T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

KUVVETLER TOPLAMI VE ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Merve MUTLUER

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2021

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUVVETLER TOPLAMI VE ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Merve MUTLUER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 24/06/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet CENKCİ (Danışman) Mehmet Cenkci
Doç. Dr. Levent KARGIN
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

KUVVETLER TOPLAMI VE ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Merve MUTLUER

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

Haziran 2021; 59 sayfa

Bu çalışmada, klasik kuvvetler toplamının ve bir aritmetik dizinin terimlerinin kuvvetleri toplamının bir genellemesi tanımlanmıştır. Bu genellemenin sağladığı bazı özellikler ve Stirling sayıları cinsinden ifadeleri ile bölünebilme ve tam sayı olma durumları incelenmiştir. Elde edilen sonuçlarda üreteç fonksiyonu ile dejenere Bernoulli sayıları ve polinomları kullanılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Kuvvetler toplamı, Stirling sayıları, Bernoulli sayıları ve polinomları, Dejenere Bernoulli sayıları ve polinomları.

JÜRİ: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Doç. Dr. Levent KARGIN
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

SUMS OF POWERS AND GENERATING FUNCTIONS

Merve MUTLUER

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

June 2021; 59 pages

In this work, an extension of classical power sums and power sums of arithmetic progressions is defined. Some properties of this extension and representation in terms of generalized Stirling numbers are presented. Moreover, some arithmetical properties like divisibility and integerness are also investigated. Generating functions and generalizations of Bernoulli numbers and polynomials are used in proving the derived results.

KEYWORDS: Power sums, Stirling numbers, Bernoulli numbers and polynomials, degenerate Bernoulli numbers and polynomials.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Assoc. Prof. Dr. Levent KARGIN
Assoc. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taraması, Materyal ve Metot ve Bulgular olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır. Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taraması bölümünde Stirling sayıları, $S_k(n)$ kuvvetler toplamı, bir aritmetik dizinin terimlerinin kuvvetleri toplamı, Bernoulli sayıları ve polinomları ile dejenere Bernoulli sayıları ve polinomları kavramlarının tanımları verilmiştir. Materyal ve Metot bölümünde bir aritmetik dizinin terimlerinin kuvvetleri toplamı olan $S_{k,n}(a,d)$ için indirgeme bağıntıları, Bernoulli sayıları ve polinomları ile olan ilişkileri ve bazı aritmetik özellikler ifade edilerek kanıtlanmıştır. Bulgular bölümünde ise $S_{k,n}$ kuvvetler toplamı ile $S_{k,n}(a,d)$ genelleştirilmiş kuvvetler toplamını genelleyen $S_{k,n}(a,d|\lambda)$ toplamı tanımlanarak bazı özellikleri ifade edilmiştir. Ayrıca, bölünebilme ve tam sayı olma gibi bazı aritmetik özellikler elde edilmiştir.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Prof. Dr. Mehmet CENKCİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Kuvvetler Toplamı ve Üreteç Fonksiyonları" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

24/06/2021

Merve MUTLUER

SİMGELER

Simgeler:

$(x)_n$	: Azalan faktöriyel fonksiyonu
$s(n,k)$, $S(n,k)$	: Birinci ve ikinci tip Stirling sayıları
$(x\|\lambda)_n$	: Genelleştirilmiş azalan faktöriyel fonksiyonu
$S(n,k;\lambda,\beta,r)$	: Genelleştirilmiş Stirling sayıları
$S_k(n)$	: Kuvvetler toplamı
B_n, $B_n(x)$	: Bernoulli sayısı ve polinomu
$\beta_n(\lambda)$, $\beta_n(\lambda,x)$	: Dejenere Bernoulli sayısı ve polinomu
$S_{k,n}(a,d)$	: Bir aritmetik dizinin terimlerinin kuvvetleri toplamı
$S_{k,n}(a,d\|\lambda)$	: Genelleştirilmiş kuvvetler toplamı

1. GİRİŞ

Kuvvetler toplamı, matematikte ve istatistikte birçok konuda ortaya çıkmaktadır. Örneğin,

- Geometride Pisagor teoremi iki karenin toplamını içerir.
- Sayılar teorisinde Fermat iki kare teoremi ve Legendre dört kare teoremi mevcuttur.
- İstatistikte varyans analizi, değişkenlerin kareleri toplamı kavramını içerir.
- Faulhaber formülü $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ toplamını n değişkeninin bir polinomu olarak ifade eder.
- Fermat dik üçgen teoremi $a^4 = b^4 + c^2$ denkleminin pozitif tam sayılarda çözümünün olmadığını belirtir.
- Fermat'ın son teoremi $x^k + y^k = z^k$ denkleminin $k > 2$ tam sayısı için tam sayılarda çözümünün olmadığını ifade eder.
- Riemann zeta fonksiyonu, reel kısmı 1 sayısından büyük olan bir s karmaşık sayısı için pozitif tam sayıların çarpmaya göre terslerinin s. kuvvetlerinin toplamıdır.
- Waring problemi, herhangi bir pozitif tam sayının belirli bir kuvvete sahip başka tam sayıların toplamı olarak ifade edilmesini içerir.
- Altın oranın ardışık kuvvetleri Fibonacci indirgeme bağıntısını sağlar: $\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1}$.
- Newton bağıntıları, bir polinomun tüm köklerinin k. kuvvetlerinin toplamını polinomun katsayıları cinsinden ifade eden eşitliklerdir.
- Bir aritmetik dizide yer alan sayıların küplerinin toplamı bazen bir başka küp sayıdır.
- m ile k pozitif tam sayılar olmak üzere $1^k + 2^k + \cdots + m^k = (m+1)^k$ şeklinde olan Erdős-Moser eşitliğinin $1^1 + 2^1 = 3^1$ çözümünden başka çözümünün olmadığı iddia edilmiştir.
- Üç küpün toplamı 9 modülünde 4 veya 5 sayılarına denk değildir.

- $S_{k,n}(a) = a^k + (a+1)^k + \cdots + (a+n-1)^k$ toplamı $B_k(a)$ Bernoulli polinomları ile ilgilidir.

1713 yılında yayınlanan "Ars Conjectandi" isimli meşhur kitabında Jakob Bernoulli, günümüzde Bernoulli sayıları olarak bilinen rasyonel sayıları, ardışık tam sayıların kuvvetleri toplamı olan

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

toplamı ile ilişkilendirerek tanımlamıştır. Bernoulli,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \ldots$$

kuvvetler toplamlarını $k = 10$ durumuna kadar sıralayarak Bernoulli sayılarını içeren genel bir formül vermiştir. Bernoulli daha sonra bu sayıların indirgemeli olarak nasıl elde edildiğini ve formülün kuvvetler toplamını hesaplamak için nasıl kullanıldığını açıklamıştır.

Bernoulli tarafından verilen söz konusu formül günümüzde kullanılan gösterim ile

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}$$

şeklindedir. Burada B_j, $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = n+1$$

indirgeme bağıntısı ile belirlenen Bernoulli sayılarıdır.

Kuvvetler toplamı için formül ve Bernoulli sayıları için indirgemeli tanım, 1712 yılında Japon matematikçi Takakazu Seki tarafından yayınlanan "Katsuyo Sanpo" (Hesaplama Sanatının Temelleri) isimli kitabında da ortaya çıkmaktadır. Seki tarafından elde edilen formül ve tanım, Bernoulli tarafından verilen formül ve tanım ile tamamen aynıdır.

Ne Seki ne de Bernoulli kuvvetler toplamının nasıl elde edildiğine dair fazla detay açıklamamışlardır. Seki ve Bernoulli tarafından yapılan çalışmalardan önce kuvvetler toplamı formülü Faulhaber tarafından "Academia Algebrae" isimli kitapta ele alınmıştır. Faulhaber, k tek ise

$$\sum_{i=1}^{n} i^k$$

kuvvetler toplamının

$$\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$$

değerinin bir polinomu ve k çift ise kuvvetler toplamının

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

tarafından bölündüğünü ve bölümün

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

değerinin bir polinomu olduğunu göstermiştir. Ancak Faulhaber, Bernoulli sayılarına ulaşamamıştır. Faulhaber tarafından bulunan sonuçlar Jacobi tarafından kesin kanıtlar ile Bernoulli sayılarını içerecek şekilde tekrar elde edilmiştir.

$k \geq 0$, $n > 0$ tam sayılar ve a ile d, $d \neq 0$, karmaşık sayılar olmak üzere bir aritmetik dizinin terimlerinin kuvvetleri toplamı

$$S_{k,n}(a,d) = a^k + (a+d)^k + (a+2d)^k + \cdots + (a+(n-1)d)^k$$

olsun. Howard (Howard 1996) tarafından tanımlanan bu toplamlar özel olarak

$$S_k(n) = S_{k,n}(1,1) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

kuvvetler toplamlarını verir. $S_k(n)$ için basit formüllerin bulunması problemi birçok matematikçi tarafından farklı yöntemler kullanılarak çalışılmıştır (Bazsó 2015, Bazsó vd. 2012, de Bruyn ve de Villiers 1994, Chapman 2008, Chen vd. 2009, Erdoğan 2019, Edwards 1986, Hirschhorn 2006, Kalman 1990, Khan 1981, Turner 1980, Wiener 1992). $S_{k,n}(a,d)$ için bazı özellikler ve tam sayı olma durumları son yıllarda çalışılan güncel bir konu olmuştur (Bazsó ve Mező 2015, Kellner ve Sondow 2017, Kellner ve Sondow 2018).

Bu tez çalışmasında, $(x|\lambda)_0 = 1$ ve n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$(x|\lambda)_n = x(x-\lambda)(x-2\lambda)\cdots(x-(n-1)\lambda)$$

ile tanımlanan $(x|\lambda)_n$ genelleştirilmiş azalan faktöriyel fonksiyonu kullanılarak $S_k(n)$ ile $S_{k,n}(a,d)$ kuvvetler toplamlarının bir genellemesi olan

$$S_{k,n}(a,d|\lambda) = \sum_{m=0}^{n-1} (a+md|\lambda)_k$$

$$= (a|\lambda)_k + (a+d|\lambda)_k + (a+2d|\lambda)_k + \cdots + (a+(n-1)\,d|\lambda)_k$$

toplamı tanımlanmıştır. Üreteç fonksiyonu yardımıyla $S_{k,n}(a,d|\lambda)$ toplamı için bir indirgeme bağıntısı elde edilmiştir. $S_{k,n}(a,d|\lambda)$ toplamının genelleştirilmiş Stirling sayıları ile dejenere Bernoulli sayıları ve polinomları cinsinden gösterimleri elde edilmiştir. Bu gösterimler, söz konusu toplamların sağladığı bazı aritmetik özelliklerin kanıtında kullanılmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Stirling Sayıları

2.1.1. Birinci ve İkinci Tip Stirling Sayıları

Bu alt bölümdeki sonuçlar Arakawa vd. (2014) kaynağından derlenmiştir.

Tanım 2.1. (İkinci tip Stirling sayısı, kombinatorik tanım) *Pozitif n ve m tam sayıları için ikinci tip Stirling sayısı $S(n,m)$ ile gösterilir ve n elemanlı bir kümeyi m tane boştan farklı alt kümelere ayırma yollarının sayısı olarak tanımlanır.*

Örneğin, $\{1,2,3,4\}$ kümesini boştan fakļı iki alt kümeye ayırmanın 7 yolu vardır. Bunlar,

$$
\begin{array}{ll}
\{1\}\cup\{2,3,4\} & \{1,2\}\cup\{3,4\} \\
\{2\}\cup\{1,3,4\} & \{1,3\}\cup\{2,4\} \\
\{3\}\cup\{1,2,4\} & \{2,3\}\cup\{1,4\} \\
\{4\}\cup\{1,2,3\} &
\end{array}
$$

olarak listelenebilir. Dolayısıyla, $S(4,2)=7$ olur.

Tanım gereği $m>n$ ise $S(n,m)=0$ olur. Ayrıca, yine tanımdan

$$S(n+1,m)=S(n,m-1)+mS(n,m) \tag{2.1}$$

indirgeme bağıntısı yazılabilir. Bu indirgeme bağıntısı, binom katsayıları için geçerli olan

$$\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}$$

Pascal eşitliğinin kombinatorik kanıtındaki düşünce ile gösterilebilir. Gerçekten, $n+1$ eleman m tane alt kümeye ayrılsın ve özel bir eleman seçilsin. Bu elemanın kendisi bir küme oluşturuyorsa geriye kalan n elemanı $m-1$ tane kümeye ayırma yollarının sayısı $S(n,m-1)$ olur. Bu eleman, diğer elemanlarla beraber bir kümede ise n elemanı m tane kümeye ayırma yollarının sayısı $S(n,m)$ olur ve bu özel elemanı bu m tane kümelerden birine yerleştirmenin m yolu vardır. Sonuç olarak, toplamda $mS(n,m)$ yol vardır.

(2.1) indirgeme bağıntısı kullanılarak $S(n,m)$ ikinci tip Stirling sayısı herhangi n ve m tam sayıları için tanımlanabilir.

Tanım 2.2. (İkinci tip Stirling sayısı, genel tanım) *Herhangi n ve m tam sayıları için $S(n,m)$ ikinci tip Stirling sayısı*

$$S(0,0)=1, \quad S(n,0)=S(0,m)=0 \quad (n,m\neq 0)$$

başlangıç koşulları ile

$$S(n+1,m)=S(n,m-1)+mS(n,m)$$

indirgeme formülü şeklinde tanımlanır.

(2.1) indirgeme bağıntısı gereği $S(n+1,m)$, $S(n,m-1)$ ve $S(n,m)$ değerlerinden ikisi biliniyorsa $m=0$ durumu hariç diğeri de elde edilebilir. $m=0$ olursa $mS(n,m)$ ifadesi m ile bölünemez, bu durum için tanımdan elde edilen $S(n,0)=0$ değeri kullanılır.

İkinci tip Stirling sayıları için verilen genel tanım ile kombinatorik tanım birbirine denktir. Bunu görmek için genel tanımda $n\geq 1$ olmak üzere $S(n,1)=1$ ve $m\geq 2$ için $S(1,m)=0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü, bu değerler kombinatorik tanım altında aşikar olarak elde edilen değerlerdir ve her iki tanımın sağladığı indirgeme bağıntıları aynıdır. (2.1) bağıntısında $m=1$ yazılırsa

$$S(n+1,n)=S(n,0)+S(n,1)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $n=0$ yazılırsa $S(1,1)=1$ bulunur. Ayrıca, $S(n,0)=0$ olduğundan $S(n+1,1)=S(n,1)$ olur. Bu ise $n\geq 1$ için $S(n,1)=1$ olmasını gerektirir. Benzer şekilde, (2.1) bağıntısında $n=0$ yazılırsa

$$S(1,m)=S(0,m-1)+mS(0,m)$$

elde edilir. $m\geq 2$ için $S(0,m-1)=S(0,m)=0$ olduğundan $S(1,m)=0$ bulunur.

Tanım 2.3. (Birinci tip Stirling sayısı, cebirsel tanım) *Pozitif n ve m tam sayıları için birinci tip Stirling sayısı $s(n,m)$ ile gösterilir ve n tane elemanın m tane ayrık devinim içeren permütasyonlarının sayısı olarak tanımlanır.*

Mertebesi n olan simetrik grubun (yani $\{1,2,\ldots,n\}$ kümesinin permütasyon grubunun) bir elemanı ayrık devinimlere tek türlü belirli şekilde ayrılabilir. n tane elemanın permütasyonları içinde m tane ayrık devinimlerin sayısı $s(n,m)$ olur. Örneğin, $\{1,2,3,4\}$

kümesinin iki ayrık devinime sahip olan permütasyonları

$$\begin{array}{ll} (1)(234) & (4)(123) \\ (1)(243) & (4)(132) \\ (2)(134) & (12)(34) \\ (2)(143) & (13)(24) \\ (3)(124) & (14)(23) \\ (3)(142) & \end{array}$$

olduğundan $s(4,2) = 11$ olur.

