T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

HARMONİK ANALİZDE BAZI ÖNEMLİ YARIGRUPLARIN ÖZELLİKLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

Veysel TARTAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2021

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

HARMONİK ANALİZDE BAZI ÖNEMLİ YARIGRUPLARIN ÖZELLİKLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

Veysel TARTAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2021

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ANALİZDE BAZI ÖNEMLİ YARIGRUPLARIN ÖZELLİKLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

Veysel TARTAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 19/02/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN (Danışman)

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

HARMONİK ANALİZDE BAZI ÖNEMLİ YARIGRUPLARIN ÖZELLİKLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

Veysel TARTAN

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Sinem SEZER EVCAN

Şubat 2021; 50 sayfa

Bu tez çalışmasında, Harmonik analizde özellikle potansiyel tipli integral operatörlerin temsil edilmesinde kullanılan ve daha birçok uygulama alanına sahip olan Poisson, Gauss-Weierstrass ve Metaharmonik yarıgrupları ile bu yarıgrupların genelleşmiş versiyonlarına yer verilmiştir. Ayrıca, Riesz, Bessel ve Flett potansiyeleri gibi harmonik analizin en önemli teknik araçları sayılan bu potansiyellerin ve bunların genelleşmiş versiyonlarının yukarıda sözü edilen yarıgruplar vasıtasıyla temsilleri elde edilerek hem klasik hem de genelleşmiş potansiyellerin L_p ve $L_{p,\nu}$ uzaylarındaki sınırlılıkları incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Poisson yarıgrubu, Gauss-Weierstrass yarıgrubu, Metaharmonik yarıgrup, Bessel potansiyeli, Riesz potansiyeli, Flett potansiyeli.

JÜRİ: Doç.Dr. Sinem SEZER EVCAN
Doç.Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Dr.Öğr.Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

PROPERTIES OF SOME IMPORTANT SEMI GROUPS IN HARMONIC ANALYSIS AND THEIR APPLICATIONS

Veysel TARTAN

Master's Thesis, Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sinem SEZER EVCAN
February 2021; 50 pages

In this thesis, Poisson, Gauss-Weierstrass, Metaharmonic semigroups and generalized versions of these semigroups, which are used to represent potential type integral operators and many other applications in Harmonic analysis, are studied. In addition, the representations of Riesz, Bessel, Flett potentials and their generalized versions, which are important technical tools in Harmonic analysis, are optained by means of these semigroups. Finally, L_p and $L_{p,\nu}$ boundedness properties of these clasical and generalized type potentials are given.

KEYWORDS: Poisson semigroup, Gauss-Weierstrass semigroup, Metaharmonic semigroup, Bessel potential, Riesz potential, Flett potential.

COMMITTEE: Assoc.Prof.Dr. Sinem SEZER EVCAN
Assoc.Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Asst.Prof.Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Harmonik analiz; matematiğin, fiziğin ve teknik bilimlerin ortak dilidir ve Harmonik analizin fikir ve yöntemleri, çağdaş matematiğin birçok dallarında kullanım alanı bulduğu gibi, fizik ve mühendisliğin çeşitli alanlarında da kullanılmaktadır. Singular integral operatörler, özellikle de potansiyeller, bu alanın en önemli teknik araçlarıdır. Bazı uygun diferansiyel operatörlerin " negatif kesirsel" kuvvetleri olarak yorumlanan potansiyel tipli integral operatörler genel olarak önemli fonksiyonel uzayların incelenmesinde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde, çeşitli integral dönüşümlerin terslerinin bulunmasında ve Harmonik analizin daha başka alanlarında kullanılmaktadır. Harmonik analizde kullanılan en ünlü potansiyeller arasında yer alan Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleri $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere, sırasıyla, (-Δ) , (I$-\Delta$) ve $(I + \sqrt{-\Delta})$ diferansiyel operatörlerinin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanırlar ve ayrıca Harmonik analizde sıkça kullanılan Possion, Gauss-Weistrass ve Metaharmonik yarıgrubu olarak bilinen meşhur yarıgruplar ile ilişkilendirilirler. Benzer olarak Riesz, Bessel ve Flett potansiyellerinin "Genelleşmiş Kayma" operatörü (T^y) vasıtasıyla oluşturulan ve genelleşmiş Riesz, genelleşmiş Bessel ve genelleşmiş Flett potansiyelleri olarak adlandırılan genelleşmiş potansiyeller Δ_v Laplace -Bessel diferansiyel operatörü olmak üzere, sırasıyla, (-Δ_v) , (I$-\Delta_v$) ve $(I + \sqrt{-\Delta_v})$ diferansiyel operatörlerinin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanırlar ve bu genelleşmiş potansiyeller de uygun genelleştirilmiş yarıgruplar (genelleştirilmiş Possion, genelleştirilmiş Gauss-Weistrass ve genelleştirilmiş Metaharmonik) ile ilişkilendirilirler.

Bu tez çalışmasında ilk olarak, klasik Öklid kayması τ^y vasıtasıyla tanımlanan ve klasik yarıgruplar diye adlandırılan Poisson, Gauss-Weierstrass ve Metaharmonik yarıgrupları ile genelleşmiş kayma T^y operatörü vasıtasıyla tanımlanan ve genelleşmiş yarıgruplar olarak adlandırılan genelleşmiş Poisson, genelleşmiş Gauss-Weierstrass ve genelleşmiş Metaharmonik yarıgruplar ve özelliklerine yer verilmiştir. Daha sonra da, yarıgrupları üstün kılan önemli özellikleri olan "potansiyellerin yarıgruplar ile temsilleri" incelenerek, sırasıyla klasik Riesz, Bessel ve Flett polansiyellerinin klasik yarıgruplar; genelleşmiş Riesz, genelleşmiş Bessel ve genelleşmiş Flett potansiyellerinin de genelleşmiş yarıgruplar ile temsilleri verilmiştir. Derleme niteliğinde organize edilen bu tez çalışması, özellikle

klasik Harmonik analizde ve Laplace-Bessel Harmonik analizinde akademik çalışma yapmak isteyenler için temel bir kaynak oluşturacak niteliktedir.

Bu tez çalışması süresince benden bilgisini ve desteğini hiç esirgemeyen değerli hocam sayın Doç. Dr. Sinem Sezer EVCAN' a ve manevi destekleri için aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum "Harmonik Analizde Bazı Önemli Yarıgrupların Özellikleri ve Çeşitli Uygulamaları" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

19/02/2021
Veysel TARTAN

1. GİRİŞ

Klasik Harmonik analizin geliştirmiş olduğu önemli kavram ve teknikler, matematiğin teorik ve uygulamalı alanlarının çeşitli konularında ayrıca da mühendislik ve fen bilimlerinin birçok alanında etkili bir şekilde kullanılmaktadır. Fourier serileri, Fourier dönüşümleri, yarı gruplar, maksimal operatörler, fonksiyonel uzaylar, singüler integraller ve potansiyel tipli integral operatörler Harmonik analizin en önemli teknik araçları arasında yer alırlar. Potansiyeller, esas olarak Laplace diferansiyel operatörü olarak bilinen

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

operatörü olmak üzere, bazı bilinen önemli diferansiyel operatörlerin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanırlar. Potansiyel tipli integral operatörler arasında en yaygın ve önemli olanları klasik potansiyeller olarak adlandırılan Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleridir. Bu tür potansiyeller çeşitli fonsiyonel uzayların karakterizasyonunda ve özelliklerinin incelenmesinde, bazı önemli dönüşümlerin terslerinin belirlenmesinde ve daha bir çok alanlarda etkili bir şekilde kullanılmaktadır. Bu konuda ilk çalışma B.F.Jones (1968) tarafından yapılmış ve daha sonraları C.H.Sampson, R.Bagby, S.Chanillo, V.R. Gopala-Rao, V.A.Nogin, B.Rubin ve daha başka matematikçiler tarafından bu alanda çok yönlü incelemeler ve uygulamalar yapılmıştır. Öklid kaymasının doğurduğu girişim tipli integral operatörler olarak da ifade edilebilen klasik potansiyellerin önemli bir genelleşmiş versiyonları da, 1950 yıllarında ortaya çıkan ve Laplace diferansiyel operatörü yerine Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün kullanılmasıyla oluşan Fourier-Bessel harmonik analizinde ortaya çıkan önemli teknik araçlar olmuşlardır. Esas itibari ile Fourier-Bessel harmonik analizi, Öklid kaymasının yerini genelleşmiş kayma, Fourier dönüşümünün yerini de Fourier-Bessel dönüşümü alınarak oluşturulmuş analizdir. Hem klasik potansiyeller hem de genelleşmiş potansiyellerin çeşitli özellikleri ve bu potansiyellerin terslerinin belirlenmesine , Gadjiev ve Aliev (1988), Aliev ve Eryiğit (2002), Aliev ve Rubin (2005), Aliev vd (2008), Aliev (2009), Sezer ve Aliev (2010), Aliev, I. A. and Bayrakçı (1998), Aliev I., Bayrakçı Doğan S. (2002) ve daha birçok makalede ayrıntılı yer verilmiştir.

Diğer yandan Harmonik analizin önemli teknik araçları arasında yer alan yarıgruplardan Poisson, Gauss-Weierstrass ve Metaharmonik yarıgrupları farklı bir öneme sahiptir.

Çünkü, yukarıda sözü edilen potansiyellerin farklı temsilleri bu yarıgruplar vasıtasıyla verilebilmektedir. Bu nedenle bu tez çalışmasının esas amacı, klasik ve genelleşmiş Riesz, Bessel ve Flett potansiyellerinin temsilinde kullanılan klasik ve genelleşmiş yarıgrupları ve özelliklerini ayrıntılı bir şekilde incelenerek, ilgili temsillerin elde edilmesi olarak belirlenmiştir.

Bu tez çalışması Giriş ve Kaynaklar bölümü dahil 6 bölümden oluşmaktadır:

"Kaynak Taraması" adlı ikinci bölümde; Fourier Harmonik analizin ve Fourier-Bessel Harmonik analizin, tez boyunca sıkça kullanılan bazı önemli kavram ve teoremlerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümü oluşturan "Materyal ve Metot" kısmında klasik kayma operatörü ile ilişkilendirilen Fourier Harmonik analizin en önemli yarıgrupları arasında yer alan Poisson, Gauss-Weierstrass ve Metaharmonik yarıgrupları ve bunların genelleşmiş kayma operatörü ile ilişkilendirilen genelleşmiş versiyonları hakkında ayrıntılı bilgilere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümü oluşturan "Bulgular" kısmı üç alt başlık altında sunulmuştur: birinci alt başlık altında, Laplace Diferansiyel Operatörü Δ vasıtasıyla tanımlanan ve klasik potansiyeller olarak adlandırılan Riesz, Bessel ve Flett potansiyellerinin tanımlarına yer verilerek, bu potansiyellerin ilgili klasik yarıgruplar ile ilişkilendirilmeleri yapılmıştır. İkinci alt başlık altında; Laplace-Bessel diferansiyel Operatörü Δ_ν vasıtasıyla tanımlanan ve genelleşmiş potansiyeller olarak adlandırılan genelleşmiş Riesz, Bessel ve Flett potansiyellerinin tanımlarına yer verilerek, bu genelleşmiş potansiyellerin ilgili genelleşmiş yarıgruplar ile ilişkilendirilmeleri yapılmıştır. Son alt başlık da ise, klasik ve genelleşmiş potansiyellerin L_p ve $L_{p,\nu}$ uzaylarındaki sınırlılık özelliklerine yer verilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Klasik Fourier Harmonik Analizin Bazı Önemli Kavram ve Teoremleri

$\mathbb{R}^n$, n boyutlu Öklid uzayı olup, $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n), \forall i = 1, 2, ..., n$ için $x_i \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlıdır. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki norm $|x| = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ eşitliği ile verilir.

$L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f\ ,\ \mathbb{R}^n \text{ de ölçülebilir ve } \|f\|_p = (\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$ dir.

$p = \infty$ durumunda ise L_∞ uzayı

$$L_\infty \equiv L_\infty\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{ f : f,\ \mathbb{R}^n\text{'de ölçülebilir ve } \|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) < \infty \right\}$$

eşitliği ile tanımlanır.

$C(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ 'de sürekli ve sınırlı olan fonksiyonlar uzayı temsil edilir. $C(\mathbb{R}^n)$ de norm $f \in C(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $\|f\| = \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$ eşitliği ile tanımlanır.

$C(\mathbb{R}^n)$ nin bir alt uzayı olan $C_0(\mathbb{R}^n)$,

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in C(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \right\}. \quad (2.2)$$

$C^\infty \equiv C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ile de $\mathbb{R}^n$'de her mertebeden kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı gösterilir.

$S \equiv S(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilen Schwartz test fonksiyonları uzayı:

$$S = \left\{ f : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \text{ için } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x) \right| < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... \, x_n^{\alpha_n}$ ve $\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x) = \frac{\partial^{\beta_1 + ... + \beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} ... \partial x_n^{\beta_n}} f(x_1, .., x_n)$ dir.

Örneğin; $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $e^{-|x|^2} = e^{-(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Genel olarak, $P(x)$ herhangi n değişkenli polinom ve $k \geq 2$ çift tamsayı olmak üzere $f(x) = P(x) e^{-|x|^k}$ fonksiyonu $S(\mathbb{R}^n)$ uzayına aittir.

$$S^+ \equiv S\left(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1\right) = \left\{ f \in S\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) : f \;\; x_n \text{ değişkenine göre çift fonksiyon} \right\}$$

S^+ uzayının $L_{p,v}\left(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1\right)$ uzayında yoğunluğunu şu prosedürle gösterebiliriz:

$f \in L_{p,v}\left(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^1\right)$ olsun. Bu durumda, f 'i tüm $L_{p,v}\left(\mathbb{R}_+^{n+1}\right)$ 'e $d\mu(x) = |x_n|^{2v}\, dx$ alarak çift devam ettirebiliriz. Yeni fonksiyona $\tilde{\tilde{f}}$ diyelim. Böylece S uzayı $L_{p,v}\left(\mathbb{R}_+^{n+1}\right)$'de yoğun olduğundan, $\tilde{\tilde{f}}$ 'ya S 'nin $\left(\text{aslında } S^{+\,\text{'}}\text{nın}\right)$ elemanları ile yaklaşabiliriz. Dolayısıyla da, f 'e S^+ uzayının elemanları ile yaklaşabiliriz.

