T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

KONVEKS KÜME VE KONVEKS FONKSİYON KAVRAMLARININ BAZI GENELLEŞTİRME METOTLARI

Dilan TANRIVERDİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2020

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

KONVEKS KÜME VE KONVEKS FONKSİYON KAVRAMLARININ BAZI GENELLEŞTİRME METOTLARI

Dilan TANRIVERDİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2020

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS KÜME VE KONVEKS FONKSİYON KAVRAMLARININ BAZI GENELLEŞTİRME METOTLARI

Dilan TANRIVERDİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 28/07/2020 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE (Danışman)
Doç. Dr. Mümün CAN
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

KONVEKS KÜME VE KONVEKS FONKSİYON KAVRAMLARININ BAZI GENELLEŞTİRME METOTLARI

Dilan TANRIVERDİ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE

Haziran 2020, 47 sayfa

Bu tezdeki amacımız konvekslik kavramının başlıca genelleştirme metotlarını ve onlarla ilgili örnekleri vermektir.

Bu tez çalışmasında önce konveks küme kavramının, klasik konveks kümelerin sahip olduğu bazı özelliklere (ayırma, kesişim, konveks kabuk gibi) dayalı olarak genelleştirme metotlarına değinilmiş ve örnekler sunulmuştur. Daha sonra konveks fonksiyon kavramının, yine klasik konveks fonksiyonların bazı özellik ve kavramlarına (bir fonksiyon ailesinin supremumu olma, fonksiyonlar için konveks kabuk gibi) dayanılarak genelleştirilme metotları ve örnekleri verilmiştir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümü giriş için ayrılmış olup bu bölümde konvekslik kavramının kısa bir tarihçesi açıklanmıştır. Tezin ikinci bölümünde tezde kullanılan kaynaklarla ilgili genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise tezde adı geçen temel tanımlar sunulmuştur. Dördüncü bölüm ise üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısım konveks kümelerin bazı genelleştirme metotları, ikinci kısım konveks fonksiyonların bazı genelleştirme metotları ve son kısım ise bu iki kategoriye giremeyen durumlar ile ilgilidir. Bu üç durum için bazı örnekler sunulmuştur. Beşinci bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Konvekslik, Konveks Fonksiyon, Konveks Küme, Soyut Konvekslik

JÜRİ: Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Doç. Dr. Mümün CAN
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

SOME GENERALIZATION METHODS OF THE CONCEPTS OF CONVEX SET AND CONVEX FUNCTION

Dilan TANRIVERDİ

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE
June 2020, 47 pages

Our aim in this thesis is to give the main generalization methods of convexity and related examples. In this thesis, first of all, the generalization methods of classical convex sets based on some properties such as separation, intersection, convex hull are mentioned and examples are presented. Later, the generalization methods of classical concept of convex function, some features and concepts of classical convex functions (a function convex functions based on some properties such as being supremum of a certain set of functions, convex hull for functions are given and related examples are presented.

This thesis study consists of five chapters. In the first section of the thesis, a brief history of the concept of convexity is explained. In the second section of the thesis, general information about the sources used in the thesis is given. In the third section, basic definitions are given. The fourth section consists of three parts. The first part is about some generalization methods of convex sets. The second part is about some generalization methods of convex functions. The last part is about the conditions that can not fall into these two categories. For these three conditions, some examples are presented. In the fifth section, results and suggestions are given.

KEYWORDS: Abstract Convexity, Convexity, Convex Function, Convex Set

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Assoc. Prof. Dr. Mümün CAN
Assoc. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmada yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, her soruma sabırla cevap veren, bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE'ye en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Lisans ve lisansüstü eğitimim sırasında, bilgileri ışığında aydınlandığım tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca verdiği manevi destekten ve yardımlarından dolayı Sayın Arş. Gör. Çağla SEKİN'e teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca her zaman yanımda olan çok değerli anneme, babama ve ablalarıma içten teşekkür ederim.

Bu çalışmayı eğitim hayatımın mimarları olan aileme armağan ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
AKADEMİK BEYAN v
SİMGELER VE KISALTMALAR vi
ŞEKİLLER DİZİNİ vii
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK TARAMASI 4
3. MATERYAL VE METOT 6
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 13
 4.1. KONVEKS KÜMELERİN GENELLEŞTİRİLME METOTLARI 13
  4.1.1. Doğru Parçası Tanımı İle Genelleştirme (İç Yaklaşım) 13
  4.1.2. Kesişimler Yolu İle Genelleştirme (Kesişimsel Yaklaşım) 18
  4.1.3. Ayırma Özelliği İle Küme Ailelerine Göre Genelleştirme 20
  4.1.4. Ayırma Özelliği İle Fonksiyon Sınıflarına Göre Genelleştirme . . 21
  4.1.5. Konveks Sistemler Yolu İle Genelleştirme 22
  4.1.6. Kabuk (Hull) Operatorü Yardımı İle Genelleştirme 23
 4.2. KONVEKS FONKSİYONLARIN GENELLEŞTİRİLME METOTLARI . 24
  4.2.1. İç Yaklaşımlar Yolu İle Genelleştirme 24
  4.2.2. Bir Fonksiyon Sınıfı Yardımı İle Genelleştirme 33
  4.2.3. Konveks Sistemler Yolu İle Genelleştirme 35
  4.2.4. Kabuk (Hull) Operatorü Yardımı İle Genelleştirme 35
 4.3. KATEGORİZE EDİLEMEYEN BAZI KONVEKS KÜME VE FONKSİYON TANIMLARI 36
5. SONUÇLAR 41
6. KAYNAKLAR 42
ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum "Konveks Küme ve Konveks Fonksiyon Kavramlarının Bazı Genelleştirme Metotları" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

26/06/2020

Dilan TANRIVERDİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{++}$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n_{++}$	: $\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i > 0, i = 1, 2, ..., n\}$
$\langle ., . \rangle$	: İç çarpım
$\Vert . \Vert$	: Öklid normu
$d(x, y)$	: Öklid metriği
$\inf A$	: A kümesinin infimumu
$\sup A$	: A kümesinin supremumu
clA	: A kümesinin kapanışı
$convA$	: A kümesinin konveks kabuğu
$B(x_0, r)$	: x_0 noktasının r yarıçaplı açık komşuluğu
K_s^2	: İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar sınıfı
$[p, q]_C$	: C-spindle
X^*	: X'in eşlenik uzayı
Γ_{x_*}	: Bir ucu x_* olan eğri ailesi
$C[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi
$f_{co}(x)$	: f fonksiyonunun konveks kabuğu
$\text{supp}(f, H)$	: $\{h \in H : h \leq f\}$
$\mathbb{R}^X$	: Tüm $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesi
f_v	: $v(f)$
2^X	: X'in tüm alt kümelerinin kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 A, B, C kümelerine ait konveks kabuklar 9

Şekil 4.2 $x = (0, 0)$ ve $y = (0, 1)$ olmak üzere d_1 ve d_2 metriklerine göre [x,y] doğruları 15

Şekil 4.3 Verilen denkleme göre konveks ve klasik konveks küme 17

Şekil 4.4 Kaba konveks olan ve olmayan B kümesi 19

Şekil 4.5 x noktası A'dan ayrılabilir, B'den ayrılamaz 20

Şekil 4.6 Dışındaki noktadan ayrılabilen ve ayrılamayan küme 21

Şekil 4.7 Quasi konveks fonksiyon örnekleri 31

Şekil 4.8 f ve f_{co} grafikleri 35

Şekil 4.9 $f(x) = x(x^3 - x^2 + 1)$ fonksiyonunun grafiği 37

1. GİRİŞ

Matematiği, insan beyninin ürünü olan ve uygulanabilirliğinden ziyade kendi iç tutarlılığa sahip soyut kavramlar ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler bütünü olarak tanımlayabiliriz. Matematiksel kavramlar ve onun üzerine inşa edilen yeni yapılar veya onların keşfedilen özellikleri, uygulama zemini bulmasına veya ilgililerinin onları geliştirmesine göre teorik ve uygulamalı çok büyük değişimlere yol açmış ve insanlığın yüzyıllar süren macerasında önemli bir rol oynamıştır. Örneğin, temel bir kavram olan küme, üzerinde tanımlanan bir fonksiyonla daha önemli bir hal almış, fonksiyon kavramı da türevlenebilme ve integrallenebilme gibi kavramların ortaya çıkmasıyla uygulama sahasında çok büyük değişimlere neden olmuştur. Bunlar kadar olamasa da oldukça kullanışlı matematiksel kavramlardan bir tanesi de konvekslik kavramıdır.

Cisimler için, sezgisel olarak içe doğru bükülme olmaması diye tarif edebileceğimiz konvekslik, küme ve fonksiyon kavramını daha kullanışlı yapan ilave özelliklerdendir. Günlük yaşantımızda kullandığımız cisimlerin şekline ve geometri derslerinde formüllerini verdiğimiz birçok şekle bakarsak bir çoğunun konveks olduğunu görürüz.

Matematikte konvekslik kavramı, analiz ve geometri arasında önemli bir ilişki oluşturmaktadır. Konveks fonksiyonlar ve kümeler, özellikle maksimum/minimum belirleme ya da optimal çözüme ulaşma problemleri olarak tarif edebileceğimiz optimizasyon problemlerinin çözümünde çok önemli bir yer tutmuştur. Klasik bir optimizasyon problemi kısıt fonksiyonlarının sınırladığı bir küme üzerinde bir amaç fonksiyonunun maksimum veya minimum değerinin bulunması olarak tarif edilebilir. Amaç fonksiyonunun ve üzerinde çözüm aranan kümenin konveks olması durumu birçok algoritma ve çözüm metotunun geliştirilmesine olanak sağlamış, konveks optimizasyon teorisi ortaya çıkmıştır (Rockafellar 1974; Ben-Tal 2001). Konveks optimizasyon, ekonomiden tıbba kadar farklı araştırmacılar tarafından ele alınmıştır. Özellikle son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiştir ve dolayısıyla bu konudaki çalışmalarda ciddi bir artış söz konusudur.

Konvekslik kavramının en önemli katkılarından biri de onun yardımıyla elde edilen birçok eşitsizliktir. Konveks fonksiyonun tanımı da eşitsizlik üzerine kurulu olduğundan birçok önemli eşitsizlik de, konveks fonksiyonların uygulamalarının bir sonucu olmuştur. Örnek olarak; Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri gibi genel eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin bir sonucudur. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlik teorisi ne kadar önemliyse, aynı şekilde eşitsizlik teorisinde de konveks fonksiyonlar çok önemlidir. Konveks fonksiyonlar ve özellikleri kullanılarak modifiye Jensen, Hermite-Hadamard, Popoviciu eşitsizlikleri gibi birçok yeni eşitsizlik elde edilmiştir (Beckenbach ve Bellman 2012).

Hadamard, 1893 yılında konvekslik ile ilgilenmiştir fakat sistematik olarak konveksliğin çalışılmasına Johan Jensen ile 1905 ve 1906 yıllarında başlanmıştır (Jensen 1906). Hardy, Littlewood ve Polya'nın yazdığı "Inequalities" kitabı, konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler üzerine yazılmış temel bir kitaptır (Hardy, Littlewood ve Polya 1952). 1987 yılında ise Pecaric tarafından yazılan "Convex Functions: Inequalities" kitabı, sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizliklere yer veren ilk kaynak olmuştur (Pecaric 1987). Aynı zamanda Fenchel, Rockafellar, Pallaschke, Rolewicz konveks küme ve fonksiyonlar teorisine büyük katkılar sunmuşlardır (Rockafellar 1970; Fenchel 1983; Pallaschke ve Rolewicz 2013).

Görüldüğü üzere konvekslik kavramı hem optimizasyon teorisinde hem de eşitsizlik teorisinde çok önemli bir yer tutmaktadır. Zamanla gelişen teorik ve uygulamalı bilimler sayesinde klasik konvekslik kavramının genişletilmesine ve farklı konvekslik çeşitlerinin tanımlanmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu anlamda konvekslik kavramının genelleştirilmesi (soyut konvekslik kavramı) ortaya çıkmıştır. "Soyut konveks analizin" gelişimi de öncüsü olan "konveks analizin" gelişimi gibi, esas olarak uygulamalar tarafından optimizasyona yönlendirilmiştir. Soyut konvekslik, matematiksel analiz ve optimizasyon problemlerinin çalışmasında birçok uygulama bulmuştur. Soyut konvekslik üzerine ilk önemli çalışmalar arasına sıralı uzaylarda fonksiyonel analiz ve bazı uygulamaları, Choquet teorisi ve yaklaşım teorisi sayılabilir. Bu çalışmalar S. S. Kutateladze ve A. M. Rubinov tarafından 1976'da Rusça olarak yayınlanmıştır (Kutateladze ve Rubinov 1976). Van de Vel, D. Pallaschke, S. Rolewicz ve I. Singer tarafından yazılan monografilerde soyut konveks analizin genişlemeleri, optimizasyon teorisine uygulamaları, konveks olmayan kümeler üzerinde konveks yapılara benzer yapıların kurulmasına yönelik çalışmalara yer verilmiştir. Van de Vel'in "Theory of Convex Structure" adlı çalışmasında ve Ivan Singer'in "Abstract Convex Analysis" adlı eserinde konvekslik kavramının farklı yapılar için genelleştirilmesi ile ilgili çalışmalar derlenmiş ve soyutlaştırma yollarına değinilmiştir

(Van de Vel 1993; Singer 1997) .

Bu tezde konveks küme ve fonksiyonların genelleştirilme metotları verilmiştir. Bu konuda Ivan Singer'in panoramik bakışı temel alınmıştır ve literatür incelemelerinde karşılaşılan farklı tarz genelleştirme metotları da ilave edilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Konveks fonksiyonların kendi içinde incelenmeyi hak edecek şekilde tanınması Jensen' le olmuştur ve o meşhur eşitsizliği şu şekildedir:

f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$'de bir konveks fonksiyon olsun. $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ olmak üzere

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_m f(x_m)$$

eşitsizliği sağlanır. Ancak konvekslikle uğraşan ilk kişi Jensen değildir. C. Hermite, O. L. Hölder ve O. Stolz'un da bu konudaki çalışmaları es geçilmemelidir (Hermite 1883; Hölder 1889; Stolz 1893). Konveks fonksiyonlar konusunun yaygınlaştırılmasında büyük bir rol, G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya'nın 1934'te yazdığı “Inequalities” kitabı tarafından oynanmıştır. Diğer önemli kitap ise Beckenbach ve Bellman tarafından 1961'de yazılan “An Introduction to Inequalities” kitabıdır.

Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak 1987'de Pecaric tarafından yazılan “Convex Functions: Inequalities” kitabıdır. Fakat eşitsizlikler konusunda konvekslik kavramı göz önünde bulundurularak yapılan en önemli çalışmalardan biri 1881 yılında Hermite'in Journal Mathesis dergisine gönderdiği konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğidir ve bu eşitsizlik şöyledir:

$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı her reel konveks fonksiyon için

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

sağlanır.

Soyut konvekslikte literatürde en önemli kaynaklar Van De Vel'in yazmış olduğu "Theory of Convex Structures" ve Ivan Singer'in "Abstract Convex Analysis" kitaplarıdır. Theory of Convex Structures kitabında konveksliğin farklı yapılar üzerindeki çeşitlerine kısmen değinilmiştir. Abstract Convex Analysis kitabında ise daha metodolojik yaklaşım sergilenmiştir. Biz bu çalışmamızda Singer'in yaklaşımını temel alıyoruz.

Soyut konvekslik ile alakalı Türkçe literatürde yapılan kaynak taramasında konu olarak yakın üç teze rastlanılmaktadır. Gamze Geçdoğan tarafından yazılan tezde, topolojik konveks yapılar, latisler üzerinde konvekslik, vektör uzaylarında konvekslik, geodezik konveks yapılar gibi konular üzerinde durulmuştur (Geçdoğan 2016). İlknur Yeşilce tarafından yazılan doktora tezinde ise klasik konvekslik ve soyut konvekslikten bahsedilmiştir. Ama çoğunlukla B-konveks küme ve fonksiyonlar üzerinde durulmuştur (Yeşilce 2016). Ve son olarak Yücel Demirsoy tarafından yazılan tezde ise topolojik soyut konvekslik ve fonksiyonel soyut konvekslik kavramları üzerinde durulmuştur (Demirsoy 2019).

Bu çalışmada ise konveksliği genelleştirme metotlarını incelemekteyiz. İlk olarak konveks kümelerin genelleştirilme yolları başlığı altında kümenin elemanı olan noktalar vasıtasıyla (iç yaklaşım), kümeyi kapsayan aynı özelliğe sahip kümelerin kesişimi yoluyla, konveks kümelerin ayrılma özelliği yardımıyla (küme aileleri ve fonksiyon sınıflarına göre), konveks sistemler ve kabuk operatörü aracılığıyla genelleştirme yöntemleri anlatılmıştır. İkinci olarak konveks fonksiyonların genelleştirilme yolları başlığı altında iç yaklaşımlar yolu ile genelleştirme (log konvekslik, r-konvekslik, s-konvekslik, harmonik konvekslik vb.), bir fonksiyon sınıfı yardımıyla genelleştirme, konveks sistemler ve hull operatörü yardımıyla genelleştirme yöntemleri incelenmiştir. Ve son olarak, bu iki kategoriye girmeyen durumlar üçüncü başlık altında sunulmuştur.

3. MATERYAL VE METOT

Tanım 3.1. *V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise V kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır denir.*

1. V kümesinde $+$ ile tanımlanan işleme toplama denilir. Ve bu işlem aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) Her $u, v \in V$ için $u + v \in V$

ii) Her $u, v, w \in V$ için $(u + v) + w = u + (v + w)$

iii) $0 \in V$ vardır öyle ki her $u \in V$ için $u + 0 = 0 + u$

iv) Her $u \in V$ için V kümesinde $-u$ ile gösterilen ve $u + (-u) = 0$ ve $(-u) + u = 0$ eşitliklerini sağlayan bir $-u$ elemanı vardır ve V kümesinde toplamaya göre ters elemanı temsil eder.

v) Her $u, v \in V$ için $u + v = v + u$

2. $\mathbb{R} \times V \to V$, $(a, u) \to au$ biçiminde, adına skalerle çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır ve bu fonksiyon için aşağıdaki önermeleri doğrular:

i) Her $a \in \mathbb{R}$ ve her $u, v \in V$ için $a(u + v) = au + av$

ii) Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $u \in V$ için $(a + b)u = au + bu$

iii) Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $u \in V$ için $(ab)u = a(bu)$

iv) $\mathbb{R}$'nin çarpmaya göre birim elemanı 1 olduğundan V'nin her elemanı için $1u = u$ olur.

Tanım 3.2. *X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.*

i) $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

iii) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Tanım 3.3. *X bir vektör uzay ve $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$ olsun. $x, y \in X$ keyfi vektörler ve α skaler olmak üzere,*

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

iv) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ *özelliklerini gerçekleyen* $\|.\|$ *fonksiyonuna* X *uzayı üzerinde bir norm ve* $(X, \|.\|)$ *ikilisine bir normlu uzay denir.*

Tanım 3.4. *Bir* $x=(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *elemanının Öklid normu,*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.5. $a \in \mathbb{R}^n$ *ve* $r \in \mathbb{R}_{++}$ *olmak üzere* $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| = r\}$ *ile tanımlı kümeye* a *merkezli* r *yarıçaplı küre denir.* $a=(0,0,...,0) \in \mathbb{R}^n$ *ve* $r=1$ *olması durumda birim küre olarak adlandırılır.* S*'nin merkezinden geçen hiperdüzlem tarafindan ayrılan ve iki açık kümeye yarı küre denir.*

Tanım 3.6. X *bir vektör uzayı ve* $f : X \to \mathbb{R}$ *olsun. Eğer her* $x, y \in X$ *ve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *için*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

oluyorsa f*'ye* X *üzerinde bir lineer fonksiyoneldir denir.*

Tanım 3.7. X *bir vektör uzayı olsun.* X *üzerinde tanımlı lineer fonksiyoneller kümesine* X*'in dual vektör uzayı ya da* X*'in eşlenik uzayı denir ve* X^* *ile gösterilir.*

Tanım 3.8. V, $\mathbb{R}$ *cismi üzerinde bir vektör uzayı ve* $< u, v >: V \times V \to \mathbb{R}$ *olsun.*

i) $\forall u, v \in V$ *için* $< u, v > = < v, u >$

ii) $\forall u, v, w \in V$ *için* $< u+w, v > = < u, v > + < w, v >$

iii) $\forall u, v \in V, k \in \mathbb{R}$ *için* $< ku, v > = k < u, v >$

iv) $\forall u \in V$ *için* $< u, u > \geq 0$

v) $< u, u > = 0 \Leftrightarrow u = 0$

koşullarını sağlayan $< u, v >$ *fonksiyonuna bir iç çarpım denir.*

Tanım 3.9. *Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu vektör uzayına tam uzay denir.*

Tanım 3.10. *Tam, normlu uzaya Banach uzayı denir.*

Tanım 3.11. $x=(x_1, ..., x_n)$, $y=(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *olsun.*

$$(x_1, ..., x_n) = k(y_1, ..., y_n)$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $k \in \mathbb{R}$ *varsa* x *ile* y*'ye paraleldir denir ve* $x//y$ *ile gösterilir.*

Tanım 3.12. *(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun.*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.

Tanım 3.13. *(X, d) bir metrik uzay ve G, X'in bir alt kümesi olsun. Her $x \in G$ için $B(x, r) \subseteq G$ olacak şekilde bir $r > 0$ varsa o zaman G'ye bir açık küme denir. $\mathbb{R}^n$'de de aynı şekilde norm ile verilebilir.*

Örnek 3.14. *$\emptyset$ ve $\mathbb{R}^n$ kümeleri açık kümelerdir.*

Tanım 3.15. *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $\mathbb{R}^n \backslash A$ kümesi açık bir küme ise A kümesine kapalı küme denir.*

Örnek 3.16. *$\emptyset$ ve $\mathbb{R}^n$ kümeleri kapalı kümelerdir.*

Tanım 3.17. *Bir küme üzerinde yansıma, simetri ve ters simetri özellikleri taşıyan bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı denir*

Tanım 3.18. *Üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlı kümeye poset denir.*

Tanım 3.19. *(X, d) bir metrik uzay ve A, X'in bir alt kümesi olsun. $x_0 \in X$ olsun. Eğer*

$$\forall r > 0 \text{ için } A \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$$

oluyorsa (bu durumda x_0, elemanları A kümesinden olan yakınsak bir dizinin limiti) x_0 noktası A kümesinin kapanış noktasıdır denir ve A kümesinin tüm kapanış noktalarının kümesi $\mathrm{cl}A$ ile gösterilir.

Tanım 3.20. *$A \subset \mathbb{R}^n$ ve $a \in \mathbb{R}^n$ olsun.*

$$a + A = \{x \in \mathbb{R}^n : x = a + y, \ y \in A\}$$

kümesine A'nın bir ötelemesi denir.

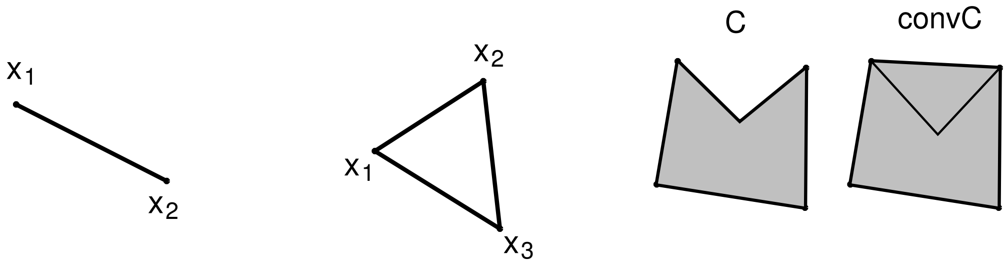
Tanım 3.21. *$C \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall x, y \in C$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için,*

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$$

ise C kümesine konveks küme denir.

Tanım 3.22. *$X \subset \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine X'in konveks kabuğu denir.*

Örnek 3.23. *$A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{x_1, x_2, x_3\}$, C kümelerinin konveks kabukları aşağıdaki gibidir.*



(a) convA **(b)** convB **(c)** C ve convC

Şekil 3.1. A, B, C kümelerine ait konveks kabuklar

Tanım 3.24. *$A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere her $a, b \in A$ için $\{x \in \mathbb{R} : x = a\lambda + \mu b,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset A$ oluyorsa A kümesine afin küme denir.*

Tanıma göre bir kümenin herhangi iki elemanını içeren doğru, küme tarafından kapsanıyorsa afindir.

Tanım 3.25. *$\mathbb{R}^n$'in $n-1$ boyutlu afin alt kümesine bir hiperdüzlem denir.*

Teorem 3.26. *Her hiperdüzlem $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x \rangle = b\}$ şeklinde ifade edilebilir. Her hiperdüzlem bir lineer fonksiyon ve lineer denklem ile ifade edilebilir.*

Tanım 3.27. *$a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x \rangle = b\}$ şeklinde ifade edilen hiperdüzlem $\mathbb{R}^n$'i aşağıdaki parçalara ayırır:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x \rangle \leq b\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x \rangle \geq b\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x \rangle < b\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x \rangle > b\}$$

bunların her birine yarım-uzay denir.

Yukarıda ilk iki yarım-uzay kapalı, diğer ikisi açıktır.

Tanım 3.28. *$A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olsun. Eğer*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

oluyorsa f'ye x_0 noktasında alttan yarı süreklidir denir. Eğer f, A'nın her elemanı için alttan yarı sürekliyse f'ye A'da alttan yarı süreklidir denir.

Tanım 3.29. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olsun. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için,*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Tanım 3.30. *X bir küme ve $\mathcal{F}$, X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. Eğer,*

i) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,

ii) $\forall A, B \in \mathcal{F}$ *için* $A \cap B \in \mathcal{F}$,

iii) $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{F}$ *ise* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$

koşulları sağlanıyorsa, $\mathcal{F}$ ailesine X kümesi üzerinde bir topolojik yapı denir. $\mathcal{F}$ ailesi X kümesi üzerinde topolojik bir yapı oluşturuyorsa $(X, \mathcal{F})$ sıralı çiftine ya da kısaca X'e topolojik uzay denilir.

Tanım 3.31. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ için*

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna sublineer fonksiyon denir.

Tanım 3.32. *$s, t \in I \subset \mathbb{R}_{++}$ olmak üzere,*

i) $\min\{s, t\} \leq M(s, t) \leq \max\{s, t\}$

ii) $M(s, t) = M(t, s)$

koşullarını sağlayan herhangi $M : I \times I \to I$ fonksiyonuna bir orta denilir.

$M(s, t) = \frac{s+t}{2}$, $M(s, t) = \sqrt{st}$, $M(s, t) = \frac{2st}{s+t}$ olarak tanımlanırsa sırasıyla s ve t'nin aritmetik, geometrik ve harmonik ortası elde edilir.

İleride B-konvekslik tanımında kullanacağımız bir notasyonu da verelim.

Tanım 3.33. $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ *ve* $x_{i,j}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$ *nin* j. *bileşenini belirtsin. Bu durumda*

$$\bigvee_{i=1}^{m} x_i = (\max\{x_{1,1}, x_{1,2}, ..., x_{1,m}\}, ..., \max\{x_{1,1}, x_{1,2}, ..., x_{1,m}\})$$

ve

$$\bigwedge_{i=1}^{m} x_i = (\min\{x_{1,1}, x_{1,2}, ..., x_{1,m}\}, ..., \min\{x_{m,1}, x_{m,2}, ..., x_{m,m}\})$$

olur.