Tanım gereği $s(n,n) = 1$ (birim) ve $s(n,1) = (n-1)!$ (n tane devinim sayısı) olur.

Birinci tip Stirling sayıları

$$s(n+1,m) = s(n,m-1) + ns(n,m) \tag{2.2}$$

indirgeme bağıntısını sağlar. Gerçekten, $n+1$ tane harfin bir permütasyonu $(n+1)$. harfi sabitlesin. Bu durumda, bu $(n+1)$. harf kendi başına bir devinim oluşturur ve geriye kalan n tane harfin $m-1$ tane ayrık devinime ayrılma sayısı $s(n,m-1)$ olur. $(n+1)$. harfi değiştiren bir permütasyon, bu $(n+1)$. harfi n tane harfin m tane olan ayrık permütasyonlarından birine eklenerek elde edilebilir. Başka bir harf ekleyerek uzunluğu j olan bir devinimden uzunluğu $j+1$ olan bir devinim elde etmenin j tane yolu vardır. Dolayısıyla, $(n+1)$. harfi eklemenin n tane yolu vardır ve $(n+1)$. harfi değiştiren toplamda $ns(n,m)$ permütasyon oluşur. Bu ise (2.2) indirgeme bağıntısını verir.

İkinci tip Stirling sayılarında olduğu gibi $s(n,m)$ birinci tip Stirling sayıları da herhangi n ve m tam sayıları için tanımlanabilir.

Tanım 2.4. (Birinci tip Stirling sayısı, genel tanım) *Herhangi n ve m tam sayıları için $s(n,m)$ birinci tip Stirling sayısı*

$$s(0,0) = 1, \quad s(n,0) = s(0,m) = 0 \quad (n,m \neq 0)$$

başlangıç koşulları ile

$$s(n+1,m) = s(n,m-1) + ns(n,m)$$

indirgeme formülü şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki önerme, Stirling sayılarının sağladığı bazı özellikleri ifade etmektedir.

Önerme 2.5. *Birinci ve ikinci tip Stirling sayıları için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(1) $s(n,m) = S(-m,-n)$ *olur.*

(2) $n \geq 0$ *tam sayısı için*

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m)(x)_m$$

olur. Burada $(x)_m$,

$$\begin{aligned} (x)_m &= x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1), \quad m > 0 \\ (x)_0 &= 1 \end{aligned}$$

olarak tanımlanan azalan faktöriyel fonksiyonudur.

(3) $n \geq 0$ *tam sayısı için*

$$(x)_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m s(n,m)\, x^m$$

olur.

(4) $n \geq 1$ *tam sayısı için*

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n = \sum_{m=1}^{n} S(n,m)\, x^m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m$$

olur.

(5) $m, n \geq 0$ *tam sayıları için*

$$\sum_{r \geq 0} (-1)^r S(n,r)\, s(r,m) = (-1)^m \delta_{m,n}$$

ve

$$\sum_{r \geq 0} (-1)^r s(n,r)\, S(r,m) = (-1)^m \delta_{m,n}$$

olur. Burada,

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n \text{ ise,} \\ 0, & m \neq n \text{ ise,} \end{cases}$$

olarak tanımlanan Kronecker delta sembolüdür.

(6) $m, n \geq 0$ *tam sayıları için*

$$S(n,m) = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} r^n$$

olur.

(7) $m \geq 0$ *tam sayısı için*

$$\frac{(e^t-1)^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} S(n,m)\frac{t^n}{n!}$$

olur.

(8) $m \geq 1$ *tam sayısı için*

$$\frac{t^m}{(1-t)(1-2t)\cdots(1-mt)} = \sum_{n=m}^{\infty} S(n,m)\,t^n$$

olur.

(9) $m \geq 0$ *tam sayısı için*

$$\frac{[-\log(1-t)]^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} s(n,m)\frac{t^n}{n!}$$

olur.

Kanıt

(1) $a_{n,m} = S(-m,-n)$ olsun. İfadenin kanıtı için $a_{n,m}$ dizisinin $s(n,m)$ birinci tip Stirling sayısının sağladığı indirgeme bağıntısını aynı başlangıç koşulları ile sağladığını göstermek yeterlidir.

$s(n,m)$ için başlangıç koşulları

$$s(0,0) = 1 \quad \text{ve} \quad s(n,0) = s(0,m) = 0$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= S(0,0) = 1, \\ a_{n,0} &= S(0,-n) = 0, \\ a_{0,m} &= S(-m,0) = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a_{n,m}$ dizisi istenilen başlangıç koşullarını sağlar. Şimdi,

$$S(n+1,m) = S(n,m-1) + mS(n,m)$$

indirgeme bağıntısında m yerine $-n$ ve n yerine $-m$ yazılırsa

$$S(-m+1,-n) = S(-m,-n-1) - nS(-m,-n)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafına $nS(-m,-n)$ eklenirse

$$S(-m+1,-n)+nS(-m,-n)=S(-m,-n-1)$$

elde edilir. Bu ise

$$a_{n,m-1}+na_{n,m}=a_{n+1,m},$$

yani

$$s(n+1,m)=s(n,m-1)+ns(n,m)$$

indirgeme bağıntısını verir.

(2) $a_{n,m}$ bir dizi ve

$$x^n=\sum_{m=0}^{n}a_{n,m}(x)_m$$

olsun. $a_{n,m}$ dizisinin $m,n\geq 0$ olmak üzere aynı başlangıç koşulları ile $S(n,m)$ ikinci tip Stirling sayısının sağladığı indirgeme bağıntısını sağladığı gösterilecektir. $S(n,m)$ için başlangıç koşulları

$$S(0,0)=1 \quad \text{ve} \quad S(n,0)=S(0,m)=0$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
x^0 &= \sum_{m=0}^{0}a_{0,m}(x)_m \Rightarrow 1=a_{0,0}(x)_0=a_{0,0}, \\
x^n &= \sum_{m=0}^{n}a_{n,m}(x)_m=a_{n,0}+\sum_{m=1}^{n}a_{n,m}(x)_m \Rightarrow a_{n,0}=0
\end{aligned}$$

ve $m>0$ için $a_{0,m}=0$ alınırsa istenilen başlangıç değerleri elde edilir. Şimdi,

$$(x)_{m+1}=x(x-1)\cdots(x-m+1)(x-m)=(x-m)(x)_m$$

ve

$$x(x)_m=(x-m+m)(x)_m=(x-m)(x)_m+m(x)_m=(x)_{m+1}+m(x)_m$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n+1}a_{n+1,m}(x)_m &= x^{n+1}=xx^n \\
&= x\sum_{m=0}^{n}a_{n,m}(x)_m=\sum_{m=0}^{n}a_{n,m}\left[(x)_{m+1}+m(x)_m\right]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{n+1} a_{n,m-1} (x)_m + \sum_{m=0}^{n} m a_{n,m} (x)_m$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında $(x)_m$ terimlerinin katsayılarının eşitliğinden ($a_{n,-1} = a_{n,n+1} = 0$ olmak üzere)

$$a_{n+1,m} = a_{n,m-1} + m a_{n,m},$$

yani

$$S(n+1, m) = S(n, m-1) + mS(n, m)$$

indirgeme bağıntısı bulunur.

(3) (2) ifadesinin kanıtında olduğu gibi $a_{n,m}$ bir dizi ve

$$(x)_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_{n,m} x^m$$

olsun. $a_{n,m}$ dizisinin $m, n \geq 0$ olmak üzere aynı başlangıç koşulları ile $s(n,m)$ birinci tip Stirling sayısının sağladığı indirgeme bağıntısını sağladığı gösterilecektir. $s(n,m)$ için başlangıç koşulları

$$s(0,0) = 1 \quad \text{ve} \quad s(n,0) = s(0,m) = 0$$

şeklindedir.

$$1 = (x)_0 = \sum_{m=0}^{0} (-1)^m a_{0,m} x^m = a_{0,0}$$

olur.

$$(x)_n = (-1)^n a_{n,0} + (-1)^n \sum_{m=1}^{n} (-1)^m a_{n,m} x^m$$

olur. $n > 0$ için sol tarafta x terimi yer alır. Sağ tarafta her zaman x olması için $a_{n,0} = 0$ olmalıdır. Ayrıca, $n = 0$ ve ve $m > 0$ için sağ taraftaki toplam boş olacağından $m > 0$ için $a_{0,m} = 0$ olur. Şimdi,

$$\begin{aligned}
&(-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m a_{n+1,m} x^m \\
&\quad = (x)_{n+1} = (x-n)(x)_n = x(x)_n - n(x)_n \\
&\quad = x(-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_{n,m} x^m - n(-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_{n,m} x^m \\
&\quad = (-1)^n \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{m-1} a_{n,m-1} x^m - (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m n a_{n,m} x^m
\end{aligned}$$

bulunur. x^m terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$(-1)^{n+1}(-1)^m a_{n+1,m} = (-1)^n (-1)^{m-1} a_{n,m-1} - (-1)^n (-1)^m n a_{n,m}$$

veya denk olarak

$$a_{n+1,m} = a_{n,m-1} + n a_{n,m},$$

yani

$$s(n+1,m) = s(n,m-1) + n s(n,m)$$

indirgeme bağıntısı bulunur.

(4) İfade n üzerinde tümevarım ile kanıtlanacaktır. $n = 1$ için eşitliğin her iki tarafı $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ olduğundan ifade doğrudur. İfade n için doğru, yani

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n = \sum_{m=1}^{n} S(n,m)\, x^m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m$$

olsun. $n+1$ için

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n+1} = \sum_{m=1}^{n+1} S(n+1,m)\, x^m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m$$

olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n+1} &= \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n = \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\sum_{m=1}^{n} S(n,m)\, x^m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m \\
&= x\sum_{m=1}^{n} S(n,m)\left\{ m x^{m-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m + x^m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{m+1}\right\} \\
&= \sum_{m=1}^{n} m S(n,m)\, x^m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m + \sum_{m=1}^{n} S(n,m)\, x^{m+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{m+1} \\
&= \sum_{m=1}^{n+1} \{ m S(n,m) + S(n,m-1)\}\, x^m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m \\
&= \sum_{m=1}^{n+1} S(n+1,m)\, x^m \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise tümevarımı tamamlar.

(5) (2) ve (3) ifadeleri kullanılarak kanıtlanacaktır. İlk ifade için

$$(x)_r = (-1)^r \sum_{m=0}^{r} (-1)^m s(r,m)\, x^m$$

ifadesi

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,r)\,(x)_r$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{r=0}^{n} S(n,r)(-1)^r \sum_{m=0}^{r} (-1)^m s(r,m)\, x^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \sum_{r=m}^{n} (-1)^r S(n,r)\, s(r,m)\, x^m \end{aligned}$$

elde edilir. x^n terimlerine karşılık gelen katsayılarının eşitliği

$$(-1)^n \sum_{r=m}^{n} (-1)^r S(n,r)\, s(r,m) = \begin{cases} 1, & m = n \text{ ise}, \\ 0, & m \neq n \text{ ise}, \end{cases}$$

ifadesini verir.

Benzer şekilde,

$$x^r = \sum_{m=0}^{r} S(r,m)\,(x)_m$$

ifadesi

$$(x)_n = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} (-1)^r s(n,r)\, x^r$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (x)_n &= (-1)^n \sum_{r=0}^{n} (-1)^r s(n,r) \sum_{m=0}^{r} S(r,m)\,(x)_m \\ &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^n \sum_{r=m}^{n} (-1)^r s(n,r)\, S(r,m)\,(x)_m \end{aligned}$$

elde edilir. $(x)_n$ terimlerine karşılık gelen katsayılarının eşitliği

$$(-1)^n \sum_{r=m}^{n} (-1)^r s(n,r)\, S(r,m) = \begin{cases} 1, & m = n \text{ ise}, \\ 0, & m \neq n \text{ ise}, \end{cases}$$

ifadesini verir.

(6) Sağ tarafın $S(n,m)$ için verilen indirgeme bağıntısını aynı başlangıç koşulları ile sağladığı gösterilecektir.

$$a_{n,m} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} r^n$$

olsun. $a_{0,0} = 1$ ve $n \geq 1$ için $a_{n,0} = 0$ olur. Ayrıca, $m \geq 1$ için

$$a_{0,m} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} = \frac{(-1)^m}{m!} (1-1)^m = 0$$

olur. Şimdi,

$$\begin{aligned}
ma_{n,m}+a_{n,m-1} &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}r^n+\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r\binom{m-1}{r}r^n \\
&= \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\left\{\binom{m}{r}-\binom{m-1}{r}\right\}r^n \\
&= \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\frac{r}{m}\binom{m}{r}r^n \\
&= \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}r^{n+1}=a_{n+1,m}
\end{aligned}$$

olduğundan $a_{n,m}$ dizisi, $S(n,m)$ için indirgeme bağıntısını sağlar.

(7) (6) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=m}^{\infty}S(n,m)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}S(n,m)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}r^n\right\}\frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(rt)^n}{n!} \\
&= \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}e^{rt}=\frac{(-1)^m}{m!}\left(1-e^t\right)^m=\frac{\left(e^t-1\right)^m}{m!}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(8) Eşitliğin sağ tarafı f_m olsun. $S(n,m)$ için indirgeme bağıntısından

$$\begin{aligned}
f_m &= \sum_{n=m}^{\infty}S(n,m)t^n=\sum_{n=m}^{\infty}\left\{S(n-1,m-1)+mS(n-1,m)\right\}t^n \\
&= t\sum_{n=m-1}^{\infty}S(n,m-1)t^n+mt\sum_{n=m}^{\infty}S(n,m)t^n \\
&= tf_{m-1}+mtf_m
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$f_m=\frac{t}{1-mt}f_{m-1}$$

olur.

$$f_0=\sum_{n=0}^{\infty}S(n,0)t^n=S(0,0)+\sum_{n=1}^{\infty}S(n,0)t^n=1$$

olduğundan

$$f_1=\frac{t}{1-t}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{t}{1-2t} f_1 = \frac{t^2}{(1-t)(1-2t)} \\ f_3 &= \frac{t}{1-3t} f_2 = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-3t)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$f_m = \frac{t^m}{(1-t)(1-2t)\cdots(1-mt)}$$

bulunur. Bu ise eşitliğin sol tarafıdır.

(9) $a_{n,m}$ dizisi

$$\frac{[-\log(1-t)]^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n,m} \frac{t^n}{n!}$$

olarak tanımlansın. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{m[-\log(1-t)]^{m-1}}{m!} \frac{1}{1-t} = \sum_{n=m}^{\infty} n a_{n,m} \frac{t^{n-1}}{n!}$$

veya denk olarak

$$\sum_{n=m-1}^{\infty} a_{n,m-1} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=m-1}^{\infty} a_{n+1,m} \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=m-1}^{\infty} n a_{n,m} \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$a_{n+1,m} = a_{n,m-1} + n a_{n,m}$$

bulunur. Bu ise $s(n,m)$ için indirgeme bağıntısıdır. □

2.1.2. Genelleştirilmiş Stirling Sayıları

Bu alt bölüm için Hsu ve Shiue (1998) kaynağından yararlanılmıştır.

Herhangi bir λ karmaşık sayısı için azalan faktöriyel fonksiyonu olan $(x)_n$ ifadesinin bir genelleştirilmesi

$$\begin{aligned} (x|\lambda)_n &= x(x-\lambda)(x-2\lambda)\cdots(x-(n-1)\lambda), \quad n>0 \qquad (2.3) \\ (x|\lambda)_0 &= 1 \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $\lambda = 0$ için $(x|0)_n = x^n$ ve $\lambda = 1$ için $(x|1)_n = (x)_n$ olur.