2.1.1. Klasik Öklid kayma operatörü ve özellikleri

Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$\tau^y f(x) = f(x+y) \tag{2.3}$$

eşitliği ile tanımlanan τ^y operatörüne klasik Öklid kayma operatörü denir. Aslında, klasik kaymayı doğuran operatör $\frac{d}{dt}$ türev operatörüdür.
$f(x)$, türevlenen bir fonksiyon ise $\varphi = \varphi(x,y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\varphi &= \frac{\partial}{\partial y}\varphi \\ \varphi|_{x=0} &= f(y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

sınır-değer probleminin çözümü $\varphi = f(x+y)$ yani; $\tau^y f(x)$ öklid kaymasıdır ve $\tau^y f(x)$, türev ile sıkı ilişkilidir:

$$f'(x) = \lim_{y\to 0} \frac{\tau^y f(x) - f(x)}{y}. \tag{2.5}$$

Klasik kaymanın türev operatörü ile ilişkilendirilmesi, x'in bir komşuluğunda analitik olan $f(x)$ fonksiyonunun

$$\tau^y f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k \tag{2.6}$$

Taylor formülünde ortaya çıkar. Klasik kaymanın bilinen diğer önemli özellikleri aşağıdaki gibidir:

2.1.2. Klasik kaymanın özellikleri

(Kipriyanov(1997) ; Levitan(1951))

1) $\tau^y\left(\tau^z f(x)\right) = \tau^{y+z} f(x)$

2) $\tau^y\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\tau^y f(x)}$

3) $(\tau^y f(x))^p = \tau^y f^p\,(x)$

4) $\tau^y\left(e^{i\lambda z}\right) = e^{i\lambda z} e^{i\lambda y}$

5) $f \in L_p$ ise $\|\tau^y f\|_p = \|f\|_p$

Yani; $\tau^y : L_p \to L_p$ ye sınırlı operatördür ve normu 1'e eşittir.

6) $f \in L_p$ ise

$$\lim_{|y|\to 0} \|\tau^y f - f\|_p = 0 \tag{2.7}$$

2.1.3. Klasik Fourier ve Ters Fourier dönüşümü ve özellikleri

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$(Ff)(x) \equiv f^\wedge(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ix\cdot y} dy \tag{2.8}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada, $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$ olmak üzere $x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ dir. Bir $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü de

$$(F^{-1}f)_{(x)} \equiv f^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{ix\cdot y} dy \tag{2.9}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bazı kaynaklarda (Stein (1970)) f fonksiyonun Fourier ve ters Fourier dönüşümü sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} (Ff)(x) &\equiv f^\wedge(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i x\cdot y} dy\,, \qquad (2.10)\\ (F^{-1}f)_{(x)} &\equiv f^\vee(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{2\pi i x\cdot y} dy\,. \end{aligned}$$

Fourier dönüşümünün iyi bilinen bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir (Stein ve Weiss (1971); Sadosky (1979)):

a) $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $f^\wedge(x)$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}^n$ 'de düzgün süreklidir.

b) $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $f^\wedge(x)$ fonksiyonu sınırlıdır ve

$$\|f^\wedge\|_\infty \le \|f\|_1\,.$$

c) $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\lim\limits_{|x|\to\infty} f^\wedge(x) = 0$ 'dır.

d) $f \ge 0$ ise

$$\|f^\wedge\|_\infty = \|f\|_1 = f^\wedge(0)$$

eşitliği sağlanır.

e) $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ ise $f^\wedge \in L_2(\mathbb{R}^n)$'dir ve

$$\|f^\wedge\|_2 = \|f\|_2$$

eşitliği (Plancherel-Parseval eşitliği) sağlanır.

f) $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(x)g(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g^\wedge(x)dx$$

eşitliği sağlanır.

Harmonik analizde, Fourier dönüşümünün önemli özelliklerinden birisi de türev operatörü ile arasındaki ilişkiyi veren bağıntıdır:

$$F(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-ix\cdot y}dy \tag{2.11}$$

eşitliğinde x_1'e göre formal olarak kısmi türev alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial x_1}F(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)(-iy_1)e^{-ix\cdot y}dy \ ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}F(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)(y_1^2)e^{-ix\cdot y}dy$$

ve böylece

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{2.12}$$

Laplace diferansiyel operatörü için

$$(-\Delta)F(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\,|y|^2\,e^{-ix\cdot y}dy \tag{2.13}$$

eşitliği elde edilir. Genel halde, k herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$(-\Delta)^k F(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^{2k}\,f(y)e^{-ix\cdot y}dy \tag{2.14}$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde, I-birim operatör olmak üzere

$$(I-\Delta)F(f)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)f(y)e^{-ix\cdot y}dy$$

eşitliği ve genel halde, k herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$(I-\Delta)^kF(f)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^kf(y)e^{-ix\cdot y}dy \tag{2.15}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, (2.14) ve (2.15) bağıntılarının $f\in S(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları için de sağlandığı gösterilebilir.

Diferansiyel operatörü ile Fourier dönüşümü arasındaki ilginç bağıntıları ifade eden daha genel formülleri ifade edelim. Bunun için

$\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, $x\in\mathbb{R}^n$, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...\,x_n^{\alpha_n}$ ve

$D^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2}...\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ gösterimleri kullanılarak,

$$P(D)=P(x_1,x_2,...,x_n)$$

herhangi bir n değişkenli polinom olmak üzere, $P(D)$ diferansiyel operatörü

$$P(D)=P(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},...,\frac{\partial}{\partial x_n}) \tag{2.16}$$

biçiminde tanımlanırsa, Fourier dönüşümü ile $P(D)$ diferansiyel operatörü arasında, $f\in S(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$(P(D)f)^\wedge(x)=P(ix)\hat{f}(x) \tag{2.17}$$

$$P(D)\hat{f}(x)=(P(-y)f(y))^\wedge(x) \tag{2.18}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür (Stein ve Weiss(1971)).

2.1.4. Klasik girişim ve özellikleri

$f,g\in L_1(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, f ve g fonksiyonlarının girişimi (convolution)

$$(f*g)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(y)\tau^{-y}g(x)dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)dy \tag{2.19}$$

biçiminde tanımlanır. Burada τ^y (2.3) ile tanımlanan klasik Öklid kaymasıdır.

Klasik girişimin aşağıda verilen özellikleri iyi bilinmektedir. (Stein-Weiss (1971), Folland (1984))

$f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için;

a) $f * g = g * f$ (değişme özelliği),

b) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (birleşme özelliği),

c) $\tau^{-y}(f * g) = (\tau^{-y} f) * g = f * (\tau^{-y} g)$,

d) $F(f * g)(x) = F(f)(x).F(g)(x)$ ya da kısaca $(f * g)^\wedge = f^\wedge \cdot g^\wedge$,

e) $f \in L_p(\mathbb{R}^n),\ g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ için

$$\|f * g\|_r = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \text{ (Young Eşitsizliği)} \tag{2.20}$$

olur. Burada özellikle d) eşitliği, Fourier dönüşümü ile girişim arasındaki bağıntıyı veren Harmonik analizin en önemli formüllerinden birisidir. Çünkü; Fourier dönüşümü, zor bir işlem olan “$*$” işlemini daha basit bir işlem olan “fonksiyonların noktasal çarpımı” işlemine dönüştümektedir. Bu eşitlik, Fourier dönüşümünün tanımı kullanılarak ve integralde değişken değiştirilerek kolayca elde edilir.

2.1.5. Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$-$\mathbb{R}^n$ deki her noktanın her δ komşuluğunda integrallenebilen fonksiyonlar uzayından olmak üzere

$$(\mathcal{M}f)(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int\limits_{|y| \leq r} |f(x-y)| \, dy \tag{2.21}$$

fonksiyonuna Hardy-Littlewood maksimal operatörü (fonksiyonu) denir. Burada Ω_n , $S = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq 1\}$ birim yuvarının ölçümüdür. (2.21) de $x - y = z$ dönüşümü yapılırsa

$$(\mathcal{M}f)(x) = \sup_{Q_x} \frac{1}{|Q_x|} \int\limits_{Q_x} |f(z)| \, dz$$

olur. Burada, supremum x-merkezli Q_x yuvarları üzerinden alınmıştır. Ayrıca $|Q_x|$ ile x-merkezli yuvarın hacmi kastedilmiştir. Aşağıdaki teorem $(\mathcal{M}f)$ fonksiyonunun önemli bir özelliğini ifade eder:

Teorem 2.1. (*Hardy-Littlewood, Stein (1970)*) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ *ise öyle bir* $C = C(n, p)$ *sabiti vardır ki*

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq C \|f\|_p \tag{2.22}$$

eşitsizliği sağlanır. Daha açıkçası, $(\mathcal{M}f)$ *operatörü güçlü* (p,p) *tipli bir operatördür.* $p=1$ *durumunda ise* $(\mathcal{M}f)$ *operatörü zayıf* $(1,1)$ *tiplidir. Yani, her* $\lambda>0$ *için*

$$\mu\left\{x\in\mathbb{R}^n:(\mathcal{M}f)(x)>\lambda\right\}\leq\frac{C\left\|f\right\|_1}{\lambda}$$

sağlanır.

Burada, μ , $A\subseteq\mathbb{R}^n$ bir ölçülebilir alt küme olmak üzere, A kümesinin Lebesgue ölçümünü göstermektedir. Ayrıca, her $\lambda>0$ ve $1\leq p<\infty$ için

$$\mu\left\{x\in\mathbb{R}^n:(\mathcal{M}f)(x)>\lambda\right\}\leq\left(\frac{A\left\|f\right\|_p}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.23}$$

eşitsizliği de sağlanır. Yani; $(\mathcal{M}f)$ operatörü her $p\in[1,\infty)$ için zayıf (p,p) tiplidir. Bu kesimi tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan genel teoremlerden bahsederek tamamlayacağız.

Teorem 2.2. $\big($*Riesz-Thorin İnterpolasyon Teoremi;* $($*Folland 1984 s. 193*$)\big)$

$1\leq p_i\leq q_i\leq\infty$, $i=0,1$ *ve* $T:L_{p_i}\to L_{q_i}$ *dönüşümü* (p_i,q_i) *tipli, yani*

$$\left\|Tf\right\|_{q_i}\leq M_i\left\|f\right\|_{p_i},i=0,1$$

olsun. Bu durumda, $\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1}$ *ve* $\frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_o}+\frac{t}{q_1}$, $(0<t<1)$ *olmak üzere* T *dönüşümü* (p_t,q_t) *tipli, Yani;*

$$\left\|Tf\right\|_{q_t}\leq M_t\left\|f\right\|_{p_t}$$

şeklindedir ve M_t *operatör normu,*

$$M_t\leq M_0^{1-t}M_1^t \tag{2.24}$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 2.3. $($*Lebesgue Baskın Yakınsama Teoremi;* $($*Folland 1984 s.55*$))$ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, L_1 *uzayında,*

(i) $f_n\to f$ *, (hemen hemen her yerde)*

(ii) *Bir* g *pozitif fonksiyonu ve her* $n\in\mathbb{N}$ *için,* $|f_n|\leq g$

özelliklerini sağlayan bir dizi olsun. O zaman $f\in L_1$ *'dir ve*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f_n\left(x\right)dx\,. \tag{2.25}$$

2.2. Klasik Fourier-Bessel Harmonik Analizinin Bazı Önemli Kavram ve Teoremleri

$\mathbb{R}_+^n = \{x : x \in \mathbb{R}^n$ ve $x_n > 0\}$ olmak üzere $\mathbb{R}_+^n$ 'da ölçülebilir fonksiyonların agırlıklı Lebesgue uzayı $0 < v < \infty$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$L_{p,v} \equiv L_{p,v}(\mathbb{R}_+^n) = \left\{ f : \|f\|_{p,v} = (\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p \, x_n^{2v} dx)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.4. (*Hölder Eşitsizliği;* (*Sadosky 1979 s.13 , Rubin 1996 s.1*)) (X, M, μ) *σ-sonlu ölçüm uzayı ve* $\|f\|_{p,\mu} = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$ *olsun. Bu durumda,* $f \in L_{p,\mu}$, $g \in L_{q,\mu}$, $1 \leq p \leq \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int\limits_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \leq \|f\|_{p,\mu} \cdot \|g\|_{q,\mu} \ . \tag{2.26}$$

Özel halde; $d\mu(x) = dx$*;* $f \in L_p$, $g \in L_q$, $1 \leq p \leq \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *için*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

eşitsizliği ve benzer olarak; $d\mu(x) = x_n^{2v} dx$*,* $f \in L_{p,v}$ *ve* $g \in L_{q,v}$ *için de,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)g(x)| \, x_n^{2v} dx \leq \|f\|_{p,v} \cdot \|g\|_{q,v}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.5. (*İntegraller için Minskowski Eşitsizliği ;* (*Sadosky (1979) , Folland (1984)*))

(X, M, μ) *ve* (Y, N, γ) *σ-sonlu ölçüm uzayları ve* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu da* $\mu \times \gamma$*-ölçülebilir olsun. Eğer, hemen hemen her y için* $f(\cdot, y) \in L_p(X, M, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, *ve* $\int\limits_Y \|f(\cdot, y)\|_{p,\mu} \, d\gamma(y) < \infty$ *ise* $\int\limits_Y \|f(x, y)\|_{p,\mu} \, d\gamma(y)$ *integrali de hemen hemen her* x *için sonludur ve*

$$\left\| \int\limits_Y f(x, y) \, d\gamma(y) \right\|_{p,\mu} \leq \int\limits_Y \|f(\cdot, y)\|_{p,\mu} \, d\gamma(y) \tag{2.27}$$

eşitliği sağlanır. Özel halde; $d\gamma(y) = y_n^{2v} dy$*,* $d\mu(x) = x_n^{2v} dx$ *ve* $f(x, y)$*,* $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}$ *'de ölçülebilir bir foksiyon ise*

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} f(x, y) \, y_n^{2v} dy \right\|_{p,v} \leq \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \|f(x, y)\|_{p,v} \, y_n^{2v} dy$$

eşitsizliği sağlanır.

