T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERGEOMETRİK BERNOULLI POLİNOMLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

RUKİYE NERGİZ ŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

HİPERGEOMETRİK BERNOULLI POLİNOMLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

RUKİYE NERGİZ ŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERGEOMETRİK BERNOULLI POLİNOMLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

RUKİYE NERGİZ ŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez . . . / . . . / 2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Veli KURT	. . . .
Yrd. Doç. Dr. Mehmet CENKCİ	. . . .
(Danışman)	
Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU	. . . .

ÖZET

HİPERGEOMETRİK BERNOULLI SAYILARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

RUKİYE NERGİZ ŞEN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet CENKCİ

Haziran 2011, 37 Sayfa

Bu çalışmada, hipergeometrik Bernoulli polinomları ele alınmıştır. Potansiyel polinomları kullanılarak yüksek dereceden hipergeometrik Bernoulli polinomları ve sayıları tanımlanarak bazı kapalı formül bağıntıları verilmiştir. Hipergeometrik Bernoulli polinomlarının bazı kesin değerleri için bölünebilme özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, hipergeometrik Hurwitz zeta fonksiyonu tanımlanarak hipergeometrik Bernoulli polinomları ile olan ilişkisi ele alınmıştır.

ANAHTAR KELİMELER : Hipergeometrik Bernoulli polinomları,
potansiyel polinomları,
hipergeometrik Hurwitz zeta fonksiyonu.

JÜRİ: Prof. Dr. Veli KURT

Yrd. Doç. Dr. Mehmet CENKCİ (Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU

ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF HYPERGEOMETRIC BERNOULLI POLYNOMIALS

Rukiye Nergiz ŞEN

M. Sc. in Mathematics

Adviser: Asst. Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

June 2011, 37 Pages

In this work hypergeometric Bernoulli polynomials are mainly considered. Using potential polynomials, hypergeometric Bernoulli polynomials and numbers are defined, and several closed type formulas for them are given. Divisibility properties of these polynomials are also investigated for certain values. In addition hypergeometric Hurwitz zeta function is defined and its connection with the hypergeometric Bernoulli polynomials is given.

KEY WORDS: Hypergeometric Bernoulli polynomials, potential polynomials, hypergeometric Hurwitz zeta function.

COMMITTEE: Prof. Dr. Veli KURT

Asst. Prof. Dr. Mehmet CENKCİ (Adviser)

Asst. Prof. Dr. Yusuf SUCU

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak kuramsal bilgiler ve kaynak taramaları ve bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Bu çalışmanın temel kavramı olan hipergeometrik Bernoulli polinomları ve sayıları ile Bulgular bölümünde kullanılacak olan potansiyel polinomlar, zeta fonksiyonları Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları bölümünde tanıtılmış ve bunların genel özellikleri verilmiştir.

Bulgular bölümü üç ana başlık altında toplanmıştır. İlk olarak, hipergeometrik Bernoulli polinomlarının potansiyel polinomları yardımıyla yüksek dereceden genelleştirmeleri ele alınmış ve bazı kapalı formüller elde edilmiştir. İkinci olarak, hipergeometrik Bernoulli polinomlarının bazı kesin değerleri için bölünebilme özellikleri incelenmiştir. Son olarak, hipergeometrik Hurwitz zeta fonksiyonu tanımlanarak bu fonksiyonun hipergeometrik Bernoulli polinomları ile olan ilişkisi ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasının Bernoulli polinomları ve ilgili polinomlar üzerinde yapılan çalışmalara önemli katkılar sağlayacağı inancındayız.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet CENKCİ'ye ve yardımlarını gördüğüm Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Jacob Bernoulli, meşhur "Ars Conjectandi" isimli çalışması ile verilen ardışık tamsayıların kuvvetlerinin sonlu toplamları çalışmalarında rasyonel sayıların özel bir dizisi ile ilgilenen kişidir. Bu çalışmasında Bernoulli, ele aldığı rasyonel sayı dizisini üreten tanımlayıcı bir bağıntı ifade etmiştir. Söz konusu sayı dizisi o tarihten beri Bernoulli sayıları olarak adlandırılır ve $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ için B_n ile gösterilir. Bu sayılar, $B_0 = 1$ ve her $n \geqslant 1$ tamsayısı için

$$B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n+1}{m}B_m$$

indirgeme bağıntısı ile belirlenir.

Bernoulli sayılarının matematiğin çeşitli dallarında uygulama alanları bulunmaktadır. Örneğin, Euler-Maclaurin Toplam Formülü Bernoulli sayılarının matematiksel analizde ortaya çıktığı kavramlardan biridir. Bu bağlamda, Bernoulli sayıları için bir analitik tanım, söz konusu alanda yapılan incelemeler için yararlıdır. Bernoulli sayıları için üreteç fonksiyonu

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

olarak tanımlanır. Bu bağıntı $|t| < 2\pi$ için geçerlidir. Herhangi bir x değişkeni için

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{e}^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{t^k}{k!}, \ |t| < 2\pi$$

eşitliği ile tanımlanan $B_k(x)$ fonksiyonları ele alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{t^k}{k!} = \mathrm{e}^{xt}\sum_{k=0}^{\infty} B_k\frac{t^k}{k!}$$

olduğundan

$$B_k(x) = \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}B_m x^{k-m}$$

bulunur. Dolayısıyla, $B_k(x)$ fonksiyonları aslında x değişkenine göre katsayıları Bernoulli sayıları ve derecesi k olan polinomlardır, bu yüzden Bernoulli polinomları olarak adlandırılır. Bernoulli polinomlarının ve Bernoulli sayılarının matematiksel analiz ile diğer bir ilgisi

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$$

ve

$$\zeta(s,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^{s}}$$

olarak tanımlanan ($\operatorname{Re}(s)>1$, $0<x\leqslant 1$) Riemann zeta ve Hurwitz zeta fonksiyonları arasındaki ilişkidir:

Her $n\geqslant 0$ tamsayısı için

$$\zeta(-n,x)=-\frac{B_{n+1}(x)}{n+1} \text{ ve } \zeta(-n)=-\frac{B_{n+1}}{n+1}+\delta_{n,1}$$

dir. Burada, $n=0$ ise $\delta_{n,1}=-1$ ve $n>0$ ise $\delta_{n,1}=0$ dır.

Bernoulli sayıları ve Bernoulli polinomlarının çeşitli genelleştirmelerine literatürde rastlamak mümkündür. Nörlund polinomları (veya genelleştirilmiş Bernoulli polinomları) z bir değişken olmak üzere

$$\left(\frac{t}{\mathrm{e}^{t}-1}\right)^{z}\mathrm{e}^{xt}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{k}^{(z)}(x)\frac{t^{k}}{k!},\ \ |t|<2\pi$$

olarak tanımlanır (Nörlund 1954). Howard (Howard 1967b) Bernoulli polinomlarının

$$\frac{\frac{t^{2}}{2!}}{\mathrm{e}^{t}-t-1}\mathrm{e}^{xt}=\sum_{k=0}^{\infty}A_{k}(x)\frac{t^{k}}{k!}$$

ve genel olarak $N\geqslant 1$ için

$$\frac{\frac{t^{N}}{N!}}{\mathrm{e}^{t}-T_{N-1}(t)}\mathrm{e}^{xt}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{k}(N,x)\frac{t^{k}}{k!}$$

olarak tanımlanan genelleştirmelerini ele almıştır. Burada $T_{N-1}(t)$,

$$T_{N-1}(t)=\sum_{m=0}^{N-1}\frac{t^{m}}{m!}$$

olarak verilen e^{t} fonksiyonunun sıfır komşuluğundaki derecesi $(N-1)$ olan Taylor polinomudur. $x=0$ için $A_{k}=A_{k}(0)$ ve $B_{k}(N)=B_{k}(N,0)$ gösterimleri kullanılır ve bunlar Bernoulli sayılarının genelleştirmeleri olarak düşünülebilir. Howard (Howard 1967a, 1967b, 1977) çalışmalarında A_{k} ve $B_{k}(N)$ için bazı teorik sonuçlar elde etmiştir.

Bu tez çalışmasında temel olarak günümüzde hipergeometrik Bernoulli polinomları olarak adlandırılan $B_{k}(N,z)$ polinomları ele alınmıştır. Potansiyel polinomları kullanılarak yüksek dereceden hipergeometrik Bernoulli polinomları ve sayıları tanımlanmış, bazı kapalı formül bağıntıları verilmiştir. Hipergeometrik Bernoulli polinomlarının bazı kesin değerleri için bölünebilme özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, hipergeometrik Hurwitz zeta fonksiyonu tanımlanarak hipergeometrik Bernoulli polinomları ile olan ilişkisi ele alınmıştır.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Bu bölümde bu tez çalışmasında kullanılan kavramların tanımları, gösterimleri ve sağladıkları bazı temel özellikleri ele alınacaktır.

2.1. Hipergeometrik Bernoulli Polinomları ve Sayıları

Ardışık pozitif tamsayıların kuvvetlerinin toplamı sayılar teorisinde temel bir problemdir ve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

formülleri iyi bilinmektedir. Bu formüllerin büyük kuvvetlere genelleştirmeleri Jacob Bernoulli (1654-1705) tarafından yapılan çalışmalarda ele alınmıştır. Jacob Bernoulli, “Ars Conjectandi” isimli çalışmasında bu problemin çözümü için tamsayı değişkenli ve tamsayı katsayılı polinomlar olarak ele alınabilen binom katsayılarını kullanmıştır. Binom katsayılarının, tamsayı değişkenli ve tamsayı katsayılı polinomlar için bir taban oluşturduğu gerçeğinden yola çıkarak ardışık pozitif tamsayıların kuvvetlerinin toplamı için

$$\sum_{k=m}^{n-1} k^l = \frac{1}{l+1}\left\{B_{l+1}(n) - B_{l+1}(m)\right\}$$

formülü ele alınmıştır. Bu formüldeki $B_l(n)$ ifadesi o zamandan beri Bernoulli polinomları olarak adlandırılır. Bernoulli polinomları, matematik ve diğer bilim dallarında çeşitli kavramlar ile ortaya çıkmaktadırlar. Örneğin, matematiksel analizde Euler-Maclaurin Toplam Formülü Bernoulli polinomlarını içeren ve $n!$ ile $\log n!$ için asimptotik ifadelerinin elde edilmesinde kullanılan önemli bir bağıntıdır. Bu yüzden, sayılar teorisinde ortaya çıkan Bernoulli polinomlarının matematiksel analiz alanında uygulanabilmesi için uygun yaklaşımlar gereklidir.