λ, β ve r, $(\lambda, \beta, r) \neq (0,0,0)$ özelliğinde olan reel veya karmaşık sayılar olmak üzere

$$(t|\lambda)_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k;\lambda,\beta,r)(t-r|\lambda)_k \tag{2.4}$$

$$(t|\beta)_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k;\beta,\lambda,-r)(t+r|\lambda)_k \tag{2.5}$$

eşitlikleri ile tanımlanan $\{S(n,k;\lambda,\beta,r), S(n,k;\beta,\lambda,-r)\}$ çiftine genelleştirilmiş Stirling sayıları çifti denir.

Genelleştirilmiş Stirling sayıları çiftinin özel durumları, literatürde var olan özel sayıların bir çoğunu verir. Kolaylık bakımından $\{S(n,k;\lambda,\beta,r), S(n,k;\beta,\lambda,-r)\}$ çifti bir $\langle\lambda,\beta,r\rangle$-çifti veya denk olarak bir $\langle\beta,\lambda,-r\rangle$-çifti olarak adlandırılır.

1. $\{s(n,k), S(n,k)\}$ ile gösterilen klasik Stirling sayıları çifti bir $\langle 1,0,0\rangle$-çiftidir. Daha açık bir ifade ile

   $$s(n,k) = S(n,k;1,0,0) \quad \text{ve} \quad S(n,k) = S(n,k;0,1,0)$$

   olur.

2. İşaretsiz birinci tip Stirling sayısı $|s(n,k)|$ ve $(-1)^{n-k} S(n,k)$ ikinci tip Stirling sayısı bir $\langle -1,0,0\rangle$-çiftidir.

3. Carlitz tarafından tanımlanan birinci ve ikinci tip ağırlıklı Stirling sayıları $\lambda \neq 0$ olmak üzere bir $\langle 1,0,-\lambda\rangle$-çiftidir (Carlitz 1980).

4. Carlitz tarafından tanımlanan birinci ve ikinci tip dejenere Stirling sayıları $\lambda \neq 0$ olmak üzere bir $\langle 1,\lambda,0\rangle$-çiftidir (Carlitz 1979).

5. Howard tarafından tanımlanan birinci ve ikinci tip ağırlıklı dejenere Stirling sayıları bir $\langle 1,\lambda,-\beta\rangle$-çiftidir (Howard 1985).

6. Riordan tarafından tanımlanan merkezi olmayan birinci ve ikinci tip Stirling sayıları bir $\langle 1,0,b-a\rangle$-çiftidir (Riordan 1937).

7. Broder tarafından tanımlanan birinci tip r-Stirling sayıları, n ve k yerine, sırasıyla, $n-r$ ve $k-r$ yazılarak elde edilen bir $\langle -1,0,r\rangle$-çiftidir (Broder 1984).

(2.4) ifadesi kullanılarak $S(n,k;\lambda,\beta,r)$ için

$$S(0,0;\lambda,\beta,r)=1,\quad S(n,n;\lambda,\beta,r)=1,\quad S(1,0;\lambda,\beta,r)=r$$

ifadelerini elde etmek kolaydır. Ayrıca, $k>n$ için $S(n,k;\lambda,\beta,r)=0$ kabul edilir.

Önteorem 2.6. $1\leq k\leq n$ *için*

$$S(n+1,k;\lambda,\beta,r)=S(n,k-1;\lambda,\beta,r)+(k\beta-n\lambda+r)\,S(n,k;\lambda,\beta,r) \tag{2.6}$$

indirgeme bağıntısı sağlanır. Özel olarak,

$$S(n,0;\lambda,\beta,r)=(r|\lambda)_n \tag{2.7}$$

ve

$$S(n,n-1;\lambda,\beta,r)=nr+(\beta-\lambda)\binom{n}{2} \tag{2.8}$$

olur.

Kanıt (2.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1}S(n+1,k;\lambda,\beta,r)\,(t-r|\beta)_k\\
&= (t|\lambda)_{n+1}=(t|\lambda)_n\,(t-n\lambda)\\
&= (t-n\lambda)\sum_{k=0}^{n}S(n,k;\lambda,\beta,r)\,(t-r|\beta)_k\\
&= \sum_{k=0}^{n}S(n,k;\lambda,\beta,r)\,(t-r|\beta)_k\,[(t-r-k\beta)+(k\beta-n\lambda+r)]\\
&= \sum_{k=0}^{n}S(n,k;\lambda,\beta,r)\,(t-r|\beta)_{k+1}\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}(k\beta-n\lambda+r)\,S(n,k;\lambda,\beta,r)\,(t-r|\beta)_k\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}S(n,k-1;\lambda,\beta,r)\,(t-r|\beta)_k\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}(k\beta-n\lambda+r)\,S(n,k;\lambda,\beta,r)\,(t-r|\beta)_k
\end{aligned}$$

elde edilir. $k\geq 1$ için $(t-r|\beta)_k$ terimlerinin katsayılarının eşitliğinden (2.6) indirgeme bağıntısı bulunur.

$k=0$ durumunda ortaya çıkan terimler için

$$S(n+1,0;\lambda,\beta,r)=(r-n\lambda)\,S(n,0;\lambda,\beta,r)$$

olur. Bu eşitlikten elde edilen

$$\begin{aligned} S(n+1,0;\lambda,\beta,r) &= (r-n\lambda)\,S(n,0;\lambda,\beta,r)\\ S(n,0;\lambda,\beta,r) &= (r-(n-1)\lambda)\,S(n-1,0;\lambda,\beta,r)\\ &\vdots\\ S(2,0;\lambda,\beta,r) &= (r-\lambda)\,S(1,0;\lambda,\beta,r) \end{aligned}$$

bağıntıları taraf tarafa toplandığında $S(1,0;\lambda,\beta,r)=r$ olduğundan

$$S(n+1,0;\lambda,\beta,r)=r(r-\lambda)\cdots(r-n\lambda)=(r|\lambda)_{n+1}$$

bulunur.

(2.6) indirgeme bağıntısında $k=n$ için

$$S(n+1,n;\lambda,\beta,r)=S(n,n-1;\lambda,\beta,r)+(n\beta-n\lambda+r)\,S(n,n;\lambda,\beta,r)$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} S(n+1,n;\lambda,\beta,r) &= S(1,0;\lambda,\beta,r)+nr+(\beta-\lambda)(1+2+\cdots+n)\\ &= (n+1)\,r+(\beta-\lambda)\binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

bulunur. □

Önteorem 2.7. *$S(n,k;\lambda,\beta,r)$ genelleştirilmiş Stirling sayısı için*

$$y_k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k;\lambda,\beta,r)\frac{t^n}{n!}$$

olsun. $k=2,3,\ldots$ için $y_k(t)$ fonksiyonu

$$(1+\lambda t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_k(t)-(k\beta+r)\,y_k(t)=y_{k-1}(t)$$

eşitliğini sağlar. $k\geq 1$ için $y_k(0)=0$ ve $y_0(t)=(1+\lambda t)^{\frac{r}{\lambda}}$ olur.

Kanıt $y_k(t)$ fonksiyonunun tanımı gereği $k \geq 1$ için $y_k(0) = 0$ olur. Diğer taraftan, (2.7) ve genelleştirilmiş binom teoremi gereği

$$y_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,0;\lambda,\beta,r)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (r|\lambda)_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{r}{\lambda}}{n} (\lambda t)^n = (1+\lambda t)^{\frac{r}{\lambda}}$$

elde edilir.

Şimdi, (2.6) indirgeme bağıntısı gereği

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} S(n+1,k;\lambda,\beta,r)\frac{t^n}{n!} \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} (k\beta - n\lambda + r) S(n,k;\lambda,\beta,r)\frac{t^n}{n!} \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k-1;\lambda,\beta,r)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

veya denk olarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} S(n,k;\lambda,\beta,r)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} S(n,k;\lambda,\beta,r)\frac{t^n}{(n-1)!} \\
&\quad - (k\beta + r) y_k(t) = y_{k-1}(t),
\end{aligned}$$

yani

$$(1+\lambda t)\sum_{n=1}^{\infty} S(n,k;\lambda,\beta,r)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - (k\beta + r) y_k(t) = y_{k-1}(t)$$

olur. Bu ise

$$(1+\lambda t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_k(t) - (k\beta + r) y_k(t) = y_{k-1}(t)$$

ifadesini verir. □

Teorem 2.8. *$\lambda\beta \neq 0$ için $S(n,k;\lambda,\beta,r)$ genelleştirilmiş Stirling sayısının üstel üreteç fonksiyonu*

$$(1+\lambda t)^{\frac{r}{\lambda}} \left(\frac{(1+\lambda t)^{\frac{\beta}{\lambda}} - 1}{\beta}\right)^k = k! \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k;\lambda,\beta,r)\frac{t^n}{n!} \tag{2.9}$$

şeklindedir.

Kanıt (2.9) eşitliğinin sol tarafı $k!\phi_k(t)$, yani

$$k!\phi_k(t) = (1+\lambda t)^{\frac{r}{\lambda}} \left(\frac{(1+\lambda t)^{\frac{\beta}{\lambda}} - 1}{\beta}\right)^k$$

olsun. $k \geq 1$ için $k!\phi_k(0) = 0 = y_k(0)$ ve $\phi_0(t) = (1+\lambda t)^{\frac{r}{\lambda}} = y_0(t)$ olur (burada $y_k(t)$, Önteorem 2.7'de tanımlanan fonksiyondur). Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
&(1+\lambda t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_k(t) - (k\beta + r)\phi_k(t) \\
&= \frac{1}{k!}(1+\lambda t)\frac{r}{\lambda}\lambda(1+\lambda t)^{\frac{r}{\lambda}-1}\left(\frac{(1+\lambda t)^{\frac{\beta}{\lambda}}-1}{\beta}\right)^k \\
&\quad + \frac{k}{k!}(1+\lambda t)(1+\lambda t)^{\frac{r}{\lambda}}\left(\frac{(1+\lambda t)^{\frac{\beta}{\lambda}}-1}{\beta}\right)^{k-1}\frac{1}{\beta}\frac{\beta}{\lambda}\lambda(1+\lambda t)^{\frac{\beta}{\lambda}-1} \\
&\quad - \frac{1}{k!}(k\beta + r)(1+\lambda t)^{\frac{r}{\lambda}}\left(\frac{(1+\lambda t)^{\frac{\beta}{\lambda}}-1}{\beta}\right)^k \\
&= \frac{1}{(k-1)!}(1+\lambda t)^{\frac{r}{\lambda}}\left(\frac{(1+\lambda t)^{\frac{\beta}{\lambda}}-1}{\beta}\right)^{k-1} = \phi_{k-1}(t)
\end{aligned}
$$

olduğundan $k!\phi_k(t) = y_k(t)$ bulunur. Bu ise (2.9) eşitliğinin kanıtını tamamlar. □

Sonuç 2.9. *$S(n,k;\lambda,\beta,r)$ genelleştirilmiş Stirling sayıları*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}S(m,k_1;\lambda,\beta,r_1)\,S(n-m,k_2;\lambda,\beta,r_2) \\
&\qquad = \binom{k_1+k_2}{k_1}S(n,k_1+k_2;\lambda,\beta,r_1+r_2)
\end{aligned}
$$

girişim bağıntısı sağlar.

Kanıt Teorem 2.8 gereği

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}S(m,k_1;\lambda,\beta,r_1)\,S(n-m,k_2;\lambda,\beta,r_2)\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k_1;\lambda,\beta,r_1)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k_2;\lambda,\beta,r_2)\frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{k_1!}(1+\lambda t)^{\frac{r_1}{\lambda}}\left(\frac{(1+\lambda t)^{\frac{\beta}{\lambda}}-1}{\beta}\right)^{k_1}\frac{1}{k_2!}(1+\lambda t)^{\frac{r_2}{\lambda}}\left(\frac{(1+\lambda t)^{\frac{\beta}{\lambda}}-1}{\beta}\right)^{k_2} \\
&= \frac{1}{k_1!k_2!}(1+\lambda t)^{\frac{r_1+r_2}{\lambda}}\left(\frac{(1+\lambda t)^{\frac{\beta}{\lambda}}-1}{\beta}\right)^{k_1+k_2} \\
&= \binom{k_1+k_2}{k_1}\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k_1+k_2;\lambda,\beta,r_1+r_2)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

olur. $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin eşitliği istenilen sonucu verir. □

Teorem 2.10. *p bir tek asal sayı ve λ, β, r tam sayılar ise $1 < k < p$ için*

$$S(p, k; \lambda, \beta, r) \equiv 0 \pmod{p}$$

olur.

Kanıt $S(0,0;\lambda,\beta,r) = 1$, $S(n,n;\lambda,\beta,r) = 1$ ve $S(1,0;\lambda,\beta,r) = r$ eşitlikleri ile Önteorem 2.6 gereği $\lambda, \beta, r \in \mathbb{Z}$ ise $S(n,k;\lambda,\beta,r) \in \mathbb{Z}$ olduğu görülür. Sonuç 2.9'da $n = p$, $r = r_1 + r_2$ ve $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$ olmak üzere $k = k_1 + k_2$ yazılırsa $1 \leq m \leq p-1$ için $\binom{p}{m} \equiv 0 \pmod{p}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \binom{k}{k_1} S(p,k;\lambda,\beta,r) &= \sum_{m=1}^{p-1} \binom{p}{m} S(m,k_1;\lambda,\beta,r_1)\, S(n-m,k_2;\lambda,\beta,r_2) \\ &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

bulunur. $1 < k < p$ olduğundan $\binom{k}{k_1}$ sayısı p ile bölünmez. Bu yüzden, $S(p,k;\lambda,\beta,r) \equiv 0 \pmod{p}$ olur. □

2.2. Kuvvetler Toplamı, Bernoulli Sayıları ve Polinomları

Bu bölümdeki sonuçlar, Apostol (1976), Arakawa vd. (2014) ve Cohen (2007) kaynaklarından derlenmiştir.

1713 yılında yayınlanan "Ars Conjectandi" isimli meşhur kitabında Jakob Bernoulli, günümüzde Bernoulli sayıları olarak bilinen rasyonel sayıları, ardışık tam sayıların kuvvetleri toplamı olan

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

toplamı ile ilişkilendirerek tanımlamıştır. Bernoulli,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \ldots$$

kuvvetler toplamlarını $k = 10$ durumuna kadar sıralayarak Bernoulli sayılarını içeren genel bir formül vermiştir. Bernoulli daha sonra bu sayıların indirgemeli olarak nasıl elde edildiğini ve formülün kuvvetler toplamını hesaplamak için nasıl kullanıldığını açıklamıştır.

Bernoulli tarafından verilen söz konusu formül günümüzde kullanılan gösterim ile

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}$$

şeklindedir. Burada B_j, j. Bernoulli sayısıdır.

Tanım 2.11. (Bernoulli sayıları) $n \geq 0$ *tam sayısı için n. Bernoulli sayısı* B_n *ile gösterilir ve*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = n+1 \qquad (2.10)$$

olarak tanımlanır.