2.2.1. Bessel Kayma operatörü ve özellikleri

Bilindiği gibi Klasik kayma operatörünü doğuran operatör "$\frac{d}{dt}$" türev operatörüdür. (2.4) ile verilen sınır-değer problemi, $v > 0$ verilmiş bir sabit olmak üzere

$$B_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2v}{t}\frac{d}{dt}\,, \quad (0 < t < \infty)$$

ile gösterilen ve Bessel diferansiyel operatörü denilen operatör için yazılırsa; $0 < x, y < \infty$ ve $\Phi = \Phi(x, y)$ olmak üzere,

$$B_x\Phi = B_y\Phi\,,$$
$$\Phi|_{x=0} = f(y),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial x}\Phi\,|_{x=0} = 0$$

olur. Bu sınır-değer probleminin çözümü

$$\Phi(x, y) = \frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})}{\Gamma(v)\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2})\sin^{2v-1}\theta d\theta$$

dir(Delsarte (1938), Levitan (1951)).

$$S^y f(x) \equiv \frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})}{\Gamma(v)\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2})\sin^{2v-1}\theta d\theta\,. \tag{2.28}$$

ile gösterilirse, bu S^y operatörüne Bessel kayması denir. Bessel kaymasının bilinen bazı önemli özellikleri şunlardır (Levitan(1951)):

1) $S^0 f(x) = f(x)$ dir. (2.28) de $y = 0$ yazılırsa

$$\begin{aligned} S^0 f(x) &= \frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})}{\Gamma(v)\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f(x)\sin^{2v-1}\theta d\theta\,, \\ &= f(x)\frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})}{\Gamma(v)\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\sin^{2v-1}\theta d\theta\,. \end{aligned}$$

Burada;

$$\int_0^{\pi}\sin^{2v-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(v)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(v+\frac{1}{2})}$$

eşitliği kullanılırsa

$$S^0 f(x) = f(x)$$

elde edilir.

2) $S^y f(x) = S^{-y} f(x)$ dir: (2.28) deki integralde $\theta = \pi - \varphi$, $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $\sin(\theta) = \sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$ ve $\cos(\theta) = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ olduğundan,

$$\begin{aligned} S^y f(x) &= \frac{\Gamma(v + \frac{1}{2})}{\Gamma(v)\Gamma(\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi f(\sqrt{x^2 - 2xy\cos\varphi + y^2}) \sin^{2v-1}\varphi d\varphi \\ &= S^{-y} f(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Öklid kaymasında, $\tau^y f(x) = f(x + y)$ ve $\tau^{-y} f(x) = f(x - y)$ olduğundan, $\tau^y f(x) = \tau^{-y} f(x)$ eşitliğinin sağlanmadığını hatırlayalım.

3) $S^y f(x) = S^x f(y)$ dir. Öklid kaymasında da benzer eşitlik vardır:

$$\tau^y f(x) = f(x + y) = f(y + x) = \tau^x f(y)$$

4) $S^y 1 = 1$ olduğu görülür.

5) $S^y (af(x) + bg(x)) = aS^y f(x) + bS^y g(x)$ dir (Lineerlik özelliği).

6) f ve g fonksiyonları $[0, \infty)$ da ölçülebilir ve

$$\int\limits_0^\infty |f(t)| \, t^{2v} dt < \infty \quad \text{ve} \quad \int\limits_0^\infty |g(t)| \, t^{2v} dt < \infty$$

ise

$$\int\limits_0^\infty S^y f(x) g(y) y^{2v} dy = \int\limits_0^\infty f(y) S^y g(x) y^{2v} dy$$

eşitliği sağlanır. Özel halde $g(x) = 1$ ise

$$\int\limits_0^\infty S^y f(x) y^{2v} dy = \int\limits_0^\infty f(y) y^{2v} dy \tag{2.29}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlik, Öklid kayması için sağlanan

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x \mp y) dy = \int\limits_{-\infty}^\infty f(t) dt \ , \qquad (x \in (-\infty, \infty))$$

eşitliğinin benzer bir durumudur.

7) $|S^y f(x)| \leq S^y |f(x)| \leq \sup\limits_{x \geq 0} |f(x)|$ dir.

Genelleşmiş kayma operatörünü tanımlamaya geçmeden önce Normalleştirilmiş Bessel Fonksiyonu $j_\lambda(x)$ hakkında bilgi verelim:

$J_\lambda(x), x^2y'' + xy' + (x^2 + \lambda^2)y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olan ve birinci tip Bessel fonksiyonu olarak bilinen bir fonksiyon ve $\lambda > -\frac{1}{2}$ olmak üzere

$$J_\lambda(x) = 2^\lambda \Gamma(\lambda+1)\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} \tag{2.30}$$

eşitliği ile tanımlanan $j_\lambda(x)$ fonksiyonuna Normalleştirilmiş Bessel Fonksiyonu denir. Özel olarak; $x = 0$ ve her $v > 0$ için

$$j_{v-\frac{1}{2}}(0) = 1 \text{ ve } j'_{v-\frac{1}{2}}(0) = 0$$

olduğu iyi bilinmektedir.

Ayrıca, B_t Bessel diferansiyel operatörü olmak üzere

$$-B_t j_{v-\frac{1}{2}}(st) = s^2 j_{v-\frac{1}{2}}(st)$$

eşitliğinin her $t > 0$, $v > 0$ ve $s > 0$ için sağlandığı bilinmektedir (Levitan 1951). Görüldüğü gibi Klasik Fourier Harmonik analizinde, klasik Fourier dönüşümünde, integral operatörünün çekirdeği olan e^{-ixt} fonksiyonunun oynadığı rolü (e^{-ixt} fonksiyonu için $\frac{d}{dt}e^{-ixt}\mid_{x=0} = (-ix)\,e^{-ixt}\mid_{x=0} = 0$ ve $e^{-ixt}\mid_{x=0} = 1$ dir) Fourier-Bessel Harmonik analizinde $j_\lambda(xt)$ fonksiyonu üstlenmektedir.

2.2.2. Genelleşmiş Kayma operatörü ve özellikleri

Bu kısımda ilk önce klasik Harmonik Analizin çok boyutlu hali olan ve Bessel kayma operatörü S^y ile ilişkilendirilen Fourier-Bessel Harmonik Analizin nasıl oluşturulduğundan bahsedelim:

Diferansiyel operatörü dilinde, tüm değişkenlere göre B_t-Bessel diferansiyel operatörü veya k değişkene göre Bessel ve $(n-k)$ değişkene göre de klasik Laplace diferansiyel operatörü uygulanarak, Fourier-Bessel Harmonik Analizi oluşturulabilir. Kayma operatörü dilinde, n değişkenin hepsine Bessel kayması uygulanarak veya k değişkenine göre Bessel kayması ve $(n-k)$ değişkenine göre de klasik Öklid kayması uygulayarak "hibrit girişim operatörü" elde edilebilir. Benzer şekilde n boyutlu genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümünü de, n değişkenin tamamına F_B ile gösterilen ve Fourier-Bessel dönüşümü denilen,

$$\left(F_B f\right)(x) = \int_0^\infty f(t) j_{v-\frac{1}{2}}(xt) t^{2v} dt\,, \qquad (0 \leq x < \infty)$$

formülü uygulayarak tanımlayabiliriz. Ya da k değişkene göre F_B-Fourier-Bessel dönüşümü, $(n-k)$ değişkene göre de klasik F-Fourier dönüşümü uygulayarak "hibrit Fourier-Bessel dönüşümü" (Genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümü) tanımlanabilir.

T^y ile gösterilen genelleşmiş kayma operatörünün , $1 \leq p < \infty$ ve $v > 0$ olmak üzere $f \in L_{p,v}$ fonksiyonuna etkisi

$$T^y f(x) = \frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})}{\Gamma(v)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(x'-y'; \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\theta + y_n^2}) \sin^{2v-1}\theta d\theta$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $x = (x', x_n)$, $y = (y', y_n)$, $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, $y' = (y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ olmak üzere x'-değişkenine göre klasik Öklid kayma, x_n değişkenine göre de S^y-Bessel kaymasının uygulaması ile elde edilmiştir. Aslında T^y-genelleşmiş kayma operatörü , τ^y-klasik Öklid kayması ile S^y-Bessel kaymasının bir kompozisyonudur. Diğer yandan, S^y-Bessel kayma operatörü de, T^y-genelleşmiş kayma operatörünün bir değişkenli durumdaki karşılığıdır.

Şimdi , T^y-genelleşmiş kayma operatörünün iyi bilinen özelliklerinden bahsedelim:

1) $T^y f(x) = T^{-y} f(x)$

2) $T^0 = I$

3) $T^y\left(af(x) + bg(x)\right) = aT^y f(x) + bT^y g(x)$

4) $T^y T^z f(x) = T^z T^y f(x)$

5) $T^y f(x) = T^x f(y)$

6) $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow T^y f_n(x) \rightrightarrows T^y f(x)$

7) $T^y j_{v-\frac{1}{2}}(\lambda t) = j_{v-\frac{1}{2}}(\lambda t) \cdot j_{v-\frac{1}{2}}(\lambda y)$

8) $|y| \longrightarrow 0$, $1 \leq p < \infty$ için

$$\|T^y f - f\|_{p,v} \longrightarrow 0 \qquad (2.31)$$

9) T^y-genelleşmiş kayma operatörü $L_{p,v}$ 'den $L_{p,v}$ 'ye sınırlı (sürekli) bir operatördür. Yani; $f \in L_{p,v}$, $(1 \leq p \leq \infty)$, $y \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\|T^y f\|_{p,v} \leq \|f\|_{p,v} \ . \tag{2.32}$$

T^y nin sınırlı operatör olduğu aşağıdaki şekilde görülür:

T^y operatörü, $y' = (y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ değişkenlerine göre klasik Öklid kayması ile $x_n \in \mathbb{R}_+^1$ değişkenine göre Bessel kaymasının kompozisyonu olduğundan ve Öklid kayması için yukarıdaki eşitsizlik sağlandığından (2.32) özelliğinden, söz konusu eşitsizliğin S^y-Bessel kayması için sağlandığını göstermek yeterlidir. Bunun için her $t \geq 0$ için

$$\left(\int_0^\infty \left| S^t \varphi(r) \right|^p r^{2v} dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^\infty \left| \varphi(r) \right|^p r^{2v} dr \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \leq p \leq \infty$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermeliyiz. $p = \infty$ için eşitsizlik açık olduğundan, $1 \leq p < \infty$ varsayabiliriz. İlk olarak

$$\left| S^t \varphi(r) \right|^p \leq S^t(\left| \varphi(r) \right|^p) \ , \ 1 \leq p < \infty$$

olduğunu gösterelim: $p = 1$ için sonuncu eşitsizlik aşikar olduğundan, $1 < p < \infty$ varsayabiliriz. q sayısını $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ olacak şekilde seçersek, (2.26) ile verilen Hölder eşitsizliğinden:

$$\begin{aligned}
\left| S^t \varphi(r) \right|^p &\leq \left(c_v \int_0^\pi \left| \varphi(\sqrt{r^2 - 2rk\cos\theta + k^2}) \right| \sin^{2v-1}\theta d\theta \right)^p \\
&= \left(\int_0^\pi \left| \varphi(\sqrt{r^2 - 2rk\cos\theta + k^2}) \right| (c_v \sin^{2v-1}\theta)^{\frac{1}{p}} (c_v \sin^{2v-1}\theta)^{\frac{1}{q}} d\theta \right)^p \\
&\leq \left(\int_0^\pi \left| \varphi(\sqrt{r^2 - 2rk\cos\theta + k^2}) \right|^p c_v \sin^{2v-1}\theta d\theta \right) \left(\int_0^\pi c_v \sin^{2v-1}\theta d\theta \right)^{\frac{p}{q}} \\
&= \ ... \left(\int_0^\pi c_v \sin^{2v-1}\theta d\theta = c_v \frac{1}{c_v} = 1 \right) ... \\
&= \ S^t(\left| \varphi(r) \right|^p)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak S^t-Bessel kaymasının (2.29) ile verilen 6. özelliği kullanılırsa istenilen

$$\int_{0}^{\infty} \left|S^t\varphi(r)\right|^p r^{2v}dr \leq \int_{0}^{\infty} S^t(|\varphi(r)|^p)r^{2v}dr = \int_{0}^{\infty} |\varphi(r)|^p r^{2v}dr$$

eşitsizliği elde edilir.

2.2.3. Fourier-Bessel ve Ters Fourier-Bessel dönüşümü

T^y-genelleşmiş kayma operatörünün tanımlanmasına benzer olarak $f \in L_{1,v}$ fonksiyonunun genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümü; $(n-1)$ değişkene göre klasik Fourier dönüşümü F, n. değişkene göre de Fourier-Bessel dönüşümü F_B uygulanarak

$$(F_v f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y)e^{-ix'\cdot y'} j_{v-\frac{1}{2}}(x_n y_n) y_n^{2v} dy\ , \quad \left(x \in \mathbb{R}_+^n\right) \tag{2.33}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada; $x' \cdot y' = x_1y_1 + ... + x_{n-1}y_{n-1}$ dir.

F_v-genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümüne uygun F_v^{-1} genelleşmiş ters Fourier-Bessel dönüşümü de

$$(F_v^{-1}f)(x) = c_v(n)(F_v f)(-x', x_n)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $c_v(n)$;

$$c_v(n) = \left[(2\pi)^{n-1}\, 2^{2v-1}\Gamma^2\left(\frac{2v+1}{2}\right)\right]^{-1}$$

dir. Fourier dönüşümü F nin sağladığı özelliklerin hemen-hemen tümünün benzerleri F_v-genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümü için de geçerlidir:

$f \in S^+$ son değişkene göre çift olan Scwartz test fonksiyonları uzayı olmak üzere

1) $y = (y_1, ..., y_{n-1}, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(F_v f(y)) = F_v\left[(-ix_k)\, f(x)\right](y)$$

dir. Daha genel olarak; $P(z_1, z_2, ..., z_n)$ n değişkenli bir polinom ve $B_{y_n} = \frac{d^2}{dy_n^2} + \frac{2v}{y_n} \cdot \frac{d}{dy_n}$ Bessel diferansiyel operatörü için

$$P\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, B_{y_n}\right)(F_v f)(y) = F_v\left[P(-ix_1, ..., -ix_{n-1}, -x_n^2)f(x)\right](y) \tag{2.34}$$

eşitliği sağlanır.

2) $F_v\left[\frac{\partial}{\partial y_k}f(y)\right](x)=(ix_k)\left(F_vf\right)(x)$ dir ve genel halde de 1) deki (2.34) eşitliğine benzer olarak

$$F_v\left[P\left(\frac{\partial}{\partial y_1},...,\frac{\partial}{\partial y_{n-1}},B_{y_n}\right)f(y)\right](x)=P(ix_1,ix_2,...,ix_{n-1},-x_n^2)F_vf(x) \quad (2.35)$$

eşitliği sağlanır (Kipriyanov(1967), Aliev ve Bayrakçı(1998)).

3) Özel olarak

$$\Delta_v=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\frac{2v}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \quad (2.36)$$

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü için

$$F_v\left[\left(-\Delta_v\right)f(x)\right](y)=|y|^2\left(F_vf\right)(y) \quad (2.37)$$

ve her $k\in\mathbb{N}$ için $F_v\left[\left(-\Delta_v\right)^kf(x)\right](y)=|y|^{2k}\left(F_vf\right)(y)$ eşitlikleri sağlanır.