Bernoulli polinomları için çeşitli analitik yaklaşımlar vardır. Euler tarafından başlatılan ilk yaklaşım bu polinomları

$$\frac{t}{\mathrm{e}^{t}-1}\mathrm{e}^{xt}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{k}\left(x\right)\frac{t^{k}}{k!} \tag{2.1}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlar. Bu formül, sağ taraftaki kuvvet serisinin yakınsak olduğu bölge olan $|t|<2\pi$ için geçerlidir. $k\in\mathbb{Z}$, $k\geqslant 0$ için $B_{k}\left(x\right)$, derecesi k olan Bernoulli polinomudur. İlk birkaç Bernoulli polinomu

$$B_{0}\left(x\right)=1,\ B_{1}\left(x\right)=x-\frac{1}{2},\ B_{2}\left(x\right)=x^{2}-x+\frac{1}{6},\ B_{3}\left(x\right)=x^{3}-\frac{3x^{2}}{2}+\frac{x}{2}$$

olarak sıralanabilir.

$x=0$ için $B_{k}=B_{k}\left(0\right)$ gösterimi kullanılır ve elde edilen ifadeye k. Bernoulli sayısı denir. Dolayısıyla,

$$\frac{t}{\mathrm{e}^{t}-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{k}\frac{t^{k}}{k!},\ |t|<2\pi$$

dir. $B_{0}=1$, $B_{1}=-\frac{1}{2}$, $B_{2}=\frac{1}{6}$ ve $k\geqslant 1$ için $B_{2k+1}=0$ dır.

Bernoulli polinomları için diğer bir yaklaşım bu polinomları

$$\begin{aligned}
B_{0}\left(x\right) &= 1\\
B_{k}^{\prime}\left(x\right) &= kB_{k-1}\left(x\right)\\
\int_{0}^{1}B_{k}\left(x\right)\mathrm{d}x &= \begin{cases}1, & k=0 \text{ ise;}\\ 0, & k>0 \text{ ise.}\end{cases}
\end{aligned}$$

olarak bir Appell dizisi şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $B_{k}^{\prime}\left(x\right)$, k. Bernoulli polinomunun formal türevini göstermektedir.

Howard (Howard 1967a) Bernoulli polinomlarının

$$\frac{\frac{t^{2}}{2!}}{\mathrm{e}^{t}-t-1}\mathrm{e}^{xt}=\sum_{k=0}^{\infty}A_{k}\left(x\right)\frac{t^{k}}{k!} \tag{2.2}$$

ve genel olarak $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 1$ için

$$\frac{\frac{t^{N}}{N!}}{\mathrm{e}^{t}-T^{N-1}\left(t\right)}\mathrm{e}^{xt}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{k}\left(N,x\right)\frac{t^{k}}{k!} \tag{2.3}$$

olarak tanımlanan genelleştirmelerini ele almıştır. Burada $T_{N-1}(t)$

$$T_{N-1}(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{t^m}{m!}$$

olarak verilen e^t fonksiyonunun sıfırın komşuluğundaki derecesi $(N-1)$ olan Taylor polinomudur. $N=1$ ve $N=2$ özel değerleri için (2.3) bağıntısı, sırasıyla, (2.1) ve (2.2) eşitliklerine dönüşür. (2.3) bağıntısıda $x=0$ için elde edilen ifade $B_k(N) = B_k(N,0)$ ile gösterilir. Dolayısıyla,

$$\frac{\frac{t^N}{N!}}{\mathrm{e}^t - T_{N-1}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(N) \frac{t^k}{k!} \tag{2.4}$$

dir. Howard (Howard 1967a, 1967b, 1977) $B_k(N)$ için birçok kongrüans bağıntısı elde etmiştir.

Bernoulli polinomları için Appell dizisi yaklaşımını kullanarak Hassen ve Nguyen (Hassen ve Nguyen 2008) $B_k(N,x)$ için

$$\begin{aligned} B_0(N,x) &= 1 \\ B_k^{'}(N,x) &= kB_{k-1}(N,x) \\ \int_0^1 (1-x)^{N-1} B_k(N,x)\,\mathrm{d}x &= \begin{cases} \frac{1}{N}, & n=0 \text{ ise;} \\ 0, & n>0 \text{ ise.} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.5}$$

tanımını ele almışlardır. (2.5) bağıntısındaki integral formülü beta fonksiyonları kullanılarak genelleştirilebilir. Bunun için Dilcher (Dilcher 2002) tarafından verilen Bernoulli polinomlarının birleşik (confluent) hipergeometrik serilere dayanan bir genelleştirmesi kullanılabilir.

Tanım 2.1 (Rainville 1960) *p ile q pozitif tamsayılar ve α_i, $i=1,\ldots,p$, β_j, $j=1,\ldots,q$ parametreler olmak üzere (genelleştirilmiş) hipergeometrik fonksiyon*

$${}_pF_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q;t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle\alpha_1\rangle_k \langle\alpha_2\rangle_k \cdots \langle\alpha_p\rangle_k}{\langle\beta_1\rangle_k \langle\beta_2\rangle_k \cdots \langle\beta_q\rangle_k} \frac{t^k}{k!} \tag{2.6}$$

olarak tanımlanır.

(2.6) bağıntısındaki seri ifadesinde paydada bulunan β_j parametreleri sıfır ve negatif tamsayı değildir. Payda bulunan α_j parametrelerinden biri sıfır veya negatif tamsayı ise seri sonlu toplama dönüşür. Bu eşitlikte, $k \geqslant 1$ ise

$$\langle \alpha \rangle_k = \alpha\left(\alpha+1\right)...\left(\alpha+k-1\right)$$

ve $\alpha \neq 0$ için

$$\langle \alpha \rangle_0 = 1$$

gösterimleri kullanılır.

(2.6) bağıntısındaki seri ifadesine oran testi uygulanırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

(a) $p \leqslant q$ ise seri her sonlu t için yakınsaktır.

(b) $p = q+1$ ise seri $|t| < 1$ için yakınsak ve $|t| > 1$ için ıraksaktır.

(c) $p > q+1$ ise seri $t \neq 0$ için ıraksaktır.

(d) $p = q+1$ ise

$$\operatorname{Re}\left(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_q-\left(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p\right)\right) > 0$$

olduğunda seri $|t| = 1$ için yakınsaktır.

${}_pF_q$ hipergeometrik fonksiyonunun p ile q sayılarının kesin değerlerine karşılık gelen ancak bu tez çalışmasının kapsamı dışında kaldığı için detaylı olarak incelenmeyecek olan özel durumları söz konusudur. Örneğin, ${}_0F_0$ üstel fonksiyon, ${}_1F_0$ binom fonksiyonu (yani $(1-t)^{-a}$), ${}_0F_1$ Bessel fonksiyonunun tanımında ortaya çıkan fonksiyon ve ${}_2F_1$ Gauss fonksiyonudur. Ancak, aşağıdaki özel durum bu çalışmanın kapsamı ile kısmen bağlantılıdır.

Tanım 2.2 (Rainville 1960) *b sıfır veya negatif tamsayı olmamak üzere birleşik (confluent) hipergeometrik fonksiyon*

$${}_1F_1\left(a;b;t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle a \rangle_k}{\langle b \rangle_k} \frac{t^k}{k!}$$

olarak tanımlanır. Sağ taraftaki seri her sonlu t için yakınsaktır.

Dilcher (Dilcher 2002) birleşik hipergeometrik fonksiyonu ile Bernoulli polinomlarının bir genelleştirmesini

$$\frac{\mathrm{e}^{xt}}{{}_1F_1\left(M, M+N, t\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k\left(M,N,x\right)\frac{t^k}{k!}$$

olarak tanımlanmıştır. (2.5) bağıntısındaki integral eşitliğine benzer olarak Hassen ve Nguyen (Hassen ve Nguyen 2008) $B_k(M, N, x)$ için

$$\int_0^1 x^{M-1}(1-x)^{N-1} B_k(M, N, x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\Gamma(M)\Gamma(N)}{\Gamma(M+N)}, & k = 0 \text{ ise;} \\ 0, & k > 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

bağıntısı elde edilmiştir. Burada $\Gamma(n)$, gamma fonksiyonudur (Sayfa 14). $M = 1$ için $B_k(1, N, x) = B_k(N, x)$ olduğundan $B_k(N, x)$, hipergeometrik Bernoulli polinomları ve $B_k(N, 0) = B_k(N)$ hipergeometrik Bernoulli sayıları olarak adlandırılır.

2.2. Potansiyel Polinomları ve Üstel Bell Polinomları

$r \geqslant 0$ ve $f_r \neq 0$ için $F(t) = \sum_{k=r}^{\infty} f_k \frac{t^k}{k!}$ bir formal kuvvet serisi olsun. Karmaşık bir z değişkeni için $F_k^{(z)}$ potansiyel polinomları

$$\left(\frac{f_r \frac{t^r}{r!}}{F(t)}\right)^z = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(z)} \frac{t^k}{k!} \tag{2.7}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. $r \geqslant 1$ ise üstel Bell polinomları $B_{n,j}(0, \ldots, 0, f_r, f_{r+1}, \ldots)$ ile gösterilir ve

$$(F(t))^j = j! \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,j}(0, \ldots, 0, f_r, f_{r+1}, \ldots) \frac{t^n}{n!} \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır (Comtet 1974, Howard 1982). Bu tanımlar yardımı ile aşağıdaki bağıntı kolaylıkla elde edilebilir:

Önerme 2.3 *j bir pozitif tamsayı ise*

$$F_k^{(-j)} = \left(\frac{r!}{f_r}\right)^j \frac{k!j!}{(k+rj)!} B_{k+rj,j}(0, \ldots, 0, f_r, \ldots)$$

dir.