Tanımdaki (2.10) indirgeme bağıntısı ile ilk birkaç Bernoulli sayısı kolaylıkla hesaplanabilir. Örneğin, $n = 0$ için

$$1 = \sum_{i=0}^{0} \binom{1}{i} B_i = \binom{1}{0} B_0 = B_0 \Rightarrow B_0 = 1$$

olur. $n = 1$ için

$$2 = \sum_{i=0}^{1} \binom{2}{i} B_i = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 1 + 2B_1 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}$$

olur. $n = 2$ için

$$3 = \sum_{i=0}^{2} \binom{3}{i} B_i = \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 = 1 + \frac{3}{2} + 3B_2 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}$$

olur. $n = 3$ için

$$\begin{aligned} 4 &= \sum_{i=0}^{3} \binom{4}{i} B_i = \binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 + \binom{4}{3} B_3 \\ &= 1 + 2 + 1 + 4B_3 \Rightarrow B_3 = 0 \end{aligned}$$

olur. $n = 4$ için

$$\begin{aligned} 5 &= \sum_{i=0}^{4} \binom{5}{i} B_i = \binom{5}{0} B_0 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{3} B_3 + \binom{5}{4} B_4 \\ &= 1 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 5B_4 \Rightarrow B_4 = -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

olur. Bu şekilde devam edilerek aşağıdaki değerler elde edilebilir:

$$B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30},$$

$$\begin{aligned} B_5 &= 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30}, \\ B_9 &= 0, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{11} = 0, B_{12} = -\frac{691}{2730}, \\ B_{13} &= 0, B_{14} = \frac{7}{6}, B_{15} = 0, B_{16} = -\frac{3617}{510}. \end{aligned}$$

Tanım gereği B_n bir rasyonel sayıdır. Mathematica ve Maple gibi matematiksel paket programlar, Bernoulli sayılarını hesaplayan algoritmalar içermektedir.

Teorem 2.12. (Kuvvetler toplamı) *$k \geq 0$ ve $n \geq 1$ tam sayıları için*

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{k+1-j} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}$$

olur.

Kanıt Eşitliğin sol tarafı $S_k(n)$ olsun, yani

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$$

yazılsın. $k = 0$ için

$$n = S_0(n) = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} B_j \frac{n^{0+1-j}}{0+1-j} = nB_0 = n$$

olduğundan eşitlik $k = 0$ için doğrudur. $k \geq 1$ olsun. Binom teoremi gereği

$$(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} m^j - m^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} m^j$$

yazılabilir. Bu eşitlikte $m = 1, 2, \ldots, n$ yazılıp ortaya çıkan ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} \left(1^j + 2^j + \cdots + n^j\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} S_j(n)$$

elde edilir. Buradan,

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \binom{k+1}{k} S_k(n) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n),$$

yani

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left\{ (n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \right\}$$

bulunur. Bu eşitlikten tümevarım yardımıyla $S_k(n)$ kuvvetler toplamının, öncü terimi $\frac{n^{k+1}}{k+1}$ olan n değişkeninin derecesi k olan bir polinomu olduğu görülebilir.

Şimdi, $S_k(n)$ polinomunun bir kesin ifadesi elde edilecektir. Herhangi $p(x)$ ile $q(x)$ polinomları, her pozitif n tam sayısı için $p(n) = q(n)$ özelliğini sağlıyorsa aynı polinomlardır. $S_k(n)$ kuvvetler toplamının tanımı gereği $n = 1, 2, \ldots$ için

$$S_k(n+1) - S_k(n) = (n+1)^k$$

olduğundan herhangi x değişkeni için

$$S_k(x+1) - S_k(x) = (x+1)^k$$

olur. $x = 0$ yazılıp $S_k(1) = 1$ olduğu kullanılırsa

$$S_k(0) = 0$$

elde edilir. Bu ise $S_k(x)$ polinomunun sabit teriminin 0 olduğunu ifade eder. $S_k(x)$ polinomunun diğer katsayıları $1 \leq j \leq k$ için $S_k^{(j)}(0)$ türev değerlerinden elde edilebilir. $S_k(x+1) - S_k(x) = (x+1)^k$ eşitliğinden (x değişkenine göre) türev alınırsa

$$S_k'(x+1) - S_k'(x) = k(x+1)^{k-1}$$

bulunur. Bu eşitlikte $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ yazılıp ortaya çıkan ifadeler taraf tarafa toplanırsa $S_k'(n) - S_k'(0) = kS_{k-1}(n)$ elde edilir. Herhangi pozitif n tam sayısı için bu eşitlik doğru olduğundan $S_k'(x) - S_k'(0) = kS_{k-1}(x)$ olur. $S_k'(0) = b_k$ yazılırsa $S_k'(x) = kS_{k-1}(x) + b_k$ bulunur. Buradan, $S_k''(x) = kS_k'(x)$ elde edilir. $x = 0$ için bu eşitlik $S_k''(0) = kb_{k-1}$ olduğunu ifade eder. Tekrar türev alınırsa

$$S_k'''(0) = kS_k''(0) = k(k-1)S_{k-2}'(0) = k(k-1)b_{k-2}$$

elde edilir. Benzer şekilde, ardışık türevler alınırsa $2 \leq j \leq k+1$ için

$$S_k^{(j)}(0) = k(k-1)\cdots(k-j+2)b_{k-j+1}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$S_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{S_k^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

$$\begin{aligned}
&= S_k^{(0)}(0) + S_k'(0)\,x + \sum_{j=2}^{k+1} \frac{k(k-1)\cdots(k-j+2)\,b_{k-j+1}}{j!} x^j \\
&= b_k x + \sum_{j=2}^{k+1} \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j} b_{k-j+1} x^j = \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}\binom{k+1}{j} b_{k-j+1} x^j \\
&= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j+1} b_{k-j} x^{j+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{k-j+1} b_j x^{k-j+1} \\
&= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j} b_j x^{k-j+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. $S_k(1) = 1$ olduğundan yukarıdaki eşitlikte $x = 1$ yazılırsa

$$k+1 = \sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j} b_j$$

indirgeme bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, Bernoulli sayılarının tanımını verdiğinden $b_j = B_j$ olur. Bu ise teorem ifadesindeki ilk eşitliğin kanıtını tamamlar.

$$\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j} = \frac{1}{k+1-j}\binom{k}{j}$$

olduğundan ikinci eşitlik de elde edilir. □

Tanım 2.11 ile verilen indirgeme bağıntısı ile tanımlanan Bernoulli sayıları, $\frac{te^t}{e^t-1}$ fonksiyonunun Maclaurin açılımının katsayıları olarak ortaya çıkar, yani

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

olur. Sağ taraftaki seri $|t| < 2\pi$ için mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu ifadeye, Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu denir. Üreteç fonksiyonu tanımı Bernoulli sayılarının çeşitli özelliklerini elde etmede oldukça kullanışlıdır.

Teorem 2.13. *B_k Bernoulli sayıları için $\mathbb{Q}((t))$ cisminde geçerli olan*

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

formal kuvvet serisi gösterimi vardır. Burada $\mathbb{Q}((t))$, katsayıları rasyonel sayılar olan

$$\sum_{k=-N}^{\infty} a_k t^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

formal Laurent serilerinin kümesidir.

Kanıt İfadenin kanıtı için

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}\right)\left(e^t - 1\right) = te^t$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}\right)\left(e^t - 1\right) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{B_j}{j!}\frac{1}{(k-j)!}\right) t^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j} B_j\right)\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j} B_j\right)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\end{aligned}$$

bulunur. Tanım 2.11 gereği

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j} B_j\right)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = te^t$$

elde edilir. □

Üreteç fonksiyonu kullanılarak Bernoulli sayılarının bazı temel özellikleri elde edilebilir.

Önerme 2.14. *$k \geq 3$ bir tek tam sayı ise $B_k = 0$ olur.*

Kanıt İfadenin kanıtı için $\dfrac{te^t}{e^t - 1} - \dfrac{t}{2}$ formal kuvvet serisinin tek tam sayı kuvvetli terimlerinin olmadığını göstermek yeterlidir.

$$\frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{t}{2} = \frac{t\left(e^t - 1 + 1\right)}{e^t - 1} - \frac{t}{2} = t + \frac{t}{e^t - 1} - \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2}$$

ve

$$\frac{(-t)\,e^{-t}}{e^{-t} - 1} - \frac{(-t)}{2} = \frac{-t}{1 - e^{-t}} + \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2}$$

olduğundan $\dfrac{te^t}{e^t - 1} - \dfrac{t}{2}$ formal kuvvet serisi $t \to -t$ dönüşümü altında değişmezdir. Dolayısıyla, tek tam sayı kuvvetli terimlerin katsayıları sıfır olur. □

Çift k tam sayıları için B_k Bernoulli sayıları sıfırdan farklıdır ve B_2 sayısından itibaren ardışık olarak işaret değiştirirler. Bunun kanıtı için aşağıdaki ifadeden yararlanılır.

Önerme 2.15. *$k \geq 2$ için*

$$(2k + 1)\,B_{2k} = -\sum_{m=1}^{k-1}\binom{2k}{2m} B_{2m} B_{2k-2m}$$

olur.

Kanıt Önerme 2.14 gereği

$$\frac{te^t}{e^t-1}-\frac{t}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

olur.

$$f(t)=\frac{te^t}{e^t-1}-\frac{t}{2}$$

olsun.

$$f'(t)=\frac{e^t}{e^t-1}-\frac{te^t}{(e^t-1)^2}-\frac{1}{2}$$

olduğundan

$$f(t)-tf'(t)=[f(t)]^2-\frac{t^2}{4}$$

elde edilir.

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!}-t\sum_{k=0}^{\infty}2kB_{2k}\frac{t^{2k-1}}{(2k)!}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!}\right)^2-\frac{t^2}{4}$$

veya denk olarak

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-2k)B_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}\binom{2k}{2m}B_{2m}B_{2k-2m}\right)\frac{t^{2k}}{(2k)!}-\frac{t^2}{4}$$

bulunur. $k\geq 2$ için $\frac{t^{2k}}{(2k)!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$(1-2k)B_{2k}=\sum_{m=0}^{k}\binom{2k}{2m}B_{2m}B_{2k-2m}$$

elde edilir. $m=0$ ve $m=2k$ için sağ taraftan B_{2k} elde edileceğinden istenilen sonuç elde edilir. □

Sonuç 2.16. *$k\geq 1$ için $(-1)^{k-1}B_{2k}>0$ olur.*

Kanıt İfadenin kanıtı k üzerinde tümevarımla verilecektir.

$k=1$ için $B_2=\frac{1}{6}>0$ olduğundan ifade doğrudur. İfade k sayısından küçük olan tüm pozitif tam sayılar için doğru olsun. Önerme 2.15 ile verilen formül $(-1)^{k-1}$ ile çarpılırsa

$$(2k+1)(-1)^{k-1}B_{2k}=\sum_{m=1}^{k-1}\binom{2k}{2m}(-1)^{m-1}B_{2m}(-1)^{k-m-1}B_{2k-2m}$$

elde edilir. Tümevarım adımı gereği sağ taraf pozitif olduğundan $(-1)^{k-1} B_{2k} > 0$ bulunur. Bu ise tümevarımı ve kanıtı tamamlar. □

Bernoulli sayıları için $B_1 = -\frac{1}{2}$ olan ve geriye kalan diğer değerlerin aynı olduğu farklı bir tanım da vardır. Her $k > 1$ tek tam sayısı için $B_k = 0$ olduğundan bu tanımların birinden diğerine B_k yerine $(-1)^k B_k$ yazılarak geçilebilir. Bu tez çalışmasında Bernoulli sayıları için $B_1 = -\frac{1}{2}$ olan tanım kabul edilecektir, yani Bernoulli sayıları için

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

üreteç fonksiyonu tanımı kullanılacaktır.

Bernoulli sayıları için ikinci tip Stirling sayılarını içeren bir sonlu toplam Kronecker zamanından beri bilinmektedir. Önerme 2.5 (6) gereği ikinci tip Stirling sayıları sadece binom katsayılarını içeren bir sonlu toplam şeklinde yazılabilir. Bu gösterim kullanılarak Bernoulli sayıları sadece binom katsayıları ve polinomlar içeren toplamlar şeklinde ifade edilebilir. Gould, benzer formüller için çeşitli tarihsel kaynakları taramış ve en azından 1970'li yıllara kadar Bernoulli sayıları için sonsuz toplam ve integraller içermeyen sonlu toplam gösterimlerinin fazla bilinmediği sonucuna ulaşmıştır. Gould ayrıca Bernoulli sayıları için tek bir toplamdan oluşan ve binom katsayıları ile polinomları içeren bir formül olmadığını öne sürmüştür. Gould'un iddia ettiği gibi söz konusu bir formül şu ana kadar bulunamamıştır.

Bernoulli sayıları için ikinci tip Stirling sayılarını içeren bir sonlu toplam şu şekildedir.

Teorem 2.17. *$n \geq 0$ için*

$$B_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m! S(n,m)}{m+1}$$

olur.

Kanıt $t = -\log[1 - (1 - e^{-t})]$ olduğundan

$$\frac{-t}{e^{-t} - 1} = \frac{t}{1 - e^{-t}} = \frac{-\log[1 - (1 - e^{-t})]}{1 - e^{-t}}$$

olur.

$$-\log(1 - x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

ifadesinde x yerine $1 - \mathrm{e}^{-t}$ yazılırsa

$$-\log\left[1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)\right] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^m}{m}$$

elde edilir.

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(-t)^n}{n!} &= \frac{-t}{\mathrm{e}^{-t} - 1} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^m}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^{m-1}}{m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}\left(\mathrm{e}^{-t} - 1\right)^{m-1}}{m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\mathrm{e}^{-t} - 1\right)^m}{m+1} \end{aligned}$$

bulunur. Önerme 2.5 (7) gereği

$$\frac{\left(\mathrm{e}^t - 1\right)^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} S(n,m) \frac{t^n}{n!}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \sum_{n=m}^{\infty} S(n,m) \frac{(-t)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m (-1)^n m! S(n,m)}{m+1} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayılarının eşitliğinden istenilen bulunur. □

Rasyonel sayılar olan Bernoulli sayılarının paydaları Clausen ve von Staudt tarafından verilen sonuç ile tamamen belirlidir. von Staudt-Clausen teoremi olarak adlandırılan bu sonuç, Bernoulli sayıları çalışmalarında temel bir kavramdır.

Teorem 2.18. *$n = 1$ ve her $n \geq 2$ çift tam sayısı için C_n bir tam sayı olmak üzere B_n Bernoulli sayısı*

$$B_n = -\sum_{\substack{(p-1)|n \\ p \text{ asal}}} \frac{1}{p} + C_n$$

olarak yazılabilir. Burada toplam, $(p-1)\,|n$ özelliğinde olan p asal sayıları üzerinden alınmıştır.

Kanıt $n = 1$ için

$$-\frac{1}{2} = B_1 = -\sum_{\substack{(p-1)|1 \\ p \text{ asal}}} \frac{1}{p} + C_1 = -\frac{1}{2} + C_1$$

olduğundan $C_1 = 0$ seçimi ile ifade doğrudur. $n \geq 2$ bir çift tam sayı olsun. Teorem 2.17 ile verilen

$$B_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m \, m!S(n,m)}{m+1}$$

formülünde sağ tarafta yer alan her $\frac{(-1)^m m!S(n,m)}{m+1}$ teriminin payı bir tam sayı olduğundan B_n sayısının paydasına katkıda bulunan asal sayılar sadece $m+1$ sayısının bölenleridir. Dolayısıyla, $p > m+1$ özelliğinde olan bir p asal sayısı, B_n sayısının paydasının bir böleni olamaz.

İlk olarak, $m+1$ asal olmasın, yani bir birleşik sayı olsun ve $1 < a, b < m$ olmak üzere $m+1 = ab$ yazılsın. $a \neq b$ ise ab çarpımı $m!$ sayısını böldüğünden $\frac{(-1)^m m!S(n,m)}{m+1}$ terimi bir tam sayı olur. $a = b$ ve $2a \leq m$ ise a ile $2a$ sayıları $m!$ sayısını böleceğinden $a^2 = m+1$ sayısı $m!$ sayısını böler ve bu durumda $\frac{(-1)^m m!S(n,m)}{m+1}$ terimi yine bir tam sayı olur. $a = b$ ve $2a > m$ ise $2a \geq m+1$ olur ve $m+1 = a^2 \geq 2a \geq m+1$ elde edilir. Buradan, $a^2 = 2a$, yani $a = 2$ bulunur. $a = 2$ olduğunda $m = 3$ olur ve bu terim $m \geq 3$ olduğunda ortaya çıkar. Önerme 2.5 (6) gereği

$$S(n,m) = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} r^n$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (-1)^m \, m!S(n,m) &= \sum_{r=0}^{3} (-1)^r \binom{3}{r} r^n = -3 + (3 \cdot 2^n) - 3^n \\ &\equiv 1 - (-1)^n \equiv 0 \pmod 4 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\frac{(-1)^m m!S(n,m)}{m+1}$ terimi yine bir tam sayı olur. Sonuç olarak, $m+1$ bir birleşik sayı ise $\frac{(-1)^m m!S(n,m)}{m+1}$ terimi bir tam sayıdır.