4) Yine özel olarak, I-birim operatör olmak üzere,

$$F_v\left[\left(I-\Delta_v\right)f(x)\right](y)=(1+|y|^2)\left(F_vf\right)(y)$$

ve her $k\in\mathbb{N}$ için

$$F_v\left[\left(I-\Delta_v\right)^kf(x)\right](y)=(1+|y|^2)^k\left(F_vf\right)(y)$$

eşitlikleri sağlanır.

2.2.4. Genelleşmiş Girişim ve özellikleri

Şimdi de klasik kayma operatörü τ^y vasıtasıyla tanımlanan (klasik) girişim "$*$" operatörüne benzer olarak T^y-genelleşmiş kayma operatörü vasıtasıyla oluşturulan ve "$\circledast$" ile gösterilen genelleşmiş girişim operatörünü tanımlayarak önemli özelliklerinden bahsedelim:

$f,g\in S^+$ fonksiyonlarının genelleşmiş girişimi $f\circledast g$, T^y genelleşmiş kayma vasıtasıyla

$$\left(f\circledast g\right)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}f(y)T^yg(x)y_n^{2v}dy\ , \qquad \left(x\in\mathbb{R}_+^n\right) \quad (2.38)$$

eşitliği ile tanımlanır. Klasik girişimin sahip olduğu özelliklerin benzerleri genelleşmiş girişim için de geçerlidir:

1) $f \circledast g = g \circledast f$ dir. (Değişme özelliği)

2) $F_v(f \circledast g)(x) = (F_v f)(x)(F_v g)(x)$, (Genelleşmiş girişim, F_v-genelleşmiş Fourier-Bessel dönüşümü vasıtasıyla noktasal çarpıma dönüşür.) (Aliev, I.A. and Sağlık, (2016))

3) $f \in L_{p,v}$, $g \in L_{q,v}$, $1 \leq p,q,r \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ olsun. Bu durumda $f \circledast g \in L_{r,v}$ dür ve bu norm

$$\|f \circledast g\|_{r,v} \leq \|f\|_{p,v} \cdot \|g\|_{q,v} \tag{2.39}$$

eşitsizliğini sağlar. Genelleşmiş Young Eşitsizliği olarak bilinen bu eşitsizliğin sağlandığını gösterelim:

q sabit tutulup, $r = q, p = 1$ için $\|f \circledast g\|_{q(=r),v}$ normu hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} \|f \circledast g\|_{q,v} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |(f \circledast g)(x)|^q \, x_n^{2v} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \left| \int_{\mathbb{R}^n_+} f(y) T^y g(x) y_n^{2v} dy \right|^q x_n^{2v} dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte integraller için Minkowski eşitsizliği (2.27) kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} \|f \circledast g\|_{q,v} &\leq \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(y)|^q \, |T^y g(x)|^q \, x_n^{2v} dx \right)^{\frac{1}{q}} y_n^{2v} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n_+} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |T^y g(x)|^q \, x_n^{2v} dx \right)^{\frac{1}{q}} y_n^{2v} dy \end{aligned}$$

ve son ifade de (2.32) ile verilen T^y-genelleşmiş kaymanın

$$\|T^y f\|_{p,v} \leq \|f\|_{p,v}$$

özelliği kullanılırsa

$$\|f \circledast g\|_{q,v} \leq \|f\|_{1,v} \, \|g\|_{q,v}$$

elde edilir. Yani; genelleşmiş girişim $(1,q)$ tiplidir. Şimdi de $r = \infty$ ve $p = \frac{q}{q-1}$ için

$\|f \circledast g\|_{\infty,v}$ normu hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \|f \circledast g\|_{\infty,v} &= \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n} |(f \circledast g)(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n} \left| \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y)(T^y g)(x) y_n^{2v} dy \right| \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)(T^y g)(x)|\, y_n^{2v} dy \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifade için önce Hölder Eşitsizliği ve daha sonra da yine (2.32) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|f \circledast g\|_{\infty,v} &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(y)|^p\, y_n^{2v} dy \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |(T^y g)(x)|^q\, y_n^{2v} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{p,v} \cdot \|g\|_{q,v} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani; genelleşmiş girişim $\left(\frac{q}{q-1}, \infty\right)$ −tiplidir. Böylece, Riesz-Thorin interpolasyon teoreminden Teorem (2.2)'si

$$\|f \circledast g\|_{r,v} \leq \|f\|_{p,v} \cdot \|g\|_{q,v}$$

eşitsizliği elde edilir.

2.2.5. Genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve özellikleri

Klasik Fourier Harmonik analizinde Hardy-Littlewood maksimal operatörünün oynadığı önemli rolü; Fourier-Bessel harmonik analizinde genelleşmiş kaymanın doğurduğu ve adına genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatörü denilen $\mathcal{M}_v f$ operatörü oynamaktadır. Bu kesimde $\mathcal{M}_v$ hakkında bilgi verilecektir.

$f \in L_{p,v}$, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatörü $\mathcal{M}_v f$:

$$(\mathcal{M}_v f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+2v} w(n,v)} \int_{B_r^+} |T^y f(x)|\, y_n^{2v} dy \tag{2.40}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada;

$$B_r^+ = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n : \ |y| \leq r \right\} \text{ ve } w(n,v) = \int_{B_r^+} y_n^{2v} dy$$

dir. Teorem 2.1. 'in benzeri $\mathcal{M}_v$-genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatörü içinde ifade edilebilir:

Teorem 2.6. *$f \in L_{p,v}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $1 < p \leq \infty$ için $(\mathcal{M}_v f) \in L_{p,v}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ dir ve*

$$\|\mathcal{M}_v f\|_{p,v} \leq c_p \|f\|_{p,v} \ , \ (c_p > 0) \tag{2.41}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.7. *$\Psi \in L_{1,v}$ bir radial fonksiyon ve $\Phi(r) = \Psi(x)|_{|x|=r} \ (0 < r < \infty)$, $[0,\infty)$ aralığında negatif olmayan ve artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $\varphi \in L_{p,v}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ için*

$$\sup_{\varepsilon>0} |(\varphi \circledast \Psi_\varepsilon)(x)| \leq \|\Psi\|_{1,v} (\mathcal{M}_v \varphi)(x) \tag{2.42}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada,

$$\Psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n-2v} \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ , \ (\varepsilon > 0)$$

dur. Yukarıdaki teoremlerin ispatı ve $\mathcal{M}_v f$ operatörü ile ilgili ayrıntılı bilgi için (Aliev ve Bayrakçı (1998)) ve (Guliev (2003)) kaynaklarına bakılabilir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, klasik kayma τ^y ile ilişkilendirilen klasik Fourier Harmonik analizinin bazı önemli yarıgrupları (klasik yarıgruplar) ile bu yarıgrupların genelleşmiş kayma τ^y ile ilişkilendirilen, genelleşmiş Fourier-Bessel Harmonik analizindeki genelleşmiş versiyonları (genelleşmiş yarıgruplar) hakkında bilgilere yer verilecektir.

3.1. Klasik Harmonik Analizin Bazı Önemli Yarıgrupları ve Özellikleri

Bu kesimde sırasıyla Poisson, Gauss Weierstass ve Metaharmonik yarıgrupları tanımlanarak önemli özelliklerinden bahsedilecektir.

3.1.1. Poisson çekirdeği, yarıgrubu ve özellikleri

$y \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in (0, \infty)$ olmak üzere $p(y;t)$ Poisson çekirdeği;

$$p(y;t) \equiv \left(e^{-t|\cdot|}\right)^{\vee}(y) = \frac{c_n \cdot t}{\left(|y|^2 + t^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}\ ,\ c_n = \pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \tag{3.1}$$

eşitliği ile tanımlanır.

$\varphi(x)$ bir fonksiyon olmak üzere, $p(y;t)$-Poisson çekirdeği vasıtasıyla tanımlanan ve Poisson yarıgrubu $P_t\varphi$ olarak ifade edilen integral operatörler ailesi:

$$(P_t\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(y;t)\varphi(x-y)dy\ , \quad (t>0) \tag{3.2}$$

biçiminde tanımlanır. $P_t\varphi$-Poisson yarıgrubunun ve $p(y;t)$-Poisson çekirdeğinin aşağıdaki temel özellikleri iyi bilinmektedir:

1) Her $t > 0$ için $p(\cdot;t) \in L_1$ dir ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} p(y;t)dy = 1\ ,\ \ (p(\cdot;t))^{\wedge}(\xi) = e^{-t|\xi|}$$

eşitlikleri sağlanır.

2) $\|P_t\varphi\|_p \le \|\varphi\|_p$; $(\varphi \in L_p$ ve $1 \le p \le \infty)$

3) $\sup\limits_x |(P_t\varphi)(x)| \le kt^{-\frac{n}{p}} \|\varphi\|_p$; $(\varphi \in L_p$ ve $1 \le p \le \infty)$. Burada k sayısı t'den bağımsızdır.

4) Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\sup_{t>0} |(P_t\varphi)(x)| \leq (\mathcal{M}\varphi)(x) \quad .$$

Burada $(\mathcal{M}\varphi)(x)$ (2.21) de tanımlanan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur.

5) $P_s[(P_t\varphi)(\cdot)](x) = (P_{s+t}\,\varphi)(x)$, $(s > 0$, $t > 0)$ (Yarıgrup özelliği)

6) Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\lim_{t\to 0}(P_t\varphi)(x) = \varphi(x) \, .$$

7) $\varphi \in L_p$ ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\lim_{t\to 0} \|P_t\varphi - \varphi\|_p = 0$$

eşitliği sağlanır (Rubin (1996)).

3.1.2. Gauss-Weierstrass çekirdeği , yarıgrubu ve özellikleri

Poisson çekirdeğinin tanımına benzer olarak $y \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ olmak üzere, Gauss-Weierstrass çekirdeği $w(y;t)$:

$$w(y;t) \equiv \left(e^{-t|\cdot|^2}\right)^{\vee}(y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \tag{3.3}$$

eşitliği ile tanımlanır.

$\varphi(x)$ bir fonksiyon olmak üzere, $w(y;t)$ Gauss-Weierstrass çekirdeği vasıtasıyla tanımlanan ve Gauss-Weierstrass Yarıgrubu $W_t\varphi$ olarak gösterilen integral operatörler ailesi:

$$(W_t\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} w(y;t)\varphi(x-y)dy \, , \, (t > 0) \tag{3.4}$$

biçiminde tanımlanır. $W_t\varphi$ Gauss-Weierstrass yarıgrubunun ve $w(y;t)$ Gauss-Weierstrass çekirdeğinin aşağıdaki temel özellikleri iyi bilinmektedir:

1) Her $t > 0$ için $w(\cdot;t) \in L_1$ dir ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(y;t)dy = 1 \;\; , \;\; (w(\cdot;t))^{\wedge}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$$

eşitlikleri sağlanır.

2) $\|W_t\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_p \quad ; \quad (\varphi \in L_p \;$ ve $1 \leq p \leq \infty)$

3)

$$\sup_{x} |(W_t\varphi)(x)| \leq k \cdot t^{-\frac{n}{2p}} \|\varphi\|_p \qquad (\varphi \in L_p \text{ ve } 1 \leq p \leq \infty) \tag{3.5}$$

Burada k sayısı t'den bağımsızdır.

4) Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in L_p$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için,

$$\sup_{t>0} |(W_t\varphi)(x)| \leq (\mathcal{M}\varphi)(x) \tag{3.6}$$

burada $(\mathcal{M}\varphi)(x)$ (2.21) de tanımlanan Hardy Littlewood maksimal fonksiyonudur.

5) $W_s[(W_t\varphi)(\cdot)](x) = (W_{s+t}\varphi)(x)$, $(s > 0$, $t > 0)$ (Yarıgrup Özelliği.)

6) Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in L_p$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için,

$$\lim_{t\to 0} (W_t\varphi)(x) = \varphi(x)$$

eşitliği vardır.

7) $\varphi \in L_p$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için,

$$\lim_{t\to 0} \|W_t\varphi - \varphi\|_p = 0$$

olur (Rubin (1996)).

3.1.3. Metaharmonik çekirdeği, yarıgrubu ve özellikleri

$y \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in (0, \infty)$ olmak üzere $m(y;t)$-Metaharmonik çekirdek;

$$m(y;t) = (e^{-t\sqrt{1+|\cdot|^2}})^{\vee}(y) = \frac{2t}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{K_{\frac{n+1}{2}}\left(\sqrt{t^2+|y|^2}\right)}{\left(\sqrt{t^2+|y|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{3.7}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada, $K_\alpha(r)$, α dereceden McDonald fonksiyonudur:

$$K_\alpha(r) = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-r}\left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) & , \quad r > 1 \\ \frac{(n-1)!}{2\left(\frac{r}{2}\right)^{\alpha}} + O\left(r^{2-\alpha}\right) & , \quad r < 1, \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^{-|\alpha|}}{2\sin(|\alpha|\pi)\Gamma(1-|\alpha|)} + O\left(r^{-\alpha}\right) & , \quad r < 1, \alpha \notin \mathbb{Z}, \\ \log\left(\frac{1}{r}\right) + O(1) & , \quad r < 1, \alpha = 0. \end{cases}$$

$\varphi(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $m(y;t)$-Metaharmonik çekirdek vasıtasıyla tanımlanan ve Metaharmonik yarıgrup $(M_t\varphi)$ ile gösterilen integral operatörler ailesi:

$$(M_t\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} m(y;t)\varphi(x-y)dy \ , \quad t > 0 \tag{3.8}$$

eşitliği ile tanımlanır. $M_t\varphi$-Metaharmonik yarıgrubu ve $m\,(y;t)$ Metaharmonik çekirdeğin aşağıdaki temel özellikleri iyi bilinmektedir:

1) $m(y;t)$ pozitiftir, her $t>0$ için $m\,(\cdot;t)\in L_1$ dir ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} m(y;t)dy = e^{-t}\ ,\ \left(m\,(\cdot;t)\right)^{\wedge}(\xi) = e^{-t\sqrt{1+|\xi|^2}}$$

eşitlikleri vardır.

2) $\|M_t\varphi\|_p \le a_1\cdot\|\varphi\|_p$; $(\varphi\in L_p$ ve $1\le p\le\infty)$. Burada a_1 sayısı t'den bağımsızdır.

3) $\sup\limits_x |(M_t\varphi)(x)| \le a_2 e^{(\alpha-1)t}t^{-\frac{n}{p}}\|\varphi\|_p \quad (\forall\alpha>0\ ,\ \varphi\in L_p\ ,\ 1\le p\le\infty)$. Burada a_2 , t'den bağımsızdır.

4) $\sup\limits_{t>0} |(M_t\varphi)(x)| \le a_3\,(M\varphi)(x)$, $(M\varphi)(x)$ (2.21) de tanımlanan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur.