Tanım 3.34. $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_+$ *olsun.* $\mathbb{R}^n_{++}$ *üzerinde sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi verilir:*

$$x, y \in \mathbb{R}^n_{++},\ x_i \leq y_i \Leftrightarrow x \ll y$$

ve bu bağıntıya göre f*'nin artanlığı aşağıdaki gibi verilir:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n_{++},\ x \ll y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Tanım 3.35. $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_+$ *olsun. Her* $t > 0$ *için* $f(tx) = tf(x)$ *oluyorsa* f*'ye pozitif homojen fonksiyon denir.*

Tanım 3.36. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *olarak verilsin.* f *fonksiyonunun* $[a, b]$ *kapalı aralığındaki* $x_0 < ... < x_n$ *için bölünmüş farkı* $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ *için* $f[x_i] = f(x_i)$ *olmak üzere*

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f[x_0, ..., x_{n-1}] - f[x_1, ..., x_n]}{x_0 - x_n}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.37. (X, d) *bir metrik uzay,* $l \in \mathbb{R}_+$,$\gamma : [0, l] \to X$ *ve* $x, y \in X$ *olsun. Eğer* $\gamma(0) = x$, $\gamma(l) = y$ *ve her* $t_1, t_2 \in [0, l]$ *için*

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$$

oluyorsa γ*'ya* x *ile* y*'yi bağlayan bir geodezik denir (Bridson ve Haefliger 2013).*

Tanım 3.38. *$D \subset \mathbb{R}^n$, $x_* \in D$ ve $\Gamma_{x_*} = \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n : \gamma(0) = x_*$ ve γ sürekli$\}$ olsun. Eğer $\forall x \in D$ için $\gamma_x(0) = x_*$, $\gamma_x(1) = x$ ve $\forall t \in [0,1]$ için $\gamma_x(t) \in D$ koşulunu sağlayan bir $\gamma_x \in \Gamma_{x_*}$ varsa D kümesi x_* noktasında Γ_{x_*}-yıldız şekilli kümedir (Dogaru vd. 1998).*

Tanım 3.39. *$C \subset \mathbb{R}^n$ ve $p, q \in \mathbb{R}^n$, C'nin bir ötelemesi tarafindan kapsanan birbirinden farklı olması gerekmeyen C'nin p ve q'yu içeren bütün ötelemelerinin kesişimi C-spindle olarak adlandırılır ve $[p,q]_C$ ile gösterilir. Eğer C'nin p ve q'yu içeren hiçbir ötelemesi yoksa $[p,q]_C = \mathbb{R}^n$ kabul edilir (Langi vd. 2013).*

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. KONVEKS KÜMELERİN GENELLEŞTİRİLME METOTLARI

4.1.1. Doğru Parçası Tanımı İle Genelleştirme (İç Yaklaşım)

Bu yaklaşımda konveks küme tanımı kümenin elemanı olan noktalar vasıtasıyla verilir. Diğer taraftan temel konveks küme kavramı geometrik olarak, kümenin herhangi iki elemanını birleştiren doğru parçasının küme içinde yer alması olarak düşünülebilir. Bu tanımdan hareketle herhangi bir matematiksel yapının elemanları üzerinde doğru parçası kavramının tanımlanış biçimlerine göre konveks küme kavramı genelleştirilebilir.

X bir matematiksel yapı, $x, y \in X$ ve $\varphi_{x,y} : [0,1] \to X$ olmak üzere x ile y'yi birleştiren doğru parçası tanımının

$$[x,y] = \{\varphi_{x,y}(\lambda) : 0 \leq \lambda \leq 1, \varphi_{x,y}(0) = x, \varphi_{x,y}(1) = y \text{ veya } \varphi_{x,y}(0) = y, \varphi_{x,y}(1) = x\}$$

ile verilmesi durumunda

$$x, y \in A \Rightarrow [x,y] \subseteq A \tag{4.2}$$

koşulunu sağlayan $A \subset X$ kümesine (genelleştirilmiş) konveks küme denir (Singer 1997).

Burada $X = \mathbb{R}^n$ veya $\varphi_{x,y}(\lambda) = \lambda y + (1-\lambda)x$ olması durumunda bir $A \subset \mathbb{R}^n$ için klasik konvekslik tanımı elde edilmiş olur.

Aşağıda bu yolla elde edilen konveks küme çeşitlerine örnekler verilecektir. Tam olarak bu tanıma uymasa da benzer olanlar bu başlık altında verilecektir.

Tanım 4.40. $x, y \in \mathbb{R}^2_{++}$ *için*

$$xy = (x_1y_1, x_2y_2) \in \mathbb{R}^2_{++} \text{ ve } \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right) \in \mathbb{R}^2_{++}$$

olarak verilsin. $E \subseteq \mathbb{R}^2_{++}$ *olsun.* $\forall x, y \in E$ *için* $\frac{2xy}{x+y} \in E$ *oluyorsa* E *kümesine harmonik konveks küme denir (Xia ve Chu 2009).*

Burada $[x,y] = \frac{2xy}{x+y}$ olarak alınmışır.

Tanım 4.41. X*,* $\mathbb{R}$ *veya* $\mathbb{C}$ *cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı,* $Y \subset X$ *ve* $p \in (0,1)$ *olsun. Eğer her* $x, y \in Y$ *için*

$$(1-p)x + py \in Y$$

koşulu sağlanıyorsa Y *kümesine* p*-konvekstir denir (Aleman 1985).*

Tanım 4.42. *X, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzay ve $Y \subset X$ olsun. Her $x, y \in Y$ için*

$$(1-p)x + py \in Y$$

koşulunu sağlayan $p \in (0,1)$ bulunabiliyorsa Y kümesine zayıf-konveks denir (Aleman 1985).

Örnek 4.43. *$(0,1)$ aralığındaki her p için, klasik konveks küme bir p-konveks kümedir ve $(0,1)$ aralığındaki bir p için her p-konveks küme zayıf-konvekstir (Aleman 1985).*

Örnek 4.44. *$\mathbb{R}$' de $\{0\} \cup (1,2]$ kümesi zayıf-konvekstir fakat $(0,1)$ aralığındaki herhangi bir p değeri için p-konveks değildir (Aleman 1985).*

Tanım 4.45. *Eğer klasik konveks küme tanımında kullanılan*

$$[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$$

kümesi (doğru parçası), $\Lambda = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ olmak üzere

$$[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in \Lambda\}$$

kümesi ile yer değiştirilirse (4.2) koşulunu sağlayan $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi $\frac{1}{2}$-konveks veya orta konveks olarak adlandırılır (Green ve Gustin 1950).

Bir kümenin herhangi x ile y elemanını birleştiren doğru parçası , x ve y'nin koordinatları üzerinden maksimum alınması yardımıyla tanımlanırsa aşağıdaki B-konveks küme tanımı elde edilebilir.

Tanım 4.46. *$A \subset \mathbb{R}^n_+$ olsun. $\forall x_1, x_2 \in A$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için $\lambda x_1 \vee x_2 \in A$ oluyorsa, A kümesine B-konveks küme denir (Yeşilce 2016).*

Bazı durumlarda doğru parçası tanımı, kümenin elemanları arasında mevcut olan bazı ilişkilerle de ifade edilebilir. Aşağıda küme üzerinde tanımlı kısmi sıralama bağıntısına dayanılarak konveks küme tanımı verilmiştir.

Tanım 4.47. *X bir poset ve X üzerinde tanımlı sıralama bağıntısı $\preceq$ olsun. $x, y \in X$ için*

$$[x,y] = \{z \in X : x \preceq z \preceq y\}$$

olarak tanımlanırsa (4.2) koşulunu sağlayan $A \subseteq X$ kümesi sıralama konveks kümedir denir (Birkhoff 1967).

Konveks küme tanımı metrik uzaylarda metrik kullanılarak da verilebilir.

Tanım 4.48. *$X = (X, d)$ keyfi metrik uzay ve*

$$[x, y] = \{z \in X : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\} \tag{4.3}$$

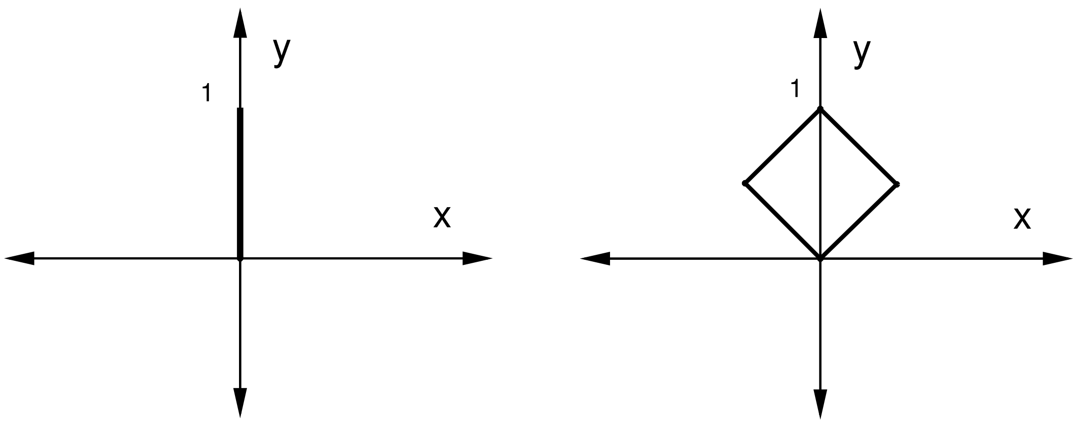
olarak tanımlansın. Bu durumda (4.2) koşulunu sağlayan $A \subseteq X$ kümesine metrik konveks küme denir (Menger 1928).

$X = \mathbb{R}^n$ ve d, Öklid metriği seçilirse, (4.3) ile belirtilen küme, x ve y'nin uç noktaları olduğu klasik doğru parçası ve A da klasik konveks küme olarak elde edilir. X kümesi üzerinde tanımlanan farklı metriklerde farklı geometrik şekiller oluşur.

Örnek 4.49. *$\mathbb{R}^2$'de d_1 doğal uzaklık metriği ve*

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

ile verilen metrik için bir metrik konveks küme tanımı yapılırsa (4.3) ile belirtilen küme klasik anlamdaki doğru parçasından farklı bir şeyi verecektir. $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$ ve $y = (y_1, y_2) = (0, 1)$ olması durumunda $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (4.3) ile verilen kümenin elemanları olacaktır ki dolayısıyla klasik doğru parçaları bu metriğe göre konveks olmazlar.



Şekil 4.2. $x = (0, 0)$ ve $y = (0, 1)$ olmak üzere d_1 ve d_2 metriklerine göre [x,y] doğruları

Tanım 4.50. *$M \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Her $x, y \in M$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in clM$$

oluyorsa M kümesine konvekse yakın küme denir (Blaga ve Kolumban 1994).

x ile y'yi birleştiren doğru parçasının, x ve y'nin bir fonksiyonu, noktalardan biri ve λ yardımıyla ifade edildiği durumlar da mevcuttur. Bunlardan bir tanesi aşağıda sunulmuştur.

Tanım 4.51. *A, $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ vektör-değerli bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in A$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için*

$$y + \lambda\eta(x,y) \in A$$

olacak şekilde bir $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu bulunabiliyorsa A'ya η'ya göre inveks kümedir denir (Yang vd. 2003).

Yukarıdaki tanımda $\eta(x,y) = x - y$ seçilirse klasik konveks küme tanımı elde edilir.

Konveks küme tanımında kullanılan iki noktayı birleştiren doğru, $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ (kısaca $x'' = 0$) ile verilen diferansiyel denklemin bir çözümü olarak görülebilir. Doğru yerine noktaları birleştiren ve bir diferansiyel denklemin çözümü olan eğri kullanılırsa diferansiyel denkleme göre konveks küme kavramı elde edilmiş olur.

Tanım 4.52. *$I \subset \mathbb{R}$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümeler, $\Gamma : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir sürekli fonksiyon ve*

$$x'' = \Gamma(t, x, x') \tag{4.4}$$

ikinci dereceden bir diferansiyel denklem olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

i) Her $(t_0, x_0, v_0) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ için, (4.4) diferansiyel denkleminin

$$\gamma(t_0) = x_0, \gamma^{'}(t_0) = v_0 \text{ ve her } t \in I \text{ aralığı için } \gamma(t) \in \Omega$$

olacak şekilde I'da tanımlı tek bir γ çözümü olsun.

ii) Ω'ya ait iki farklı nokta için, (4.4) denkleminin bu noktalardan geçen tek bir çözümü olsun.

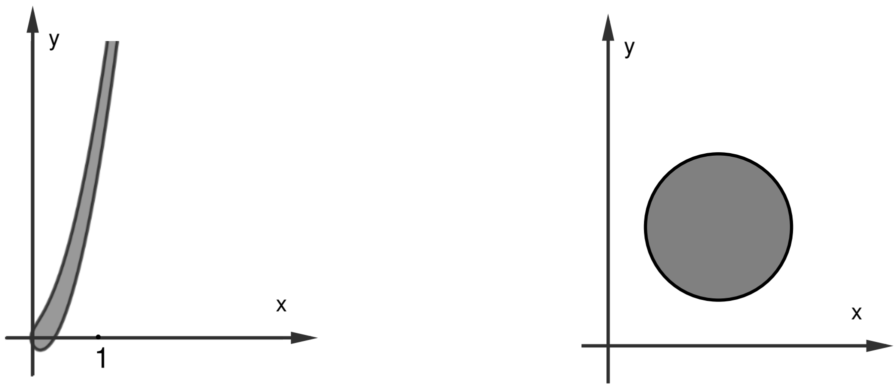
Eğer C'deki her keyfi x ve y noktaları ve bu noktalardan geçen γ çözümü için onları birleştiren γ eğrisi C'de bulunuyorsa $C \subset \Omega$ kümesine (4.4) denklemindeki diferansiyel denkleme göre konvekstir denir. C, $\mathbb{R}^n$'in bir alt kümesi olmak üzere normal klasik konveks küme $x'' = 0$ diferansiyel denklemine göre konvekstir ve kısaca (4.4) denklemindeki diferansiyel denkleme göre konveksse Γ-konvekstir denebilir (Ferreira 2006).

Örnek 4.53. $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \leq 1\}$ *kümesi klasik anlamda konveks değildir, fakat*

$$x_1'' = 0$$

$$x_2'' = 2(x_1')^2$$

diferansiyel denklemlerine göre konvekstir. C kümesi aşağıda grafikte solda verilmiştir (Ferreira 2006).