Şimdi, $m+1 = p$ bir asal sayı olsun. $p - 1 \leq n$ ve

$$\binom{p-1}{r} \equiv (-1)^r \pmod p$$

olduğundan Önerme 2.5 (6) gereği

$$(-1)^m \, m!S(n,m) = \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r \binom{p-1}{r} r^n \equiv \sum_{r=0}^{p-1} r^n \pmod p$$

elde edilir. p asalı ile aralarında asal olan bir r tam sayısı için $r^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ olduğunu ifade eden Fermat teoremi gereği $(p-1)\,|n$ ise

$$\sum_{r=0}^{p-1} r^n \equiv p-1 \equiv -1 \pmod p$$

olur. Diğer taraftan, $(p-1) \nmid n$ ise $c^n \not\equiv 1 \pmod p$ olacak şekilde bir c sayısı seçilsin (örneğin c sayısı modülo p bir ilkel kök olarak alınabilir). r sayısı 1 ile $p-1$ arasındaki tam sayı değerleri aldığında c sayısı da 1 ile $p-1$ arasındaki tam sayı değerlerini alır. Dolayısıyla,

$$\sum_{r=0}^{p-1} (cr)^n \equiv \sum_{r=0}^{p-1} r^n \pmod p \Rightarrow (c^n-1)\sum_{r=0}^{p-1} r^n \equiv 0 \pmod p$$

veya denk olarak

$$\sum_{r=0}^{p-1} r^n \equiv 0 \pmod p$$

bulunur. Sonuç olarak, $m+1=p$ bir asal sayı ise $(p-1) \nmid n$ olduğunda $\frac{(-1)^m m! S(n,m)}{m+1}$ terimi bir tam sayıdır. Diğer taraftan, $(p-1)\,|n$ olduğunda $\frac{(-1)^m m! S(n,m)}{m+1}$ terimi bir tam sayı değildir, ancak bu terim $\frac{1}{p}$ eklendiğinde bir tam sayı olur. Bu ise kanıtı tamamlar. □

Bernoulli sayılarının bir genellemesi olan $B_k(x)$ Bernoulli polinomları

$$B_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j x^{k-j} \tag{2.11}$$

olarak tanımlanan, katsayıları Bernoulli sayıları ile binom katsayılarının çarpımı ve derecesi k olan bir monik polinomdur. Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu kullanılarak Bernoulli polinomları için aşağıdaki üreteç fonksiyonu elde edilir:

Önerme 2.19. *$B_n(x)$ Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu*

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{t^k}{k!}$$

şeklindedir.

Kanıt Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu ve Bernoulli polinomlarının tanımından

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B_j x^{k-j}\right)\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{B_j}{j!}\frac{x^{k-j}}{(k-j)!}\right)t^k$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{t^k}{k!}\right) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}$$

elde edilir. □

Bernoulli polinomları, üreteç fonksiyonu yardımıyla kolaylıkla kanıtlanabilen aşağıdaki temel özellikleri sağlar:

Önerme 2.20. *$B_k(x)$ Bernoulli polinomları için*

(1) *$k \geq 0$ için $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$ olur.*

(2) *$k \geq 0$ için $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$ olur.*

(3) *$k \geq 0$ için $B_k(0) = B_k$ ve $k \neq 1$ için $B_k(0) = B_k(1) = B_k$ olur.*

(4) *$k \geq 0$ için*

$$B_k(x+y) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} B_m(x)\, y^{k-m} = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} B_m(y)\, x^{k-m}$$

olur.

Kanıt

(1) Önerme 2.19 gereği

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left[B_k(x+1) - B_n(x)\right] \frac{t^k}{k!} &= \frac{te^{(x+1)t}}{e^t-1} - \frac{te^{xt}}{e^t-1} = \frac{te^{xt}}{e^t-1}\left(e^t - 1\right) = te^{xt} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{t^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \frac{t^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} \frac{t^k}{k!}
\end{aligned}$$

bulunur. $\frac{t^k}{k!}$ terimlerinin katsayılarının eşitliği istenilen sonucu verir.

(2) Önerme 2.19 gereği

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_k(1-x) \frac{t^k}{k!} = \frac{(-t)\, e^{(1-x)(-t)}}{e^{-t}-1} = \frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}$$

bulunur. $\frac{t^k}{k!}$ terimlerinin katsayılarının eşitliği istenilen sonucu verir.

(3) Bernoulli polinomlarının ve sayılarının üreteç fonksiyonu tanımlarından $k \geq 0$ için $B_k(0) = B_k$ ifadesi açıkça görülür. Diğer taraftan, Önerme 2.19 gereği

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k(1) \frac{t^k}{k!} = \frac{te^t}{e^t-1} = t + \frac{t}{e^t-1} = t + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = t + B_0 - \frac{t}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

$$= 1+\frac{t}{2}+\sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

olduğundan $k \neq 1$ için $B_k(1) = B_k$ elde edilir.

(4) Bernoulli polinomunun üreteç fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x+y)\frac{t^k}{k!} &= \frac{te^{(x+y)t}}{e^t-1} = \frac{te^{xt}}{e^t-1}e^{yt} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} y^k \frac{t^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m} B_m(x)\, y^{k-m}\right)\frac{t^k}{k!}\end{aligned}$$

bulunur. $\frac{t^k}{k!}$ terimlerinin eşitliğinden ilk bağıntı elde edilir. İkinci bağıntı da benzer şekilde kanıtlanır. □

Teorem 2.12 ile verilen kuvvetler toplamı formülü, Bernoulli polinomları cinsinden ifade edilebilir.

Teorem 2.21. *$k \geq 0$ ve $n \geq 1$ tam sayıları için*

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}}{k+1}$$

olur.

Kanıt Önerme 2.20 (1) ile verilen $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$ eşitliğinde k yerine $k+1$ yazılırsa

$$x^k = \frac{1}{k+1}\left[B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x)\right]$$

elde edilir. $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ yazılıp ortaya çıkan eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1}\left[B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(0)\right]$$

bulunur. □

2.3. Dejenere Bernoulli Sayıları ve Polinomları

Bu bölümdeki sonuçlar, Carlitz (1956 ve 1979) kaynaklarından derlenmiştir.

Karmaşık $\lambda \neq 0$ değişkeninin bir polinomu olan ve

$$\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(\lambda)\frac{t^n}{n!} \tag{2.12}$$

ile tanımlanan $\beta_n(\lambda)$ ele alınsın. $\lambda \to 0$ için

$$\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}\to\frac{t}{e^t-1}$$

olduğundan $\beta_n(0) = B_n$ n. Bernoulli sayısıdır. Bu yüzden, $\beta_n(\lambda)$ polinomu dejenere Bernoulli sayısı olarak adlandırılır.

Dejenere Bernoulli sayıları, Bernoulli sayılarının sağladığı özelliklere benzer özellikler sağlarlar.

Teorem 2.22. *$\beta_n(\lambda)$ dejenere Bernoulli sayısı için $n \geq 1$ ise $\beta_n(1) = 0$ ve $n \geq 2$ ise $\beta_n(-\lambda) = (-1)^n \beta_n(\lambda)$ ifadeleri geçerlidir.*

Kanıt (2.12) gereği

$$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(1)\frac{t^n}{n!}=\frac{t}{(1+t)-1}=1$$

olduğundan $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin eşitliği $\beta_n(1) = 0$ olmasını gerektirir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(-\lambda)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t}{(1+(-\lambda)t)^{-\frac{1}{\lambda}}-1}=\frac{t}{(1+\lambda(-t))^{-\frac{1}{\lambda}}-1}\\ &= \frac{(1+\lambda(-t))^{\frac{1}{\lambda}}(-t)}{(1+\lambda(-t))^{\frac{1}{\lambda}}-1}=-t+\frac{-t}{(1+\lambda(-t))^{\frac{1}{\lambda}}-1}\\ &= -t+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(\lambda)\frac{(-t)^n}{n!}\end{aligned}$$

olduğundan $n \geq 2$ için $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$\beta_n(-\lambda)=(-1)^n\beta_n(\lambda)$$

elde edilir. □

Teorem 2.23. *$\beta_n(\lambda)$ dejenere Bernoulli sayısı*

$$\beta_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{\lambda-1}{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(j|\lambda)_n$$

eşitliğini sağlar.

Kanıt $y = (1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1$ olsun. Bu durumda, $\lambda t = (1+y)^{\lambda} - 1$ olur ve genelleştirilmiş binom teoremi gereği

$$\begin{aligned} \frac{t}{y} &= \frac{(1+y)^{\lambda}-1}{\lambda y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{\lambda-1}{k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{\lambda-1}{k} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{\frac{j}{\lambda}}{n} \lambda^n t^n \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (2.12) gereği

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(\lambda) \frac{t^n}{n!} &= \frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{\lambda-1}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (j|\lambda)_n \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

bulunur. $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir. □

Teorem 2.24. *λ bir pozitif tam sayı ise $\beta_n(\lambda)$ dejenere Bernoulli sayısı için*

$$\beta_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} B_k \lambda^{n-k} \sum_{r=k}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{r+1} \binom{r+1}{k} s(n,r)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt λ bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} &= \frac{1}{\lambda} \frac{(1+\lambda t - 1)^{\frac{\lambda}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{\lambda-1} (1+\lambda t)^{\frac{m}{\lambda}} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{m}{\lambda}}{n} \lambda^n t^n \end{aligned}$$

olduğundan (2.12) gereği

$$\beta_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{\lambda-1} (m|\lambda)_n$$

elde edilir. Önerme 2.5 (3) gereği

$$x(x-1)\cdots(x-(n-1)) = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} (-1)^r s(n,r) x^r$$

ve Teorem 2.21 gereği

$$\sum_{m=0}^{\lambda-1} m^n = \frac{B_{n+1}(\lambda) - B_{n+1}}{n+1}$$

olduğundan

$$\beta_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}s(n,r)\lambda^{n-r}\frac{B_{r+1}(\lambda)-B_{r+1}}{r+1} \tag{2.13}$$

bulunur. $B_n(\lambda)$ Bernoulli polinomunun (2.11) tanımı gereği istenilen sonuç elde edilir. □

z bir karmaşık değişken ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere $\beta_n(\lambda, z)$ ile gösterilen dejenere Bernoulli polinomu

$$\frac{t(1+\lambda t)^{\frac{z}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(\lambda, z)\frac{t^n}{n!} \tag{2.14}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. $\lambda \to 0$ için

$$\frac{t(1+\lambda t)^{\frac{z}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1} \to \frac{te^{zt}}{e^t-1}$$

olduğundan $\beta_n(0, z) = B_n(z)$ Bernoulli polinomudur. Ayrıca, $\beta_n(\lambda, 0) = \beta_n(\lambda)$ dejenere Bernoulli sayısıdır.

Önerme 2.25. *$\beta_n(\lambda, z)$ dejenere Bernoulli polinomu*

$$\beta_n(\lambda, x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k(\lambda, x)(y|\lambda)_{n-k}$$

eşitliğini sağlar.

Kanıt $\beta_n(\lambda, z)$ dejenere Bernoulli polinomunun (2.14) üreteç fonksiyonu tanımı ve genelleştirilmiş binom teoremi gereği

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(\lambda, x+y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t(1+\lambda t)^{\frac{x+y}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1} = \frac{t(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}(1+\lambda t)^{\frac{y}{\lambda}} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(\lambda, x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{y}{\lambda}}{n}\lambda^n t^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k(\lambda, x)(y|\lambda)_{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayılarının eşitliğinden istenilen sonuç elde edilir. □

Teorem 2.26. *$k \geq 1$ olmak üzere dejenere Bernoulli polinomu ve sayısı için*

$$\sum_{r=0}^{k-1}(r|\lambda)_n = \frac{\beta_{n+1}(\lambda, k) - \beta_n(\lambda)}{n+1}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt (2.14) üreteç fonksiyonu tanımı ve genelleştirilmiş binom teoremi gereği

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\beta_n(\lambda,z+1)-\beta_n(\lambda,z)\right]\frac{t^n}{n!} &= \frac{t(1+\lambda t)^{\frac{z+1}{\lambda}}-t(1+\lambda t)^{\frac{z}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}\\ &= t(1+\lambda t)^{\frac{z}{\lambda}}=t\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{z}{\lambda}}{n}\lambda^n t^n\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ terimlerinin katsayılarının eşitliği

$$\beta_{n+1}(\lambda,z+1)-\beta_{n+1}(\lambda,z)=\binom{\frac{z}{\lambda}}{n}(n+1)!\lambda^n$$

ifadesini verir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\beta_n(\lambda,z+2)-\beta_n(\lambda,z+1)\right]\frac{t^n}{n!} &= \frac{t(1+\lambda t)^{\frac{z+2}{\lambda}}-t(1+\lambda t)^{\frac{z+1}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}\\ &= t(1+\lambda t)^{\frac{z+1}{\lambda}}=t\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{z+1}{\lambda}}{n}\lambda^n t^n\end{aligned}$$

eşitliği

$$\beta_{n+1}(\lambda,z+2)-\beta_{n+1}(\lambda,z+1)=\binom{\frac{z+1}{\lambda}}{n}(n+1)!\lambda^n$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla, $k\geq 1$ tam sayısı için

$$\begin{aligned}\beta_{n+1}(\lambda,z+1)-\beta_{n+1}(\lambda,z) &= \binom{\frac{z}{\lambda}}{n}(n+1)!\lambda^n\\ \beta_{n+1}(\lambda,z+2)-\beta_{n+1}(\lambda,z+1) &= \binom{\frac{z+1}{\lambda}}{n}(n+1)!\lambda^n\\ &\vdots\\ \beta_{n+1}(\lambda,z+k)-\beta_{n+1}(\lambda,z+k-1) &= \binom{\frac{z+k-1}{\lambda}}{n}(n+1)!\lambda^n\end{aligned}$$

ifadelerinin taraf tarafa toplamı

$$\beta_{n+1}(\lambda,z+k)-\beta_{n+1}(\lambda,z)=(n+1)!\lambda^n\sum_{r=0}^{k-1}\binom{\frac{z+r}{\lambda}}{n}=(n+1)\sum_{r=0}^{k-1}(z+r|\lambda)_n \tag{2.15}$$

bağıntısını verir. $z=0$ alınırsa teorem ifadesi kanıtlanmış olur. □

3. MATERYAL VE METOT

3.1. $S_{k,n}(a,d)$ Genelleştirilmiş Kuvvetler Toplamı

Bu bölümdeki sonuçlar, Howard (1996) kaynağından derlenmiştir.

$k \geq 0$ ile $n > 0$ tam sayılar ve a ile $d \neq 0$ karmaşık sayılar olmak üzere

$$S_{k,n}(a,d) = a^k + (a+d)^k + (a+2d)^k + \cdots + [a + (n-1)\,d]^k = \sum_{m=0}^{n-1} (a+md)^k \quad (3.1)$$

tanımlansın.

$$S_{k,n}(1,1) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = \sum_{m=1}^{n} m^k = S_k(n)$$

olduğundan $S_{k,n}(a,d)$, kuvvetler toplamının bir genellemesidir.

