2,4) b(2,5) b(2,6) 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 0 b(3,2)
(b(3,3)+b(5,5)+9) b(3,4) b(3,5) b(3,6) 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 0 b(4,2) b(4,3)
(b(4,4)+b(5,5)+9) b(4,5) b(4,6) 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 0 b(5,2) b(5,3)
b(5,4) (b(5,5)+b(5,5)+9) b(5,6) 0 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b(5,2) 0 0 0 0 0 0 b(5,3) 0 0 0 0 0 0 b(5,4) 0 0 b(6,2) b(6,3)
b(6,4) b(6,5) (b(6,6)+b(5,5)+9) 0 0 0 0 0 0 b(5,6) 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0;


```

L(23,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*0.2104)/pi)*sin((3*pi*1.5708)/pi)
L(24,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*0.7854)/pi)*sin((3*pi*1.5708)/pi)
L(25,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*1.5708)/pi)*sin((3*pi*1.5708)/pi)
L(26,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*2.3562)/pi)*sin((3*pi*1.5708)/pi)
L(27,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*2.9311)/pi)*sin((3*pi*1.5708)/pi)
L(30,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*0.2104)/pi)*sin((3*pi*2.3562)/pi)
L(31,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*0.7854)/pi)*sin((3*pi*2.3562)/pi)
L(32,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*1.5708)/pi)*sin((3*pi*2.3562)/pi)
L(33,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*2.3562)/pi)*sin((3*pi*2.3562)/pi)
L(34,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*2.9311)/pi)*sin((3*pi*2.3562)/pi)
L(37,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*0.2104)/pi)*sin((3*pi*2.9311)/pi)
L(38,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*0.7854)/pi)*sin((3*pi*2.9311)/pi)
L(39,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*1.5708)/pi)*sin((3*pi*2.9311)/pi)
L(40,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*2.3562)/pi)*sin((3*pi*2.9311)/pi)
L(41,1)=(3^2)*(1-
pi*pi*((1/(pi*pi))+1/(pi*pi)))*sin((3*pi*2.9311)/pi)*sin((3*pi*2.9311)/pi)
Q=inv(K)*L
Q=[Q(1,1) Q(2,1) Q(3,1) Q(4,1) Q(5,1) Q(6,1) Q(7,1) ;
Q(8,1) Q(9,1) Q(10,1) Q(11,1) Q(12,1) Q(13,1) Q(14,1);
Q(15,1) Q(16,1) Q(17,1) Q(18,1) Q(19,1) Q(20,1) Q(21,1);
Q(22,1) Q(23,1) Q(24,1) Q(25,1) Q(26,1) Q(27,1) Q(28,1);
Q(29,1) Q(30,1) Q(31,1) Q(32,1) Q(33,1) Q(34,1) Q(35,1);
Q(36,1) Q(37,1) Q(38,1) Q(39,1) Q(40,1) Q(41,1) Q(42,1);
Q(43,1) Q(44,1) Q(45,1) Q(46,1) Q(47,1) Q(48,1) Q(49,1)]
for i=1:7
for j=1:7
Qexact(i,j)=sin(((3)*pi*x(i))/pi)*sin(((3)*pi*x(j))/pi)
end
end
for i=1:7
for j=1:7
Efdqm_7(i,j)=abs(Qexact(i,j)-Q(i,j))
end
end

```

8. KAYNAKLAR

- [1] BELLMAN, R.E. and CASTI, J. 1971. Differential Quadrature and long-term integration. *J. Math. Anal. Appl.* , Vol. 34, pp. 235-238
- [2] BELLMAN, R.E. , KASHEF, B.G. and CASTI, J. 1972. Differential Quadrature: a technique for the rapid solution of non-linear partial differential equations. *J. Comput. Phys.* , Vol. 10, pp. 40-52
- [3] BELLMAN, R.E. 1973. Method of nonlinear analysis. Academic Press. , Vol. 2, ch. 16, New York
- [4] BELLMAN, R.E., KASHEF, B.G. 1974. Solution of the partial differential equation of the hodgkins-huxley model using differential quadrature. *Math. Biosci.* , Vol. 19, pp. 1-8
- [5] BELLMAN, R.E. and ROTH, R.S. 1979. System identificaion with partial information. *J. Math. Anal. Appl.* , Vol. 68, pp. 321-333
- [6] BELLMAN, R.E. and ROTH, R.S. 1979. A scanning technique for system identificaion. *J. Math. Anal. Appl.* , Vol. 71, pp. 403-411
- [7] MINGLE, J.O. 1973. Compitational Considerations in nonlinear diffusion. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* , Vol. 7, pp. 103-116
- [8] MINGLE, J.O. 1977. The method of differential quadrature for transient nonlinear diffusion. *J. Math. Anal. Appl.* , Vol. 60, pp. 559-569
- [9] CIVAN, F. and SLIEPCEVICH, C.M. 1983. Application of differential quadrature to transport processes. *J. Math. Anal. Appl.* , Vol. 93, pp. 206-221
- [10] CIVAN, F. and SLIEPCEVICH, C.M. 1983. Solution of the poission equation by differential quadrature. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* , Vol. 19, pp. 711-724
- [11] CIVAN, F. and SLIEPCEVICH, C.M. 1984. differential quadrature for multi-dimensional problems. *J. Math. Anal. Appl.* , Vol. 101, pp. 423-443
- [12] CIVAN, F. and SLIEPCEVICH, C.M. 1984. On the solution of the Thomas-fermi equation by differential quadrature. *J. Math. Anal. Appl.* , Vol. 101, pp. 423-443
- [13] SHU, C. and CHEV, Y.T. 1997. Fourier expansion-based differential quadrature, and its application to Helmholtz eigenvalue problem. *Commun Numer Methods Eng.* Vol. 13, Iss 8, pp. 643-653
- [14] SHU, C. and XUE, H. 1999. Solution of Helmholtz equation by differential quadrature method. *Comput Method Appl. M.* , Vol. 175, Iss 1-2, pp. 203-212

- [15] SHU, C. and CHEV, Y.T. 1999. Application of multi-domain GDQ method to analysis of waveguides with rectangular boundaries. In: Kong Ja Electromagnetic Waves: Pier 21. Emw publishing, pp. 643-653, Cambridge, Massachusetts, USA

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Rıfat GÖRGÜN 1978 yılında Antalya’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya’da tamamladı. 1997 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik-Haberleşme Mühendisliği Bölümü’nden 2001 yılında mezun oldu. 2001–2006 yılları arasında özel sektörlerde değişik firmalarda servis mühendisi olarak çalıştı. 2005 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Tezsiz Yüksek Lisansını 2006 Güz Dönemi sonunda tamamladı. Ağustos 2005’den beri Akdeniz Üniversitesi’nde Öğretim Görevlisi olarak görev yapmaktadır.