Şekil 4.3. Verilen denkleme göre konveks ve klasik konveks küme

$[x, y]$'nin bir eğri olarak alınması durumlarıyla ilgili olarak da aşağıdaki konveks küme tanımları verilmiştir.

Tanım 4.54. $A \subset R^n$ *ve* $[x, y]$*,* x *ile* y *yi birleştiren geodezik eğrisi olmak üzere (4.2) koşulunu sağlayan* A *kümesine geodezik konvekstir denir (Rapcsák 1991).*

Tanım 4.55. $D \subset \mathbb{R}^n$ *ve* $\Gamma = \{\gamma_x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^n, \gamma_x(0) = x\}$ *olsun.* $\forall x, y \in D$ *için* $\exists \gamma_{xy} \in \Gamma$ *ve* $\gamma_{xy} : [0, 1] \to D$*,* $\gamma_{xy}(0) = x$*,* $\gamma_{xy}(1) = y$ *oluyorsa* D *kümesi* Γ *parametrik eğri ailesine göre konvekstir denir (Dogaru vd. 1998).*

Bazı durumlarda küme içinde bulunan noktaları birleştiren doğrunun küme tarafından içerilmesi değil, o doğru ile aralarında ilişki kurulan başka noktaların oluşturduğu küme göz önüne alınarak konveks küme kavramı verilebilir. Aşağıda paralel olma bağıntısına göre bir tanım verilmiştir.

Tanım 4.56. $X \subset \mathbb{R}^n$ *ve* $A \subset \mathbb{R}^n$ *olsun. Eğer her* $x, y \in A$ *için*

$$[x, y] // v$$

olacak şekilde bir $v \in X$ vektörü bulunuyorsa, A kümesine X kümesine göre yönlü konveks küme denir (Naidenko 2009).

4.1.2. Kesişimler Yolu İle Genelleştirme (Kesişimsel Yaklaşım)

$\mathbb{R}^n$'de kapalı konveks kümelerin klasik karakteristik özelliklerinden biri, kapalı yarım-uzayların kesişimi olmasıdır (Köthe 1960). Bu özellik kapalılığa ihtiyaç duyulmadan P. C. Hammer tarafından şöyle ifade edilmiştir: A kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul A, A'nın dışında kalan noktaların yarı-uzaylarının kesişimi olmasıdır (Hammer 1955). Burada bahsedilen bir noktanın yarı-uzayı, o noktanın tümleyeni tarafından içerilen en büyük konveks alt kümesidir ve yarım-uzayla karıştırılmamalıdır. Böylece şu şekilde daha genel olarak yazılabilir: A konvekstir ancak ve ancak A, A'yı kapsayan konveks kümelerin kesişimidir.

Köthe ve Hammer'in tanımlarından görüldüğü üzere konveks küme bazı küme sınıflarının kesişimi olması yönüyle karakterize edilebilir. Bu yaklaşımdan hareketle küme ailelerine göre yeni tip konveks küme tanımları elde edilebilir. Aşağıda genel tanım ifade edilecek daha sonra örnekler verilecektir.

X bir küme olsun. $\mathcal{M}$, X'in alt kümelerinin ailesi olsun. Eğer

$$G = \bigcap_{M \in \mathcal{M}'} M$$

koşulunu sağlayan $\mathcal{M}$'nin $\mathcal{M}'$ alt ailesi varsa $G \subseteq X$ kümesine $\mathcal{M}$'ye göre konveks küme (ya da $\mathcal{M}$-konveks) denir (Singer 1997).

Tanım 4.57. *X evrensel küme, F ayrık olmayan konveks kümelerin bir ailesi olsun. $F = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $B \subset X$ ve $[x, y]$, B'deki x ve y'yi birleştiren doğru olsun. Her $x, y \in B$ için $[x, y]$, $\bigcap A_i$ tarafindan içeriliyor ya da en az bir tane i için $[x, y] \bigcap A_i \neq \emptyset$ oluyorsa B kümesi F ailesine göre kaba konvekstir denir (Youness vd. 2016).*

Örnek 4.58. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3\}$ *ve*

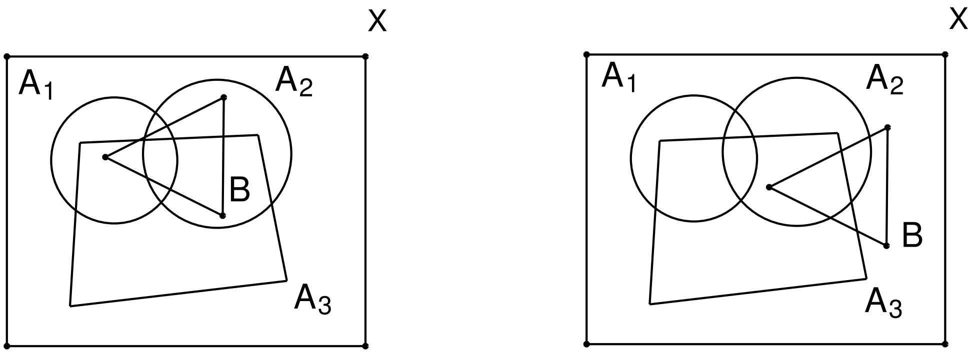
$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{(x, y) \in R^2 : (x)^2 + (y + 1)^2 \leq 2\right\}, \\ A_2 &= \left\{(x, y) \in R^2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 3\right\} \\ A_3 &= \left\{(x, y) \in R^2 : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 3\right\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{2}x^2,\ y \leq |0.5x| + 1, -2 \leq x \leq 2 \right\}$$

ile verilen B kümesi $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesine göre kaba konvekstir (Youness vd. 2016).

Örnek 4.59. *$\mathbb{R}^2$ düzleminde, X, A_1, A_2, A_3 ve B sırasıyla şekildeki dikdörtgen, daireler, dörtgen ve üçgen ile sınırlanan kapalı bölgeleri temsil etmek üzere (a)'da B kümesi $F = \{A_1, A_2, A_3\}$ ailesine göre kaba konveks, (b)'de belirtilen B kümesi F'ye göre kaba konveks değildir. B kümesi her iki durumda da klasik konveks bir kümedir (Youness vd. 2016).*



(a) **(b)**

Şekil 4.4. Kaba konveks olan ve olmayan B kümesi

Tanım 4.60. *$C \subset \mathbb{R}^n$ içi boş olmayan kompakt konveks bir küme ve $K \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $K = \emptyset$ ya da $K = \mathbb{R}^n$ veya K'yı içeren C'nin bütün ötelemelerinin kesişimine eşit ise K kümesine C'ye göre konvekstir denir (Lángi vd. 2013).*

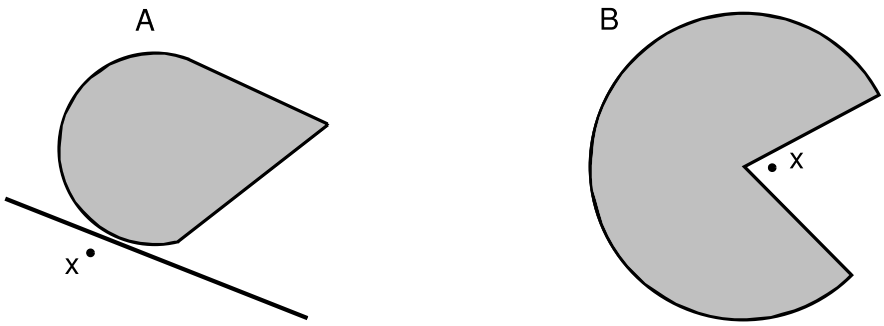
Tanım 4.61. *$K \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer p ve q'yu içeren C'nin hiçbir ötelemesi yoksa $[p, q]_C = \mathbb{R}^n$'dir. Eğer herhangi $p, q \in K$ için $[p, q]_C \subset K$ oluyorsa $K \subset \mathbb{R}^n$ kümesine C'ye göre spindle konveks denir (Lángi vd. 2013).*

Tanım 4.62. *$S \subset \mathbb{R}^n$ birim küre, $H \subset S$ ve S'nin H'yi içeren hiçbir kapalı yarım küresi olmasın. $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle e, x \rangle \leq \lambda, e \in H, \lambda \in \mathbb{R}\}$ şeklinde verilen her yarım-uzay H-konvekstir denir. H-konveks yarım-uzayların ailesinin kesişimi olarak ifade edilebilen her küme H-konveks kümesi olarak söylenir (Boltyanski ve Martini 2003).*

Tanım 4.63. *Φ, X kümesi üzerinde tanımlı reel-değerli fonksiyonların bir kümesi olsun. Eğer $S = X$ veya $S \subset X$, $f \in \Phi$ ve α reel sayısı için $\{x \in X : f(x) \geqq \alpha\}$ şeklindeki kümelerin kesişimine eşit ise o zaman X'in S alt kümesi Φ-konvekstir denir (Fan 1963).*

4.1.3. Ayırma Özelliği İle Küme Ailelerine Göre Genelleştirme

Kapalı konveks kümelerin en önemli özelliklerinden biri de (sezgisel olarak $\mathbb{R}^2$'de düşünürsek) konveks kümenin dışındaki bir noktadan bir doğru yardımıyla ayrılabilmesidir.



Şekil 4.5. x noktası A'dan ayrılabilir, B'den ayrılamaz

Bu özellik $\mathbb{R}^n$ için yarım-uzaylarla aşağıdaki gibi ifade edilir:

Teorem 4.64. *X bir vektör uzayı, $A \subset X$ ve A kapalı olsun. A'nın konveks olması için gerek ve yeter koşul her $x \notin A$ için*

$$A \subset M, x \notin M$$

koşulunu sağlayan en az bir M yarım-uzayın olmasıdır.

Yukarıdaki teoreme dayanılarak konveks kümeler şu şekilde genelleştirilebilir: X bir küme ve $\mathcal{M}$, X'in alt kümelerinin bir ailesi ve $A \subset X$ olsun. Her $x \notin A$ için

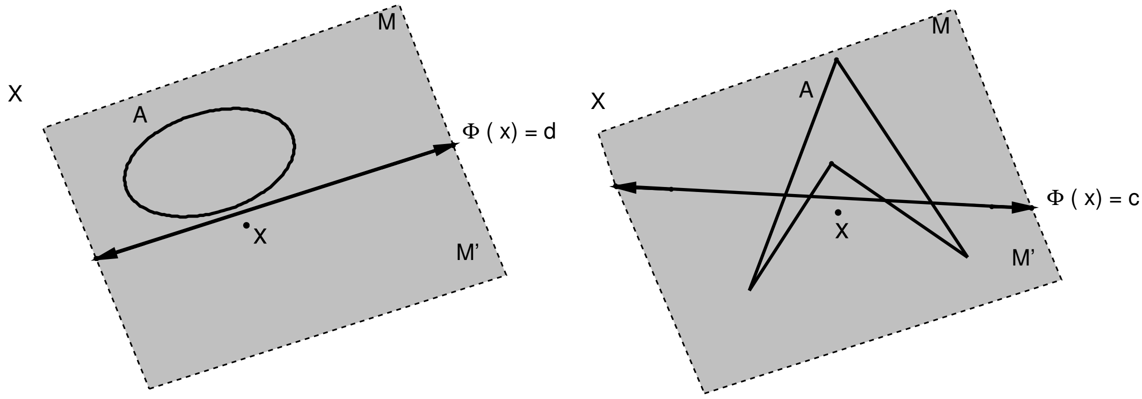
$$A \subset M, x \notin M$$

koşulunu sağlayan bir $M \in \mathcal{M}$ varsa A kümesi $\mathcal{M}$-konvekstir (Singer 1997).

Bu tanıma göre kapalı klasik konveks küme yarım-uzaylar ailesine göre konvekstir.

4.1.4. Ayırma Özelliği İle Fonksiyon Sınıflarına Göre Genelleştirme

Yukarıdaki bölümde kapalı konveks kümenin dışındaki bir noktadan bir doğru ile ayrılabileceği belirtilmişti. $\mathbb{R}^n$'de bu doğru hiperdüzlemdir. Aşağıdaki şekillerde $\Phi(x) = d$ hiperdüzlemi M ve M' yarım-uzayları belirtmektedir.



Şekil 4.6. Dışındaki noktadan ayrılabilen ve ayrılamayan küme

Teorem 4.65. *$x' \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ boş olmayan kapalı konveks bir küme olsun. $\forall x' \notin A$ için en az bir $\beta \in \mathbb{R}^n$ bulunur ki*

$$\sup_{x \in A} \langle x, \beta \rangle < \langle x', \beta \rangle$$

olur.

Teoremde sabit bir $x' \in \mathbb{R}^n$ seçilir ve $\langle x', \beta \rangle = d$ olmak üzere $\langle x, \beta \rangle = d$ eşitliği bir hiperdüzlemi ifade etmektedir. $k(x) = \langle x, \beta \rangle$ in bir lineer fonksiyonel olduğu bilindiğinden $\langle x, \beta \rangle$ yerine $X^* \backslash \{0\}$ kümesinden bir $\Phi(x)$ seçilerek ayrılma teoreminin koşulu şu şekilde yazılabilir: $\forall x' \notin A$ için öyle bir $\Phi \in X^* \backslash \{0\}$ ve $d \in \mathbb{R}$ bulunabilir ki

$$A \subset \{x \in X : \Phi(x) \leq d\} \text{ ve } \Phi(x') > d$$

veya

$$\sup \Phi(A) < \Phi(x')$$

yazılabilir.

1963'te K. Fan bu fikri kullanarak, başka bir genelleştirme sunar:

X bir küme ve W, $w : X \to \mathbb{R}$ reel-değerli fonksiyonların belirli bir kümesi olsun. Eğer her bir $x \notin A$ için

$$\sup w(A) < w(x)$$

koşulunu sağlayan $w \in W$ bulunabiliyorsa, A kümesi W'ye göre konvekstir (ya da kısaca W-konveks) denir (Fan 1963).