(3.1) kullanılarak $S_{k,n}(a,d)$ genelleştirilmiş kuvvetler toplamının üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_{k,n}(a,d)\frac{t^n}{n!} = e^{at} + e^{(a+d)t} + \cdots + e^{[a+(n-1)d]t} = \frac{e^{(a+nd)t} - e^{at}}{e^{dt} - 1} \quad (3.2)$$

şeklinde bulunur. Üstel üreteç fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki indirgeme bağıntıları elde edilir.

Teorem 3.1. *$k \geq 0$ ile $n > 0$ için*

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} d^{k+1-j} S_{j,n}(a,d) &= (a+nd)^{k+1} - a^{k+1}, \\ \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} d^{k+1-j} S_{j,n}(a,d) &= (-1)^k[(a+nd-d)^{k+1} - (a-d)^{k+1}] \end{aligned}$$

olur.

Kanıt (3.2) bağıntısından

$$(e^{dt} - 1)\sum_{k=0}^{\infty} S_{k,n}(a,d)\frac{t^k}{k!} = e^{(a+nd)t} - e^{at}$$

veya denk olarak

$$\sum_{j=1}^{\infty} d^j \frac{t^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} S_{k,n}(a,d)\frac{t^k}{k!} = \sum_{j=1}^{\infty} [(a+nd)^j - a^j]\frac{t^j}{j!}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafında yer alan $\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse teoremdeki ilk bağıntı bulunur. İkinci bağıntı için t yerine $-t$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S_{k,n}(a,d)\frac{t^k}{k!} &= \mathrm{e}^{-at}+\mathrm{e}^{-(a+d)t}+\cdots+\mathrm{e}^{-[a+(n-1)d]t}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{(d-a)t}-\mathrm{e}^{(d-a-nd)t}}{\mathrm{e}^{dt}-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf $\mathrm{e}^{dt}-1$ ile çarpılır ve $\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa teoremdeki ikinci ifade elde edilir. □

Teorem 3.1 ile verilen indirgeme bağıntılarının bir benzeri için $\theta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ olsun. Bu durumda,

$$\theta^3=1 \quad \text{ve} \quad \theta^2+\theta+1=0$$

olur. $\{w_j\}$ dizisi

$$w_j=\begin{cases}1+(-1)^j\left(\theta^j+\theta^{6-j}\right), & j=0,1,2,3,4,5 \text{ ise,}\\ w_{6+j}, & j=0,\pm1,\pm2,\ldots \text{ ise,}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Örneğin, $w_{-1}=w_5=2$ olur. $j=0,1,2,3,4,5$ için w_j değerleri aşağıdaki tablo ile verilebilir.

j	0	1	2	3	4	5
w_j	3	2	0	-1	0	2

Teorem 3.2. *$m=0,1,2,3,4,5$ ve $n>0$, $k\geq 0$ için*

$$\begin{aligned}&6\sum_{j=0}^{k}\binom{6k+m+3}{6j+m}d^{6k-6j+3}S_{6j+m,n}(a,d)\\ &=\sum_{j=1}^{6k+m+1}\binom{6k+m+3}{6j+m}d^{6k+m+3-j}w_{m-j}[(a-d+nd)^j-(a-d)^j]\end{aligned}$$

olur.

Kanıt $A(t)$ fonksiyonu

$$A(t)=\frac{\mathrm{e}^{(a+nd)t}-\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{e}^{dt}-1}=\sum_{k=0}^{\infty}S_{3k,n}(a,d)\frac{t^{3k}}{(3k)!}$$

olsun ve $A_0(t)$, $A_1(t)$ ve $A_2(t)$ fonksiyonları

$$A_0(t) = \frac{1}{3}[A(t)+A(\theta t)+A(\theta^2 t)]=\sum_{k=0}^{\infty}S_{3k,n}(a,d)\frac{t^{3k}}{(3k)!},$$

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{1}{3}[A(t)+\theta^2 A(\theta t)+\theta A(\theta^2 t)] = \sum_{k=0}^{\infty} S_{3k+1,n}(a,d)\frac{t^{3k+1}}{(3k+1)!}, \\ A_2(t) &= \frac{1}{3}[A(t)+\theta A(\theta t)+\theta^2 A(\theta^2 t)] = \sum_{k=0}^{\infty} S_{3k+2,n}(a,d)\frac{t^{3k+2}}{(3k+2)!} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Dolayısıyla, $m = 0,1,2$ için

$$D_0 = D_1 = D_2 = \left(\mathrm{e}^{dt}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\theta dt}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\theta^2 dt}-1\right)$$

olmak üzere

$$A_m(t) = \frac{N_m}{3D_m}$$

olsun. θ karmaşık sayısının tanımından

$$D_0 = D_1 = D_2 = 6\sum_{k=0}^{\infty} d^{6k+3}\frac{t^{6k+3}}{(6k+3)!}$$

bulunur.

Diğer taraftan, $m = 0,1,2$ için

$$A_m(t) = \frac{1}{3}\left[A(t)+\theta^{3-m}A(\theta t)+\theta^m A(\theta^2 t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} S_{3k+m,n}(a,d)\frac{t^{3k+m}}{(3k+m)!}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} N_m &= \left(\mathrm{e}^{(a+nd)t}-\mathrm{e}^{at}\right)\left(\mathrm{e}^{-dt}-\mathrm{e}^{\theta dt}-\mathrm{e}^{\theta^2 dt}+1\right) \\ &\quad +\theta^{3-m}\left(\mathrm{e}^{(a+nd)\theta t}-\mathrm{e}^{a\theta t}\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta dt}-\mathrm{e}^{dt}-\mathrm{e}^{\theta^2 dt}+1\right) \\ &\quad +\theta^{m}\left(\mathrm{e}^{(a+nd)\theta^2 t}-\mathrm{e}^{a\theta^2 t}\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta^2 dt}-\mathrm{e}^{dt}-\mathrm{e}^{d\theta t}+1\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3)'deki terimler çarpılır, yeniden gruplandırılır ve genişletilebilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{(a+nd-d)t}+\theta^{3-m}\mathrm{e}^{(a+nd-d)\theta t}+\theta^m\mathrm{e}^{(a+nd-d)\theta^2 t} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(a+nd-d)^j\left(1+\theta^{3-m+j}+\theta^{m+2j}\right)\frac{t^j}{j!} \\ &= 3\sum_{j=0}^{\infty}(a+nd-d)^{3j+m}\frac{t^{3j+m}}{(3j+m)!} \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.3)'deki diğer terimler de yeniden gruplandırılır ve genişletilirse $m = 0,1,2$ için

$$\frac{1}{3}N_m = \sum_{j=0}^{\infty}\left[(a+nd+d)^{3j+m}+(a+nd)^{3j+m}+(a+nd-d)^{3j+m}\right.$$

$$-(a+d)^{3j+m} - a^{3j+m} - (a-d)^{3j+m}] \frac{t^{3j+m}}{(3j+m)!}$$
$$-3\sum_{j=0}^{\infty}\frac{d^{3j}t^{3j}}{(3j)!}\sum_{j=0}^{\infty}[(a+nd)^{3j+m} - a^{3j+m}]\frac{t^{3j+m}}{(3j+m)!}$$

elde edilir.

$$D_m\sum_{k=0}^{\infty}S_{3k+m,n}(a,d)\frac{t^{3k+m}}{(3k+m)!} = \frac{1}{3}N_m$$

olduğundan $\frac{t^{3k+m}}{(3k+m)!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa $m = 0, 1, 2$ için

$$\begin{aligned}
&3\sum_{j=0}^{k}[1+(-1)^{k-j-1}]\binom{3k+m}{3j+m}d^{3k-3j}S_{3j+m,n}(a,d) \\
&= (a+nd+d)^{3j+m} + (a+nd)^{3j+m} + (a+nd-d)^{3j+m} \\
&\quad -(a+d)^{3j+m} - a^{3j+m} - (a-d)^{3j+m} \\
&\quad 3\sum_{j=0}^{k}\binom{3k+m}{3j+m}[(a+nd)^{3j+m} - a^{3j+m}]d^{3k-3j}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur. θ karmaşık sayısının özellikleri ve binom teoreminden

$$\begin{aligned}
&3\sum_{j=0}^{k}\binom{3k+m}{3j+m}S_{3j+m,n}(a,d)d^{3k-3j} \\
&= (d+a+nd)^{3k+m} + \theta^{2m}(d+a\theta+nd\theta)^{3k+m} + \theta^m\left(d+a\theta^2+nd\theta^2\right)^{3k+m} \\
&= (d+a+nd)^{3k+m} + \theta^{2m}\left[-d\theta^2((a-d)+nd)\theta\right]^{3k+m} \\
&\quad +\theta^m\left[-d\theta+((a-d)+nd)\theta^2\right]^{3k+m} \\
&= (d+a+nd)^{3k+m} \\
&\quad +3\sum_{j=0}^{3k+m}\binom{3k+m}{j}(-1)^{k+m-j}d^{3k+m-j}\left(\theta^{m-j}+\theta^{2m+j}\right)(a-d+nd)^j \\
&= (d+a+nd)^{3k+m} \\
&\quad +3\sum_{j=0}^{3k+m}\binom{3k+m}{j}(-1)^k d^{3k+m-j}(-1+w_{m-j})(a-d+nd)^j
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) ifadesi (ve (3.5) ifadesi $n = 0$ için) (3.4) eşitliğinde yerine yazılır ve k indisinin çift ve tek olduğu durumlar ele alınarak binom teoremi ile $j = 6k + m + 2$ için $w_{m-j} = 0$ olduğu kullanılırsa teoremin kanıtı tamamlanır. □

3.2. $S_{k,n}(a,d)$ Genelleştirilmiş Kuvvetler Toplamı ve Bernoulli Polinomları

Bu bölümdeki sonuçlar, Howard (1996) ile Bazsó ve Mező (2015) kaynaklarından derlenmiştir.

Önerme 2.19 ile verilen

$$\frac{te^{zt}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(z)\frac{t^k}{k!}$$

üreteç fonksiyonu ve (3.2) ile verilen

$$\sum_{k=0}^{\infty}S_{k,n}(a,d)\frac{t^n}{n!}=e^{at}+e^{(a+d)t}+\cdots+e^{[a+(n-1)d]t}=\frac{e^{(a+nd)t}-e^{at}}{e^{dt}-1}$$

üreteç fonksiyonu karşılaştırılırsa

$$S_{k,n}(a,d)=\frac{d^k}{k+1}\left[B_{k+1}\left(\frac{a}{d}+n\right)-B_{k+1}\left(\frac{a}{d}\right)\right] \tag{3.6}$$

elde edilir. Sabitlenmiş a ve d için $S_{k,n}(a,d)$ genelleştirilmiş kuvvetler toplamı $(a-d+nd)$ teriminin bir polinomu olarak

$$\begin{aligned} S_{k,n}(a,d) &= S_{k,n-1}(a,d)+[a+(n-1)\,d]^k \\ &= v_{k,0}+v_{k,1}(a-d+nd)+\cdots+v_{k,k+1}(a-d+nd)^{k+1} \end{aligned}$$

şeklinde yazılsın. (2.11) ve (3.6) ifadelerinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.3. *$S_{k,n}(a,d)$ genelleştirilmiş kuvvetler toplamı $(a-d+nd)$ teriminin bir polinomu olarak yazılsın ve bu polinomdaki katsayılar $j=1,2,\ldots,k+1$ için $v_{k,j}$ olsun. Bu durumda, $1\le j\le k-1$ için*

$$v_{k,j}=\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j}d^{k-j}B_{k+1-j}$$

ve

$$v_{k,k}=\frac{1}{2},\quad v_{k,k+1}=\frac{1}{d(k+1)},\quad v_{k,0}=\frac{d^k}{k+1}\left[B_{k+1}-B_{k+1}\left(\frac{a}{d}\right)\right]$$

olur.

Kanıt $S_{k,n}(a,d)$ için verilen polinom ifadesi

$$S_{k,n}(a,d)=v_{k,0}+v_{k,k}(a-d+nd)^k+v_{k,k+1}(a-d+nd)^{k+1}+\sum_{j=1}^{k-1}v_{k,j}(a-d+nd)^j$$

olarak yazılsın. Diğer taraftan, (2.11) gereği

$$\begin{aligned}
&\frac{d^k}{k+1}B_{k+1}\left(\frac{a}{d}+n-1\right)-\frac{d^k}{k+1}B_{k+1}\left(\frac{a}{d}\right)+(a-d+nd)^k\\
&= -\frac{d^k}{k+1}B_{k+1}\left(\frac{a}{d}\right)+(a-d+nd)^k\\
&\quad +\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}B_{k+1-j}d^{k-j}(a-d+nd)^j\\
&= -\frac{d^k}{k+1}B_{k+1}\left(\frac{a}{d}\right)+(a-d+nd)^k\\
&\quad +\frac{1}{k+1}\left[d^kB_{k+1}+\frac{1}{d}(a-d+nd)^{k+1}+(k+1)(a-d+nd)^kB_1\right.\\
&\quad \left.+\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k+1}{j}B_{k+1-j}d^{k-j}(a-d+nd)^j\right]\\
&= \frac{d^k}{k+1}\left[B_{k+1}-B_{k+1}\left(\frac{a}{d}\right)\right]+\frac{1}{2}(a-d+nd)^k+\frac{1}{d(k+1)}(a-d+nd)^{k+1}\\
&\quad +\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k+1}{j}B_{k+1-j}d^{k-j}(a-d+nd)^j
\end{aligned}$$

bulunur. $(a-d+nd)^k$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$v_{k,0}=\frac{d^k}{k+1}\left[B_{k+1}-B_{k+1}\left(\frac{a}{d}\right)\right]$$

ve $v_{k,k}=\frac{1}{2}$, $v_{k,k+1}=\frac{1}{d(k+1)}$ ile $1\le j\le k-1$

$$v_{k,j}=\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{j}B_{k+1-j}d^{k-j}$$

elde edilir. □

Teorem 3.3'de $a=d=1$ yazılırsa Teorem 2.12 ile verilen

$$S_{k,n}(1,1)=S_{k,n}=n^k+\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}\binom{k+1}{j}B_{k+1-j}n^j$$

kuvvetler toplamı formülü elde edilir. Ayrıca, $k>1$ için $v_{k,1}=B_k$ olduğundan $m=0,1,2,3,4$ ve $6k+m>1$ için

$$\binom{6k+m+3}{3}B_{6k+m}=-\sum_{j=1}^{k-1}\binom{6k+m+3}{6j+m}B_{6j+m}+\frac{1}{6}(6k+m+3)w_{m-1}$$

elde edilir.

(3.6) ve (2.11) kullanılarak $S_{k,n}(a,d)$ polinomu n değişkeninin bir polinomu olarak yazılabilir. Birçok durumda $S_{k,n}(a,d)$ polinomunun katsayıları tam sayı değildir. Örnek olarak,

$$\begin{aligned} S_{1,n}(0,1) &= \frac{1}{2}n(n-1), \\ S_{2,n}(5,2) &= \frac{1}{3}n\left(4n^2+24n+47\right) \end{aligned}$$

polinomları verilebilir. Ancak, bazı özel durumlarda $S_{k,n}(a,d)$ polinomunun katsayıları tam sayı olur. Örneğin,

$$S_{3,n}(1,2) = n^2\left(2n^2-1\right) \quad \text{ve} \quad S_{3,n}(3,2) = n(n+2)\left(2n^2+4n+3\right)$$

polinomlarının katsayıları tam sayılardır. $S_{k,n}(a,d)$ polinomunun katsayılarının tam sayılar olduğu bazı durumlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

k	a	d
3	1	2
3	3	2
3	5	2
3	3	4
3	5	4

$S_{k,n}(a,d)$ polinomunun katsayıları tam sayı olduğu genel bir koşul Bazsó ve Mező (Bazsó ve Mező 2015) tarafından verilmiştir.