5) $M_s\left[(M_t\varphi)(\cdot)\right](x) = (M_{s+t}\varphi)(x) \quad (s>0\ ,\ t>0)$ (Yarıgrup Özelliği)

6) Hemen hemen her $x\in\mathbb{R}^n$, $\varphi\in L_p$, $1\le p\le\infty$ için

$$\lim_{t\to0^+}(M_t\varphi)(x) = \varphi(x)\ .$$

7) $\varphi\in L_p$ ve $1\le p\le\infty$ için

$$\lim_{t\to0^+}\|M_t\varphi-\varphi\|_p = 0\ .$$

8) $\varphi\in C(\mathbb{R}^n)$ ve $\varphi(\infty)\equiv\lim\limits_{|x|\to\infty}\varphi(x)$-sonlu limiti var ise , her $t>0$ için

$$(M_t\varphi)(\cdot)\in C(\mathbb{R}^n)$$

dir ve

$$\lim_{|x|\to\infty}(M_t\varphi)(x) = e^{-t}\varphi(\infty)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca , $t\to0^+$ için $M_t\varphi\to\varphi$ yakınsaması tüm $\mathbb{R}^n$ de düzgündür (Rubin (1996)).

3.2. Klasik Yarıgrupların Fourier-Bessel Harmonik Analizindeki Genelleşmiş Versiyonları ve Özellikleri

Bu kısımda, 3.1. kısmında tanımlanan ve temel özelliklerinden bahsedilen Poisson , Gauss-Weierstrass ve Metaharmonik yarıgruplarının T^y-genelleşmiş kayma vasıtasıyla oluşturulan "genelleşmiş versiyonları" tanımlanarak bazı temel özelliklerinden bahsedilecektir.

3.2.1. Genelleşmiş Poisson çekirdeği, yarıgrubu ve özellikleri

$y \in \mathbb{R}_+^n$ ve $t \in (0,\infty)$ olmak üzere $p_v(y;t)$ genelleşmiş poisson çekirdeği;

$$p_v(y;t) = F_v^{-1}\left(e^{-t|\cdot|}\right)(y) = \frac{c_{v,n}\cdot t}{\left(|y|^2+t^2\right)^{\frac{n+2v+1}{2}}}, \quad \left(c_{v,n} = \frac{2\cdot\Gamma\left(\frac{n+2v+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{2v+1}{2}\right)}\right)$$

eşitliği ile tanımlanır. $\mathcal{P}_t\varphi$-genelleşmiş Poisson yarıgrubu $p_v(y;t)$-genelleşmiş Poisson çekirdeği vasıtasıyla,

$$(\mathcal{P}_t\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} p_v(y;t)\,T^y\varphi(x)\,y_n^{2v}dy \ \ , \ (t>0) \tag{3.9}$$

biçiminde tanımlanır.

Genelleşmiş Poisson yarıgrubu-$\mathcal{P}_t\varphi$ ve genelleşmiş Poisson çekirdeği-$p_v(y;t)$'nin sağladığı önemli özellikler aşağıdaki gibidir:

1) $p_v(|y|\ ;t) = t^{-n-2v}\cdot p_v(t^{-1}|y|\ ;1)$ dir.

2) Her $t>0$ için

$$\|p_v(\cdot;t)\|_{1,v} = \int_{\mathbb{R}_+^n} p_v(|y|\ ;t)\,y_n^{2v}dy = 1 \text{ ve } F_v(p_v(\cdot,t))(\xi) = e^{-t|\xi|} \tag{3.10}$$

3) $\|\mathcal{P}_t\varphi\|_{p,v} \le \|\varphi\|_{p,v}$; $\quad (\varphi \in L_{p,v}$ ve $1 \le p \le \infty)$

4) $1 \le p < \infty$ için $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^n} |(\mathcal{P}_t\varphi)(x)| \le c\cdot t^{-\frac{n+2v}{p}}\cdot\|\varphi\|_{p,v}$

5)

$$\sup_{t>0}|(\mathcal{P}_t\varphi)(x)| \le (\mathcal{M}_v\varphi)(x) \ , \tag{3.11}$$

burada $(\mathcal{M}_v\varphi)(x)$ (2.40) ile tanımlanan genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur.

6) $\mathcal{P}_s[(\mathcal{P}_t\varphi)(\cdot)](x) = (\mathcal{P}_{s+t}\varphi)(x)$, $(s>0, t>0)$ (Yarıgrup özelliği),

7) $\varphi \in L_{p,v}$ ve $1 \le p < \infty$ için

$$\lim_{t\to 0^+}\|\mathcal{P}_t\varphi - \varphi\|_{p,v} = 0 \,.$$

8) Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}_+^n$, $\varphi \in L_{p,v}$ ve $1 \le p < \infty$ için

$$\lim_{t\to 0^+}(\mathcal{P}_t\varphi)(x) = \varphi(x) \ .$$

(Aliev ve Bayrakçı (1998) , Sezer ve Aliev (2010)). $\mathcal{P}_t\varphi$-genelleşmiş Poisson yarıgrubunun 3)-8) de verilen özelliklerini sırasıyla kanıtlayalım:

3) eşitsizliğini göstermek için (2.39) da verilen genelleşmiş young eşitsizliğini ve 2) de verilen $\|p_v(\cdot;t)\|_{1,v}=1$ eşitliğini kullanmak yeterlidir:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}_t\varphi\|_{p,v} &= \left\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} p_v(y;t)T^y\varphi(x)\,y_n^{2v}dy \right\|_{p,v} \\ &= \|p_v(\cdot;t)\circledast\varphi\|_{p,v} \\ &\leq \|p_v(\cdot;t)\|_{1,v}\|\varphi\|_{p,v} = \|\varphi\|_{p,v}\ .\end{aligned}$$

4) Genelleşmiş Young eşitsizliğinde $r=\infty$ durumunu düşünürsek

$$\begin{aligned}|(\mathcal{P}_t\varphi)(x)| &\leq \|\varphi\|_{p,v}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|p_v(|y|;t)|^q y_n^{2v}dy\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|\varphi\|_{p,v}\,t^{-n-2v}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left|p_v\left(t^{-1}|y|;1\right)\right|^q y_n^{2v}dy\right)^{\frac{1}{q}} \\ ...\,(y &= tx\ ,\ dy=t^n dx \text{ yazılırsa})\ ... \\ &= \|\varphi\|_{p,v}\,t^{-n+2v}t^{n+2v.\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|\mathcal{P}_v(|x|;1)|^q x_n^{2v}dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= ct^{-\frac{n+2v}{p}}\|\varphi\|_{p,v}\ ,\qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. Son ifade de görülen c sayısı φ fonksiyonundan bağımsızdır.

5) Bu eşitsizliğin doğruluğu, Genelleşmiş Hardy Littlewood Maksimal fonksiyonunun (2.42) ile verilen

$$\sup_{\varepsilon>0}|(\varphi\circledast\Psi_\varepsilon)(x)| \leq \|\Psi\|_{1,v}(\mathcal{M}_v\varphi)(x)$$

özelliğinde $\Psi_\varepsilon(x)$ fonksiyonu yerine $p_v(x;\varepsilon)\equiv\varepsilon^{-n-2v}p_v\left(\frac{x}{\varepsilon};1\right)$ alınarak görülür:

$$\begin{aligned}\sup_{t>0}|(\mathcal{P}_t\varphi)(x)| &= \sup_{\varepsilon>0}|\varphi\circledast p_v(x;\varepsilon)| \leq \|p_v\|_{1,v}(\mathcal{M}_v\varphi)(x) \\ &= (\mathcal{M}_v\varphi)(x)\end{aligned}$$

6) $\varphi\in S^+$ için eşitliğin her iki tarafına F_v-Fourier-Bessel dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}F_v[\mathcal{P}_s(\mathcal{P}_t\varphi)(\cdot)](x) &= F_v(\mathcal{P}_{s+t}\varphi)(x) \\ e^{-s|x|}\cdot e^{-t|x|}(F_v\varphi)(x) &= e^{-(s+t)}|x|(F_v\varphi)(x)\end{aligned}$$

ve böylece de eşitliğin doğruluğu görülür. S^+ uzayı $L_{p,v}$ de yoğun olduğundan bu eşitlik keyfi $\varphi \in L_{p,v}$ için de sağlanır.

7) $\|p_v(\cdot;t)\|_{1,v} = 1$ olduğu kullanılırsa

$$\|\mathcal{P}_t\varphi - \varphi\|_{p,v} = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p_v(x;t)\left[T\varphi(y) - \varphi(y)\right] x_n^{2v} dx \right\|_{p,v}$$

eşitliği elde edilir. Burada x yerine tx yazarak eşitliğin sağ tarafına (2.27) da verilen Genelleşmiş Minkowski eşitsizliğini uygularsak;

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}_t\varphi - \varphi\|_{p,v} &= \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p_v(x;1)\left[T^x\varphi(y) - \varphi(y)\right] x_n^{2v} dx \right\|_{p,v} \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p_v(x;1) \left\|T^{tx}\varphi(y) - \varphi(y)\right\|_{p,v} x_n^{2v} dx\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son olarak da, genelleşmiş kaymanın (2.31) ile verilen

$$\lim_{t\to 0} \left\|T^t\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot)\right\|_{p,v} = 0$$

özellikleri kullanılarak (2.31) deki Lebesque baskın yakınsama teoremi uygulanırsa

$$\lim_{t\to 0^+} \|\mathcal{P}_t\varphi - \varphi\|_{p,v} = 0$$

elde edilir.

8) 4) den ve $($Stein ve Weiss $(1971))$ kaynağındaki noktasal yakınsama ile ilgili ünlü teoremden hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$\lim_{t\to 0^+} (\mathcal{P}_t\varphi)(x) = \varphi(x)$$

olduğu görülür.

3.2.2. Genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği, yarıgrubu ve özellikleri

$y \in \mathbb{R}^n_+$ ve $t \in (0,\infty)$ olmak üzere genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği;

$$\begin{aligned}w_v(y;t) &= F_v^{-1}\left(e^{-t|\cdot|^2}\right)(y) \\ &= s_{v,n}(2t)^{-\frac{n+2v}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}\ , \\ s_{v,n} &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n-1} 2^{2v-1}\Gamma^2\left(v+\frac{1}{2}\right)}}\end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlanır. $\mathcal{W}_t\varphi$ -genelleşmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubu $w_v\left(y;t\right)$ genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği vasıtasıyla

$$\left(\mathcal{W}_t\varphi\right)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} w_v\left(y;t\right)T^y\varphi\left(x\right)y_n^{2v}dy \tag{3.12}$$

biçiminde tanımlanır.

Genelleşmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubu $\mathcal{W}_t\varphi$ ve genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeği $w_v\left(y;t\right)$'nin önemli özellikleri aşağıda listelenmiştir:

1) $w_v\left(\left|y\right|,t\right)=t^{-\frac{n+2v}{2}}w_v\left(t^{-\frac{1}{2}}\left|y\right|,1\right)$,

2) $w_v\left(\sqrt{\lambda}y,\lambda t\right)=\lambda^{-\frac{n+2v}{2}}w_v\left(y;t\right)$,

3) $\left\|w_v\left(\cdot;t\right)\right\|_{1,v}=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} w_v\left(y;t\right)y_n^{2v}dy=1$ ve

$$F_v\left(w_v\left(\cdot;t\right)\right)(\xi)=e^{-t|\xi|^2} \tag{3.13}$$

4) $\left\|\mathcal{W}_t\varphi\right\|_{p,v}\leq\left\|\varphi\right\|_{p,v}$, $\left(\varphi\in L_{p,v}\ ,\ 1\leq p\leq\infty\right)$

5) $\varphi\in L_{p,v}$ ve $1\leq p<\infty$ için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+^n}\left|\left(\mathcal{W}_t\varphi\right)(x)\right|\leq ct^{-\frac{n+2v}{2p}}\left\|\varphi\right\|_{p,v}$$

6) $\varphi\in L_{p,v}$ ve $1\leq p\leq\infty$ için

$$\sup_{t>0}\left|\left(\mathcal{W}_t\varphi\right)(x)\right|\leq c\left(\mathcal{M}_v\varphi\right)(x) \tag{3.14}$$

burada $\left(\mathcal{M}_v\varphi\right)(x)$ ile tanımlanmış olan genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur.

7) $\varphi\in L_{p,v}$ ve her $s,t\in(0,\infty)$ için

$$\mathcal{W}_s\left[\left(\mathcal{W}_t\varphi\right)(\cdot)\right](x)=\left(\mathcal{W}_{s+t}\varphi\right)(x)\ \text{, (Yarıgrup özelliği)}$$

8) $\varphi\in L_{p,v}$ ve $1\leq p<\infty$ için

$$\lim_{t\to0^+}\left\|\mathcal{W}_t\varphi-\varphi\right\|_{p,v}=0\ .$$

9) Hemen hemen her $x\in\mathbb{R}_+^n$, $\varphi\in L_{p,v}$ ve $1\leq p<\infty$ için

$$\lim_{t\to0^+}\left(\mathcal{W}_t\varphi\right)(x)=\varphi(x)\ \text{dir.}$$

Şimdi 4) - 9) özelliklerinin ispatını yapalım.

4) Genelleşmiş Young eşitsizliğini ve 3) de verilen $\|w_v(\cdot;t)\|_{1,v} = 1$ özelliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}_t\varphi\|_{p,v} &= \left\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} w_v(y;t)\, T^y\varphi(x)\, y_n^{2v} dy \right\|_{p,v} \\ &= \|w_v(\cdot;t) \circledast \varphi\|_{p,v} \\ &\leq \|w_v(\cdot;t)\|_{1,v} \|\varphi\|_{p,v} = \|\varphi\|_{p,v} \end{aligned}$$

elde ederiz.

5) Genelleşmiş Young eşitliğinde bu sefer $r = \infty$ durumunu düşünürsek ve genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeğinin 1) de verilen özelliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}_t\varphi(x)| &\leq \|\varphi\|_{p,v} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |w_v(y;t)|^q\, y_n^{2v} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|\varphi\|_{p,v}\, t^{-\frac{n+2v}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left| w_v\left(t^{-\frac{1}{2}}y;1\right)\right|^q y_n^{2v} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ \text{...(burada } y &= \sqrt{t}x \text{ , } dy = t^{\frac{n}{2}}dx \text{ yazılırsa)...} \\ &= \|\varphi\|_{p,v}\, t^{-\frac{n+2v}{2}} t^{\frac{n+2v}{2}\cdot\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |w_v(x;1)|^q\, x_n^{2v} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= c.t^{-\frac{n+2v}{2p}}.\, \|\varphi\|_{p,v}\ . \end{aligned}$$

Böylece ; $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^n} |(\mathcal{W}_t\varphi)(x)| \leq c.t^{-\frac{n+2v}{2p}}.\, \|\varphi\|_{p,v}$ elde edilir.

6) Genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun (2.42) ile verilen

$\sup\limits_{\varepsilon>0} |(\varphi \circledast \psi_\varepsilon)(x)| \leq \|\psi\|_{1,v} (\mathcal{M}_v\varphi)(x)$ özelliğinde $\psi_\varepsilon(x) \equiv w_v(x;\varepsilon) = \varepsilon^{-n-2v}.w_v\left(\frac{x}{\varepsilon};1\right)$ olarak alırsak;

$$\sup_{t>0} |(\mathcal{W}_t\varphi)(x)| \leq c.(\mathcal{M}_v\varphi)(x)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

7) $\varphi \in S^+$ için eşitliğin her iki tarafına F_v-Fourier-Bessel dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned} F_v[\mathcal{W}_s(\mathcal{W}_t\varphi)(\cdot)](x) &= F_v(\mathcal{W}_{s+t}\varphi)(x) \\ e^{-s|x|^2}e^{-t|x|^2}(F_v\varphi)(x) &= e^{-(s+t)|x|^2}(F_v\varphi)(x) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. S^+ uzayının $L_{p,v}$ de yoğun olduğu bilindiğinden sözü edilen eşitlik keyfi $\varphi \in L_{p,v}$ için de doğrudur.

8) $\|w_v(\cdot;t)\|_{1,v} = 1$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\|\mathcal{W}_v\varphi - \varphi\|_{p,v} = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} w_v(x;t)\left[T^x\varphi(y) - \varphi(y)\right] x_n^{2v} dx \right\|_{p,v}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi x yerine $\sqrt{t}x$ yazarak Genelleşmiş Minkowski eşitsizliğini kullanırsak;

$$\|\mathcal{W}_t\varphi - \varphi\|_{p,v} = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} w_v(x;1)\left[T^{\sqrt{t}x}\varphi(y) - \varphi(y)\right] x_n^{2v} dx \right\|_{p,v}$$

elde ederiz. Genelleşmiş kaymanın

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| T^{\sqrt{t}x}\varphi - \varphi \right\|_{p,v} = 0$$

özelliğini kullanarak (2.25) deki Lebesgue baskın yakınsama teoremini uygularsak

$$\lim_{t\to 0^+} \|\mathcal{W}_t\varphi - \varphi\|_{p,v} = 0$$

elde ederiz.

9) 6). özellikten ve (Stein ve Weiss (1971)) kaynağındaki noktasal yakınsama ile ilgili ünlü teoremden hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$\lim_{t\to 0^+} (\mathcal{W}_t\varphi)(x) = \varphi(x)$$

olduğu görülür.

3.2.3. Genelleşmiş Metaharmonik çekirdeği, yarıgrubu ve özellikleri

$y \in \mathbb{R}^n_+$ ve $t \in (0,\infty)$ olmak üzere $m_v(y;t)$ genelleşmiş Metaharmonik çekirdek

$$\begin{aligned} m_v(y;t) &= F_v^{-1}\left(e^{-t\sqrt{1+|\cdot|^2}}\right)(y) \\ &= \frac{k_{v,n} t K_{\frac{n+1+2v}{2}}\left(\sqrt{t^2+|y|^2}\right)}{\left(\sqrt{t^2+|y|^2}\right)^{\frac{n+1+2v}{2}}}; \\ k_{v,n} &= \frac{2^{-v+\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \end{aligned} \tag{3.15}$$

eşitliği ile tanımlanır. $M_t\varphi$-genelleşmiş Metaharmonik yarıgrubu $m_v\,(y;t)$-genelleşmiş metaharmonik çekirdek vasıtasıyla

$$(M_t\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} m_v\,(y;t)\,T^y\varphi\,(x)\,y_n^{2v}dy\ ,\ (t>0) \tag{3.16}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Genelleşmiş Metaharmonik yarıgrubu $M_t\varphi$ ve genelleşmiş Metaharmonik çekirdek $m_t\,(y;t)$ nin sağladığı önemli özellikler aşağıdaki gibidir:

1) $m_t\,(y;t) \in L_{1,v}$ ve $F_v\,(m_v\,(\cdot;t))\,(\zeta) = e^{-t\sqrt{1+|\zeta|^2}}$ (3.17)

2) $\|M_t\varphi\|_{p,v} \leq m_1\,\|\varphi\|_{p,v}$ (m_1 sayısı t den bağımsızdır.)

3) $\sup\limits_x |(M_t\varphi)(x)| \leq m_2 e^{(\alpha-1)t} t^{-\frac{n+2v}{p}}\,\|\varphi\|_{p,v}$ $(\forall\alpha>0\ ;\ \varphi\in L_{p,v}\ ,\ 1\leq p\leq\infty)$

Burada m_2 sayısı, t den bağımsızdır.

4) $\sup\limits_{t>0} |(M_t\varphi)(x)| \leq m_3\,(\mathcal{M}_v\varphi)(x)\,.$

Burada $(\mathcal{M}_v\varphi)(x)$ (2.40) deki gibi tanımlanan genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur.

5) $M_s\,[(M_t\varphi)(\cdot)]\,(x) = (M_{s+t}\varphi)(x)\ \ (s>0\ ,\ t>0)$ (Yarıgrup Özelliği.)

6) Hemen hemen $x \in \mathbb{R}_+^n$, $\varphi \in L_{p,v}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\lim_{t\to 0^+} (M_t\varphi)(x) = \varphi\,(x)\,.$$

7) $\varphi \in L_{p,v}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\lim_{t\to 0^+} \|M_t\varphi - \varphi\|_{p,v} = 0\ \ .$$

8) $\varphi \in C\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ve $\varphi(\infty) \equiv \lim\limits_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x)$-sonlu limiti var ise, her $t > 0$ için $\left(M_{t} \varphi\right)(\cdot) \in C\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ dir ve

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty}\left(M_{t} \varphi\right)(x)=e^{-t} \varphi(\infty)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $t \rightarrow 0^{+}$ için $M_{t} \varphi \rightarrow \varphi$ yakınsaması tüm $\mathbb{R}_{+}^{n}$ da düzgündür.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Laplace Diferansiyel Operatörü $\triangle$-vasıtasıyla Tanımlanan Klasik Potansiyeller ve Onların Klasik Yarıgruplar ile İlişkilendirilmesi

Bu bölümde ilk olarak, (klasik) Riesz, Bessel ve Flett potansiyellerinin tanımlarına yer verilecek daha sonra da bu klasik potansiyellerin uygun klasik yarıgruplar ile temsilleri elde edilecektir.

Tanım 4.8. *Harmonik analizde bir çok uygulama alanına sahip olan klasik Riesz potansiyeli $I^{\alpha}\varphi$,*

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\varphi(x) &= c_{n,\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}dy = c_{n,\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \\ &= c_{n,\alpha}\left(\varphi * \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $c_{n,\alpha}$ katsayısı

$$c_{n,\alpha} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{4.2}$$

dir (Stein (1970), Rubin (1996)). Aslında klasik Riesz potansiyeli Fourier dönüşümü dilinde, formal olarak

$$\left(I^{\alpha}\varphi\right)^{\Lambda}(x) = |x|^{-\alpha}\varphi^{\Lambda}(x), \quad \left(x\in\mathbb{R}^n, 0<\alpha<n\right) \tag{4.3}$$

biçiminde tanımlıdır ve $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ -Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere $(-\Delta)$ nın “negatif kesirsel kuvvetleri” olarak yorumlanır. Şimdi klasik Riesz potansiyelinin klasik yarıgruplar (klasik Poisson ve klasik Gauss-Weierstrass yarıgrupları) ile ilişkilerini ifade eden Teoremi ifade edelim:

Teorem 4.9. *(Rubin (1996, s.218-223))*

$\varphi \in L_p$ ve $1 \le p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$ olsun. Bu durumda klasik Riesz potansiyellerinin

i) $\left(I^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1}\left(P_t\varphi\right)(x)\,dt$

ii) $\left(I^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(W_t\varphi\right)(x)\,dt$

biçiminde tek katlı integral gösterimleri vardır. Burada $\left(P_t\varphi\right)$ ve $\left(W_t\varphi\right)$ sırasıyla (3.2) ve (3.4) de tanımlanmış olan klasik Poisson ve klasik Gauss-Weierstrass yarıgruplarıdır.

İspat i) $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\left(P_t\varphi\right)(x)\,dt$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}c_n\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{t}{\left(|y|^2+t^2\right)^{\frac{(n+1)}{2}}}\varphi(x-y)\,dy\right)dt$$

... (integrallerin sırasını değiştirirsek) ...

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_n}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\left(\int\limits_0^\infty\frac{t^\alpha dt}{\left(|y|^2+t^2\right)^{\frac{(n+1)}{2}}}\right)dy\\
&= \frac{c_n}{2\Gamma(\alpha)}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{n-\alpha}{2}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\,|y|^{\alpha-n}\,dy\\
&\quad ...\left(\text{Burada } B(u,v)=\frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \text{ eşitliğini kulanırsak}\right) ...\\
&= \frac{c_n}{2\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\,|y|^{\alpha-n}\,dy\\
&= c_{n,\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\,|y|^{\alpha-n}\,dy\\
&= I^\alpha\varphi(x)\,.
\end{aligned}$$

ii) $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(W_t\varphi\right)(x)\,dt$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}w(y;t)\,\varphi(x-y)\,dy\right)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{|y|^2}{4t}}\varphi(x-y)\,dy\right)dt
\end{aligned}$$

... (integrallerin sırasını değiştirirsek) ...

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\left(\int\limits_0^\infty(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{|y|^2}{4t}}t^{\frac{\alpha}{2}-1}dt\right)dy\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\left(\int\limits_0^\infty(4\pi)^{-\frac{n}{2}}\,t^{\frac{\alpha-n}{2}-1}e^{-\frac{|y|^2}{4t}}dt\right)dy\\
&= \;...\left(|y|^{-n+\alpha}=\frac{c_{n,\alpha}}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\pi|y|^2}{t}}t^{-\frac{n+\alpha}{2}}\frac{dt}{t}\text{ eşitsizliğini kullanırsak}\right) ...\\
&= c_{n,\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\,\frac{dy}{|y|^{n-\alpha}}=I^\alpha\varphi\,.
\end{aligned}$$

Tanım 4.10. *Harmonik analizde önemli uygulamalara sahip bir diğer potansiyel olan Bessel potansiyeli $J^{\alpha}\varphi$:*

$$(J^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{z_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} z_{\alpha}(y)\,\varphi(x-y)\,dy$$

biçiminde tanımlanır. Burada; $z_n(\alpha) = 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ve $z_{\alpha}(y) = \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha-n}{2}} e^{-t-\frac{|y|^2}{4t}} \frac{dt}{t}$ dir (Stein (1970), Rubin (1996)). Klasik Bessel potansiyelleri, ilk olarak Fourier dönüşümü dilinde, formal olarak

$$(J^{\alpha}\varphi)^{\Lambda}(x) = \left(1+|x|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \varphi^{\Lambda}(x)\ ,\ (x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < \infty)$$

biçiminde tanımlanır ve I-birim operatör olmak üzere $(I-\Delta)$ opertörünün "negatif kesirsel kuvvetleri" olarak yorumlanır. Yani, formal olarak

$$J^{\alpha}\varphi = (I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} \varphi$$

yazılabilir.

Klasik Bessel potansiyellerinin, ünlü klasik Gauss-Weierstrass integrali ve Metaharmonik integrali ile ilişkilendirilerek oluşturulan ve çok kullanışlı olan tek katlı integral gösterimlerini ifade eden teoremi yazalım:

Teorem 4.11. *(Lizorkin (1964), Flett (1971), Samko vd (1993), Rubin (1996))*

$\varphi \in L_p$ ve $0 \le p \le \infty$ olsun. Bu durumda;

i) $(J^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} W_t\varphi(x)\,dt,$

ii) $(J^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (M_t\varphi)(x)\,dt.$

Burada; $(W_t\varphi)$ ve $(M_t\varphi)$, (3.4) ve (3.8) ile tanımlanmış olan klasik Gauss-Weierstrass ve klasik Metaharmonik yarıgruplarıdır.

İspat i) $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} W_t\varphi(x)\,dt = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \varphi(x-y)\,dy \right) dt$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\,dy \int_0^{\infty} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\,dy \int_0^{\infty} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} t^{\frac{\alpha-n}{2}-1} e^{-\left(\frac{|y|^2}{4t}+t\right)} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) 2^n \pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\, z_{\alpha}(y)\,dy$$

$$= J^{\alpha}\varphi\,.$$

ii) $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\left(M_t\varphi\right)(x)\,dt = \frac{2(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t\frac{K_{\frac{n+1}{2}}\left(\sqrt{|y|^2+t^2}\right)}{\left(\sqrt{|y|^2+t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\varphi(x-y)\,dy\right)dt$

= ... (integralleme sırasını değiştirirsek) ...

$$= \frac{2\cdot(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\left[\int\limits_0^\infty t^{\alpha}\frac{K_{\frac{n+1}{2}}\left(\sqrt{|y|^2+t^2}\right)}{\left(\sqrt{|y|^2+t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}dt\right]dy \qquad (4.4)$$

Burada, Gradshteyn-Ryzhik kaynağında yer alan 6.596(3) (p.742)

$$\int\limits_0^\infty t^{2\mu+1}\frac{K_{\frac{n+1}{2}}\left(\sqrt{t^2+r^2}\right)}{\left(\sqrt{t^2+r^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}dt = \frac{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)}{r^{\frac{n+1}{2}-\mu-1}}K_{\frac{n+1}{2}-\mu-1}(r)$$

formülünü $\mu = \frac{\alpha-1}{2}$ ve $r = |y|$ alarak kullanırsak,

$$\int\limits_0^\infty t^{\alpha}\frac{K_{\frac{n+1}{2}}\left(\sqrt{t^2+|y|^2}\right)}{\left(\sqrt{t^2+|y|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}dt = 2^{\frac{\alpha-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|y|)}{|y|^{\frac{n-\alpha}{2}}}$$

olarak elde edilir. Bunu (4.4) yazarsak

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\left(M_t\varphi\right)(x)\,dt = \frac{2\,(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)}2^{\frac{\alpha-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\frac{K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|y|)}{|y|^{\frac{n-\alpha}{2}}}dy$$

olur. Şimdi bu adımda Bessel potansiyelinin çekirdeğini oluşturan ve (Samko, Kilbas ve Marichev (1993) (p.538)) (27.1) ile verilen

$$G_{\alpha}(y) \equiv \frac{z_{\alpha}(y)}{z_n(\alpha)} = \frac{2^{1-\frac{n+\alpha}{2}}}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|y|)}{|y|^{\frac{n-\alpha}{2}}}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\left(M_t\varphi\right)(x)\,dt$$

$$= \frac{2\,(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)}2^{\frac{\alpha-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2^{1-\frac{n+\alpha}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\frac{z_{\alpha}(y)}{z_n(\alpha)}dy$$

elde edilir. Dolayısıyla son olarak

$$\frac{2\,(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}\,2^{\frac{\alpha-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2^{1-\frac{n+\alpha}{2}}} = 1$$

olduğunu göstermeliyiz. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ifade aşağıdaki eşitliğin gösterilmesine dönüşür:

$$\frac{2^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Bu son eşitlik de (Samko, Kilbas ve Marichev (1993) (p.16)) kaynağında yer alan ve Legendre formülü olarak bilinen

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

eşitliğinin $z=\frac{\alpha}{2}$ seçilmiş durumudur.

Tanım 4.12. *(Flett (1971)) İlk olarak T.M.Flett tarafindan tanımlanan Flett potansiyeli* $T^{\alpha}\varphi$:

$$(T^{\alpha}\varphi)(x)=(\Phi_{\alpha}*f)(x)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Phi_{\alpha}(y)\,\varphi(x-y)\,dy \tag{4.5}$$

biçiminde tanımlanır. Burada;

$$\Phi_{\alpha}(y)=\frac{1}{\lambda_n(\alpha)}\,|y|^{\alpha-n}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{\alpha}e^{-t|y|}}{(1+t^2)^{\frac{(n+1)}{2}}}dt$$

ve

$$\lambda_n(\alpha)=\pi^{\frac{(n+1)}{2}}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

dir (İlham Aliev, Sinem Sezer, Melih Eryiğit (2006)). Flett potansiyelleri, aslında Fourier dönüşümü terimlerinde:

$$(T^{\alpha}\varphi)^{\wedge}(x)=(1+|x|)^{-\alpha}\,\varphi^{\wedge}(x),\qquad(x\in\mathbb{R}^n,\alpha>0)$$

eşitliği ile tanımlanır ve $\left(I+\sqrt{-\Delta}\right)$ *operatörünün "negatif kesirsel kuvvetleri" olarak yorumlanır. Yani; formal olarak*

$$(T^{\alpha}\varphi)=\left(I+\sqrt{-\Delta}\right)^{-\alpha}\varphi$$

yazılabilir.

Klasik Flett potansiyellerinin klasik poisson integrali ile ilişkilendirilen ve bu potansiyellerin tek katlı integral şeklinde temsilini veren teorem aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.13. *$\varphi \in L_p$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda;*

$$\left(T^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} (P_t\varphi)(x) dt \tag{4.6}$$

eşitliği sağlanır.

Teoremin ispatı Teorem 4.8 i) nin ispatına benzer olarak yapılır.

4.2. Laplace - Bessel Diferansiyel Operatörü Δ_v- Vasıtasıyla Tanımlanan Genelleşmiş Potansiyeller ve Onların Genelleşmiş Yarıgruplar İle İlişkilendirilmesi

Bu kısımda genelleşmiş Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleri tanımlanarak, onların uygun genelleştirilmiş yarıgruplar ile oluşturulan temsilleri verilecektir.

Tanım 4.14. *Genelleştirilmiş Riesz potansiyeli $I_v^{\alpha}\varphi$ ile g österilir ve $\varphi \in L_{p,v}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olmak üzere;*

$$\begin{aligned} I_v^{\alpha}\varphi(x) &= c_{\alpha}(n,v) \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(y)\, T^y \left(\frac{1}{|x|^{n+2v-\alpha}}\right) y_n^{2v} dy \\ &= c_{\alpha}(n,v) \left(\varphi \circledast \frac{1}{|x|^{n+2v-\alpha}}\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $c_{\alpha}(n,v)$ katsayısı:

$$c_{\alpha}(n,v) = 2^{1-\alpha}\pi^{\frac{1-n}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2v-\alpha}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} \tag{4.8}$$

dir (Aliev, Bayrakçı (1998)). Genelleşmiş Riesz potansiyelleri, klasik Riesz potansiyellerine benzer olarak, Fourier Bessel dönüşümü dilinde, formal olarak $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ ve $0 < \alpha < n+2v$ olmak üzere;

$$F_v\left(I_v^{\alpha}\varphi\right)(x) = |x|^{-\alpha} F_v\varphi(x)$$

eşitliği ile tanımlıdır ve

$$\Delta_v = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2v}{x_n} \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü olmak üzere $(-\Delta_v)$ operatörünün "negatif kesirsel kuvvetleri" olarak yorumlanırlar.

Klasik Riesz potansiyellerinin klasik yarıgruplar (klasik Poisson ve Gauss-Weierstrass yarıgrupları) ile temsillerine benzer olarak, genelleşmiş Riesz potansiyellerinin genelleşmiş yarıgruplar (genelleşmiş Poisson ve Gauss-Weierstrass yarıgrupları) ile temsillerini veren Teoremi ifade edelim:

Teorem 4.15. *$\varphi \in L_{p,v}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $0 < Re\,\alpha < \frac{n+2v}{p}$ olsun. Bu durumda, genelleşmiş Riesz potansiyeli $I_v^\alpha \varphi$*

i) $I_v^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\mathcal{P}_t\varphi\right)(x)\, dt,$

ve

ii) $I_v^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} \left(\mathcal{W}_t\varphi\right)(x)\, dt$

biçiminde tek katlı integral ile temsil edilebilir. Burada, $(\mathcal{P}_t\varphi)$ ve $(\mathcal{W}_t\varphi)$ sırasıyla (3.9) ve (3.12) ile tanımlanmış olan genelleşmiş Poisson ve genelleşmiş Gauss-Weierstrass yarıgruplarıdır.

İspat **i**) $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\mathcal{P}_t\varphi\right)(x) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} p_v(y;t)\, T^y\varphi(x)\, y_n^{2v} dy \right) dt$

... (integrallerin sırasını değiştirirsek) ...

$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y\varphi(x) \left(\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} t^{-n+2v} p_v\left(t^{-1}|y|\,;1\right) dt \right) y_n^{2v} dy$

$= \ldots \left(t = \frac{|y|}{\tau}\ ;\ dt = -\frac{|y|}{\tau^2} d\tau \text{ alınırsa} \right) \ldots$

$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \tau^{n+2v-\alpha-1} p_v(\tau,1)\, d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |y|^{\alpha-n-2v}\, T^y\varphi(x)\, y_n^{2v} dy$

$= c \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{|y|^{n+2v-\alpha}} T^y\varphi(x)\, y_n^{2v} dy.$

Burada; $c = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \tau^{n+2v-\alpha-1} p_v(\tau,1)\, d\tau$ dur. Dolayısıyla c nin (4.8) de tanımlanan $c_\alpha(n,v)$ ye eşit olduğunu göstermeliyiz. Bunun için Fourier-Bessel dönüşümü tekniğini kullanalım:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\mathcal{W}_t\varphi\right)(x)\, dt = c \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{|y|^{n+2v-\alpha}} T^y\varphi(x)\, y_n^{2v} dy$$

eşitliği her $\varphi \in L_{p,v}$, $1 \leq p < \frac{n+2v}{\alpha}$ için sağlandığından her $\varphi \in S\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için de sağlanır. Böylece;

$F_v \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\mathcal{P}_t\varphi\right)(\cdot)\, dt \right](y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} F_v\left[\left(\mathcal{P}_t\varphi\right)(\cdot)\right](y)\, dt$

$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} F_v\left[p_v\left(|\cdot|\,,t\right)\right](y)\, F_v(\varphi)(y)\, dt$

$= F_v\varphi(y)\, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t|y|} dt$

$= \dots (\tau = t\,|y|$ dersek $d\tau = |y|\, dt) \dots$

$= F_v\varphi(y)\, |y|^{-\alpha}\, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau$

$= F_v\varphi(y)\, |y|^{-\alpha}$

$= F_v\left[I_v^\alpha \varphi(\cdot)\right](y)\,.$

Burada $I_v^\alpha \varphi$, (4.7) ile tanımlanan genelleşmiş Riesz potansiyelidir. Böylece;

$$\left(I_v^\alpha \varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\mathcal{W}_t \varphi\right)(x)\, dt$$

dir.

ii) nin ispatı da **i**) de yapılan ispata benzer olarak yapılabilir.

Tanım 4.16. *Genelleşmiş Bessel potansiyelleri $J_v^\alpha \varphi$ ile gösterilir ve $\varphi \in L_{p,v}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $0 < \operatorname{Re}\alpha < \infty$ olmak üzere:*

$$J_v^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\gamma_\alpha(n, v)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} K_\alpha(y)\, T^y \varphi(x)\, y_n^{2v} dy \tag{4.9}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada;

$$\gamma_\alpha(n, v) = 2^{n+2v-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

ve

$$K_\alpha(y) = \int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha-n-2v}{2}} e^{-t-\frac{|y|^2}{4t}} \frac{dt}{t}$$

dir (Gadjiev ve Aliev (1998)).

Genelleşmiş Bessel potansiyelleri de klasik Bessel potansiyellerine benzer olarak Fourier-Bessel dönüşümü dilinde, formal olarak $\varphi \in S\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $0 < \operatorname{Re}\alpha < \infty$ için

$$F_v\left(J_v^\alpha \varphi\right)(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} F_v\varphi(x)$$

eşitliği ile tanımlıdır ve Δ_v-Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ve I-birim operatör olmak üzere $(I - \Delta_v)$ operatörünün "negatif kesirsel kuvvetleri"olarak yorumlanırlar. Klasik Bessel potansiyellerinin klasik yarıgruplar ile temsil edilişlerine benzer olarak, genelleşmiş Bessel potansiyellerinin de genelleşmiş yarıgruplar (genelleşmiş Gauss-Weierstrass ve genelleşmiş Metaharmonik yarıgrupları) ile oluşturulan ifadeleri vardır. Şimdi genelleşmiş Bessel potansiyellerinin bu temsillerini ifade eden teoremi yazalım:

Teorem 4.17. *$\varphi \in L_{p,v}(\mathbb{R}_+^n)$ ve $0 < \operatorname{Re}\alpha < \infty$ olmak üzere genelleşmiş Bessel potansiyellerinin*

i) $J_v^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} \mathcal{W}_t \varphi(x)\, dt\,,$

ii) $J_v^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \mathcal{M}_t \varphi(x)\, dt$

tek boyutlu integral gösterimleri vardır. Burada, $\mathcal{W}_t\varphi(x)$ ve $\mathcal{M}_t\varphi(x)$ tanımlandığı gibidir.

İspat i) $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} \mathcal{W}_t \varphi(x)\, dt = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_v(y;t)\, T^y \varphi(x)\, y_n^{2v} dy \right) dt$

... (integralleme sırasını değiştirelim) ...

$$\begin{aligned}
&= \frac{s_{v,n}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y \varphi(x) \left(\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} (2t)^{-\frac{n+2v}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dt \right) y_n^{2v} dy \\
&= \frac{s_{v,n}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} 2^{-\frac{n+2v}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha-n-2v}{2}} e^{-t-\frac{|y|^2}{4t}} \frac{dt}{t} \right) T^y \varphi(x)\, y_n^{2v} dy \\
&= s \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} K_\alpha(y)\, T^y \varphi(x)\, y_n^{2v} dy \\
&= s\gamma_\alpha(n,v)\, J_v^\alpha \varphi(x)
\end{aligned}$$

olur. Burada $s\gamma_\alpha(n,v) = 1$ olduğuda kolayca görülür.

ii) nin ispatı da benzer düşünce ile yapılır. Son olarak genelleşmiş Flett potansiyelini tanımlayarak onun ilgili genelleşmiş Poisson yarıgrubu ile temsilini verelim.

Tanım 4.18. *Genelleşmiş Flett potansiyeli $T_v^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_{p,v}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $0 < \operatorname{Re}\alpha < \infty$ olmak üzere;*

$$\begin{aligned}
T_v^\alpha \varphi(x) &= \left(\Phi_{\alpha,v}(y) \circledast \varphi\right)(x) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \Phi_{\alpha,v}(y)\, T^y \varphi(x)\, y_n^{2v} dy
\end{aligned} \tag{4.10}$$

biçiminde tanımlanır. Burada;

$$\Phi_{\alpha,v}(y) = \frac{1}{\lambda_{n,v}(\alpha)} |y|^{\alpha-n-2v} \int\limits_0^\infty \frac{t^\alpha e^{-t|y|}}{(1+t^2)^{\left(\frac{n+2v+1}{2}\right)}} dt$$

ve

$$\lambda_{n,v}(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\alpha)\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+2v+1}{2}\right)}$$

dir.

Genelleşmiş Flett potansiyelleri, klasik Flett potansiyellerine benzer olarak Fourier-Bessel dönüşümü dilinde, formal olarak $\varphi \in S\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $0 < \operatorname{Re}\alpha < \infty$ için

$$F_v\left(T_v^\alpha\varphi\right)(x) = (1+|x|)^{-\alpha} F_v\varphi(x)$$

eşitliği ile tanımlanır ve $\left(I+\sqrt{-\Delta_v}\right)$ operatörünün "negatif kesirsel kuvvetleri" olarak yorumlanır. Yani;

$$T_v^\alpha\varphi = \left(I+\sqrt{-\Delta_v}\right)^{-\alpha}\varphi\,.$$

Son olarak genelleşmiş Flett potansiyellerinin genelleşmiş poisson yarıgrubu ile ilişkilendirilerek oluşturulan tek katlı integral gösterimini ifade eden teoremi yazalım:

Teorem 4.19. *$\varphi \in L_{p,v}$ ve $0 < \operatorname{Re}\alpha < \infty$ olmak üzere $T_v^\alpha\varphi$-genelleşmiş Flett potansiyelleri*

$$\left(T_v^\alpha\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\left(\mathcal{P}_t\varphi\right)(x)\,dt$$

eşitliğini sağlar. Burada $(\mathcal{P}_t\varphi)$-genelleşmiş Poisson yarıgrubudur.

İspat $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\left(\mathcal{P}_t\varphi\right)(x)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} p_v(y;t)T^y\varphi(x)\,y_n^{2v}dy\right)dt$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y\varphi(x)\left(\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\frac{2\Gamma\left(\frac{n+2v+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}\frac{t}{\left(|y|^2+t^2\right)^{\frac{n+2v+1}{2}}}dt\right)y_n^{2v}dy$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+2v+1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y\varphi(x)\left(\int\limits_0^\infty \frac{t^\alpha e^{-t}}{\left(|y|^2+t^2\right)^{\frac{n+2v+1}{2}}}dt\right)y_n^{2v}dy$$

$$= \ldots\left(\tau = \frac{t}{|y|}\text{ dersek } d\tau = \frac{dt}{|y|}\right)\ldots$$

$$= A\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y\varphi(x)\left(\int\limits_0^\infty \frac{(\tau|y|)^\alpha e^{-\tau|y|}}{|y|^{n+2v+1}(1+\tau^2)^{\frac{n+2v+1}{2}}}|y|\,d\tau\right)y_n^{2v}dy$$

$$= A\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y\varphi(x)\left(|y|^{\alpha-n-2v}\int\limits_0^\infty \frac{\tau^\alpha e^{-\tau|y|}}{(1+\tau^2)^{\frac{n+2v+1}{2}}}d\tau\right)y_n^{2v}dy\,.$$

Burada; $A.\,|y|^{\alpha-n-2v} = \frac{|y|^{\alpha-n+2v}}{\lambda_{n,v}(\alpha)}$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece;

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\left(\mathcal{P}_t\varphi\right)(x)\,dt &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\Phi_{\alpha,v}(y)\,T^y\varphi(x)\,y_n^{2v}dy \\ &= T_v^\alpha\varphi(x)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

4.3. Klasik ve Genelleşmiş Potansiyellerin L_p ve $L_{p,v}$ Sınırlılık Özellikleri

Bu son kesimde sırasıyla, Δ-Laplace diferansiyel operatörü vasıtasıyla oluşturulan (klasik) Riesz, Bessel ve Flett potansiyellerinin L_p-sınırlılık özellikleri ile Δ_v-Laplace-Bessel diferansiyel operatörü vasıtasıyla oluşturulan genelleştirilmiş Riesz, Bessel ve Flett potansiyellerinin $L_{p,v}$-sınırlılık özelliklerini ifade eden teoremlere yer verilecektir.

Teorem 4.20. *$\varphi \in L_p$, $(1 \leq p \leq \infty)$ olsun. $I^\alpha\varphi$, $J^\alpha\varphi$ ve $T^\alpha\varphi$ sırasıyla (klasik) Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleri olmak üzere*

1) $\|I^\alpha\varphi\|_q \leq c\,(p,q)\,\|\varphi\|_p$; $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$.

2) $\|J^\alpha\varphi\|_p \leq c\,\|\varphi\|_p$

3) $\|T^\alpha\varphi\|_p \leq c\,\|\varphi\|_p$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspatlar için (Stein (1971)) kaynağına bakılabilir.

Teorem 4.21. *$\varphi \in L_{p,v}$, $(1 \leq p \leq \infty)$ olsun. $I_v^\alpha\varphi$, $J_v^\alpha\varphi$ ve $T_v^\alpha\varphi$ sırasıyla genelleşmiş Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleri olmak üzere*

1) $\|I_v^\alpha\varphi\|_{q,v} \leq c_{p,q}\,\|\varphi\|_{p,v}$; $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2v}$.

2) $\|J_v^\alpha\varphi\|_{p,v} \leq c\,\|\varphi\|_{p,v}$

3) $\|T_v^\alpha\varphi\|_{p,v} \leq c\,\|\varphi\|_{p,v}$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat 1)

$K(x) = \frac{1}{|x|^{n+2v-\alpha}}$ olsun ve $(K \circledast \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} T^y \left(\frac{1}{|x|^{n+2v-\alpha}}\right) \varphi(y)\, y_n^{2v} dy$operatörünü gözönüne alalım. $1 \leq p < q < \infty$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2v}$ için $K \circledast \varphi$ operatörünün zayıf (p,q) tipli olduğunu gösterelim. Yani;

$$m\left\{x : |(K \circledast \varphi)(x)| > \lambda\right\} \leq \left(\frac{c_q\,\|\varphi\|_{p,v}}{\lambda}\right)^q \ , \ (\forall\lambda > 0)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$$K_1(x) = \begin{cases} K(x) & , \ |x| \leq r \\ 0 & , \ |x| > r \end{cases} ; \ K_\infty(x) = \begin{cases} 0 & , \ |x| < r \\ K(x) & , \ |x| \geq r \end{cases}$$

olmak üzere $K(x) = K_1(x) + K_\infty(x)$ biçiminde yazılabilir. Burada ispat için genelliği bozmadan $\|\varphi\|_{p,v} = 1$ alacağız. Şimdi, $K \circledast \varphi = K_1 \circledast \varphi + K_\infty \circledast \varphi$ olduğundan,

$$m\{x : |K \circledast \varphi| > 2\lambda\} \leq m\{x : |K_1 \circledast \varphi| > \lambda\} + m\{x : |K_\infty \circledast \varphi| > \lambda\}$$

Burada;

$$m\{x : |K_1 \circledast \varphi| > \lambda\} \leq \frac{\|K_1 \circledast \varphi\|_{p,v}^p}{\lambda^p} . \tag{4.11}$$

Çünkü;

$$\|\varphi\|_{p,v}^p = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |\varphi|^p x_n^{2v} dx \geq \int\limits_{x:|\varphi|^p > \lambda} |\varphi|^p x_n^{2v} dx \geq \lambda^p \int\limits_{x:|\varphi|^p > \lambda} x_n^{2v} dx = \lambda^p \, m\{x : |\varphi|^p > \lambda\} .$$

(4.11) e genelleşmiş Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} m\{x : |K_1 \circledast \varphi| > \lambda\} &\leq \frac{\|K_1 \circledast \varphi\|_{p,v}^p}{\lambda^p} \\ &\leq \frac{\|K_1\|_{1,v}^p \, \|\varphi\|_{p,v}^p}{\lambda^p} = \frac{\|K_1\|_{1,v}^p}{\lambda^p} \\ &= \frac{1}{\lambda^p} \int\limits_{|x|<r} \frac{1}{|x|^{n+2v-\alpha}} x_n^{2v} dx \\ &= \ldots \ (x = \rho\theta, 0 < \rho < r, \theta \in S) \ \ldots \\ &= \frac{1}{\lambda^p} \int\limits_0^r \rho^{n-1} \frac{1}{\rho^{n+2v-\alpha}} \rho^{2v} \left(\int\limits_S \theta_n^{2v} d\sigma_\theta \right) d\rho \\ &= \frac{1}{\lambda^p} c_1 \int\limits_0^r \frac{d\rho}{\rho^{1-\alpha}} \\ &= c_1 \frac{r^{\alpha p}}{\lambda^p} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan; genelleşmiş Young eşitsizliğinde $r = \infty$ ve $q = p'$ alınırsa,

$$\|K_\infty \circledast \varphi\|_\infty \leq \|K_\infty\|_{p',v} \|\varphi\|_{p,v} = \|K_\infty\|_{p',v}$$

olur. Burada; $\|K_\infty\|_{p',v}$ hesaplanırsa

$$\|K_\infty\|_{p',v} \leq c_2 r^{-\frac{n+2v}{q}}$$

elde edilir. Şimdi $\lambda = c_2 r^{-\frac{n+2v}{q}}$ alınırsa

$$\|K_\infty \circledast \varphi\|_\infty \leq \lambda \Rightarrow m\{x : |K_\infty \circledast \varphi| > \lambda\} = 0$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} m\left\{x : \left|K_{\infty} \circledast \varphi\right| > 2\lambda\right\} &\leq \left(c_1 \frac{r^{\alpha}}{\lambda}\right)^{p} \\ &= \ldots \left(\lambda = c_2 r^{-\frac{n+2v}{q}} \Rightarrow r = c_3 \lambda^{-\frac{q}{n+2v}} \Rightarrow r^{\alpha} = c_4 r^{-\frac{\alpha q}{n+2v}}\right) \ldots \\ &\leq \left(c_5 \lambda^{-\frac{\alpha q}{n+2v}-1}\right)^{p} = c_6 \lambda^{-q} \,. \end{aligned}$$

Böylece, $m\left\{x : \left|K \circledast \varphi\right| > 2\lambda\right\} \leq c_0 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{q}$ ve dolayısıyla her $\varphi \in L_{p,v}$ için

$$m\left\{x : \left|K \circledast \varphi\right| > \lambda\right\} \leq \left(\frac{c\left\|\varphi\right\|_{p,v}}{\lambda}\right)^{q} \,.$$

Sonuç olarak, $K \circledast \varphi$ operatörü zayıf (p,q) tipli ve böylece de Markinciewicz interpolasyon teoreminden:

$$\left\|K \circledast \varphi\right\|_{q,v} = \left\|I_v^{\alpha}\varphi\right\|_{q,v} \leq c_{p,q}\left\|\varphi\right\|_{p,v}$$

olur.

2)

$$J_v^{\alpha}\varphi\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} \mathcal{W}_t \varphi\left(x\right) dt$$

ifadesine integraller için genelleşmiş Minkowski eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned} \left\|J_v^{\alpha}\varphi\right\|_{p,v} &\leq \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} \left\|\mathcal{W}_t\varphi\right\|_{p,v} dt \\ &\leq \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} dt\right) \left\|\varphi\right\|_{p,v} \\ &= \left\|\varphi\right\|_{p,v} \,. \end{aligned}$$

3) ün ispatı da 2) nin ispatına benzer biçimde yapılabilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada esas olarak harmonik analizde önemli yeri olan ve birçok uygulama alanına sahip olan Poisson, Gauss-Weierstrass ve Metaharmonik yarıgrupları ve özellikleri yer almaktadır. Bunun için ilk önce, klasik Öklid kayması τ^y vasıtasıyla tanımlanan ve klasik yarıgruplar diye adlandırılan Riesz, Bessel ve Metaharmonik yarıgrupları ile genelleşmiş kayma T^y operatörü vasıtasıyla tanımlanan ve genelleşmiş yarıgruplar olarak adlandırılan genelleşmiş Riesz, genelleşmiş Bessel ve genelleşmiş Metaharmonik yarıgruplar ve özelliklerine yer verilmiştir. Daha sonra da, en önemli özellikleri olan "potansiyellerin yarıgruplar ile temsilleri" incelenerek, sırasıyla klasik potansiyeller olarak adlandırılan Riesz, Bessel ve Flett polansiyellerinin klasik yarıgruplar; genelleşmiş potansiyeller olarak adlandırılan genelleşmiş Riesz, genelleşmiş Bessel ve genelleşmiş Flett potansiyellerinin de genellemiş yarıgruplar ile temsilleri verilmiştir. Derleme niteliğinde organize edilen bu tez, özellikle klasik harmonik analizde ve Laplace-Bessel harmonik analizinde akademik çalışma yapmak isteyenler için yardımcı kaynak oluşturacak niteliktedir.

6. KAYNAKLAR

Aliev, I. A. and Bayrakçı, S. 1998. On inversion of B-eliptic potentials by the method of Balakrishnan-Rubin. Fractional Calculus and Applied Analysis, 1(4):365-384.

Aliev, I. A. and Uyhan-Bayrakçı, S. 2002. On inversion of Bessel potentials associated with the Laplace-Bessel differential operator. Acta Mathematica Hungarica, 95(1-2):125-145.

Aliev, I.A. 2009. Bi-parametric potentials, revelant function spaces and wavelet-like transforms. Integral Equations and Operator Theory, 65(2):151-167.

Aliev, I.A. and Eryiğit, M. 2002. Inversion of Bessel potentials with the aid of weighted wavelet tansforms. Mathematische Nachrichten, 242(1):27-37.

Aliev, I.A., Rubin, B. 2005. Wavelet-like transforms for admissible semi-groups; inversion formulas for potentials and Radon transforms. Journal of Fourier Analysis and Applications, 11(3):333-352.

Aliev, I.A., Rubin, B., Sezer, S. and Uyhan, S.B. 2008. Composite wavelet transforms: applications and perspectives, in: Gestur Olafsson, et al.(Eds), Radon transforms, Geometry and Wavelets, in: Contemp, Math., Amer. Math. Soc. 1-27

Aliev, I.A. and Sağlık, E. 2016. Generalized Riesz Potential Spaces and their Characterization via Wavelet-Type Transform. Filomat,30(10):2809-2823.

Aliev, I.A., Sezer, S. and Eryiğit, M.2006. An integral transform associated to the Poisson integral and inversion of Flett potentials, Journal of matematical analysis and applications, 321(2):691-704.

Delsarte, J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor. J. Math. Pure Appl, 17:213-231.

Flett, T. 1971. Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces. Proceedings of the London Mathematical Society, 3(3):385-451.

Folland, G.B. 1984. Real analysis: modern techniques and their applications. John Wiley & Sons.

Gadjiev, A.D. and Aliev, I.A. 1988a. On a class of potential type operator generated by a generalized shift operatör. In Reports of Enlarged Session of the Seminars of IN Vekua Inst. Appl. Math. (Tbilisi), 3, 21-24 pp.

Gadjiev, A.D. and Aliev, I.A. 1988b. Riesz and Bessel potential generated by a generalized translation and their inverses. In Proc. IV All-Union Winter Conf., Theory of functions and approximation, Saratov(Russia) 47-53 pp.

Gradshteyn, I. and Ryzhik, I. 1994. Table of integrals, series and products. Academic press, 5th edition, 6.596(3):693-694.

Guliev, V. S. 2003. On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operatör. Mathematical Inequalities and Applications, 6:317-330.

Kipriyanov, I. A. 1967. Fourier-Bessel transforms and imbedding theorems for weight classes. Trudy Matematicheskogo Instuta imeni VA Steklova, 89:130-213.

Levitan, B. M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 6(2):102-143.

Lizorkin, P.I. 1967. Multipliers of Fourier integrals in the spaces $L_{p,\theta}$. Trudy Mat. Inst. Steklov. 89:231-248.

Rubin, B. 1996. Fractional integrals and potentials, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman, Harlow, 218-223.

Sadosky, C. 1979. Interpolation of Operators and Singular Integrals. Marcel Dekker, Inc. New York, 13-14 pp.

Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, 3(58):16.

Sezer, S. and Aliev, I. A. 2010. A new characterization of the Riesz potential spaces with the aid of a composite wavelet transform. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 372(2):549-558.

Stein, E.M.-1970. Stein, E.M., Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions 1970.

Stein, E. M. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton university Press.

Samko, S.G, Kilbas, A.A. and Marichew, O.I-1993 Samko, S.G,Kilbas,A.A. and Marichew, O.I, Integrals and Derivatives of Fractional Orders and Its Some Applications 1993.

ÖZGEÇMİŞ

VEYSEL TARTAN

veysel.tartan@hotmail.com.tr

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2016-2021	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2011-2014	Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği, İzmir

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

İlköğretim Matematik Öğretmeni 2014-devam ediyor	Milli Eğitim Bakanlığı Ova Ortaokulu, Antalya