Tanım 4.66. $(\mathbb{R}^n)^*$, *$\mathbb{R}^n$'in eşlenik uzayı ,*

$$\mathcal{F} = \left\{ l(x) = \min_{i=1}^{m} l_i(x) : l_i \in (\mathbb{R}^n)^*, m = 1, 2, ... \right\}$$

ve $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer aşağıdaki koşulu sağlayan $l_1, ..., l_p$ lineer fonksiyonlar ailesi varsa o zaman A kümesi x_0'dan bu aile ile ayrılıyor denir:

$$\sup_{x \in A} \min_{i=1}^{p} l_i(x) < \min_{i=1}^{p} l_i(x_0)$$

(Shveidel 2003).

Tanım 4.67. *A'da olmayan her bir x_0 noktası A'dan lineer fonksiyonların sonlu bir ailesi tarafından ayrılabilirse, A kümesi $\mathcal{F}$-konvekstir denilir. $\mathcal{F}$-konveks kümeler ailesi Ξ ile gösterilir ve bu tanım şu şekilde de ifade edilebilir:*

$$A \in \Xi \Leftrightarrow \forall x_0 \notin A \,, \exists l \in F : \sup_{x \in A} l(x) < l(x_0)$$

(Shveidel 2003).

4.1.5. Konveks Sistemler Yolu İle Genelleştirme

Kümeler topolojisine benzer bir şekilde bir X kümesinin bazı özellikleri ($\mathbb{R}^n$'deki konveks kümelerin sahip olduğu bazı özellikleri) sağlayan alt kümelerinin oluşturmuş olduğu bir aile sınıfının her bir elemanı konveks olarak düşünülebilir ve bu durumda bu aileye göre konvekslik kavramı farklı bir şekilde karşımıza çıkar. $\mathbb{R}^n$ veya herhangi bir lineer uzay için bir konveks küme ailesinin elemanlarının kesişiminin konveks olduğu ve tüm uzayın da konveks olduğu bilinmektedir. Tüm uzayın konveks olması da kesişim özelliği ile ifade edilmek istenirse, indisi boş küme olan konveks kümelerin kesişimi (yani $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \mathbb{R}^n$) olarak düşünülebilir. Bu yaklaşım bize konveksliğin farklı bir yönde genişletilme yolunu açar.

X bir lineer uzay, $\mathcal{B}$, X'in bazı alt kümelerinin oluşturduğu bir küme ailesi olsun Eğer herhangi bir I kümesi için

$$B_i \in \mathcal{B} \Longrightarrow \bigcap_{i \in I} B_i \in \mathcal{B} \tag{4.5}$$

oluyorsa $\mathcal{B}$ ailesine bir konvekslik sistemi denir ve $\mathcal{B}$'nin her elemanına ve $\mathcal{B}$ ailesine göre konveks ya da kısaca $\mathcal{B}-$ konveks denir (Singer 1997). Burada $I = \emptyset$ olması durumunda kesişimin tüm uzayı verdiği kabul edileceğinden tüm uzayın $\mathcal{B}$ ailesinin elemanı olması gerekmektedir.

Konveks kümenin bu genelleştirilmesi topolojik yapılarla benzerlik gösterir. X topolojik uzay olsun. X'in yukarıda belirtilen özelliği sağlayan bir bütün kapalı kümelerinin $\mathcal{B}$ ailesi düşünülürse, X'in kapalı kümeleri yukarıdaki tanıma göre $\mathcal{B}$ ailesine göre konveks olacaktır. Diğer taraftan X bir küme ve $\mathcal{B}$ ailesi X içinde bir konvekslik sistemi ve aynı zamanda

$$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{B} \tag{4.6}$$

olursa X bir topolojik uzay olacaktır. Bu ailenin elemanları da topolojik uzayın kapalı kümeleri olacaktır. Bununla beraber bir konvekslik sistemi (4.6) koşulunu sağlamadığı için bir topoloji oluşturmamaktadır.

4.1.6. Kabuk (Hull) Operatorü Yardımı İle Genelleştirme

Soyut konveksliğe başka bir yaklaşım, $\mathbb{R}^n$'in (veya herhangi X lineer uzayının) konveks olması gerekmeyen bir A alt kümesinin konveks kabuğu $convA$ ile verilir. $\mathbb{R}^n$'in herhangi iki A ve $\tilde{A}$ alt kümelerinin konveks kabuğu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $A \subset \tilde{A} \Rightarrow convA \subset conv\tilde{A}$
- $A \subset convA$
- $conv(convA) = convA$

Konveks kabuğun bir küme operatörü kabul edilebileceğinden hareketle konveks kabuk yerine bu koşulları sağlayan bir operatör düşünülürse bu operatöre göre bir konvekslik tanımı verilebilir.

Tanım 4.68. *X bir lineer uzay ve $u : 2^X \to 2^X$ operatörü,*

- $A \subset \tilde{A} \Rightarrow u(A) \subset u(\tilde{A})$
- $A \subset u(A)$
- $u(u(A)) = u(A)$ *koşullarını sağlasın. Bir* $A \subset X$ *kümesi için* $u(A) = A$ *oluyorsa bu* A *kümesine* u*-operatörüne göre konvekstir denir (Singer 1997).*

$u = conv$ (konveks kabuk operatörü) için klasik konveks kümelerin tanımı elde edilir.

Yukarıdaki koşulları sağlayan farklı operatörler aracılığıyla farklı konvekslik sınıfları tanımlanabilir. En bilinen örnek olarak Kuratowski kapanış operatörünü verebiliriz.

Örnek 4.69. *X bir topolojik uzay, kapanış operatörü $u(A) = clA$ ile verilsin. Bu durumda her kapalı A kümesi kapanış operatörüne göre konvekstir denir.*

4.2. KONVEKS FONKSİYONLARIN GENELLEŞTİRİLME METOTLARI

4.2.1. İç Yaklaşımlar Yolu İle Genelleştirme

Doğru Parçası Tanımı İle Genelleştirme

Konveks fonksiyonun tanımının verildiği (3.1) eşitsizliğinde sırasıyla sol taraftaki fonksiyon içi ve sağ tarafı, $\lambda \in [0, 1]$ için x ile y'yi bağlayan doğru parçası ve $f(x)$ ile $f(y)$'yi bağlayan doğru parçasının birer noktaları olarak kabul edilebilir. Bu durumda "Konveks Kümelerin Genelleştirilme Metotları"nın "iç yaklaşımlar" alt bölümünde belirtildiği gibi doğru parçası tanımı $[x, y] = \left\{\varphi_{x,y}(\lambda) | 0 \le \lambda \le 1\right\}$ şeklinde düşünülerek, $\varphi_{x,y}(\lambda)$'nın farklı kabullerine göre birçok konveks fonksiyon türü üretilebilir (Singer 1997).

$$\varphi_{x,y}(\lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda y \tag{4.7}$$

alınması durumunda (3.1) eşitsizliğinin sol tarafındaki fonksiyonun içi $[x, y]$'nin bir elemanı ve sağ tarafındaki ifade ise $[f(x), f(y)]$'nin bir elemanı olacaktır. Dolayısıyla, $\varphi_{x,y}(\lambda)$ için yukarıdaki seçim klasik konvekslik tanımındaki eşitsizlik olacaktır.

Burada şunu da belirtmeliyiz ki tanımda verilen (3.1) eşitsizliğinde sol taraf için farklı, sağ taraf için farklı $\varphi_{x,y}(\lambda)$ fonksiyonları kullanılabilir. Örneğin, aşağıda Tanım 4.94'te (3.1) eşitsizliğinin sağ ve sol tarafında

$$\varphi_{x,y}(\lambda) = x^{1-\lambda} y^{\lambda}$$

kullanılarak geometrik konveks fonksiyon tanımlanırken, Tanım 4.81'de sol taraf için (4.7)'de verilen fonksiyon kullanılırken sağ taraf için

$$\varphi_{x,y}(\lambda) = \frac{x}{1-\lambda} + \frac{y}{\lambda}$$

kullanılarak Godunova-Levin fonksiyonu elde edilmiştir. Aşağıda bu metot ile elde edilebilenler olarak adlandırabileceğimiz konveks fonksiyon çeşitlerine örnekler sunulmuştur.

Tanım 4.70. *$A \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu $\forall x, y \in A$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna log-konveks fonksiyon denir (Pecaric ve Tong 1992).

Yukarıda eşitsizlik yön değiştirdiği zaman log-konkav tanımı elde edilir.

Örnek 4.71. *R_{++}'da $a < 0$ iken $f(x) = x^a$ log-konvekstir.*

Örnek 4.72. *e^{ax} fonksiyonu hem log-konveks hem log-konkavdır.*

Örnek 4.73. *Gama Fonksiyonu*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1}e^{-u}du$$

$[1, \infty)$ aralığında log-konvekstir.

Tanım 4.74. *$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. $\forall x, y \in I$ için*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

ise f'ye Jensen konveks denir (Roberts ve Varberg 1973).

Tanım 4.75. *$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}f(x) + \frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa MT-konvekstir denir (Tunç ve Yıldırım 2012).

Yukarıdaki tanımda $t = \frac{1}{2}$ olması durumunda Jensen konvekslik elde edilir.

Tanım 4.76. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ ve $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \begin{cases} [\lambda f^r(x) + (1-\lambda)f^r(y)]^{\frac{1}{r}} & , \quad r \neq 0 \\ f^{\lambda}(x) f^{1-\lambda}(y) & , \quad r = 0 \end{cases}$$

eşitsizliği, her $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için sağlanıyorsa, f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında r-konveks fonksiyondur denir (Gill vd. 1997).

Yukarıda $r = 1$ için klasik konveks fonksiyon, $r = 0$ için log-konveks fonksiyon elde edilir.

Tanım 4.77. *$p : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\forall x, y \in A$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,*

$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq p(x) + p(y)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise p fonksiyonuna P-tipi fonksiyon denir (Singer 1997).

Tanım 4.78. *$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $s \in (0,1]$ olsun. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ ve $\lambda^s + \mu^s = 1$ koşulunu sağlayan her $\lambda, \mu \geq 0$ için*

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^s f(x) + \mu^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Orlicz 1961).

Tanım 4.79. *Her $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $s \in [0,1]$ olsun. $\forall x, y \geq 0$ ve $\lambda + \mu = 1$ koşulunu sağlayan her $\lambda, \mu \geq 0$ için*

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^s f(x) + \mu^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, bu f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonlar genellikle K_s^2 ile ifade edilir (Hudzik ve Maligranda 1994).

Örnek 4.80. *$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ olsun. $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ için,*

$$f(x) = \begin{cases} a & , \quad x = 0 \\ bx^s + c & , \quad x > 0 \end{cases}$$

i) Eğer $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise, $f \in K_s^2$

ii) Eğer $b > 0$ ve $c < 0$ ise, $f \notin K_s^2$ (Hudzik ve Maligranda 1994).

Tanım 4.81. *$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. $\forall x, y \in A$ ve $\forall \lambda \in (0,1)$ için*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyonu denir (Godunova ve Levin 1985).

Tanım 4.89'a kadar verilen tanımlarda eşitsizliklerin sol taraflarında fonksiyonun içinde, x ile y'nin, λ ve $1-\lambda$ ağırlıklarına bağlı harmonik ortaları kullanılmıştır.

Tanım 4.82. *$f : \Omega \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $s \in [0,1]$ olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için*

$$f\left(\frac{xy}{\lambda x + (1-\lambda)y}\right) \leq \frac{1}{(1-\lambda)^s} f(x) + \frac{1}{\lambda^s} f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f'ye harmonik $s-$Godunova-Levin fonksiyonu denir (Noor vd. 2015).

Tanım 4.83. *$f : \Omega \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için*

$$f\left(\frac{xy}{\lambda x + (1-\lambda)y}\right) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f'ye harmonik konveks fonksiyon denir (Noor vd. 2015).

Örnek 4.84. *$(0,\infty)$'da tanımlı $g(x) = \dfrac{(x-1)^2+1}{x}$ bir harmonik konveks fonksiyondur (Bai vd. 2020).*

Tanım 4.85. *$h : [0,1] \subset J \to \mathbb{R}_+$ ve $f : \Omega \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ ve $\lambda \in (0,1)$ için*

$$f\left(\frac{xy}{\lambda x + (1-\lambda)y}\right) \leq h(1-\lambda) f(x) + h(\lambda) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f'ye harmonik $h-$konveks fonksiyon denir (Noor vd. 2015).

Tanım 4.86. *$f : \Omega \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $s \in [0,1]$ olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ ve $\lambda \in [0,1]$ için*

$$f\left(\frac{xy}{\lambda x + (1-\lambda)y}\right) \leq (1-\lambda^s) f(x) + \lambda^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f'ye birinci anlamda harmonik s -konveks fonksiyon denir (Noor vd. 2015).

Tanım 4.87. $f : \Omega \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *ve* $s \in (0,1]$ *olsun. Eğer her* $x, y \in \Omega$ *ve* $\lambda \in (0,1)$ *için*

$$f\left(\frac{xy}{\lambda x + (1-\lambda)y}\right) \leq \frac{1}{(1-\lambda^s)} f(x) + \frac{1}{\lambda^s} f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f*'ye birinci anlamda harmonik* s *-Godunova-Levin fonksiyon denir (Noor vd. 2015).*

Tanım 4.88. $h : [0,1] \subset J \to \mathbb{R}_+$ *ve* $f : \Omega \subset \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ *olsun. Eğer her* $x, y \in \Omega$ *ve* $\lambda \in (0,1)$ *için*

$$f\left(\frac{xy}{\lambda x + (1-\lambda)y}\right) \leq f(x)^{h(1-\lambda)} f(y)^{h(\lambda)}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f*'ye harmonik logaritmik* $h-$*konveks fonksiyon denir (Noor vd. 2015).*

Konveks fonksiyonu karakterize eden (3.1) eşitsizliğinin sağ tarafındaki λ veya $1-\lambda$ katsayılarının yanına ilave katsayılar eklenmesiyle veya onların yerine fonksiyonlarının yazılması ile daha genel konveks fonksiyon sınıfları elde edilebilir.