Bir q rasyonel sayının paydası ile $dq \in \mathbb{Z}$ özelliğinde olan en küçük pozitif d tam sayısı anlaşılır. Dolayısıyla, Λ_k sayısı B_k Bernoulli sayısının paydası ise von Staudt-Clausen teoremi gereği

$$\Lambda_k = \prod_{\substack{(p-1)|k \\ p \text{ asal}}} p$$

olur.

r sayısı, $2 \leq r \leq k$ özelliğinde olan bir çift tam sayı olsun ve

$$\begin{aligned} f(k,r) = \text{OKEK}\Bigg(&\frac{\Lambda_r}{\text{OBEB}\left(\Lambda_r, \binom{k+1}{r}\binom{r}{r}\right)}, \frac{\Lambda_r}{\text{OBEB}\left(\Lambda_r, \binom{k+1}{r+1}\binom{r+1}{r}\right)}, \\ &\ldots, \frac{\Lambda_r}{\text{OBEB}\left(\Lambda_r, \binom{k+1}{k}\binom{k}{r}\right)}\Bigg) \end{aligned}$$

tanımlansın. Ayrıca,

$$\text{rad}\,(k) = \prod_{\substack{p|k \\ p \text{ asal}}} p$$

olmak üzere

$$F\,(k) = \begin{cases} \text{OKEK}\,(\text{rad}\,(k+1)\,, f\,(k,2)\,, f\,(k,4)\,, \ldots, f\,(k,k))\,, & k \text{ çift ise;} \\ \text{OKEK}\,(\text{rad}\,(k+1)\,, f\,(k,2)\,, f\,(k,4)\,, \ldots, f\,(k,k-1))\,, & k \text{ tek ise;} \end{cases}$$

olsun. Katsayıların tam sayı olması koşulunun ifadesinden önce rad(k) ile ilgili aşağıdaki basit gözlem yapılabilir:

Önteorem 3.4. rad$(k+1)\,|d$ *ise* $(k+1)\,|d^k$ *olur.*

Kanıt Aksi varsayılsın, yani rad$(k+1)\,|d$ olmasına rağmen $(k+1) \nmid d^k$ olsun. Bu durumda, $k+1$ sayısının $p^{k+1}|\,(k+1)$ özelliğinde olan bir p asal çarpanı vardır. Bu ise $2^{k+1} \leq p^{k+1} \leq k+1$ ifadesini verir ki bu bir çelişkidir. □

Teorem 3.5. $S_{k,n}(a,d)$ *polinomunun katsayılarının tam sayı olması için gerekli ve yeterli koşul* $F\,(k)\,|d$ *olmasıdır.*

Kanıt (3.6), Önerme 2.20 (4) ve (2.11) gereği

$$\begin{aligned} S_{k,n}\,(a,d) &= \frac{d^k}{k+1}\left[B_{k+1}\left(\frac{a}{d}+n\right) - B_{k+1}\left(\frac{a}{d}\right)\right] &(3.7) \\ &= \frac{d^k}{k+1}\left[\sum_{m=0}^{k+1}\binom{k+1}{m}B_m\left(\frac{a}{d}\right)n^{k+1-m} - B_{k+1}\left(\frac{a}{d}\right)\right] \\ &= \frac{d^k}{k+1}\sum_{m=0}^{k}\binom{k+1}{m}B_m\left(\frac{a}{d}\right)n^{k+1-m} \\ &= \frac{d^k}{k+1}\sum_{m=0}^{k}\binom{k+1}{m}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}B_r\frac{a^{m-r}}{d^{m-r}}n^{k+1-m} &(3.8) \end{aligned}$$

elde edilir. $S_{k,n}\,(a,d)$ polinomunun katsayılarının ortak paydası Q olsun. (3.7) gereği polinomun katsayılarının tam sayı olması için gerekli ve yeterli koşul $Q|d$ olmasıdır. Bu yüzden, Q sayısı belirlenmelidir. (3.8) gereği d ve a sayıları Q sayısı içinde bulunmaz. Ayrıca, Q sayısını etkileyen sayılar $k+1$ sayısı ile Bernoulli sayılarının paydalarıdır, yani von Staudt-Clausen teoremi gereği 2 ve Λ_r sayılarıdır.

$2 \leq r \leq k$ ve r çift olsun. (3.8) gereği Λ_r sayısının ortak payda olan Q sayısına katkısı $f\,(n,r)$ olur. Diğer bir ifade ile $f\,(n,r)\,|d$ ise (3.8) ifadesinde B_r Bernoulli sayısını içeren her terimin tam sayı katsayısı vardır. Dolayısıyla, her çift r, $2 \leq r \leq k$ için $Q = \mathrm{OKEK}\left(\mathrm{rad}\left(k+1\right), f\left(n,r\right)\right) = F\left(k\right)$ olur. Bu ise kanıtı tamamlar. $\square$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, $S_k(n)$ kuvvetler toplamı ile $S_{k,n}(a,d)$ genelleştirilmiş kuvvetler toplamının bir genişlemesi olan $S_{k,n}(a,d|\lambda)$ toplamı tanımlanacaktır. Söz konusu toplamın sağladığı bazı temel özellikler ile bölünebilme ve katsayılarının tam sayı olması durumları incelenecektir.

4.1. $S_{k,n}(a,d|\lambda)$ Toplamı

$k \geq 0$ ile $n > 0$ tam sayılar ve λ bir karmaşık değişken olsun. $(x|\lambda)_n$, (2.3) ile tanımlanan genelleştirilmiş azalan faktöriyel fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} S_{k,n}(a,d|\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} (a+md|\lambda)_k \qquad (4.1) \\ &= (a|\lambda)_k + (a+d|\lambda)_k + (a+2d|\lambda)_k + \cdots + (a+(n-1)d|\lambda)_k \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $(x|0)_k = x^k$ olduğundan $S_{k,n}(a,d|0) = S_{k,n}(a,d)$ genelleştirilmiş kuvvetler toplamı olur.

$S_{k,n}(a,d|\lambda)$ toplamı için bir üstel üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Teorem 4.1. *$S_{k,n}(a,d|\lambda)$ için üstel üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_{k,n}(a,d|\lambda)\frac{t^k}{k!} = \frac{(1+\lambda t)^{\frac{a+nd}{\lambda}} - (1+\lambda t)^{\frac{a}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{d}{\lambda}} - 1}$$

şeklindedir.

Kanıt Genelleştirilmiş azalan faktöriyel fonksiyonunun tanımı gereği

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (x|\lambda)_k \frac{t^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} x(x-\lambda)(x-2\lambda)\cdots(x-(k-1)\lambda)\frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{x}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}-1\right)\left(\frac{x}{\lambda}-2\right)\cdots\left(\frac{x}{\lambda}-(k-1)\right)\frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{x}{\lambda}}{k}(\lambda t)^k = (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_{k,n}(a,d|\lambda)\frac{t^k}{k!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \{(a|\lambda)_k + (a+d|\lambda)_k + \cdots + (a+(n-1)\,d|\lambda)_k\} \frac{t^k}{k!} \\
&= (1+\lambda t)^{\frac{a}{\lambda}} + (1+\lambda t)^{\frac{a+d}{\lambda}} + \cdots + (1+\lambda t)^{\frac{a+(n-1)d}{\lambda}} \\
&= (1+\lambda t)^{\frac{a}{\lambda}} \left\{ 1 + (1+\lambda t)^{\frac{d}{\lambda}} + \left[(1+\lambda t)^{\frac{d}{\lambda}}\right]^2 + \cdots + \left[(1+\lambda t)^{\frac{d}{\lambda}}\right]^{n-1} \right\} \\
&= (1+\lambda t)^{\frac{a}{\lambda}} \frac{(1+\lambda t)^{\frac{nd}{\lambda}} - 1}{(1+\lambda t)^{\frac{d}{\lambda}} - 1} = \frac{(1+\lambda t)^{\frac{a+nd}{\lambda}} - (1+\lambda t)^{\frac{a}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{d}{\lambda}} - 1}
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Teorem 4.1 kullanılarak $S_{k,n}(a, d|\lambda)$ toplamı için aşağıdaki indirgeme bağıntısı kanıtlanabilir.

Teorem 4.2. *$k \geq 0$ ve $n > 0$ tam sayıları için*

$$
\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (d|\lambda)_{k+1-j} S_{j,n}(a, d|\lambda) = (a+nd|\lambda)_{k+1} - (a|\lambda)_{k+1}
$$

olur.

Kanıt $(x|\lambda)_0 = 1$ ve

$$
(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} (x|\lambda)_k \frac{t^k}{k!}
$$

olduğundan Teorem 4.1 gereği

$$
\left[(1+\lambda t)^{\frac{d}{\lambda}} - 1\right] \sum_{k=0}^{\infty} S_{k,n}(a, d|\lambda) \frac{t^k}{k!} = (1+\lambda t)^{\frac{a+nd}{\lambda}} - (1+\lambda t)^{\frac{a}{\lambda}}
$$

bulunur. Buradan,

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=0}^{\infty} (d|\lambda)_{k+1} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} S_{k,n}(a, d|\lambda) \frac{t^k}{k!}\right) \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(a+nd|\lambda)_{k+1} - (a|\lambda)_{k+1}\right] \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

veya denk olarak

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (d|\lambda)_{k+1-j} S_{j,n}(a, d|\lambda)\right) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(a+nd|\lambda)_{k+1} - (a|\lambda)_{k+1}\right] \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$ terimlerinin katsayılarının eşitliği istenilen sonucu verir. □

Aşağıdaki teorem, $S_{k,n}(a, d|\lambda)$ toplamının Stirling sayıları ve azalan faktöriyel fonksiyonu cinsinden bir gösterimini vermektedir.

Teorem 4.3. *$S_{k,n}(a, d|\lambda)$ toplamı için*

$$S_{k,n}(a, d|\lambda) = \sum_{i=0}^{k} d^i S(k, i; \lambda, d, a) \frac{(n)_{i+1}}{i+1}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $S(k, i; \lambda, \beta, r)$, Bölüm 2.1.2'de tanımlanan genelleştirilmiş Stirling sayısıdır.

Kanıt $S(k, i; \lambda, \beta, r)$ genelleştirilmiş Stirling sayısı için (2.4) ile verilen

$$(a|\lambda)_k = \sum_{i=0}^{k} S(k, i; \lambda, \beta, r)(a - r|\beta)_i$$

eşitliğinde a yerine $a + md$, β yerine d ve r yerine a yazılırsa

$$(a + md|\lambda)_k = \sum_{i=0}^{k} S(k, i; \lambda, d, a)(md|d)_i$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
(md|d)_i &= md(md - d)(md - 2d)\cdots(md - (i-1)d) \\
&= d^i m(m-1)(m-2)\cdots(m - (i-1)) = d^i (m)_i
\end{aligned}$$

olduğundan

$$(a + md|\lambda)_k = \sum_{i=0}^{k} d^i S(k, i; \lambda, d, a)(m)_i$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
S_{k,n}(a, d|\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} (a + md|\lambda)_k = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} d^i S(k, i; \lambda, d, a)(m)_i \\
&= \sum_{i=0}^{k} d^i S(k, i; \lambda, d, a) \sum_{m=0}^{n-1} (m)_i
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi,

$$\sum_{m=0}^{n-1} (m)_i = \frac{(n)_{i+1}}{i+1} + \delta_{i,0} \tag{4.2}$$

eşitliği ele alınsın (Graham vd. 1994, s. 50). $i = 0$ ise $k > 0$ olduğundan $S(k, 0; \lambda, d, a) = 0$ olur. $i = k = 0$ ise

$$S_{k,n}(a, d|\lambda) = \sum_{m=0}^{n-1} (a + md|\lambda)_0 = n$$

olur ki bu eşitlik aşikar olarak doğrudur. Sonuç olarak, (4.2) eşitliğinde $\delta_{i,0}$ terimi kaldırılabilir ve dolayısıyla istenilen elde edilir. □

$S_{k,n}(a, d|\lambda)$ toplamı ile dejenere Bernoulli polinomları arasında aşağıdaki ilişki söz konusudur.

Teorem 4.4. *$S_{k,n}(a, d|\lambda)$ toplamı dejenere Bernoulli polinomları cinsinden*

$$S_{k,n}(a, d|d\lambda) = \frac{d^k}{k+1}\left[\beta_{k+1}\left(\lambda, \frac{a}{d} + n\right) - \beta_{k+1}\left(\lambda, \frac{a}{d}\right)\right]$$

şeklinde yazılabilir.

Kanıt Dejenere Bernoulli polinomları için (2.15) ile verilen

$$\sum_{m=0}^{n-1} (z + m|\lambda)_k = \frac{\beta_{k+1}(\lambda, z+n) - \beta_{k+1}(\lambda, z)}{n+1}$$

eşitliğinde $z = \frac{a}{d}$ yazılırsa

$$\sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{a}{d} + m|\lambda\right)_k = \frac{\beta_{k+1}\left(\lambda, \frac{a}{d} + n\right) - \beta_{k+1}\left(\lambda, \frac{a}{d}\right)}{n+1}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{d} + m|\lambda\right)_k &= \left(\frac{a+md}{d}|\lambda\right)_k \\
&= \left(\frac{a+md}{d}\right)\left(\frac{a+md}{d} - \lambda\right)\cdots\left(\frac{a+md}{d} - (k-1)\lambda\right) \\
&= \frac{1}{d^k}(a+md)(a+md-d\lambda)\cdots(a+md-(k-1)d\lambda) \\
&= \frac{1}{d^k}(a+md|d\lambda)_k
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
S_{k,n}(a, d|d\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} (a+md|d\lambda)_k \\
&= \frac{d^k}{k+1}\left[\beta_{k+1}\left(\lambda, \frac{a}{d} + n\right) - \beta_{k+1}\left(\lambda, \frac{a}{d}\right)\right]
\end{aligned}$$

bulunur. □

Sonuç 4.5. *$S_{k,n}(a,d|\lambda)$ toplamı için*

$$S_{k,n}(a,d|d\lambda)=\frac{d^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\beta_r(\lambda)\left(\frac{a}{d}|\lambda\right)_{j-r}(n|\lambda)_{k+1-j}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt Dejenere Bernoulli polinomları için Önerme 2.25 ile verilen

$$\beta_k(\lambda,x+y)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\beta_j(\lambda,x)(y|\lambda)_{k-j}$$

eşitliği gereği

$$\begin{aligned}\beta_{k+1}\left(\lambda,\frac{a}{d}+n\right)-\beta_{k+1}\left(\lambda,\frac{a}{d}\right)\\ &=\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\beta_j\left(\lambda,\frac{a}{d}\right)(n|\lambda)_{k+1-j}-\beta_{k+1}\left(\lambda,\frac{a}{d}\right)\\ &=\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\beta_j\left(\lambda,\frac{a}{d}\right)(n|\lambda)_{k+1-j}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, yine

$$\beta_k(\lambda,x+y)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\beta_j(\lambda,x)(y|\lambda)_{k-j}$$

eşitliğinden

$$\beta_k(\lambda,y)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\beta_j(\lambda)(y|\lambda)_{k-j}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\beta_{k+1}\left(\lambda,\frac{a}{d}+n\right)-\beta_{k+1}\left(\lambda,\frac{a}{d}\right)\\ &=\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\beta_r(\lambda)\left(\frac{a}{d}|\lambda\right)_{j-r}(n|\lambda)_{k+1-j}\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 4.4 gereği istenilen elde edilir. □

4.2. $S_{k,n}(a,d|\lambda)$ Toplamının Bazı Aritmetik Özellikleri

Bu bölümde, a ve d tam sayılar olmak üzere $S_{k,n}(a,d|\lambda)$ toplamının sağladığı bazı aritmetik özellikler ifade edilecektir.