Kanıt. j bir pozitif tamsayı ise (2.7) eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(-j)} \frac{t^k}{k!} = \left(\frac{f_r \frac{t^r}{r!}}{F(t)}\right)^{-j} = \left(\frac{r!}{f_r}\right)^j \frac{1}{t^{rj}} (F(t))^j$$

yazılabilir. (2.8) gereği

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(-j)} \frac{t^k}{k!} &= \left(\frac{r!}{f_r}\right)^j \frac{1}{t^{rj}} j! \sum_{k=0}^{\infty} B_{k,j}\left(0,\ldots,0,f_r,\ldots\right) \frac{t^k}{k!} \\
&= \left(\frac{r!}{f_r}\right)^j j! \sum_{k=0}^{\infty} B_{k,j}\left(0,\ldots,0,f_r,\ldots\right) \frac{t^{k-rj}}{k!} \\
&= \left(\frac{r!}{f_r}\right)^j j! \sum_{k=0}^{\infty} B_{k+rj,j}\left(0,\ldots,0,f_r,\ldots\right) \frac{t^k}{(k+rj)!}
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafta $\frac{t^k}{k!}$ teriminin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

Potansiyel polinomları ve üstel Bell polinomları bir bileşke fonksiyonunun yüksek mertebeden türevlerinin bir kesin formülünü veren Faá di Bruno Formülü kavramında ortaya çıkmaktadır (Comtet 1974, Riordan 1958).

Bu tez çalışması boyunca karmaşık z sayısı için

$$\begin{aligned}
(z)_k &= z(z-1)\cdots(z-k+1) \\
\langle z\rangle_k &= z(z+1)\cdots(z+k-1) \\
\binom{z}{k} &= \frac{(z)_k}{k!}
\end{aligned}$$

gösterimleri kullanılacaktır. Ayrıca, karmaşık z sayısı için

$$(1+t)^z = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} t^k$$

olarak ifade edilen binom teoremine (Comtet 1974) ihtiyaç vardır. Bu çalışma boyunca iki formal kuvvet serisinin çarpımı

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \ , \ B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

için

$$C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k\right)$$

ise

$$c_k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} a_{k-m} b_m$$

anlamındadır. Ayrıca, seriler üzerinde yapılan işlemde aşağıdaki önteorem kullanışlıdır.

Önteorem 2.4 (Rainville 1960)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A\left(k,n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A\left(k,n-k\right)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}B\left(k,n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B\left(k,n+k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}B\left(k,n\right)$$

dir.

Birinci tip (işaretsiz) Stirling sayısı $s\left(n,j\right)$ ile gösterilir ve

$$s\left(n,j\right)=B_{n,j}\left(0!,1!,2!,\ldots\right),$$

yani,

$$\left(-\log\left(1-t\right)\right)^{j}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k}}{k}\right)^{j}=j!\sum_{n=j}^{\infty}s\left(n,j\right)\frac{t^{n}}{n!}$$

ile tanımlanır.

$$\left\langle z\right\rangle_{n}=\sum_{j=0}^{n}s\left(n,j\right)z^{j}$$

dir ve bu bağıntı genellikle $s\left(n,j\right)$ sayısının tanımı olarak kullanılır (Comtet 1974). İkinci tip Stirling sayısı $S\left(n,j\right)$ ile gösterilir ve

$$S\left(n,j\right)=B_{n,j}\left(1,1,1,\ldots\right),$$

yani,

$$\left(\mathrm{e}^{t}-1\right)^{j}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k}}{k!}\right)^{j}=j!\sum_{n=j}^{\infty}S\left(n,j\right)\frac{t^{n}}{n!}$$

ile tanımlanır.

Birinci tip Stirling sayısı ile ilgili olan $d\left(n,j\right)$ sayısı

$$d\left(n,j\right)=B_{n,j}\left(0,1!,2!,\ldots\right)$$

ile ikinci tip Stirling sayısı ilgili olan $b\left(n,j\right)$ sayısı

$$b\left(n,j\right)=B_{n,j}\left(0,1,1,\ldots\right)$$

olarak tanımlanır (Riordan 1958).

(2.7) eşitliğinin bir özel durumu

$$\left(\frac{t}{\mathrm{e}^{t}-1}\right)^{z}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{k}^{(z)}\frac{t^{k}}{k!}$$

ile tanımlanan $B_{k}^{(z)}$ Nörlund polinomudur (Nörlund 1954). $B_{k}^{(1)}=B_{k}$ Bernoulli sayısıdır.

Potansiyel polinomları ve üstel Bell polinomları arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki teorem Howard tarafından verilmiştir:

Teorem 2.5 (Howard 1982) $F_{k}^{(z)}$ (2.7) *eşitliği ile ve* $B_{n,j}$ (2.8) *eşitliği ile tanımlanmak üzere*

$$\begin{aligned}\binom{k-z}{k}F_{k}^{(z)} &= \sum_{j=0}^{k}\left(\frac{r!}{f_{r}}\right)^{j}\binom{k+z}{k-j}\binom{k-z}{k+j}\frac{(k+j)!}{(k+rj)!}B_{k+rj,j}\left(0,\ldots,0,f_{r},\ldots\right)\\ &= \sum_{j=0}^{k}\left(\frac{r!}{f_{r}}\right)^{j}\binom{k-z}{k+j}\frac{(k+j)!}{(k+rj)!}B_{k+rj,j}\left(0,\ldots,0,f_{r+1},\ldots\right)\end{aligned}$$

dir.

Kanıt. $c_{i}=\dfrac{f_{r+i}}{f_{r}\binom{r+i}{r}}$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty}F_{k}^{(z)}\frac{t^{k}}{k!}=\left(\frac{f_{r}\frac{t^{k}}{k!}}{F\left(t\right)}\right)^{z}=\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}c_{i}\frac{t^{i}}{i!}\right)^{-z}$$

dir. Kısalık bakımından $g=1+\sum_{i=1}^{\infty}c_{i}\dfrac{t^{i}}{i!}$ olsun. Binom teoremi ve Önteorem 2.4 gereği

$$\begin{aligned}(g)^{-z} &= \left[1+(g-1)\right]^{-z}=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-z}{j}(g-1)^{j}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{-z}{j}\sum_{k=j}^{\infty}j!B_{k,j}\left(c_{1},c_{2},c_{3},\ldots\right)\frac{t^{k}}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\left\langle z\right\rangle_{j}B_{k,j}\left(c_{1,}c_{2},c_{3},\ldots\right)\frac{t^{k}}{k!}\right) \qquad (2.9)\end{aligned}$$

elde edilir. $B_{k,j}$ üstel Bell polinomunun tanımından

$$\begin{aligned} j!\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,j}\left(c_1,c_2,c_3,\ldots\right)\frac{t^k}{k!} &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i\frac{t^i}{i!}\right)^j = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_{r+i}}{\binom{r+i}{r}f_r}\frac{t^i}{i!}\right)^j \\ &= \left(\frac{r!}{f_r}\right)^j\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_{r+i}\frac{t^i}{(r+i)!}\right)^j \\ &= \left(\frac{r!}{f_r}\right)^j t^{-rj}\left(\sum_{i=r+1}^{\infty} f_i\frac{t^i}{i!}\right)^j \\ &= \left(\frac{r!}{f_r}\right)^j t^{-rj} j!\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,j}\left(0,\ldots,0,f_{r+1},\ldots\right)\frac{t^k}{k!} \\ &= \left(\frac{r!}{f_r}\right)^j j!\sum_{k=0}^{\infty} B_{k+rj,j}\left(0,\ldots,0,f_{r+1},\ldots\right)\frac{t^k}{(k+rj)!} \end{aligned}$$

bulunur. $\dfrac{t^k}{k!}$ teriminin katsayıları karşılaştırılırsa

$$B_{k,j}\left(c_1,c_2,c_3,\ldots\right) = \left(\frac{r!}{f_r}\right)^j\frac{k!}{(k+rj)!}B_{k+rj,j}\left(0,\ldots,0,f_{r+1},\ldots\right)$$

dir. Buradan

$$(g)^{-z} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\left\langle z\right\rangle_j\left(\frac{r!}{f_r}\right)^j\frac{k!}{(k+rj)!}B_{k+rj,j}\left(0,\ldots,0,f_{r+1},\ldots\right)\right)\frac{t^k}{k!}$$

ile

$$\sum_{k=0}^{\infty}F_k^{(z)}\frac{t^k}{k!} = (g)^{-z}$$

eşitliklerinden t^k terimleri karşılaştırılırsa

$$F_k^{(z)} = \sum_{j=0}^{k}\left(-\frac{r!}{f_r}\right)^j\left\langle z\right\rangle_j\frac{k!}{(k+rj)!}B_{k+rj,j}\left(0,\ldots,0,f_{r+1},\ldots\right)$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı $\binom{k-z}{k}$ ile çarpılırsa teoremdeki ikinci eşitlik elde edilir.

$j>k$ için $(g-1)^j$ ifadesinde t^k terimleri olmayacağından (2.9) eşitliği gereği $F_k^{(z)}$, $\dfrac{t^k}{k!}$ teriminin

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{k}\binom{-z}{m}(g-1)^{m} &= \sum_{m=0}^{k}\binom{-z}{m}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j-m}\binom{m}{j}g^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}g^{j}\sum_{m=j}^{\infty}\binom{z+m-1}{m}\binom{m}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}g^{j}\binom{z+j-1}{j}\sum_{m=j}^{k}\binom{z+m-1}{m-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{z+j-1}{j}\binom{z+k}{k-j}g^{j}
\end{aligned}$$

ifadesindeki katsayısıdır. Dolayısıyla,

$$F_k^{(z)} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{z+j-1}{j}\binom{z+k}{k-j}F_k^{(-j)}$$

bulunur. Bu ifadenin her iki tarafı $\binom{k-z}{k}$ ile çarpılır ve Önerme 2.3 kullanılırsa teoremdeki ilk eşitlik elde edilir. ■

Cenkci, potansiyel polinomlarının bir bağımsız değişken ile genelleştirmesini ele almıştır.

Tanım 2.6 (Cenkci 2009) *$r \geqslant 0$ ve $f_r \neq 0$ için $F(x) = \sum_{k=r}^{\infty} f_k \frac{t^k}{k!}$ bir kuvvet serisi olsun. Bir bağımsız x değişkeni için genelleştirilmiş potansiyel polinomu $F_k^{(z)}(x)$,*

$$\left(\frac{f_r \frac{t^r}{r!}}{F(t)}\right)^{z} \mathrm{e}^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(z)}(x)\frac{t^k}{k!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Genelleştirilmiş potansiyel polinomları ile potansiyel polinomlar arasında aşağıda verilen ilişki vardır:

Önerme 2.7 (Cenkci 2009) $F_k^{(z)}(x) = \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^{k-m}F_m^{(z)}$ *dir.*

Bu ifade, $F_k^{(z)}(x)$ ile $F_k^{(z)}$ için üreteç bağıntılarının katsayılarının karşılaştırması ile gösterilebilir. Yine bu ifadeden $F_k^{(z)}(x)$ ifadesi, x değişkenine göre derecesi k olan bir polinomdur.

Cenkci tarafından verilen aşağıdaki teorem Teorem 2.5'in genelleştirmesidir.

Teorem 2.8 (Cenkci 2009)

$$\begin{aligned} F_k^{(z)}(x) &= \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{z+m-1}{m} \left(\frac{r!}{f_r}\right)^m \\ &\times \sum_{j=0}^{k-m} \binom{k}{j+m} x^{k-m-j} \binom{z+m+j}{j} \frac{(j+m)!m!}{(j+m+mr)!} B_{j+m+mr,m}(0,\ldots,0,f_r,\ldots) \end{aligned}$$

dir.

2.3. Riemann Zeta, Hurwitz Zeta ve Hipergeometrik Zeta Fonksiyonları

s bir karmaşık sayı, $s = \sigma + it$ olsun. Riemann zeta fonksiyonu $\zeta(s)$ ile gösterilir ve $\sigma > 1$ için

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ile tanımlanır. x bir reel sayı, $0 < x \leqslant 1$ olmak üzere Hurwitz zeta fonksiyonu

$$\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s}$$

ile tanımlanır. $x = 1$ için $\zeta(s,1) = \zeta(s)$ Riemann zeta fonksiyonu elde edilir. $\zeta(s,x)$ için verilen seri ifadesi $\sigma > 1$ için mutlak yakınsaktır. Yakınsama, $\delta > 0$ için $\sigma \geqslant 1 + \delta$ yarı-düzleminde düzgündür. Dolayısıyla, $\sigma > 1$ yarı-düzleminde $\zeta(s,x)$, s değişkeninin bir analitik fonksiyonudur.

Gamma fonksiyonu $\Gamma(s)$ ile gösterilir ve $\sigma > 0$ için

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u$$

integrali ile tanımlanır. $\sigma > 0$ için bu integral ile tanımlanan fonksiyon $\sigma = 0$ doğrusunun sol tarafına analitik devam ettirilebilir. Dolayısıyla, $\Gamma(s)$ karmaşık s-düzleminde, $s = 0, -1, -2, \ldots$ basit kutupları hariç bir analitik fonksiyondur. $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ için $s = -n$ basit kutbundaki rezidü $\frac{(-1)^n}{n!}$ dir. Gamma fonksiyonu her s için geçerli olan

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \; \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

fonksiyonel eşitlikleri gerçekler.

Hurwitz zeta ve Riemann zeta fonksiyonları için aşağıdaki integral gösterimleri geçerlidir:

Teorem 2.9 (Apostol 1985, Edwards 1974, Titchmarsh 1952) $\sigma > 1$ *için*

$$\Gamma(s)\,\zeta(s,x) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\mathrm{e}^{-xt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t$$

dir. Özel olarak $x = 1$ *için*

$$\Gamma(s)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t$$

dir.

$\zeta(s,x)$ Hurwitz zeta fonksiyonunu $\sigma = 1$ doğrusunun sol tarafına genişletmek için $\zeta(s,x)$ fonksiyonu bir kontur integral cinsinden ifade edilir. Bunun için negatif reel eksen etrafında oluşturulan bir C konturu kullanılır. C konturu C_1, C_2, C_3 ile gösterilen üç parçadan oluşur. C_2, orijin merkezli ve $c < 2\pi$ yarıçaplı pozitif yönlü çember, C_1 negatif reel eksen üzerinde alınan kesitin $-\infty$'dan c noktasına olan alt kenarı ve C_3 negatif reel eksen üzerinde alınan kesitin c noktasından $-\infty$'a olan üst kenarıdır. Bu konturlar üzerinde bir z karmaşık değişkeni

$$\begin{aligned} C_1 &: \quad z = r\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}},\ c \leqslant r < \infty \\ C_2 &: \quad z = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \\ C_3 &: \quad z = r\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}},\ c \leqslant r < \infty \end{aligned}$$

parametrik olarak ifade edilebilir.

Teorem 2.10 (Apostol 1985) $0 < x \leqslant 1$ *için*

$$I(s,x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{z^{s-1}\mathrm{e}^{xz}}{1-\mathrm{e}^{z}}\mathrm{d}z$$

ile tanımlanan fonksiyon s *değişkenine göre bir tam fonksiyondur. Ayrıca,* $\sigma > 1$ *ise*

$$\zeta(s,x) = \Gamma(1-s)\,I(s,x)$$

dır.

$\sigma > 1$ için geçerli olan

$$\zeta(s,x) = \Gamma(1-s) I(s,x)$$

eşitliğinde $\Gamma(1-s)$ ile $I(s,x)$ fonksiyonları her s için anlamlıdır. Dolayısıyla, $\sigma \leqslant 1$ için $\zeta(s,x)$ fonksiyonu bu eşitlik yardımı ile, yani

$$\zeta(s,x) = \Gamma(1-s) I(s,x)$$

olarak tanımlanabilir.

Teorem 2.11 (Apostol 1985) *Yukarıdaki şekilde tanımlanan $\zeta(s,x)$ fonksiyonu $s=1$ noktasında rezidüsü 1 olan bir basit kutup hariç her s için analitiktir.*

k bir negatif olmayan tamsayı ise $\zeta(-k,x)$ fonksiyonun değeri kesin olarak hesaplanabilir.

$$\zeta(s,x) = \Gamma(1-s) I(s,x)$$

eşitliğinde $s=-k$ alınırsa

$$\zeta(-k,x) = \Gamma(k+1) I(-k,x) = I(-k,x)\, k!$$

dir. Ayrıca,

$$I(-k,x) = \operatorname{Rez}\left(\frac{z^{-k-1}\mathrm{e}^{xz}}{1-\mathrm{e}^{z}}, 0\right)$$

dır. Bu rezidünün hesabı Bernoulli polinomları ile ilgilidir. Gerçekten, Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} I(-k,x) &= \operatorname{Rez}\left(\frac{z^{-k-1}\mathrm{e}^{xz}}{1-\mathrm{e}^{z}}, 0\right) \\ &= -\operatorname{Rez}\left(z^{-k-2}\sum_{m=0}^{\infty} B_m(x)\frac{z^m}{m!}, 0\right) \\ &= -\frac{B_{k+1}(x)}{(k+1)!} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\zeta(-k,x) = -\frac{B_{k+1}(x)}{k+1}$$

elde edilir. $B_k(x)$ Bernoulli polinomları $k \geqslant 1$ için

$$B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$$

fark denklemini sağlarlar. Bu fark denkleminden $k \geqslant 2$ için

$$B_k = B_k(0) = B_k(1)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\zeta(-k, x) = -\frac{B_{k+1}(x)}{k+1}$$

ifadesinde $k \geqslant 1$ için $x = 1$ yazılırsa

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}$$

bulunur.

Riemann zeta fonksiyonu için Riemann tarafından verilen integral gösteriminden esinlenerek Hassen ve Nguyen (Hassen ve Nguyen 2010) $N \geqslant 1$ bir tamsayı olmak üzere

$$\zeta_N(s) = \frac{1}{\Gamma(s+N-1)} \int_0^\infty \frac{t^{s+N-2}}{\mathrm{e}^t - T_{N-1}(t)} \mathrm{d}t$$

olarak tanımlanan ve hipergeometrik zeta fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonu tanımlamışlardır. Bu fonksiyon $s = 1, 0, -1, -2, \ldots, 2-N$ noktalarındaki N tane basit kutbu hariç tüm karmaşık düzlemde analitik devam ettirilebilir ve Riemann zeta fonksiyonun sağladığı özelliklere benzer özellikler gösterir.

Teorem 2.12 (Hassen ve Nguyen 2010) $\zeta_N(s)$, $\{2-N, 3-N, \ldots, -1, 0, 1\}$ *noktalarındaki basit kutupları hariç tüm karmaşık düzlemde bir analitik fonksiyondur ve basit kutuplarındaki rezidüleri* $2-N \leqslant k \leqslant -1$ *için*

$$\mathrm{Rez}(\zeta_N(s), k) = (2-k)\binom{N}{2-k} B_{1-k}(N)$$

dir. Ayrıca, $2-N$ *sayısından küçük olan negatif* k *sayıları için*

$$\zeta_N(k) = (-1)^{-k-N+1} \frac{B_{1-k}(N)}{\binom{1-k}{N}}$$

dir.

3. BULGULAR

Bu bölümde ilk olarak genelleştirilmiş potansiyel polinomlar yardımı ile hipergeometrik Bernoulli polinomları ve sayıları için kapalı formüller elde edilecektir. İkinci olarak, hipergeometrik Bernoulli polinomlarının bazı kesin değişkenleri için bölünebilme özellikleri incelenecektir. Son olarak, hipergeometrik Hurwitz zeta fonksiyonu tanımlanarak bu fonksiyonun temel özellikleri ile hipergeometrik Bernoulli polinomları arasındaki bağıntılar verilecektir.

3.1. Hipergeometrik Bernoulli Polinomları için Bazı Formüller

Bu bölümde genelleştirilmiş potansiyel polinomları kullanılarak hipergeometrik Bernoulli polinomları ve sayıları için bazı formüller elde edilecektir. Bu formüller ikinci tip Stirling sayıları ile ilgili olan çeşitli sayıları içermekte ve klasik durum için benzer sonuçların genelleştirmesi olmaktadır.

Bu amaç için yüksek dereceli hipergeometrik Bernoulli sayıları ve polinomları tanımlarına ihtiyaç vardır.

Tanım 3.1 *z herhangi bir karmaşık değişken olmak üzere yüksek dereceli hipergeometrik Bernoulli polinomları $B_k^{(z)}(N,x)$ ile gösterilir ve*

$$\left(\frac{\frac{t^N}{N!}}{\mathrm{e}^t - T_{N-1}(t)}\right)^z \mathrm{e}^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(z)}(N,x)\frac{t^k}{k!}$$

üreteç bağıntısı ile tanımlanır. $x=0$ için $B_k^{(z)}(N,0) = B_k^{(z)}(N)$ yüksek dereceli hipergeometrik Bernoulli sayıları elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left(\frac{\frac{t^N}{N!}}{\mathrm{e}^t - T_{N-1}(t)}\right)^z = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(z)}(N)\frac{t^k}{k!}$$

dir.

$z = 1$ için $B_k^{(1)}(N,x) = B_k(N,x)$ ve $B_k^{(1)}(N) = B_k(N)$, sırasıyla, hipergeometrik Bernoulli polinomları ve sayılarıdır. Ayrıca, $N=1$ için $B_k^{(z)}(1,x) = B_k^{(z)}(x)$ ve $B_k^{(z)}(1) = B_k^{(z)}$, sırasıyla, genelleştirilmiş Nörlund ve Nörlund polinomlarıdır.

Tanım 3.1 ile verilen üreteç bağıntıları yardımı ile aşağıdaki eşitlikleri göstermek kolaydır:

$$\begin{aligned}
B_k^{(z+w)}(N,x) &= \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}B_m^{(z)}(N,x)\,B_{k-m}^{(w)}(N),\\
B_k^{(z)}(N,x+y) &= \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}B_m^{(z)}(N,x)\,y^{k-m},\\
B_k^{(z+w)}(N,x+y) &= \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}B_m^{(z)}(N,x)\,B_{k-m}^{(w)}(N,y).
\end{aligned}$$

(2.8) eşitliğinde $F(t)=\mathrm{e}^t-T_{N-1}(t)$ alınırsa

$$\left(\mathrm{e}^t-T_{N-1}(t)\right)^j=\left(\sum_{k=N}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\right)^j=j!\sum_{k=0}^{\infty}B_{k,j}(\underbrace{0,\ldots,0}_{(N-1)\text{-tane}},1,1,1,\ldots)\frac{t^k}{k!}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\left(\mathrm{e}^t-T_{N-1}(t)\right)^j=j!\sum_{k=j}^{\infty}S_N(k,j)\frac{t^k}{k!}$$

tanımlanırsa

$$S_N(k,j) = B_{k,j}(\underbrace{0,\ldots,0}_{(N-1)\text{-tane}},1,1,1,\ldots) \tag{3.1}$$

$$b_N(k,j) = B_{k,j}(\underbrace{0,\ldots,0}_{N\text{-tane}},1,1,1,\ldots) \tag{3.2}$$

elde edilir. $N=1$ için bu bağıntı ikinci tip Stirling sayısı $S(k,j)$ ve ikinci tip Stirling sayısı ile ilgili olan $b(k,j)$ haline gelir.

Teorem 3.2

$$\begin{aligned}
B_k(N,x) = {} & \sum_{m=0}^{k}(-1)^m(N!)^m \qquad (3.3)\\
& \times\sum_{j=0}^{k-m}\binom{k}{j+m}x^{k-m-j}\binom{m+j+1}{j}\frac{(j+m)!m!}{(j+m+mN)!}S_N(j+m+mN,m)
\end{aligned}$$

ve

$$B_k(N)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j(N!)^j\binom{k+1}{k-j}\frac{k!j!}{(k+Nj)!}S_N(k+Nj,j) \tag{3.4}$$

dir.

Kanıt. Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları bölümündeki gösterimler altında $F(t) = \mathrm{e}^t - T_{N-1}(t)$ olsun. Bu durumda, $F(t) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ olduğundan $r = N$ ve $f_r = 1$ dir. Ayrıca,

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(z)}(x) \frac{t^k}{k!} = \left(\frac{\frac{t^N}{N!}}{\mathrm{e}^t - T_{N-1}(t)} \right)^z \mathrm{e}^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(z)}(N, x) \frac{t^k}{k!}$$

olduğundan $F_k^{(z)}(x) = B_k^{(z)}(N, x)$ ve $F_k^{(z)} = B_k^{(z)}(N)$ dir. Dolayısıyla, Teorem 2.8 gereği

$$\begin{aligned} B_k^{(z)}(N, x) &= \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{z+m-1}{m} (N!)^m \\ &\times \sum_{j=0}^{k-m} \binom{k}{j+m} x^{k-m-j} \binom{z+m+j}{j} \frac{(j+m)!m!}{(j+m+mN)!} S_N(j+m+mN, m) \end{aligned} \tag{3.5}$$

ve (2.4) eşitliği gereği

$$B_k^{(z)}(N) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{z+j-1}{j} \binom{z+k}{k-j} (N!)^j \frac{k!j!}{(k+Nj)!} S_N(k+Nj, j) \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) ifadelerinde $z = 1$ yazılırsa, sırasıyla, (3.3) ve (3.4) eşitlikleri bulunur. ■

İkinci tip Stirling sayıları ve bu sayılarla ilgili olan sayılar arasındaki

$$\begin{aligned} S(n, n-k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{2k-j} b(2k-j, k-j), \\ b(n, k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} S(n-i, k-i) \end{aligned}$$

bağıntılarına (Howard 1982) benzer bağıntılar hipergeometrik durum için de elde edilir.

Teorem 3.3 (3.1) *ve* (3.2) *ile tanımlanan* $S_N(k, j)$ *ve* $b_N(k, j)$ *sayıları*

$$\begin{aligned} S_N(k+Nm, m) &= \sum_{j=0}^{k} (N!)^{-m+j} \frac{(k+Nm)!}{(m-j)!(k+Nj)!} b_N(k+Nj, j), \\ b_N(n, j) &= \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i n!}{(N!)^i i! (n-Ni)!} S_N(n-Ni, j-i) \end{aligned}$$

bağıntılarını gerçekler.

Kanıt. (2.7) eşitliği olan

$$\left(\frac{f_r\frac{t^r}{r!}}{F(t)}\right)^z=\sum_{k=0}^{\infty}F_k^{(z)}\frac{t^k}{k!}$$

bağıntısında

$$F(t)=\mathrm{e}^t-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{t^k}{k!}=\sum_{k=N}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$$

olsun. Bu durumda, $r=N$, $f_r=1$ ve $F_k^{(z)}=B_k^{(z)}(N)$ yüksek dereceli hipergeometrik Bernoulli sayılarıdır. (3.1) ve (3.2) eşitlikleri gereği Teorem 2.5'deki ikinci bağıntı

$$\binom{k-z}{k}B_k^{(z)}(N)=\sum_{j=0}^{k}(N!)^j\binom{k-z}{k+j}\frac{(k+j)!}{(k+Nj)!}b_N(k+Nj,j)$$

olarak yazılır. z yerine $(-m)$ yazılırsa

$$\binom{k+m}{k}B_k^{(-m)}(N)=\sum_{j=0}^{k}(N!)^j\binom{k+m}{k+j}\frac{(k+j)!}{(k+Nj)!}b_N(k+Nj,j)$$

elde edilir. Önerme 2.3'den

$$B_k^{(-m)}(N)=(N!)^m\frac{k!m!}{(k+Nm)!}S_N(k+Nm,m)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\binom{k+m}{k}(N!)^m\frac{k!m!}{(k+Nm)!}S_N(k+Nm,m)\\ =\sum_{j=0}^{k}(N!)^j\binom{k+m}{k+j}\frac{(k+j)!}{(k+Nj)!}b_N(k+Nj,j)\end{aligned}$$

bulunur. Sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa ilk bağıntı elde edilir.

İkinci bağıntı için $j>n$ ise $B_{n,j}(0,\ldots,0,f_r,f_{r+1},\ldots)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}b_N(n,j)\,y^j\right)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}j!\sum_{n=0}^{\infty}b_N(n,j)\frac{t^n}{n!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\right)^j\\ &= \exp\left[y\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\right)\right]=\exp\left[y\left(-\frac{t^N}{N!}+\sum_{k=N}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\right)\right]\\ &= \exp\left[-y\frac{t^N}{N!}\right]\exp\left[y\left(\sum_{k=N}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= \exp\left[-y\frac{t^N}{N!}\right]\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}\left(\sum_{k=N}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\right)^j = \exp\left[-y\frac{t^N}{N!}\right]\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}j!\sum_{n=0}^{\infty}S_N\left(n,j\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left[-y\frac{t^N}{N!}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}S_N\left(n,j\right)y^j\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n y^n\frac{t^{nN}}{\left(N!\right)^n n!}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}S_N\left(n,j\right)y^j\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^i y^i\frac{t^{Ni}}{\left(N!\right)^i i!}\sum_{j=0}^{n-i}S_N\left(n-i,j\right)y^j\frac{t^{n-i}}{\left(n-i\right)!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(-1\right)^i y^i\frac{t^{Ni}}{\left(N!\right)^i i!}\sum_{j=i}^{n}S_N\left(n-i,j-i\right)y^{j-i}\frac{t^{n-i}}{\left(n-i\right)!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{\left(-1\right)^i}{\left(N!\right)^i i!\left(n-i\right)!}S_N\left(n-i,j-i\right)y^j\right)t^{n+Ni-i} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{\left(-1\right)^i n!}{\left(N!\right)^i i!\left(n-Ni\right)!}S_N\left(n-Ni,j-i\right)y^j\right)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur. $y^j t^n$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa ikinci bağıntı elde edilir. ■

3.2. Hipergeometrik Bernoulli Polinomları için Bazı Bölünebilme Bağıntıları

Bu bölümde hipergeometrik Bernoulli polinomlarının bazı kesin değerlerine göre sağladığı bölünebilme özellikleri ele alınacaktır.

Hipergeometrik Bernoulli sayılarının tanımı olan (2.4) bağıntısından

$$B_0\left(N\right) = 1$$

ve $k > 0$ için

$$\frac{B_k\left(N\right)}{k!} = -\left(N!\right)\sum_{m=0}^{k-1}\frac{B_m\left(N\right)}{\left(k+N-m\right)!m!} \tag{3.7}$$

veya denk olarak

$$\sum_{m=0}^{k}\binom{k+N}{m}B_m\left(N\right) = 0$$

elde edilir. Gerçekten, (2.4) bağıntısından

$$\begin{aligned}
\frac{t^N}{N!} &= \left(\mathrm{e}^t - T_{N-1}(t)\right)\sum_{k=0}^{\infty} B_k(N)\frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=N}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\sum_{k=0}^{\infty} B_k(N)\frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+N}}{(k+N)!}\sum_{k=0}^{\infty} B_k(N)\frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}\frac{B_m(N)}{(k+N-m)!m!}\right)t^{k+N}
\end{aligned}$$

bulunur. t^N terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa $B_o(N) = 1$ ve (3.7) eşitliği elde edilir. Ayrıca, (2.3) ile (2.4) bağıntılarından

$$B_k(N,x) = \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m} B_m(N)\, x^{k-m} \tag{3.8}$$

elde edilir.

Bu bölümde elde edilecek sonuçlar için bazı tanım ve önteoremlere ihtiyaç vardır.

Tanım 3.4 *p bir asal sayı ve $k \geqslant 0$ için $p^{\alpha_p(k,N)}$, p asalının $B_k(N)$ sayısının paydasını bölen en büyük kuvveti olarak tanımlansın.*

Tanım 3.5 *p bir asal sayı ve $k \geqslant 0$ için $p^{\upsilon_p(k)}$, p asalının $n!$ sayısını bölen en büyük kuvveti olsun.*

Önteorem 3.6 (Uspensky ve Heaslet 1939) *p bir asal sayı ve $k \geqslant 0$ için*

$$k = a_r p^r + \cdots + a_1 p + a_0,\ 0 \leqslant a_i < p$$

olsun. Bu durumda, $[x]$, x sayısının tam değeri olmak üzere

$$\upsilon_p(k) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{k}{p^m}\right] = \frac{a_r(p^r-1) + a_{r-1}(p^{r-1}-1) + \cdots + a_1(p-1)}{p-1}$$

dir.

Bu bölümde elde edilen denklikler aşağıdaki anlamdadır:

a, b, c, d, m tamsayılar ve $m > 1$ olsun. $(b,m) = 1$ ise $\dfrac{a}{b}$ rasyonel sayısına (mod m) bir tamsayı denir. $\dfrac{a}{b}$ ve $\dfrac{c}{d}$ (mod m) tamsayılar ise

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (ad - bc) \Leftrightarrow ad \equiv bc \pmod{m}$$

dir.

Önteorem 3.7 *p bir asal sayı, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$ ve $0 \leqslant a_i < p$ için*

$$k = a_r p^r + a_{r-1} p^{p-1} + \cdots + a_1 p + a_0,\ m = a_r + \cdots + a_1 + a_0$$

olsun. Bu durumda, $t \geqslant 1$ için

$$\frac{mt}{p-1} \geqslant \upsilon_p(t+k) - \upsilon_p(k)$$

dır.

Kanıt. $0 \leqslant b_i < p$ için

$$t + k = b_r t^r + \cdots + b_1 p + b_0$$

olsun. O halde

$$t = (b_r - a_r)\, t^r + \cdots + (b_0 - a_0)$$

dır. Buradan,

$$\frac{mt}{p-1} = \frac{m(b_r - a_r)\, p^r + \cdots + m(b_0 - a_0)}{p-1}$$

ve

$$\upsilon_p(t+k) - \upsilon_p(k) = \frac{(b_r - a_r)\, p^r + \cdots + (b_1 - a_1)\, p + (a_r - b_r) + \cdots + (a_1 - b_1)}{p-1}$$

dır. Dolayısıyla, önteoremin kanıtı için

$$(m-1)\, t \geqslant (a_r - b_r) + \cdots + (a_0 - b_0)$$

eşitsizliğinin gösterilmesi yeterlidir. $t \geqslant 1$ ve

$$(a_r - b_r) + \cdots + (a_0 - b_0) \leqslant m - 1$$

olduğundan istenilen elde edilir. ■

Önteorem 3.8 *p bir asal sayı, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 0$ ve $0 \leqslant a_i < p$ için*

$$N = a_r p^r + \cdots + a_1 p + a_0,\ m = a_r + \cdots + a_1 + a_0$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{p^{\left[\frac{mk}{p-1}\right]+1}}{k!} B_k(N) \equiv 0 \pmod p$$

dir.

Kanıt. Önteoremin kanıtı için aynı varsayımlar altında

$$\alpha_p(N,k) \leqslant \left[\frac{mk}{p-1}\right] - \upsilon_p(k) \tag{3.9}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. $k = 0$ için $\alpha_p(N,k) = 0$ ve $\upsilon_p(k) = 0$ olduğundan (3.9) ifadesi doğrudur. (3.9) ifadesi $0, 1, \ldots, k-1$ için doğru olsun. (3.7) eşitliğinden

$$\frac{p^{\left[\frac{mk}{p-1}\right]+1}}{k!} B_k(N) = -\sum_{s=0}^{k-1} \frac{p^{\left[\frac{ms}{p-1}\right]+1}}{s!} B_s(N) \frac{p^{\left[\frac{mk}{p-1}\right]-\left[\frac{ms}{p-1}\right]}}{(k+N-s)!} N!$$

yazılabilir. Tümevarım adımından $s = 0, 1, \ldots, k-1$ için

$$\frac{p^{\left[\frac{ms}{p-1}\right]+1}}{s!} Bs(N) \equiv 0 \pmod p$$

dir. $s = 0, 1, \ldots, k-1$ için

$$\frac{p^{\left[\frac{mk}{p-1}\right]-\left[\frac{ms}{p-1}\right]}}{(k+N-s)!} N! \equiv 0 \pmod p$$

olduğunu göstermek için

$$\left[\frac{mk}{p-1}\right] - \left[\frac{ms}{p-1}\right] \geqslant \upsilon_p(k+N-s) - \upsilon_p(N) \tag{3.10}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\left[\frac{mk}{p-1}\right] - \left[\frac{ms}{p-1}\right] \leqslant \left[\frac{m(k-s)}{p-1}\right]$$

olduğundan (3.10) eşitsizliği yerine

$$\frac{m(k-s)}{p-1} \geqslant \upsilon_p(k+N-s) - \upsilon_p(N)$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir. Son eşitsizlik, Önteorem 3.7'de $t = k - s$ ve $k = N$ alınırsa elde edilir. Bu ise tümevarımı ve önteoremin kanıtını tamamlar. ■

Teorem 3.9 *p bir asal sayı, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 0$ ve $0 \leqslant a_i < p$ için*

$$N = a_r p^r + \cdots + a_1 p + a_0,\; m = a_r + \cdots + a_1 + a_0$$

olsun. $\dfrac{u}{v} \pmod p$ *bir tamsayı ise*

$$\frac{p^{\left[\frac{mk}{p-1}\right]+1}}{k!} B_k\left(N, \frac{u}{v}\right) \equiv 0 \pmod p$$

dir.

Kanıt. (3.8) eşitliğinden $x = \dfrac{u}{v}$ için

$$B_k\left(N, \frac{u}{v}\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_i(N) \left(\frac{u}{v}\right)^{k-i}$$

dir. Bu eşitlik

$$\frac{p^{\left[\frac{mk}{p-1}\right]+1}}{k!} B_k\left(N, \frac{u}{v}\right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{p^{\left[\frac{mi}{p-1}\right]+1}}{i!} B_i(N) \frac{p^{\left[\frac{mk}{p-1}\right]-\left[\frac{mi}{p-1}\right]}}{(k-i)!} \left(\frac{u}{v}\right)^{k-i}$$

olarak yazılabilir. Önteorem 3.8 gereği

$$\frac{p^{\left[\frac{mi}{p-1}\right]+1}}{i!} B_i(N) \equiv 0 \pmod p$$

dir. $\dfrac{u}{v} \pmod p$ tamsayı olduğundan $p \nmid v$ dır. $k - i = b_l p^l + \cdots + b_1 p + b_0$, $0 \leqslant b_j < p$ olsun. Önteorem 3.6 gereği

$$v_p(k-i) = \frac{(k-i) - (b_l + \cdots + b_0)}{p-1}$$

ve

$$m(k-i) \geqslant (k-i) - (b_l + \cdots + b_0)$$

olduğundan

$$\left[\frac{m(k-i)}{p-1}\right] \geqslant \left[\frac{mk}{p-1}\right] - \left[\frac{mi}{p-1}\right] \geqslant v_p(k-i) \tag{3.11}$$

dir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.10 *p bir asal sayı, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 0$ ve $0 \leqslant a_i < p$ için*

$$N = a_r p^r + \cdots + a_1 p + a_0,\; m = a_r + \cdots + a_1 + a_0$$

ise
$$\frac{p^{\left[\frac{mk}{p-1}\right]+1+k}}{k!}B_k\left(N,\frac{1}{p}\right)\equiv 0 \pmod p$$
dir.

Kanıt. Teoremdeki bağıntı Teorem 3.9'un kanıtındaki benzer adımlarla tamamlanabilir. Gerçekten, (3.8) eşitliğinden $x=\dfrac{1}{p}$ için

$$\frac{p^{\left[\frac{mk}{p-1}\right]+1+k}}{k!}B_k\left(N,\frac{1}{p}\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{p^{\left[\frac{mi}{p-1}\right]+1}}{i!}B_i\left(N\right)p^i\frac{p^{\left[\frac{mk}{p-1}\right]-\left[\frac{mi}{p-1}\right]}}{(k-i)!}$$

yazılabilir. Önteorem 3.8'den elde edilen

$$\frac{p^{\left[\frac{mi}{p-1}\right]+1}}{i!}B_i\left(N\right)\equiv 0 \pmod p$$

ile (3.11) eşitliği kullanılırsa $i\geqslant 1$ için $p^i\equiv 0 \pmod p$ olduğundan istenilen bağıntı elde edilir. ■

3.3. Hipergeometrik Hurwitz Zeta Fonksiyonu

Bu bölümde Hassen ve Nguyen (Hassen ve Nguyen 2010) tarafından tanımlanan hipergeometrik zeta fonksiyonunun bir genelleştirmesi tanımlanarak bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.11 *$0<x\leqslant 1$ reel sayısı için $\zeta_N\left(s,x\right)$ fonksiyonu*

$$\zeta_N\left(s,x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(s+N-1\right)}\int_0^{\infty}\frac{t^{s+N-2}\mathrm{e}^{-xt}}{1-T_{N-1}\left(t\right)\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t \tag{3.12}$$

eşitliği ile tanımlansın.

Teorem 3.12 *$\sigma=\mathrm{Re}\left(s\right)>1$ için $\zeta_N\left(s,x\right)$ mutlak yakınsaktır.*

Kanıt. $K>0$ sayısı her $t\geqslant K$ için

$$\mathrm{e}^t\geqslant \mathrm{e}^{\left(1-\frac{x}{2}\right)t}+T_{N-1}\left(t\right)$$

olacak şekilde seçilsin. Bu durumda, her $t \geqslant K$ için

$$\mathrm{e}^{t} - T_{N-1}(t) \geqslant \mathrm{e}^{\left(1-\frac{x}{2}\right)t}$$

veya denk olarak

$$1 - T_{N-1}(t)\,\mathrm{e}^{-t} \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$$

dir. Dolayısıyla, (3.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
|\zeta_N(s,x)| &\leqslant \frac{1}{|\Gamma(s+N-1)|}\left[\int_0^K \left|\frac{t^{s+N-2}\mathrm{e}^{-xt}}{1-T_{N-1}(t)\,\mathrm{e}^{-t}}\right|\mathrm{d}t + \int_K^\infty \left|\frac{t^{s+N-2}\mathrm{e}^{-xt}}{1-T_{N-1}(t)\,\mathrm{e}^{-t}}\right|\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{|\Gamma(s+N-1)|}\left[\int_0^K \left|\frac{t^{s+N-2}\mathrm{e}^{(1-x)t}}{\mathrm{e}^{t}-T_{N-1}(t)}\right|\mathrm{d}t + \int_K^\infty \left|\frac{t^{s+N-2}\mathrm{e}^{-xt}}{1-T_{N-1}(t)\,\mathrm{e}^{-t}}\right|\mathrm{d}t\right] \\
&\leqslant \frac{1}{|\Gamma(s+N-1)|}\left[\int_0^K \frac{t^{\sigma+N-2}\mathrm{e}^{(1-x)t}}{\frac{t^N}{N!}}\mathrm{d}t + \int_K^\infty t^{\sigma+N-2}\mathrm{e}^{\frac{-xt}{2}}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{|\Gamma(s+N-1)|}\left[(N!)\int_0^K t^{\sigma-2}\mathrm{e}^{(1-x)t}\mathrm{d}t + \left(\frac{2}{x}\right)^{\sigma+N-1}\int_{\frac{Kx}{2}}^\infty u^{\sigma+N-2}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right] \\
&\leqslant \frac{1}{|\Gamma(s+N-1)|}\left[(N!)\,\frac{e^{(1-x)K}K^{\sigma-1}}{\sigma-1} + \left(\frac{2}{x}\right)^{\sigma+N-1}\Gamma(\sigma+N-1)\right] < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

$\zeta_N(s,x)$ fonksiyonu $\sigma = 1$ doğrusunun sol tarafına genişletilebilir. Bunun için Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları bölümünde verilen C konturu kullanılabilir. Hatırlamak gerekirse C konturu negatif reel eksen etrafında oluşturulan ve

$$\begin{aligned}
C_1 &: \ z = r\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}},\ c \leqslant r < \infty \\
C_2 &: \ z = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \\
C_3 &: \ z = r\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}},\ c \leqslant r < \infty
\end{aligned}$$

parametrik olarak ifade edilen C_1, C_2, C_3 konturlarının toplamı olan konturdur. Bu bölümde, $\mathrm{e}^z - T_{N-1}(z)$ ifadesinin sıfırlarını çalışmanın zorluğundan kaçınmak için c yarıçapı, orijin merkezli c yarıçaplı çemberin içinde $\mathrm{e}^z - T_{N-1}(z)$ ifadesinin sadece $z = 0$ sıfırı yer alacak şekilde yeteri kadar küçük seçilen bir pozitif sayı olarak kabul edilecektir.

Teorem 3.13 *C yukarıda tanımlanan kontur olmak üzere $0 < x \leqslant 1$ için*

$$I_N(s,x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{z^{s+N-2}\mathrm{e}^{xz}}{1 - T_{N-1}(-z)\,\mathrm{e}^z} \mathrm{d}z$$

olarak tanımlanan fonksiyon s değişkenine göre bir tam fonksiyondur. Ayrıca, $\sigma > 2-N$ için

$$\zeta_N(s,x) = \Gamma(1-(s+N-1))\, I_N(s,x)$$

dir.

Kanıt. İntegral içindeki ifade s değişkenine göre bir tam fonksiyon olduğundan herhangi bir kompakt $|s| \leqslant M$ yuvarı üzerinde C_1 ve C_3 üzerinden alınan integrallerin düzgün yakınsak olduğunu göstermek $I_N(s,x)$ fonksiyonunun s değişkenine göre bir tam fonksiyon olduğunu kanıtlamaya denktir. C_1 konturu üzerinde $r \geqslant 1$ ve $t = \mathrm{Im}(s)$ için $|s| \leqslant M$ olduğundan

$$\left|z^{s+N-2}\right| = r^{\sigma+N-2}\mathrm{e}^{\pi t} \leqslant r^{M+N-2}\mathrm{e}^{\pi M}$$

dir.Benzer şekilde C_3 konturu üzerinde $r \geqslant 1$ için

$$\left|z^{s+N-2}\right| = r^{\sigma+N-2}\mathrm{e}^{-\pi t} \leqslant r^{M+N-2}\mathrm{e}^{-\pi M}$$

dir. O halde, C_1 veya C_3 konturu üzerinde

$$\left|\frac{z^{s+N-2}\mathrm{e}^{xz}}{1 - T_{N-1}(-z)\,\mathrm{e}^z}\right| \leqslant \frac{r^{M+N-2}\mathrm{e}^{\pi M}\mathrm{e}^{-xr}}{|1 - T_{N-1}(r)\,\mathrm{e}^{-r}|} \leqslant \frac{r^{M+N-2}\mathrm{e}^{\pi M}\mathrm{e}^{(1-x)r}}{\mathrm{e}^r - T_{N-1}(r)}$$

dir. Her r sayısı için $\mathrm{e}^r - T_{N-1}(r) \geqslant \dfrac{r^N}{N!}$ olduğundan integrant $Ar^{M-2}\mathrm{e}^{(1-x)r}$ ile sınırlıdır. Burada A, M ile N sabitine bağlı olan ancak r sayısına bağlı olmayan bir sabittir. $c > 0$ için

$$\int\limits_c^\infty r^{M-2}\mathrm{e}^{(1-x)r}\mathrm{d}r$$

integrali yakınsak olduğundan C_1 ile C_3 üzerinden alınan integraller $|s| \leqslant M$ üzerinde düzgün yakınsaktır. $|s| \leqslant M$ herhangi bir kompakt yuvar olduğundan $I_N(s,x)$, s değişkenine göre bir tam fonksiyondur.

Teorem ifadesindeki ikinci eşitlik için

$$g_N(x,z) = \frac{\mathrm{e}^{xz}}{1 - T_{N-1}(-z)\,\mathrm{e}^{z}}$$

olmak üzere

$$2\pi \mathrm{i} I_N(s,x) = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} \right) z^{s+N-2} g_N(x,z)\,\mathrm{d}z$$

yazılsın. C_1 ile C_3 konturları üzerinde

$$g_N(x,z) = \frac{\mathrm{e}^{-xr}}{1 - T_{N-1}(-r)\,\mathrm{e}^{-r}} = g_N(x,-r)$$

dir. C_2 konturu üzerinde $z = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ olduğundan

$$\begin{aligned}
2\pi \mathrm{i} I_N(s,x) &= \int_{\infty}^{c} r^{s+N-2} \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(s+N-1)} g_N(x,-r)\,\mathrm{d}r \\
&\quad + \mathrm{i} \int_{-\pi}^{\pi} c^{s+N-2} \mathrm{e}^{(s+N-2)\mathrm{i}\theta} c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} g_N\left(x, c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{d}\theta \\
&\quad + \int_{c}^{\infty} r^{s+N-2} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(s+N-1)} g_N(x,-r)\,\mathrm{d}r \\
&= 2\mathrm{i} \sin(\pi [s+N-1]) \int_{c}^{\infty} r^{s+N-2} g_N(x,-r)\,\mathrm{d}r \\
&\quad + \mathrm{i} c^{s+N-1} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{(s+N-1)\mathrm{i}\theta} g_N\left(x, c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

bulunur. Sadelik için

$$J_N^{(1)}(s,c,x) = \int_{c}^{\infty} r^{s+N-2} g_N(x,-r)\,\mathrm{d}r,\; J_N^{(2)}(s,c,x) = c^{s+N-1} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{(s+N-1)\mathrm{i}\theta} g_N\left(x, c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

olsun. O halde,

$$\pi I_N(s,x) = \sin(\pi [s+N-1])\, J_N^{(1)}(s,c,x) + \frac{1}{2} J_N^{(2)}(s,c,x)$$

dir. Şimdi, $c \to 0$ için sağ taraftaki ifadeler hesaplanacaktır. İlk olarak, Tanım 3.11 gereği

$$\lim_{c\to 0} J_N^{(1)}(s,c,x) = \int_{0}^{\infty} \frac{r^{s+N-2}\mathrm{e}^{-xr}}{1 - T_{N-1}(r)\,\mathrm{e}^{-r}} \mathrm{d}r = \Gamma(s+N-1)\,\zeta_N(s,x)$$

dir. Diğer ifade için $g_N(x,z)$ fonksiyonu $|z| < 2\pi$ yuvarında $z = 0$ noktasındaki basit kutbu hariç bir analitik fonksiyondur. O halde, $zg_N(x,z)$, $|z| < 2\pi$ yuvarında analitik fonksiyondur ve dolayısıyla sınırlıdır. B bir sabit ve $|z| = c < 2\pi$ olmak üzere $|g_N(x,z)| \leqslant \dfrac{A}{|z|}$ olsun. Buradan,

$$\frac{1}{2}\left|J_N^{(2)}(s,c,x)\right| \leqslant \frac{c^{\sigma+N-1}}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-t\theta}\frac{A}{c}\mathrm{d}\theta \leqslant B\mathrm{e}^{\pi|t|}c^{\sigma+N-2}$$

bulunur. $\sigma > 2-N$ ise $c \to 0$ için $J_N^{(2)}(s,c,x) \to 0$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\pi I_N(s,x) = \sin(\pi[s+N-1])\,\Gamma(s+N-1)\,\zeta_N(s,x)$$

bulunur.

$$\Gamma(s+N-1)\,\Gamma(1-(s+N-1)) = \frac{\pi}{\sin(\pi[s+N-1])}$$

olduğundan istenilen bağıntı elde edilir. ■

$\sigma > 2-N$ için geçerli olan

$$\zeta_N(s,x) = \Gamma(1-(s+N-1))\,I_N(s,x)$$

eşitliğinde $I_N(s,x)$ ve $\Gamma(1-(s+N-1))$ her karmaşık s değeri için anlamlıdır. Dolayısıyla, bu eşitlik $\zeta_N(s,x)$ fonksiyonunun $\sigma \leqslant 2-N$ için tanımlanmasında kullanılabilir.

Tanım 3.14 *$\sigma \leqslant 2-N$ ise $\zeta_N(s,x)$ fonksiyonu*

$$\zeta_N(s,x) = \Gamma(1-(s+N-1))\,I_N(s,x)$$

olarak tanımlansın.

Bu tanım $\zeta_N(s,x)$ fonksiyonunun tüm s-düzlemine analitik devamını sağlar.

Teorem 3.15 *Tanım 3.14 ile tanımlanan $\zeta_N(s,x)$ fonksiyonu $2-N \leqslant k \leqslant 1$ olmak üzere rezidüleri $(2-k)\binom{N}{2-k}B_{1-k}(N,1-x)$ olan $s = k$ noktalarındaki basit kutupları hariç her s için bir analitik fonksiyondur.*

Kanıt. $\Gamma(1-(s+N-1))$ fonksiyonunun sadece $s=2-N, 3-N, \ldots$ noktalarında basit kutupları vardır. $\zeta_N(s,x)$ $s=2,3,\ldots$ noktalarında analitik olduğundan $\zeta_N(s,x)$ fonksiyonunun olası kutupları $2-N \leqslant k \leqslant 1$ olmak üzere $s=k$ noktalarındadır. $s=k$ için $I_N(s,x)$ fonksiyonunun kontur integral gösterimindeki integrant C_1 ile C_3 konturları üzerinde aynı değerleri aldığından bu konturlar üzerinden alınan integraller sadeleşir ve geriye

$$I_N(k,x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\frac{z^{k+N-2}\mathrm{e}^{xz}}{1-T_{N-1}(-z)\,\mathrm{e}^{z}}\mathrm{d}z$$

kalır. (2.3) eşitliği kullanılarak Rezidü Teoremi gereği

$$\begin{aligned}
I_N(k,x) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\frac{z^{k+N-2}\mathrm{e}^{xz}}{1-T_{N-1}(-z)\,\mathrm{e}^{z}}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\frac{z^{k+N-2}\mathrm{e}^{(x-1)z}}{\mathrm{e}^{-z}-T_{N-1}(-z)}\mathrm{d}z \\
&= \frac{(-1)^N N!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\frac{\frac{(-z)^N}{N!}\mathrm{e}^{(1-x)(-z)}}{\mathrm{e}^{-z}-T_{N-1}(-z)}\frac{\mathrm{d}z}{z^{2-k}} \\
&= \frac{(-1)^N N!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m B_m(N,1-x)\,z^m}{m!}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{2-k}} \\
&= \frac{(-1)^{N-k+1} N! B_{1-k}(N,1-x)}{(1-k)!}
\end{aligned}$$

elde edilir. $s=k$ noktalarındaki rezidüler

$$\lim_{s\to k}(s-k)\,\zeta_N(s,x)$$

limitinin sonucudur.

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to k}(s-k)\,\zeta_N(s,x) &= \lim_{s\to k}(s-k)\,\Gamma(1-(s+N-1))\,I_N(s,x) \\
&= \frac{(-1)^{2-N-k}}{(2-N-k)!}I_N(k,x) \\
&= \frac{(-1)^{2-N-k}}{(2-N-k)!}\frac{(-1)^{N-k+1} N! B_{1-k}(N,1-x)}{(1-k)!} \\
&= (2-k)\binom{N}{2-k}B_{1-k}(N,1-x)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\zeta_N(s,x)$ fonksiyonunun $s=k$ noktalarında verilen rezidüleri ile basit kutupları olduğunu gösterir. ■

Bu bölümde son olarak $\zeta_N(s,x)$ fonksiyonunun bir Dirichlet serisi cinsinden ifadesi verilecektir.

Önteorem 3.16 *$\sigma > 1$ için*

$$f_k(N,s,x) = \frac{1}{\Gamma(s+N-1)} \int_0^\infty t^{s+N-2} \left[T_{N-1}(t)\right]^k \mathrm{e}^{-(x+k)t} \mathrm{d}t$$

olmak üzere

$$\zeta_N(s,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(N,s,x)$$

dir.

Kanıt.

$$\frac{t^{s+N-2}\mathrm{e}^{-xt}}{1-T_{N-1}(t)\,\mathrm{e}^{-t}} = t^{s+N-2}\mathrm{e}^{-xt}\sum_{k=0}^{\infty}\left[T_{N-1}(t)\right]^k \mathrm{e}^{-kt}$$

olduğundan Tanım 3.11 gereği

$$\begin{aligned} \zeta_N(s,x) &= \frac{1}{\Gamma(s+N-1)} \int_0^\infty \frac{t^{s+N-2}\mathrm{e}^{-xt}}{1-T_{N-1}(t)\,\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(s+N-1)} \int_0^\infty t^{s+N-2}\mathrm{e}^{-xt} \sum_{k=0}^{\infty}\left[T_{N-1}(t)\right]^k \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.13'ün kanıtından $\dfrac{t^{s+N-2}\mathrm{e}^{-xt}}{1-T_{N-1}(t)\,\mathrm{e}^{-t}}$ integrantının sınırlı olduğu bilinmektedir. Sağ taraftaki integral Lebesgue integrali olarak düşünülürse Lebesgue Yakınsaklık Teoremi (Titchmarsh 1952) gereği toplam ile integralin yeri değiştirilebilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \zeta_N(s,x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(s+N-1)} \int_0^\infty t^{s+N-2}\left[T_{N-1}(t)\right]^k \mathrm{e}^{-(x+k)t}\mathrm{d}t\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k(N,s,x) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.17 $\sigma > 1$ *için*

$$\begin{aligned}\mu_N(k,s,x) &= \sum_{j=0}^{k(N-1)} \frac{a_j(N,k)}{(k+x)^j}\langle s+N-1\rangle_j\,,\\ [T_{N-1}(t)]^k &= \left(\sum_{l=0}^{N-1}\frac{t^l}{l!}\right)^k = \sum_{l=0}^{k(N-1)} a_l(N,k)\,t^l\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\zeta_N(s,x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_N(k,s,x)}{(k+x)^{s+N-1}}$$

Dirichlet serisi gösterimi vardır.

Kanıt. Önteorem 3.16'dan

$$\zeta_N(s,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(N,s,x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\zeta_N(s,x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k(N,s,x)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(s+N-1)}\int_0^{\infty} t^{s+N-2}[T_{N-1}(t)]^k \mathrm{e}^{-(x+k)t}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(s+N-1)}\int_0^{\infty} t^{s+N-2}\left(\sum_{l=0}^{k(N-1)} a_l(N,k)\,t^l\right)\mathrm{e}^{-(x+k)t}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(s+N-1)}\frac{1}{(k+x)^{s+N-1}}\int_0^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k(N-1)} a_l(N,k)\frac{t^{s+l+N-2}}{(k+x)^l}\right)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(s+N-1)}\frac{1}{(k+x)^{s+N-1}}\left(\sum_{l=0}^{k(N-1)}\frac{a_l(N,k)}{(k+x)^l}\int_0^{\infty} t^{s+l+N-2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^{s+N-1}}\left(\sum_{l=0}^{k(N-1)}\frac{a_l(N,k)}{(k+x)^l}\frac{\Gamma(s+N+l-1)}{\Gamma(s+N-1)}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^{s+N-1}}\left(\sum_{l=0}^{k(N-1)}\frac{a_l(N,k)}{(k+x)^l}\langle s+n-l\rangle_k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_N(k,s,x)}{(k+x)^{s+N-1}}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında hipergeometrik Bernoulli sayıları ve polinomları herhangi bir dereceye genişletilerek onlar için kapalı formüller elde edilmiştir. Ayrıca, bazı özel değerleri için hipergeometrik Bernoulli polinomlarının bölünebilme özellikleri incelenmiştir. Son olarak hipergeometrik Hurwitz zeta fonksiyonu tanımlanarak bazı analitik özellikleri ve tamsayılarda aldığı değerler hipergeometrik Bernoulli polinomları cinsinden verilmiştir.

KAYNAKLAR

APOSTOL, T. M. 1985. Introduction to Analytic Number Theory. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 338 sayfa.

CENKCİ, M. A symmetric relation for the generalized potential polynomials and its applications. *Utilitas Math.*, yayına kabul edildi.

CENKCİ, M. 2009. An explicit formula for generalized potential polynomials and its applications. *Discrete Math.*, 309, 1498–1510.

CENKCİ, M., HOWARD, F.T. 2007. Notes on degenerate numbers, *Discrete Math.*, 307, 2359–2375.

COMTET, L. 1974. Advanced Combinatorics, Riedel, Dordrech, Boston, 343 sayfa.

DILCHER, K. 2002. Bernoulli numbers and confluent hypergeometric functions. In Number Theory for the Millennium, I (Urbana, IL, 2000) eds. B. Berndt et al. (A.K.Peters, Natrick, MA, 2002), pp. 343-363.

EDWARDS, H.M. 1974. Riemann's Zeta Function, Pure and Applied Mathematics Series, Academic Press, 315 sayfa.

HASSEN, A., NGUYEN, H.D. 2008. Hypergeometric Bernoulli polynomials and Appell sequences, *Int. J. Number Theory*, 4, 767–774.

HASSEN, A., NGUYEN, H.D. 2010. Hypergeometric zeta functions, *Int. J. Number Theory*, 6, 99–126.

HOWARD, F.T. 1967a. A sequence of numbers related to the exponential function, *Duke Math. J.*, 34, 599–616.

HOWARD, F.T. 1967b. Some sequences of rational numbers related to the exponential function, *Duke Math. J.*, 34, 701–716.

HOWARD, F.T. 1977. Numbers generated by the reciprocal of $\mathrm{e}^x - x - 1$, *Math. Comput.*, 31, 581–598.

HOWARD, F.T. 1982. A theorem relating potential and Bell polynomials, *Discrete Math.*, 39, 129–143.

MARSDEN, J.E., HOFFMAN, M.J. 1999. Basic Complex Analysis, 3rd Ed., W.H.Freemann, New York, 516 sayfa.

NÖRLUND, N. 1954. Vorlesungen über Differenzenrechnung, Chelsea, New York, 551 sayfa.

RAINVILLE, E.D. 1960. Special Functions, The Macmillan Company, New York, 365 sayfa.

RIORDAN J. 1958. An Introduction to Combinatorial Analysis, Willey, New York, 244 sayfa.

TITCHMARSH E.C. 1952. The Theory of Function, Oxford University Press, 454 sayfa.

TITCHMARSH E.C. 1967. The Theory of the Riemann Zeta Function, Oxford University Press, 104 sayfa.

USPENSKY, J.V., HEASLET, M.A. 1939. Elementary Number Theory, MacGraw-Hill Book Company, New York, 484 sayfa.

ÖZGEÇMİŞ

Rukiye Nergiz Şen, 1988 yılında Konya'da doğdu. Liseyi Konya Meram Fen Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2009 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 2009'da Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.