Tanım 4.89. $a > 0$ *ve* $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ *olsun.* $\forall x, y \in [0,a]$ *ve* $m \in [0,1]$, $\lambda \in [0,1]$ *iken*

$$f(\lambda x + m(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + m(1-\lambda) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu f *fonksiyonuna* m*-konveks fonksiyon denir (Toader 1984, 1988).*

Tanım 4.90. $a > 0$ *ve* $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ *olsun.* $\forall x, y \in [0,a]$, $\lambda \in [0,1]$ *ve* $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ *iken*

$$f(\lambda x + m(1-\lambda)y) \leq \lambda^\alpha f(x) + m(1-\lambda^\alpha) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu f *fonksiyonuna* (α, m)*-konveks fonksiyondur denir (Miheşan 1993; Bakula vd. 2006).*

Tanım 4.91. $I, J \subset \mathbb{R}_+$ *olsun.* $h : J \to \mathbb{R}_+$, $f : I \to \mathbb{R}_+$ *fonksiyonları için* $x, y \in I$, $\lambda \in (0,1)$ *iken*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq h(\lambda) f(x) + h(1-\lambda) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu f *fonksiyonuna* h*-konveks fonksiyon denir (Varošanec 2007).*

Tanım 4.92. *$f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $\forall u, v \in I$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için*

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda(1 - \lambda)[f(u) + f(v)]$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu f fonksiyonuna tgs-konveks fonksiyon denir (Tunç vd. 2015).

Konveks fonksiyon tanımında verilen (3.1) eşitsizliğinin sağ ve sol tarafında λ ve $1 - \lambda$ yerine onların fonksiyonları yazılarak yukarıda verilenlerden daha genel bir konveks fonksiyon tanımı elde edilmiştir.

Tanım 4.93. *$k : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. $f : D \subset X \to \mathbb{R}$ olmak üzere D kümesi konveks bir küme olsun. $\forall x, y \in D$ ve $\lambda \in (0, 1)$ iken*

$$f(k(\lambda)x + k(1 - \lambda)y) \leq h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu f fonksiyonuna (k, h)-konveks fonksiyon denir (Micharda ve Rajba 2012).

Konveks fonksiyon tanımında x ile y ve $f(x)$ ile $f(y)$'nin ağırlıklı geometrik ortalarının kullanımı aşağıdaki geometrik konveks fonksiyon tanımlarını ortaya çıkarmıştır.

Tanım 4.94. *$f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için, $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ iken*

$$f(x^{\lambda} y^{1-\lambda}) \leq [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang vd. 2012).

Tanım 4.95. *$f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ve $s \in (0, 1]$ olsun. $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için*

$$f(x^{\lambda} y^{1-\lambda}) \leq [f(x)]^{\lambda^s}[f(y)]^{(1-\lambda)^s}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu f fonksiyonuna s-geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang vd. 2012).

Tanım 4.96. *$\lambda, \alpha \in [0, 1]$, $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $s \in (0, 1]$ olsun. $\forall x, y \in I$ iken*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda^s f(x) + \{(1 - \lambda)\alpha\}^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu f fonksiyonuna α-star s-konveks fonksiyon denir (Park 2010).

Tanım 4.97. *$A \subset \mathbb{R}^n$, $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ ve A, η'ya göre inveks bir küme olsun. Her $x, y \in \Gamma$ ve $\lambda \in [0,1]$ için*

$$f(y + \lambda\eta(x,y)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan f fonsiyonu η'ya göre preinveks fonksiyon denir. Yukarıdaki eşitsizlik kesin küçük olduğu zaman kesin şekilde preinveks denir (Yang vd. 2003).

$\eta(x,y) = x - y$ için klasik konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Örnek 4.98. *$f = - \mid x \mid$, $\forall x \in K = [-2,2]$ ve*

$$\eta(x,y) = \begin{cases} x - y & \text{eğer} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x - y & \text{eğer} \quad x < 0, \quad y < 0 \\ -2 - y & \text{eğer} \quad x > 0, \quad y < 0 \\ 2 - y & \text{eğer} \quad x \leq 0, \quad y > 0 \end{cases}$$

olsun. f, K üzerinde η'ya göre preinvekstir. Ancak f konveks değildir (Yang vd. 2003).

Tanım 4.99. *$U \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : U \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. $\forall x, y \in U$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için*

$$f(\lambda x \vee y) \leq \lambda f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna B-konveks fonksiyon denir (Adilov ve Rubinov 2006).

Tanım 4.100. *$U \subset \mathbb{R}^n_{++}$ ve $f : U \to \mathbb{R}^n_{++}$ olsun. $\forall x, y \in U$ ve $\forall \lambda \in [1,\infty)$ için*

$$f(\lambda x \wedge y) \leq \lambda f(x) \wedge f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise f fonksiyonuna B^{-1}-konveks fonksiyon denir (Yeşilce 2016).

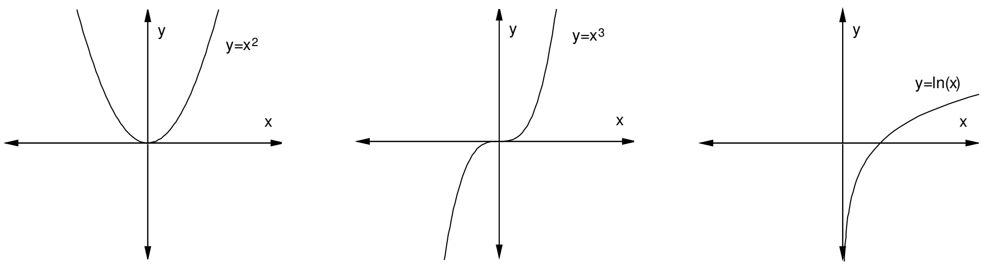
Konveks fonksiyon tanımında maksimum ve minimum kullanımıyla da yeni konveks fonksiyon çeşitleri elde edilmiştir.

Tanım 4.101. *$f : S \neq \emptyset \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce 1998).

Örnek 4.102. *Grafiklerden de görüleceği üzere konveks fonksiyonlar ve quasi konveks fonksiyonlar arasında bir kapsama ilişkisi bulunmamaktadır.*



Şekil 4.7. Quasi konveks fonksiyon örnekleri

Konveks fonksiyon tanımında noktaları birbirine bağlayan doğrular yerine eğriler ve eğri aileleri düşünülürse farklı bir konveks fonksiyon tipi elde edilebilir.

Tanım 4.103. $x_* \in D \subset \mathbb{R}^n$ *ve* D, Γ_{x_*}*-yıldız şekilli bir küme olsun. Eğer* $\forall x \in D$ *ve* $\lambda \in [0,1]$ *için*

$$f(\gamma_x(\lambda)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x_*)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $f : D \to R$ *fonksiyonuna* x_* *noktasında* Γ_{x_*} *ailesine göre konvekstir denir (Dogaru vd. 1998).*

Tanım 4.104. $D \subset \mathbb{R}^n$, Γ *parametrik ailesine göre konveks bir küme ve* $f : D \to \mathbb{R}$ *olsun.* $\forall x, y \in D$ *ve* x *ile* y*'yi bağlayan her* $\gamma \in \Gamma$ *eğrisi ve her* $\lambda \in [0,1]$ *için*

$$f(\gamma(\lambda)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise f*'ye* Γ*'ya göre konvekstir denir (Dogaru vd. 1998).*

Tanımda verilen γ eğrisi x ile y'yi bağlayan eğridir.

Örnek 4.105. $D = (0,1] \times (0,1] \times (0,1] \subset \mathbb{R}^3$ *ve* $x_* = (1,1,1) \in D$ *olsun.* Γ_{x_*},

$$\gamma : [0,1] \to D, \gamma(\lambda) = (1/(a_1\lambda+1), 1/(a_2\lambda+1), 1/(a_3\lambda+1)), a_1, a_2, a_3 > 0$$

koşullarını sağlayan parametrik eğrilerin ailesi olsun. O zaman D *kümesi* x_* *noktasında* Γ_{x_*}*-yıldız şekilli bir kümedir.*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^{-1}x_3^{-1} + x_1^{-1}x_3^{-1} + x_1^{-1}x_2^{-1}$$

ile verilen $f : D \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* x_**'da* Γ_{x_*} *ailesine göre konvekstir (Dogaru vd. 1998).*

Ortalar Kullanarak Genelleştirme

Doğru parçası yoluyla genelleştirme metodunda, konveks fonksiyonların temel tanımında kullanılan eşitsizliğin sağ ve sol taraflarında, $\lambda \in [0,1]$ için tanımlı farklı olabilen φ fonksiyonlarına bağlı olarak doğru parçaları (sırasıyla $[x,y]$ ve $[f(x), f(y)]$) üzerinde bulunan noktalar kullanılmıştı. Klasik konveks fonksiyon tanımında kullanılan $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $z = (1-\lambda)x+\lambda y$ ve $m = (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$ ile verilen z ve m sayılarının sırasıyla x ile y ve $f(x)$ ve $f(y)$'nin bir ağırlıklı aritmetik ortası olduğundan hareketle, eşitsizliğin sağ ve sol taraflarında farklı orta çeşitleri düşünülürse bu durumda yeni konvekslik sınıfları tanımlanabilir. Bu genelleştirme metodu aşağıdaki gibi verilmiştir (Matkowski ve Ratz 1997; Niculescu 2003).

M ve N sırasıyla $I, J \subset \mathbb{R}_{++}$ aralıklarında tanımlı iki orta olsun. Eğer her $x, y \in I$ için

$$F(M(x,y)) \leq N(f(x), f(y))$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, $f : I \to J$ fonksiyonuna MN -konveks fonksiyondur denir.

$M(x,y)$ ve $N(x,y)$ ortaları ağırlıklı aritmetik orta seçilirse klasik konveks fonksiyon tanımı (buradaki tanıma göre AA-konveks fonksiyon) elde edilmiş olur.

Örnek 4.106. *$f : I \to (0,\infty)$ fonksiyonu için $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, yani M, x ve y'nin ağırlıklı aritmetik ortalaması, N de x ve y'nin ağırlıklı geometrik ortalaması kabul edilirse AG-konveks fonksiyonu (aritmetik-geometrik konveks fonksiyonu) elde edilmiş olur. Bu fonksiyon Tanım 4.70'te verilen logaritmik konveks fonksiyon tanımıdır.

Örnek 4.107. *$f : I \to (0,\infty)$ fonksiyonu için $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere*

$$f(x^{1-\lambda}y^{\lambda}) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

eşitsizliği sağlanırsa, yani M, x ve y'nin ağırlıklı geometrik ortalaması ve N de x ve y'nin ağırlıklı aritmetik ortalaması seçilirse bu sefer de GA-konveks fonksiyonu (geometrik-aritmetik konveks fonksiyonu) elde edilmiş olur.

Örnek 4.108. *Tanım 4.83'te verilen harmonik konveks fonksiyonu da ortalarla ifade edilirse bir HA-konveks fonksiyondur. Benzer şekilde Tanım 4.94'te verilen geometrik konveks fonksiyon ortalarla ifade edilirse GG-konveks fonksiyondur.*

Literatürde ortalar yardımıyla konveks fonksiyonların yukarıda anlatılandan farklı şekilde aşağıdaki gibi tanımlandığı da görülmüştür. Aşağıdaki tanımlarda $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $\mathcal{G} = \sqrt{xy}$ ve $\mathcal{A} = \frac{x+y}{2}$'yi temsil etmektedir.

Tanım 4.109. $f : D \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *olsun.* $\forall x, y \in D$ *ve* $\lambda \in [0, 1]$ *için*

$$f((1-\lambda)\mathcal{G} + \lambda\mathcal{A}) \leq (1-\lambda)f(\mathcal{G}) + \lambda f(\mathcal{A})$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna $\mathcal{M}$-konveks fonksiyon denir (Awan vd. 2020).

Tanım 4.110. $f : D \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *fonksiyonu* $\forall x, y \in D$ *ve* $\lambda \in [0, 1]$ *için*

$$f((1-\lambda)\mathcal{G} + \lambda\mathcal{A}) \leq f^{1-\lambda}(\mathcal{G})f^{\lambda}(\mathcal{A})$$

eşitsizliğini sağlıyor ise f fonksiyonuna log-$\mathcal{M}$-konveks fonksiyon denir (Awan vd. 2020).

Tanım 4.111. $f : D \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *fonksiyonu* $\forall x, y \in D$ *ve* $\lambda \in [0, 1]$ *için*

$$f((1-\lambda)\mathcal{G} + \lambda\mathcal{A}) \leq \max\{f(\mathcal{G}), f(\mathcal{A})\}$$

eşitsizliğini sağlıyor ise f fonksiyonuna quasi-$\mathcal{M}$-konveks fonksiyon denir (Awan vd. 2020).

4.2.2. Bir Fonksiyon Sınıfı Yardımı İle Genelleştirme

Başka bir yaklaşım, ekstra bir özelliğe sahip konveks fonksiyonun bir karakterine dayanır:

Teorem 4.112. $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ve f alttan yarı sürekli ve h afin fonksiyon olsun. f'nin X üzerinde bir konveks olması için gerek ve yeter koşul*

$$f(x) = \sup\{h(x) : \forall x \in X \textit{ için } h(x) \leq f(x) \textit{ ve } h \textit{ bir afin fonksiyondur}\}$$

Bu teorem konveks ve alttan yarı sürekli bir f fonksiyonunun majorize ettiği afin fonksiyonların supremumu olarak ifade edilebildiğini göstermektedir. Bundan hareketle reel değerli bir fonksiyonun majorize ettiği belirli bir fonksiyon ailesinin bir alt ailesini oluşturan fonksiyonların supremum olarak gösterilmesiyle soyut konveks fonksiyon kavramı genelleştirilebilir. Bu kavram (Kutaladze ve Rubinov 1976) aşağıdaki gibi verilmiştir:

X bir küme ve $H = \{h|h : X \to \mathbb{R}\}$ olsun. Eğer $x \in X$ için

$$f(x) = \sup_{h\in U}\{h(x) : \forall x \in X \text{ için } h(x) \leq f(x)\} \quad (4.8)$$

koşulunu sağlayan bir $U \subset H$ kümesi bunulabiliyorsa f'ye H kümesine göre konvekstir veya H-konvekstir denir.

Aşağıda seçilen farklı fonksiyon aileleri ve onlara karşılık gelen soyut konveks fonksiyonların karakterizasyonları teorem olarak ifade edilmiştir.

Teorem 4.113. $L = \left\{ l(x) \mid l, x \in \mathbb{R}^n_+, l(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i x_i \right\}$ *olsun.f'nin L-konveks olması için gerek ve yeter koşul f'nin sublineer ve alttan yarı sürekli olmasıdır (Rubinov 2000).*

Teorem 4.114. $L_2 = \left\{ l(x) | \, l, x \in \mathbb{R}^n_{++}, l(x) = \min\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \{l_i x_i\} \right\}$ *olsun. f'nin L_2-konveks olması için gerek ve yeter koşul f'nin artan pozitif homojen fonksiyon olmasıdır (Rubinov 2000).*

Teorem 4.115. $H_2 = \left\{ h(x) | \, l, x \in \mathbb{R}^n_{++}, h(x) = \min\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \{l_i x_i\} + c \right\}$ *olsun. f'nin H_2-konveks olması için gerek ve yeter koşul ışınlar boyunca konveks artan (ICAR) fonksiyonu yani her bir $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ için*

$$f_x(t) = f(tx), t \in [0, \infty)$$

konveks ve $f_x(t)$ artan olmasıdır (Rubinov 2000).

Sabit bir x noktası için $\{tx : 0 \leq t < \infty\}$ kümesi orijinden başlayıp x noktasından geçen ışını temsil eder.

Teorem 4.116. $H_3 = \left\{ h(x) | \, l, x \in \mathbb{R}^n_{++}, h(x) = \min \left\{ \min\limits_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} \{\{l_i x_i\}, c\} \right\} \right\}$ *olsun. f'nin H_3-konveks olması için gerek ve yeter koşul f'nin artan olması ve her $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için*

$$f(\lambda x) \geq \lambda f(x)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır (Rubinov 2000).

4.2.3. Konveks Sistemler Yolu İle Genelleştirme

Konveks küme kavramının bir küme ailesi üzerinde kesişim işlemine göre kapalılığı yardımıyla sistem haline getirilmesinde olduğu gibi konveks fonksiyonlar için fonksiyonlar ailesinin supremum işlemine göre kapalılığı kullanılarak bir konveks sistem oluşturulabilir.

$\mathcal{F}$, X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir kümesi olsun. Eğer bu küme supremum işlemine göre kapalı ise yani herhangi bir I indis kümesi için

$$f_i \in \mathcal{F}(i \in I) \Rightarrow \sup_{i \in I} f_i \in \mathcal{F}$$

oluyorsa $f \in \mathcal{F}$ fonksiyonlarına $\mathcal{F}$'ye göre konvekstir denir (Singer 1997). $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı konveks fonksiyonlar kümesi bir konveks sistem oluşturur.

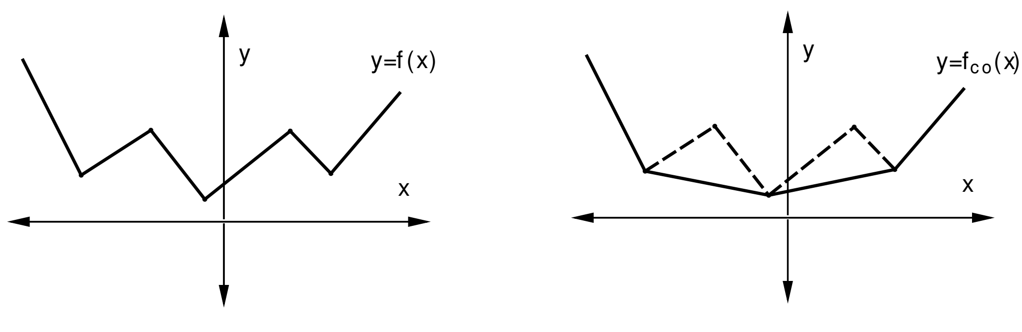
Örnek 4.117. *$C[a, b]$ kümesinin elemanı olan her bir f fonksiyonu bir $C[a, b]$-konvekstir.*

4.2.4. Kabuk (Hull) Operatorü Yardımı İle Genelleştirme

Fonksiyonların soyut konveksliğine başka bir yaklaşım, fonksiyonun konveks kabuğudur. Bir fonksiyonun konveks kabuğu f_{co}, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ için aşağıdaki şekilde verilir:

$$f_{co}(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x^{(i)}) \middle| \, x^{(i)} \in X, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2..., m, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^{(i)} = x \right\}$$

Yukarıda verilen fonksiyon yardımıyla konveks olmayan bir fonksiyondan da konveks bir fonksiyon elde edilebilir. Aşağıda bunu temsil eden görsel verilmiştir.



Şekil 4.8. f ve f_{co} grafikleri

Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f \leq \tilde{f}$ olacak şekilde f, $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları,

- $f_{co} \leq \tilde{f}_{co}$

- $f_{co} \leq f$
- $(f_{co})_{co} = f_{co}$

koşullarını sağlar. Benzer şekilde kabuk operatörünün koşullarını sağlayan herhangi bir operatör yardımıyla da genelleştirme yapılabilir.

X herhangi bir küme olmak üzere her $f, \tilde{f} \in \mathbb{R}^X$ fonksiyonları için $v(f) = f_v$ olmak üzere,

- $f \leq \tilde{f} \Rightarrow f_v \leq \tilde{f}_v$
- $f_v \leq f$
- $(f_v)_v = f$

aksiyomlarını sağlayan $v : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$ şeklinde bir operatör verilsin. Bir $g \in \mathbb{R}^X$ fonksiyonu için

$$g = g_v$$

ise bu g fonksiyonuna v'ye göre soyut konvekstir (ya da kısaca, v-konveks) denir (Singer 1997).

v'nin klasik konveks kabuk operatörü olması durumunda, klasik konveks fonksiyon elde edilir.

4.3. KATEGORİZE EDİLEMEYEN BAZI KONVEKS KÜME VE FONKSİYON TANIMLARI

Yukarıdakiler dışında yine konveks küme ve konveks fonksiyon türü olarak adlandırabileceğimiz birçok tanım vardır. Bunlardan örnek olarak birkaçını sunuyoruz.

Tanım 4.118. *E normlu lineer uzay ve ϱ onun üzerinde tanımlı bir metrik ve $0 \leqq \alpha \leqq 1$ olsun. $d(p, P) < r$ koşulunu sağlayan her $p \in E$ ve $r > 0$ sayısı için $q \in conv(S(p, r) \cap P)$ iken $d(q, P) \leqq \alpha r$ oluyorsa E'nin P alt kümesine α-parakonvekstir denir. Eğer $\alpha < 1$ için α-parakonveks ise parakonveks olarak adlandırılır. Konveks kapalı bir küme 0-parakonvekstir (Michael 1960).*

Örnek 4.119. *V, X, Y ve Z harfleri ve π açısından daha küçük açıya sahip dairesel yaylar parakonvekstir (Michael 1960).*

Tanım 4.120. *X bir Banach uzayı, $\{x_1, \ldots x_m\} \subset X$ ve $Q \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $Q^C = \{1, \ldots, m\} \backslash Q$ olsun. $x^+(Q) = \sum_{i \in Q} x_i$ ve $x(Q) = x^+(Q) - x^+(Q^c)$ olmak üzere her $x_1, \ldots, x_n \in X$ için*

$$\min_{Q \in \{1,\ldots,n\}} \|x(Q)\| \leq \beta n \max_{i \leq n} \|x_i\|$$

bir $\beta \in (0,1)$ ve $n \in \{2, 3, \ldots\}$ sayıları bulunabilirse X'e bir B -konveks kümedir denir (Avallone ve Basile 1998).

Bir konveks fonksiyonun tanım kümesindeki herhangi üç nokta ile karakterizasyonundan yola çıkarak bölünmüş farklar yardımıyla aşağıdaki genelleştirme verilmiştir.

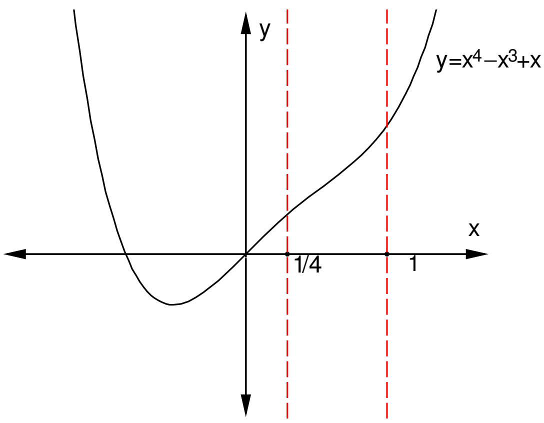
Tanım 4.121. *$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve n doğal sayı olsun. $[a, b]$ kapalı aralığındaki her $n + 1$ farklı nokta için*

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna n-konvekstir denir (Pecaric ve Zwick 1989).

Yukarıdaki tanımda $n = 1$ durumu monoton artan fonksiyonlar sınıfını, $n = 2$ durumu ise klasik konveks fonksiyonları belirtmektedir.

Örnek 4.122. *$f : [1/4, 1] \to \mathbb{R}$ için $f(x) = x(x^3 - x^2 + 1)$ fonksiyonu $[1/4, 1]$ aralığında konveks değildir fakat 3-konvekstir.*



Şekil 4.9. $f(x) = x(x^3 - x^2 + 1)$ fonksiyonunun grafiği

$\mathbb{R}^2$'de tanımlı fonksiyonlar için koordinat bileşenlerine bağlı olarak aşağıdaki konveks fonksiyon çeşidi tanımlanmıştır.

Tanım 4.123. *$A \subset \mathbb{R}^2$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ olmak üzere her $(x,u),(y,v) \in A$ ve $t,s \in [0,1]$ için*

$$
\begin{aligned}
& f(tx+(1-t)y, su+(1-s)v) \\
& \qquad \le tsf(x,u)+t(1-s)f(x,v)+s(1-t)f(y,u)+(1-t)(1-s)f(y,v)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f'ye A kümesi üzerinde koordinat sıralı konveks denir (Noor vd. 2015).

Literatürde klasik konveks fonksiyonu karakterize eden (3.1) eşitsizliğinde sol taraftaki λ, $1-\lambda$ katsayılarının yerine trigonometrik değişkenlere bağlı katsayılar kullanılarak aşağıdaki konveks fonksiyon tipi elde edilmiştir.

Tanım 4.124. *$A = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ ve ρ, $0 < \rho(b-a) < \pi$ koşulunu sağlayan bir reel sayı olmak üzere, her $x \in A$ için*

$$
f(x) \le \frac{\sin[\rho(b-x)]}{\sin[\rho(b-a)]} f(a) + \frac{\sin[\rho(x-a)]}{\sin[\rho(b-a)]} f(b)
$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f'ye koordinata göre A kümesi üzerinde trigonometrik ρ-konveks küme denir (Ali 2012).

Tanım 4.125. *$A = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ ve ρ_1, ρ_2, $0 < \rho_1(b-a) < \pi$ ve $0 < \rho_2(d-c) < \pi$ koşullarını sağlayan iki reel sayı olmak üzere, her $(x,y) \in A$ için*

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \le\ & \frac{\sin[\rho_1(b-x)]\sin[\rho_2(d-y)]}{\sin[\rho_1(b-a)]\sin(\rho_2(d-c))} f(a,c) + \frac{\sin[\rho_1(b-x)]}{\sin[\rho_1(b-a)]}\frac{\sin[\rho_2(y-c)]}{\sin[\rho_2(d-c)]} f(a,d) \\
& + \frac{\sin[\rho_1(x-a)]}{\sin[\rho_1(b-a)]}\frac{\sin[\rho_2(d-y)]}{\sin[\rho_2(d-c)]} f(b,c) + \frac{\sin[\rho_1(x-a)]}{\sin[\rho_1(b-a)]}\frac{\sin[\rho_2(y-c)]}{\sin[\rho_2(d-c)]} f(b,d)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f'ye koordinata göre A kümesi üzerinde trigonometrik ρ-konveks küme denir (Budak vd. 2020).

Literatürde fonksiyonun tanımlandığı kümede, her x ve y noktası yerine bileşenlerine göre bazı koşulları sağlayan x ve y noktaları için (4.9) koşulunu sağlayan fonksiyonlara özel bir konvekslik tipi atfedilmiştir.

Tanım 4.126. *Bir $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x_{[i]}$ x'in i. en büyük bileşenini belirtmek üzere, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ verilsin. Eğer $x \prec y$ yani*

$$
\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \le \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}, \quad k = 1,2,\ldots,n-1
$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}$$

koşullarını sağlayan her $x, y \in A$ *için*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{4.9}$$

sağlanıyor ise f*'ye* A *kümesi üzerinde bir Schur konveks fonksiyondur denir (Chu vd. 2012).*

Tanım 4.127. *Yukarıdaki tanımda verilen koşullarda* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ *alınır ve (4.9) eşitsizliği*

$$f\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) \le f\left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \ldots, \frac{1}{y_n}\right)$$

olarak alınırsa f*'ye* A *kümesi üzerinde bir harmonik Schur konveks fonksiyondur denir (Chu vd. 2012).*

Tanım 4.128. *Yukarıdaki tanımda verilen koşullarda* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ *alınır ve* $\log x = (\log x_1, \log x_2, \ldots, \log x_n)$ *olmak üzere*

$$\log x \prec \log y$$

koşullarını sağlayan her $x, y \in A$ *için (4.9) eşitsizliği sağlanıyor ise* f*'ye* A *kümesi üzerinde bir logaritmik Schur konveks fonksiyon denir (Chu vd. 2012).*

Bir fonksiyonun başka bir fonksiyona göre konveksliği şu şekilde tanımlanır.

Tanım 4.129. $I, J \subset \mathbb{R}$ *ve* $f, g : I \to J$ *iki sürekli fonksiyon ve* g *kesin monoton olsun.* $f \circ g^{-1}$*,* $g(I)$ *aralığı üzerinde konveks ise* f*,* g*'ye göre konvekstir denir (Niculescu 2003).*

Tanım 4.130. f *ve* g *fonksiyonları reel sayıların aynı aralığında tanımlanan sürekli fonksiyonlar olsun ve birinci türevleri sıfırdan farklı olsun. Aralıktaki her* x *elemanı için*

$$\frac{g''(x)}{g'(x)} \ge \frac{f''(x)}{f'(x)}$$

sağlanıyor ise f *fonksiyonu* g*'ye göre konvekstir denir (Cargo 1965).*

Kaba konveks fonksiyonlar olarak adlandırılan fonksiyonlar da literatürde rastlanılan bir konvekslik türünü oluşturmaktadır. Konvekslik kavramında bir A kümesinin her x, y

elemanı için geçerliliği istenen koşulun, $\|x-y\| \geq r$ şartını sağlayan her x, y ile değiştirilmesi ile kaba konvekslik tanımlanmıştır. r'ye genel olarak kaba konvekslik seviyesi denmiştir. Aşağıda bunların üçü örneklenmiştir.

Tanım 4.131. *X bir normlu uzay, $D \subset X$ bir konveks küme ve $f : D \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer*

$$\|x-y\| \geq r_\rho$$

koşulunu sağlayan her $x, y \in D$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

oluyorsa f'ye r_ρ dereceli $\rho-$konvekstir denir (Hu vd. 1989).

Tanım 4.132. *X bir normlu uzay, $D \subset X$ bir konveks küme ve $f : D \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer*

$$(1-\lambda)\|x-y\| \geq \frac{\delta}{2} \text{ ve } \lambda\|x-y\| \geq \frac{\delta}{2}$$

koşulunu sağlayan her $x, y \in D$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

oluyorsa f'ye $\delta-$konvekstir denir (Hu vd. 1989).

Yukarıdaki tanımda "her $x, y \in D$" yerine "her $(x,y) \in \{(x,y) \in X| \, \|x-y\| \geq r_\delta\}$" getirilirse f fonksiyonuna r_δ dereceli δ-konveks fonksiyon denir.

Tanım 4.133. *$D \subset \mathbb{R}$, γ pozitif değerli $x \longmapsto x+\gamma(x)$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon ve $f : D \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer*

$$h_{f,\gamma}(x) = \frac{f(x+\gamma(x))-f(x)}{\gamma(x)}$$

ile verilen fonksiyon azalmayan fonksiyon ise f 'ye γ'ya göre konveks ya da γ-konvekstir denir (Phu 1993).

Örnek 4.134. *$\gamma(x) = -x+(x^3+2\pi)^{1/3}$ olmak üzere $f(x) = \sin(x^3)$ fonksiyonu bir $\gamma-$konveks fonksiyondur (Phu 1993).*

5. SONUÇLAR

20. yüzyılın başlarında tanımlanan konveks küme ve fonksiyonların gelişimi, zamanla karşılaşılan problemlere çözüm arayışı ve bilimsel araştırmaların doğal gelişimi, farklı konvekslik kavramlarının tanımlanmasına yol açmıştır.

Literatürde farklı matematiksel yapılar (cebirsel, topolojik, fonksiyonel yapılar) için konveks küme ve konveks fonksiyon tanımlamaları yapılmıştır. Bunları, klasik konveks fonksiyonların ve kümelerin genelleştirmeleri veya soyut konveksleştirme olarak adlandırabiliriz. Genelleştirme, klasik konveks fonksiyonun ve kümenin farklı karakterizasyonları dikkate alınarak yapılır. Bu tez çalışmasında önce belli başlı konveks küme ve konveks fonksiyon genelleştirme metotları sunulmuştur. Daha sonra bu metotlarla tanımlanabilen konveks küme ve fonksiyon tipleri örnek olarak verilmiştir. Her ne kadar bu metotlar çoğu tanım için kullanılmışsa da literatürde bu tanımlamalara uyanlar dışında birçok yeni konvekslik tipi de mevcuttur. Çalışmamızın son bölümünde bunlara örnek olarak yer verilmiştir.

Bu çalışmanın geometri ve analiz başta olmak üzere ilgili konularda çalışan bilim insanlarına konveksleştirme ile ilgili genel bir fikir ve konvekslik kavramına bir üst bakış vereceği, aynı zamanda birçok çeşit konveks küme ve fonksiyonu bir arada sunduğu için de yararlı bir derleme olacağı düşünülmektedir.

6. KAYNAKLAR

Adilov, G., Rubinov, A. 2006. B-Convex Sets and Functions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 27, (3-4), 237-257.

Aleman, A. 1985. On some generalization of convex sets and convex functions. *Anal. Numer. Theor. Approx* (Cluj), 14, 1-6.

Ali, M.S.S. 2012. On certain properties of trigonometrically ρ-convex functions, *Advances in Pure Mathematics*, 2, 337-340.

Avallone, A. and Basile, A. 1998. Liapunov–Richter theorem in B-convex spaces. *Journal of Mathematical Economics*, 30(1), 109-118.

Awan, M. U., Noor, M. A., Du, T. and Noor, K. I. 2020. On M-convex functions.

Bai, S.P., Wang, S. H. and Qi, F. 2020. On HT-convexity and Hadamard-type inequalities. *Journal of Inequalities and Applications*, 2020(1), 1-12. https://doi.org/10.1186/s13660-019-2276-3

Bakula, M., Pečarić, J. and Ribicic, M. 2006. Companion inequalities to Jensen's inequalityfor m-convex and (α,m)-convex functions, *J. Inequal Pure Appl Math*, 7(5), Art. (194).

Beckenbach, E. F. and Bellman, R. 2012. Inequalities. Vol. 30. Springer Science and Business Media.

Bellman, R. E. and Beckenbach, E. F. 1961. An Introduction to Inequalities. Random House.

Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. 2001. Lectures On Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, And Engineering Applications. Society For Industrial And Applied Mathematics.

Birkhoff, G. 1967. Lattice Theory (third ed.). American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25. AMS, New York .

Blaga, L. and Kolumbán, J. 1994. Optimization on closely convex sets. In Generalized Convexity (pp. 19-34). Springer, Berlin, Heidelberg.

Bridson, M. R. and Haefliger, A. 2013. Metric Spaces Of Non-Positive Curvature. Vol. 319. Springer Science and Business Media.

Budak, H., Kara, H.ve Kiriş, M. E. 2020. On Hermite-Hadamard type inequalities for co-ordinated trigonometrically ρ -convex functions. *Tbilisi Mathematical Journal*, 13(2), 1-26.

Boltyanski, V. and Martini, H. 2003. Minkowski addition of H-convex sets and related Helly-type theorems. *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, 103(2): 323–336.

Cargo, G. T. 1965. Comparable means and generalized convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 12(3), 387-392.

Chu, Y. M., Xia, W. F. and Zhang, X. H. 2012. The Schur concavity, Schur multiplicative and harmonic convexities of the second dual form of the Hamy symmetric function with applications. *Journal of Multivariate Analysis*, 105(1), 412–421. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2011.08.004

Demirsoy, Y. 2019. Konvekslik Kavramının Soyutlaştırılması Üzerine. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 41 s.

Dogaru, O., Tevy, I. and Udrişte, C. 1998. Extrema constrained by a family of curves and local extrema. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 97(3): 605-621.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 57, 377-385.

Fan, K. 1963 On the Krein-Milman theorem. *Convexity*, 7: 211-220.

Fenchel, W. 1983. Convexity through the ages. *In Convexity and its Applications*, pp. 120-130

Ferreira, O. P. 2006. Convexity with respect to a differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 315(2): 626–641.

Geçdoğan, G. 2016. Soyut Konves Yapılar. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, 64 s.

Gill, P. M., Pearce, C. E. M. and Pecaric, J. 1997. Hadamard's inequality for r-convex functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 215(2), 461-470.

Green, J. W. and Gustin, W. 1950. Quasiconvex sets. *Canadian Journal of Mathematics*, 2, 489-507. 103.

Godunova, E. K. and Levin, V. I. 1985. Inequalities For Functions of a Broad Class That Contains Convex, Monotone and Some Other Forms of Functions. *Numerical Mathematics and Mathematical Physics*, 166, 138-142.

Hammer, P. C. 1955. Maximal convex sets. *Duke Mathematical Journal*, 22(1), 103-106.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G. 1952. Inequalities, Cambridge University Press, London.

Hermite, C. 1883. Sur deux limites d'une intégrale définie. *Mathesis*, 3(1), 1-82.

Hölder, O. L. 1889. Über einen Mittelwertsatz. *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys. Kl*, 44, 38-47.

Hu, T. C., Klee, V. and Larman, D. 1989. Optimization of globally convex functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27(5), 1026-1047.

Hudzik, H. and Maligranda, L. 1994. Some remarks on s-convex functions. *Aequationes mathematicae*, 48 (1): 100-111.

Jensen, J. L. W. V. 1906. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta mathematica*, 30, 175-193.

Köthe, G. 1960. Topologische lineare Räume. Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg.

Kutateladze, S. S. and Rubinov, A.M. 1976. Minkowski Duality and its Applications, Nauka, Novosibirsk (In Russian).

Lángi, Z., Naszódi, M. and Talata, I. 2013. Ball and spindle convexity with respect to a convex body. *Aequationes Mathematicae*, 85(1–2): 41–67.

Matkowski J. and Ratz J. 1997. Convexity of power functions with respect to symmetric homogeneous means. In: Bandle C., Everitt W.N., Losonczi L., Walter W. (eds) General Inequalities 7. ISNM International Series of Numerical Mathematics, vol 123. Birkhäuser, Basel.

Menger, K. 1928. Untersuchungen über allgemeine Metrik. *Mathematische Annalen*, 100(1), 75-163.

Michael, E. 1960. Paraconvex Sets. *Mathematica Scandinavica*, 7(2): 372–376.

Micharda, B.and Rajba, T. 2012. On some Hermite-Hadamard-Fejer inequalities for (k, h)-convex functions. *Mathematical Inequalities and Applications*, 12(4): 931-940.

Miheşan, V. 1993. A generalization of the convexity. Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania.

Naidenko, V. 2009. Optimization on directionally convex sets. *Cent Eur J Oper Res,* 17, 55–63.

Niculescu, C. P. 2003. Convexity according to means. *Mathematical Inequalities and Applications*, 6, 571-580.

Noor, M. A., Noor, K. I. and Awan, M. U. 2015. Integral inequalities for coordinated harmonically convex functions. *Complex variables and elliptic equations*, 60(6), 776-786.

Noor, M. A., Noor, K. I., Awan, M. U. and Costache, S. 2015. Some integral inequalities for harmonically h-convex functions. *Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys*, 77(1), 5-16.

Orlicz, W 1961. A note on modular spaces. I. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 9, 157–162.

Pallaschke, D. E. and Rolewicz, S. 2013. Foundations of mathematical optimization: convex analysis without linearity. Vol. 388. Springer Science & Business Media.

Park, J. 2010. Hermite-Hadamard-type inequalıtıes for real α-star s-convex mappings, *J. Appl. Math. & Informatics*, 28, No. 5 - 6, pp. 1507-1518.

Pecaric, J. E. 1987. Convex Functions: Inequalities, Serbocroatian, Beograd.

Pecaric, J. E. and Zwick, D. 1989. n-Convexity and Majorization. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 303-311.

Pecaric, J. E. and Tong, Y. L. 1992. Convex Functions, Partial Orderings, And Statistical Applications. Academic Press.

Phú, H. X. 1993. γ-Subdifferential and γ-convexity of functions on the real line. *Applied Mathematics and Optimization*, 27(2), 145-160.

Rapcsák, T. 1991. Geodesic convexity in nonlinear optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 69(1), 169–183.

Roberts, A. W. and Varberg, D. E. 1973. Convex Functions. *Pure and applied mathematics*, vol 57.

Rockafellar, R. T. 1970. Convex analysis. Princeton university press.

Rockafellar, R. T. 1974. Conjugate duality and optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Rolewicz, S. 2003. ϕ-Convex functions defined on metric spaces. *Journal of Mathematical Sciences*, 115(5).

Rubinov, A. 2000. Abstract Convexity and Global Optimization. Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht-London.

Shveidel, A. P. 2003. Abstract convex sets with respect to the class of general min-type functions. *Optimization*, 52(4-5), 571-579.

Singer, I. 1997. Abstract convex analysis. Canadian Mathematical Society Series Of Monographs And Advanced Texts. A Wiley-Interscience Publication, New York.

Stolz, O. 1893. Grundzüge der Differential-und Integralrechnung (Vol. 1). BG Teubner.

Toader, G. H. 1984. Some generalizations of the convexity. *In Proc. Colloq. Approx. Optim*, Cluj- Napoca (Romania), 329-338.

Toader, G. H. 1988. On a generalization of the convexity. *Mathematica*, 30(53), 83-87.

Tunç, M., Göv, E. ve Şanal, Ü. 2015. On tgs-convex function and their inequalities. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 30(5), 679-691.

Tunç, M. ve Yıldırım, H. 2012. On MT-convexity . arXiv:1205.5453

Van De Vel, M. L. 1993. Theory Of Convex Structures. Elsevier, Amsterdam.

Varošanec, S. 2007. On h-convexity. *J. Math. Anal. and Appl*, 326, 303-311.

Xia, W. F. and Chu, Y. M. 2009. The Schur harmonic convexity of Lehmer means. *International Mathematical Forum*, Vol. 4, No. 41-44, pp. 2009-2015.

Yang, X. M., Yang, X. Q. and Teo, K. L. 2003. Generalized invexity and generalized invariant monotonicity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 117(3), 607–625.

Yeşilce, İ. 2016. B-Konveks Fonksiyonlar ve Özellikleri. Doktora Tezi. Mersin Üniversitesi, Mersin, 62s.

Youness, E. A., Alsaraireh, A. A. and Alrawashdeh, H. S. 2016. Rough convexity of a set and a function. *Delta Journal of Science*, 38: 29-34.

Zhang, T., Ji, A. and Qi, F. 2012. On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for s-Geometrically Convex Functions, *Abstract and Applied Analysis*.

ÖZGEÇMİŞ

DİLAN TANRIVERDİ

dilanntanriverdi@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans: Akdeniz Üniversitesi

2018-2020 Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

Lisans: İstanbul Üniversitesi

2011-2018 Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen:

2018-Devam Ediyor