Teorem 4.6. *λ bir pozitif tam sayı, p bir tek asal sayı ve* OBEB$(n,p)=1$ *ise*

$$S_{p,p}(a,d|\lambda) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{4.3}$$
$$S_{p,p+1}(a,d|\lambda) \equiv (a|\lambda)_p \pmod{p}, \tag{4.4}$$
$$S_{p,n}(a,p|\lambda) \equiv n(a|\lambda)_p \pmod{p} \tag{4.5}$$

kongrüansları geçerlidir.

Kanıt Teorem 4.3 ile verilen

$$S_{k,n}(a,d|\lambda)=\sum_{i=0}^{k} d^i S(k,i;\lambda,d,a)\frac{(n)_{i+1}}{i+1}$$

eşitliğinde p bir tek asal sayı olmak üzere $k=p$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
S_{p,n}(a,d|\lambda) &= \sum_{i=0}^{p} d^i S(p,i;\lambda,d,a)\frac{(n)_{i+1}}{i+1}\\
&= nS(p,0;\lambda,d,a)+dS(p,1;\lambda,d,a)\frac{n(n-1)}{2}\\
&\quad +d^pS(p,p;\lambda,d,a)\frac{(n)_{p+1}}{p+1}\\
&\quad +d^{p-1}S(p,p-1;\lambda,d,a)\frac{(n)_p}{p}\\
&\quad +\sum_{i=2}^{p-2} d^i S(p,i;\lambda,d,a)\frac{(n)_{i+1}}{i+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. λ bir pozitif tam sayı ve p bir tek asal sayı olduğundan Teorem 2.10 gereği sağ taraftaki toplamda yer alan her bir toplanan $\pmod{p}$ sıfır olur. $S(p,p;\lambda,d,a)=1$ ve Önteorem 2.6 gereği $S(p,0;\lambda,d,a)=(a|\lambda)_p$ ve $S(p,p-1;\lambda,d,a)=pa+(d-\lambda)\frac{p(p-1)}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
S_{p,n}(a,d|\lambda) &\equiv n(a|\lambda)_p+dS(p,1;\lambda,d,a)\frac{n(n-1)}{2}+d^p\frac{n(n-1)\cdots(n-p)}{p+1}\\
&\quad +d^{p-1}an(n-1)\cdots(n-p+1)\\
&\quad +d^{p-1}(d-\lambda)(p-1)\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{2} \pmod{p}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur. Burada, Teorem 2.10'in kanıtından görülebileceği gibi λ, d ve a tam sayılar olduğundan $S(p,1;\lambda,d,a)$ genelleştirilmiş Stirling sayısı bir tam sayıdır.

Şimdi, (4.6) ifadesinde $n=p$ alınırsa $S_{p,n}(a,d|\lambda)\equiv 0 \pmod{p}$, yani (4.3) kongrüansı elde edilir. Daha sonra (4.6) ifadesinde $n=p+1$ alınırsa $S_{p,p+1}(a,d|\lambda)\equiv(a|\lambda)_p$

(mod p), yani (4.4) kongrüansı elde edilir. Son olarak, (4.6) ifadesinde $d = p$ alınırsa OBEB$(n,p) = 1$ olmak üzere $(p+1)\, S_{p,n}(a,p|\lambda) \equiv n\,(a|\lambda)_p \pmod p$, yani (4.5) kongüransı elde edilir. □

Teorem 4.7. *λ bir pozitif tam sayı ise $\lambda\,(k+1)\, S_{k,n}(a,d|d\lambda)$ bir tam sayıdır.*

Kanıt $S_{k,n}(a,d|d\lambda)$ toplamı için Sonuç 4.5 ile verilen

$$S_{k,n}(a,d|d\lambda) = \frac{d^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\beta_r(\lambda)\left(\frac{a}{d}|\lambda\right)_{j-r}(n|\lambda)_{k+1-j}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki $\beta_r(\lambda)$ dejenere Bernoulli sayısı yerine (2.13) ile verilen ve pozitif tam sayı olan λ için geçerli olan

$$\beta_r(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\, s(r,i)\,\lambda^{r-i}\frac{B_{i+1}(\lambda)-B_{i+1}}{i+1}$$

ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned} S_{k,n}(a,d|d\lambda) &= \frac{d^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(n|\lambda)_{k+1-j}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\left(\frac{a}{d}|\lambda\right)_{j-r} \\ &\quad\times\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\, s(r,i)\,\lambda^{r-i-1}\frac{B_{i+1}(\lambda)-B_{i+1}}{i+1} \end{aligned}$$

veya denk olarak

$$\begin{aligned} \lambda\,(k+1)\,S_{k,n}(a,d|d\lambda) &= d^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(n|\lambda)_{k+1-j}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\frac{1}{d^{j-r}}(a|d\lambda)_{j-r} \\ &\quad\times\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\, s(r,i)\,\lambda^{r-i}\frac{B_{i+1}(\lambda)-B_{i+1}}{i+1} \end{aligned}$$

elde edilir. λ bir pozitif tam sayı olduğundan $(a|d\lambda)_{j-r}$ ve $\frac{B_{i+1}(\lambda)-B_{i+1}}{i+1}$ (Rademacher 1973, s. 6) tam sayılardır. Bu ise sol tarafın bir tam sayı olduğunu ifade eder. □

Teorem 4.8. $\lambda = \frac{u}{v}$, OBEB$(u,v) = 1$ *ise* $uv^{k+1}\,(k+1)\,S_{k,n}(a,d|d\lambda)$ *toplamının bir tam sayı olması için gerekli ve yeterli koşul* $1 \le s \le k$ *olmak üzere* OKEK$(v^s,(s+1)!)\,|d$ *olmasıdır.*

Kanıt $S_{k,n}(a,d|d\lambda)$ toplamı için Sonuç 4.5 ile verilen

$$S_{k,n}(a,d|d\lambda)=\frac{d^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\beta_r(\lambda)\left(\frac{a}{d}|\lambda\right)_{j-r}(n|\lambda)_{k+1-j}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki $\beta_r(\lambda)$ dejenere Bernoulli sayısı yerine Teorem 2.23 ile verilen

$$\beta_r(\lambda)=\sum_{s=0}^{r}\frac{1}{s+1}\binom{\lambda-1}{s}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{s-t}\binom{s}{t}(t|\lambda)_r$$

ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned}S_{k,n}(a,d|d\lambda) &= \frac{d^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\left(\frac{a}{d}|\lambda\right)_{j-r}(n|\lambda)_{k+1-j}\\ &\times\sum_{s=0}^{r}\frac{1}{s+1}\binom{\lambda-1}{s}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{s-t}\binom{s}{t}(t|\lambda)_r\end{aligned}$$

elde edilir. OBEB$(u,v)=1$ olmak üzere $\lambda=\frac{u}{v}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}S_{k,n}\left(a,d|d\frac{u}{v}\right) &= \frac{d^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\frac{1}{(dv)^{j-r}}(av|du)_{j-r}\frac{1}{v^{k+1-j}}(nv|u)_{k+1-j}\\ &\times\sum_{s=0}^{r}\frac{1}{(s+1)!}\frac{1}{v^s}\frac{1}{u}(u|v)_{s+1}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{s-t}\binom{s}{t}\frac{1}{v^r}(tv|u)_r\end{aligned}$$

veya denk olarak

$$\begin{aligned}uv^{k+1}(k+1)S_{k,n}\left(a,d|d\frac{u}{v}\right) &= d^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\frac{1}{d^{j-r}}(av|du)_{j-r}(nv|u)_{k+1-j}\\ &\times\sum_{s=0}^{r}(u|v)_{s+1}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{s-t}\binom{s}{t}(tv|u)_r\frac{1}{(s+1)!}\frac{1}{v^s}\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, $uv^{k+1}(k+1)S_{k,n}(a,d|d\lambda)$ toplamının bir tam sayı olması için gerekli ve yeterli koşul $1\leq s\leq k$ olmak üzere OKEK$(v^s,(s+1)!)\,|d$ olmasıdır. □

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında,

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

kuvvetler toplamı ile bir aritmetik dizinin terimlerinin kuvvetleri toplamı olan

$$S_{k,n}(a,d) = a^k + (a+d)^k + (a+2d)^k + \cdots + (a+(n-1)d)^k$$

toplamının, $(x|\lambda)_n$ genelleştirilmiş azalan faktöriyel fonksiyonu ile tanımlanan

$$S_{k,n}(a,d|\lambda) = (a|\lambda)_k + (a+d|\lambda)_k + (a+2d|\lambda)_k + \cdots + (a+(n-1)d|\lambda)_k$$

toplamı ile genelleştirmeleri ele alınmıştır. $S_{k,n}(a,d|\lambda)$ toplamının

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_{k,n}(a,d|\lambda)\frac{t^k}{k!} = \frac{(1+\lambda t)^{\frac{a+nd}{\lambda}} - (1+\lambda t)^{\frac{a}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{d}{\lambda}} - 1}$$

üstel üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(d|\lambda)_{k+1-j}S_{j,n}(a,d|\lambda) = (a+nd|\lambda)_{k+1} - (a|\lambda)_{k+1}$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısı,

$$S_{k,n}(a,d|\lambda) = \sum_{i=0}^{k} d^i S(k,i;\lambda,d,a)\frac{(n)_{i+1}}{i+1}$$

ile verilen genelleştirilmiş Stirling sayıları cinsinden ifadesi,

$$S_{k,n}(a,d|d\lambda) = \frac{d^k}{k+1}\left[\beta_{k+1}\left(\lambda,\frac{a}{d}+n\right) - \beta_{k+1}\left(\lambda,\frac{a}{d}\right)\right]$$

ile verilen dejenere Bernoulli polinomları cinsinden gösterimi ve

$$S_{k,n}(a,d|d\lambda) = \frac{d^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\beta_r(\lambda)\left(\frac{a}{d}|\lambda\right)_{j-r}(n|\lambda)_{k+1-j}$$

ile verilen dejenere Bernoulli sayıları ve genelleştirilmiş azalan faktöriyel fonksiyonu cinsinden ifadesi verilmiştir. Ayrıca, a ile d tam sayı, λ bir pozitif tam sayı, p bir tek asal sayı ve OBEB$(n,p) = 1$ olmak üzere

$$S_{p,p}(a,d|\lambda) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$
\begin{aligned}
S_{p,p+1}(a,d|\lambda) &\equiv (a|\lambda)_p \pmod{p},\\
S_{p,n}(a,p|\lambda) &\equiv n\,(a|\lambda)_p \pmod{p}
\end{aligned}
$$

kongrüansları elde edilmiştir. Son olarak, a ile d tam sayı, λ bir pozitif tam sayı ise $\lambda\,(k+1)\,S_{k,n}(a,d|d\lambda)$ ifadesinin bir tam sayı olduğu ve $\lambda = \frac{u}{v}$, OBEB$(u,v) = 1$ ise $uv^{k+1}\,(k+1)\,S_{k,n}(a,d|d\lambda)$ toplamının bir tam sayı olması için gerekli ve yeterli koşulun $1 \leq s \leq k$ olmak üzere OKEK$(v^s,(s+1)!)\,|d$ olması sonuçları elde edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Apostol, T. M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York, 340 sayfa.

Arakawa, T., Ibuyikama, T., Kaneko, M. 2014. Bernoulli Numbers and Zeta Functions, Springer Verlag, New York, 274 sayfa.

Bazsó, A. 2015. *Polynomial values of (alternating) power sums, Acta Math. Hung.* 146: 202–219.

Bazsó, A. and Mező, I. 2015. *On the coefficients of power sums of arithmetic progressions, J. Number Theory* 153: 117–123.

Bazsó, A., Pintér, Á. and Srivastava, H.M. 2012. *A refinement of Faulhaber's theorem concerning sums of powers of natural numbers, Appl. Math. Letters* 25: 486–489.

Broder, A.Z. 1984. *The r-Stirling numbers, Discrete Math.* 49: 241–259.

de Bruyn, G.F.C. and de Villiers, J.M. 1994. *Formulas for* $1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$, *Fibonacci Quart.* 32: 271–276.

Carlitz, L. 1956. *A degenerate Staudt-Clausen theorem, Arch. Math. (Basel)* 7: 28–33.

Carlitz, L. 1979. *Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers, Utilitas Math.* 15: 51-88.

Carlitz, L. 1980. *Weighted Stirling numbers of the first and second kind I, II, Fibonacci Quart.* 18: 147–162, 242–257.

Chapman, R. 2008. *Evaluating* $\sum_{n=1}^{N}(a+nd)^p$ *again, Math. Gaz.* 92: 92–94.

Charalambides, C.A. 1984. *On weighted Stirling and other related numbers and some combinatorial applications, Fibonacci Quart.* 22: 296–309.

Chen, W.Y.C., Fu, A.M. and Zhang, I.F. 2009. *Faulhaber's theorem on power sums, Discrete Math.* 309: 2974–2981.

Cohen, H. 2007. Number Theory-Volume II: Analytic and Modern Tools. Springer, New York, 596 sayfa.

Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics, Riedel, Dordrech, Boston, 354 sayfa.

Conway, J.H. and Guy, R.K. 1996. The Book of Numbers, Springer-Verlag, New York, 310 sayfa.

Erdoğan, A. 2019. *A note on polynomial expressions for sums of power of integers multiplied by exponential terms, Turkish J. Math.* 43: 199–206.

Edwards, A.W.F. 1986. *A quick route to sums of powers, Amer. Math Monthly* 93: 451–455.

Graham, R.L., Knuth D.E. and Patashnik, O. 1989. Concrete Mathematics, Addison-Wesley,Reading, MA, 678 sayfa.

Hirschhorn, M.D. 2006. *Evaluating* $\sum_{n=1}^{N}(a+nd)^p$, *Math. Gaz.* 90: 114–116.

Howard, F.T. 1985. *Degenerate weighted Stirling numbers, Discrete Math.* 57: 45–58.

Howard, F.T. 1996. *Sums of powers of integers via generating functions, Fibonacci Quart.* 34: 244–256.

Hsu, L.C. and Shiue, P.J.-S. 1998. *A unified approach to generalized Stirling numbers, Adv. Appl. Math.* 20: 366–384.

Kalman, D. 1990. *Sums of powers by matrix methods, Fibonacci Quart.* 28: 60–71.

Kellner, B.C. and Sondow, J. 2017. *Power-sum denominators, Amer. Math. Monthly* 124: 695–709.

Kellner, B.C. and Sondow, J. 2018. *The denominators of power sums of arithmetic progressions, Integers* 18: Article A95, 1–17.

Khan, R.A. 1981. *A simple derivation of the a formula for* $\sum_{k=1}^{n}k^n$, *Fibonacci Quart.* 19: 177–180.

Knuth, D.E. 1993. *Johann Faulhaber and sums of powers, Math Comput.* 61: 277–294.

Liu, G. and Luo, H. 2005. *Some identities involving Bernoulli numbers, Fibonacci Quart.* 43: 208–212.

Magli, P. 2009. *Identities involving Bernoulli numbers related to sums of powers of integers, Fibonacci Quart.* 46/47: 140–145.

Merca, M. 2015. *An alternative to Faulhaber's formula, Amer. Math. Monthly* 122: 599–601.

Rademacher, H. 1973. Topics in Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 332 sayfa.

Riordan, J. 1937. *Moment recurrence relations for binomial Poisson and hypergeometric frequency distribution, Ann. Math. Statist.* 8: 103–111.

Turner, B. 1980. *Sums of powers of integers via the binomial theorem, Math. Mag.* 53: 92–96.

Wiener, J. 1992. *A calculus exercise for the sums of integer powers, Math. Mag.* 65: 249–251.

ÖZGEÇMİŞ

Merve MUTLUER

E-mail: mervemutluer34@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2018-devam ediyor	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2010-2014	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya