T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BELİRTİSİZ SAYISAL YARIGRUPLAR

Ahu Berika EMRAHOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EYLÜL 2021

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BELİRTİSİZ SAYISAL YARIGRUPLAR

Ahu Berika EMRAHOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EYLÜL 2021

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BELİRTİSİZ SAYISAL YARIGRUPLAR

Ahu Berika EMRAHOĞLU

Bu tez 24/09/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU (Danışman)

Doç. Dr. Mümün CAN

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

BELİRTİSİZ SAYISAL YARIGRUPLAR

Ahu Berika EMRAHOĞLU

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU
Eylül 2021; 30 sayfa

Bu tezde belirtisiz sayısal yarıgruplar üzerine çalışılmıştır. Bu kavramın varlığının ispatlanabilmesi ve anlaşılabilmesi için öncelikle yarıgrup, sayısal yarıgrup ve yarıgruplar içindeki belirtisiz ideal kavramlarından, özelliklerinden ve Pseudo-Frobenius sayıları, Frobenius sayısı, Arf sayısal yarıgruplar gibi alt başlıklardan bahsedilmiştir. Daha sonra ise, Belirtisiz topolojide büyük bir yeri olan belirtisiz gruplar ile Cebir anabilim dalının önemli uygulama alanlarına sahip konularından olan sayısal yarıgruplardan faydalanılarak "belirtisiz sayısal yarıgruplar" tanımlanmaya çalışılmıştır.

Bu çalışmanın amacı, sırasıyla yarıgrup, sayısal yarıgrup ve yarıgruplar içindeki belirtisiz idealler kavramlarını kısaca açıklayarak belirtisiz sayısal yarıgrup kavramı için gerekli ön bilgiyi vermek, belirtisiz sayısal yarıgrupların tanımlamak, bazı özellikleri elde etmek, örneklendirerek bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılara bir önbilgi kaynağı oluşturmaktır.

Pedro A. Garcia-Sanchez, L.C. Rosales, L.A. Zadeh, Halil İbrahim Karakaş, Cahit Arf, sayısal yarıgruplar ve belirtisiz yarıgruplar hakkında ayrıntılı bilgi için başvurulacak temel kaynakları yazan matematikçilerdir (Garcia-Sanchez ve Assi 2016, Karakas ve İlhan 2017, Rosales 2001, Zadeh 1965).

ANAHTAR KELİMELER: Belirtisiz küme, Belirtisiz ideal, Frobenius sayısı, İdeal, Sayısal yarıgrup, Yarıgrup

JÜRİ: Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU
Doç. Dr. Mümün CAN
Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

FUZZY NUMERIC SEMIGROUPS

Ahu Berika EMRAHOĞLU

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mutlu GÜLOĞLU
September 2021; 30 pages

In this thesis, fuzzy numerical semigroups were studied. In order to prove and understand the existence of this concept, first of all, the fuzzy ideal concepts in semigroups, numerical semigroups and semigroups, their properties and subheadings such as Pseudo-Frobenius numbers, Frobenius number, Arf numerical semigroups are mentioned. Then, "indefinite numerical semigroups" were tried to be defined by making use of the indefinite groups, which have a great place in the Fuzzy Topology, and the numerical semigroups, which are the important application areas of the Algebra department.

The aim of this study is to briefly explain the concepts of semigroups, numerical semigroups and fuzzy ideals in semigroups, respectively, to give the necessary preliminary information for the concept of fuzzy numeric semigroups, to define fuzzy numeric semigroups, to obtain some properties, to exempfly, and to create a pre-information resource for researchers who want to work in this field.

Pedro A. Garcia-Sanchez, L.C. Rosales, L.A. Zadeh, Halil Ibrahim Karakas, Cahit Arf are the mathematicians who wrote the main sources to refer to for detailed information about numerical semigroups and fuzzy semigroups (Garcia-Sanchez and Assi 2016, Karakas and İlhan 2017, Rosales 2001, Zadeh 1965).

KEYWORDS: Ideal, Frobenius number, Fuzzy ideal, Fuzzy set, Numerical semigroup, Semigroup.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Mutlu GÜLOĞLU
Assoc. Prof. Dr. Mümün CAN
Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır. Bu bölümleri kısaca özetleyecek olursak;

Birinci bölümde, konunun anlaşılabilirliği için yarıgrup ve sayısal yarıgrup kavramlarının tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. Bu sayede tezin sonraki bölümlerine hazırlık yapılmıştır.

İkinci bölümde, öncelikle yarıgruplar içindeki idealler tanımlanmış, 1965'te ilk defa Zadeh'in tanımladığı "belirtisiz küme" kavramı verilmiş, daha sonra ise Kuroki sayesinde yarıgrup kavramının belirtisiz ideallere genişletilmesi verilerek bazı özelliklerinden bahsedilmiştir. Bu bölümde, üçüncü bölümde bahsedilecek olan belirtisiz sayısal yarıgrupların daha iyi anlaşılması için parçadan bütüne doğru ilerlenmiştir.

Üçüncü bölümde ise, önceki bölümde verilen parçalar birleştirilerek belirtisiz sayısal yarıgrup kavramının tanımı verilmiş, bazı özellikleri ispatlanmıştır. Bu bölümde amaçlanan, daha önce üzerinde birçok çalışma yapılan yarıgrup, sayısal yarıgrup, belirtisiz ideal kavramlarından yeni bir sistem üretmek, sayısal yarıgrupların klasik tanımının dışına çıkarak belirtisiz tanımına geçiş yapmak, daha sonra bu konuda çalışmak isteyen kişiler için düzenli ve anlaşılır bir kaynak oluşturmaktır.

Bu çalışma süresi boyunca, bilgisi, tecrübeleri ve ilgisiyle desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU'na ve yardımları, destekleri için Doç.Dr.Nesrin TUTAŞ hocama ve diğer çok kıymetli hocalarıma minnet duyuyor, sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak, her daim yanımda olan, maddi manevi desteklerini hep üzerimde hissetiğim, kıymetli annem, abim ve merhum babama şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
AKADEMİK BEYAN v
SİMGELER vi
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK TARAMASI 1
2.1. Yarıgruplar 1
2.2. Sayısal Yarıgruplar 3
2.2.1. Pseudo-Frobenius Sayılar 9
2.2.2. Maksimal gömme boyutuna sahip sayısal yarıgruplar: 10
2.2.3. Arf Sayısal Yarıgruplar 11
3. MATERYAL VE METOT 12
3.1. Yarıgruplar İçindeki Belirtisiz İdealler 12
3.1.1. Yarıgruplar İçindeki İdealler 12
3.1.2. Yarıgruplar içindeki Belirtisiz İdealler 14
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 21
4.1. Belirtisiz Sayısal Yarıgruplar 21
5. SONUÇLAR 29
6. KAYNAKLAR 30
ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum "Belirtisiz Sayısal Yarıgruplar" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

24/09/2021

Ahu Berika EMRAHOĞLU

SİMGELER

Simgeler:

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Pozitif doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}\backslash S$	S nin $\mathbb{N}$ içinde tümleyeni
$\|A\|$	A kümesinin eleman sayısı
$d\|x$	d, x sayısını böler
$\wedge$	Ve
$\vee$	Veya

1. GİRİŞ

Önermeler Cebirinde klasik yaklaşıma göre her şey nettir. Belirsizliğe yer yoktur. Bir nesne ya uzundur ya kısa. Ya siyahtır ya beyaz. Aristotales'in dediği gibi; "Bir önerme ya doğrudur ya yanlış." Doğru önerme ise doğruluk değeri 1, yanlış ise 0'dır. 0 ve 1'den oluşan 2 değerli bir sistemdir. Fakat evrende her şey bu kadar kesin sınırlarla çizilmemiştir. Uzun ile kısa arasında, siyah ile beyaz arasında birçok değer vardır.
Bir olguya sadece doğru veya yanlış, 0 veya 1, siyah veya beyaz demek doğru olmayacaktır. Bu nedenle ögelere bir kümeye üye olma değeri atama ihtiyacı doğmuştur. Yani bir eleman bir kümede varsa 1, yoksa 0 değeri atamak yerine, [0,1] aralığında sonsuz değerli bir kümeden üyelik değeri (öğesi olma değeri) belirlenmelidir. Örneğin; klasik mantıkta 1.80 metre ve üzeri boydaki insanları uzun kabul edersek 1.79 metre boyundaki bir kişi küme şartını sağlamadığından kısa kabul edilecek. Öte yandan 1.80 metre boyundaki bir kişi ile 2.03 metre boyundaki bir kişi aynı uzunluk kategorisinde yer alacak. İşte klasik yaklaşımdaki bu darlık ve kısıtlılık, "belirtisiz (fuzzy) yaklaşım, belirtisiz (fuzzy) küme" kavramının doğmasına yol açmıştır.

Boy örneğimizden devam edelim; belirtisiz küme yaklaşımında 1.80 metre boyundaki insan uzunken 1.79 metre boyundaki bir kişi kısa sayılmayacak, ancak uzun boy kümesine olan üyelik değeri 1.80 metre boyundaki kişiden biraz daha az olacaktır.

Başka bir örnekle daha açıklayalım; maksimum çıkabildiği hız 100 km/sa olan bir aracın, 60 km/sa hızla giderken hızlılık kümesine olan üyelik değeri %60=0.6 iken, 95 km/sa hızla giderken üyelik değeri %95=0.95 olacaktır.

Doğada olduğu gibi bilimin her alanında, evrende belirsizlik söz konusudur. Kesinlikten söz edilemeyecek durumlar mevcuttur. Bunu farkeden bilim insanları sadece {0,1} kümesi yerine {0,1,2}, {-1, 0, 1} değerleri kullanmaya daha sonra da bu üyelik değerlerini daha da genişleterek belirtisiz mantık kuramına yaklaşmışlardır. 1965'te yayınladığı bir makale ile modern anlamda en net tanımı yaparak bu kuramın kurucusu olan kişi ise 1921 Bakü doğumlu Amerika asıllı sibernetikçi Lütfi Ali Askerzade ya da daha çok bilinen ismiyle Zadeh'tir.

Yapay zeka, canlı ve cansız karmaşık sistemlerin denetlenmesi ve birbirine uyarlanmasıyla uğraşan, "İnsan tecrübesi, zekası bilgisayara aktarılabilir mi?", "Makineler düşüne-bilir mi?" gibi sorulara yanıt arayan Zadeh, teknik bir soruna çözüm ararken çözümün klasik yaklaşımla değil, belirtisiz yaklaşımla çözüleceğini farketmiş ve 1965 yılında "Fuzzy Sets" isimli çalışmasının "Information and Control" dergisinde yayımlanmasıyla büyük ses getirmiştir. Bu devrim niteliğinde çalışma ilerleyen zamanlarda çözümlenememiş birçok soruya da çözüm olmuş, mantık, fizik alanlarına yeni bir bakış açısı getirmiş, teknolojik birçok hareketin de öncüsü olmuştur. Sibernetik sistemler bu keşifle geliştirilmiş, yapay zeka ve akıllı sistemlerin uygulamaları hız kazanmış, sinyal alıcısından çamaşır makinesine, trafik lambalarından kamera odağına kadar mühendislik, fen, matematik, tıp gibi birçok disipline katkı sağlamıştır.

Zadeh'in belirtisiz mantık ilkelerinde; kesin belli olan değerler yerine yaklaşık değerler kullanılır, tüm değerler [0,1] aralığında bir üyelik derecesiyle gösterilir ve her mantıksal ifade bulanık hale dönüştürülebilirdir. Zadeh'le başlayan belirtisizlik kavramı, birçok disipline olduğu gibi topolojik uzaylara ve cebirsel yapılara (gruplara) da uygulanmıştır.

Üç bölümden oluşan bu çalışmada, klasik anlamda bildiğimiz sayısal yarıgrup kavramı belirtisiz yaklaşımla ele alınmıştır.

İlk bölümde klasik yaklaşımda yarıgrup ve sayısal yarıgrup kavramlarının tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. Yarıgrup kavramına ilk kez J.A. de Siguier, "Element de la Theroie des Groupes Abstraits" (Paris 1904) isimli kitabında değinmiş, 1905 yılında L.E.Dickson yarıgruplar üzerine makale yayımlamış, sonrasında da 1928'de A. K. Suschkewitsch'in yayımladığı makale ile yarıgrup teorisi literatürde yerini almıştır. Sayısal yarıgruplar ise, ilk defa 19.yy'da F.Frobenius ve J.J.Sylvester tarafından ele alınmış, matematik tarihinde önemli sorularından, Frobenius sorusu olarak bilinen; "Ebob'u 1 olan sayıların lineer kombinasyonlarıyla elde edilemeyecek en büyük sayı nedir?" sorusunun cevaplanması Sylvester tarafından yapılmıştır.

İkinci bölümde, Kuroki'nin öncüsü olduğu yarıgruplar içindeki belirtisiz ideallerin tanımına yer verilmiş, Malik, Xie, Mordeson gibi matematikçilerin çalışmalarından faydalanılarak bu ideallerin özellikleri verilmiştir.

Üçüncü ve son bölümde, belirtisiz yaklaşımla sayısal yarıgrup tanımı verilmiş, klasik yaklaşımdaki bir sayısal yarıgrubun "cinsi", "boşluklar kümesi", "Frobenius sayısı" gibi kavramlar belirtisiz yaklaşımla ele alınmış ve örneklendirilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Yarıgruplar

Tanım 2.1. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003) X boştan farklı bir küme olsun. $X \times X$ ten X e tanımlı bir fonksiyona X üzerinde "ikili işlem" denir. $*$, X üzerinde bir ikili işlem ise $(X, *)$ çiftine "cebirsel yapı" denir.*
$(X, *)$ cebirsel yapısı, her $a, b, c \in X$ için; $(a * b) * c = a * (b * c)$ özelliğini sağlıyorsa "yarıgrup" denir. $(X, *)$ cebirsel yapı olmak üzere her $a \in X$ için $a * e = a = e * a$ eşitliğini sağlayan bir $e \in X$ varsa e ye $(X, *)$ sisteminin birim elemanı denir ve $(X, *)$ birimlidir denir.

Tanım 2.2. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003) $(X, *)$ yarıgrubu birimli ise "monoid" denir.*

$\mathbb{N}_0$ ın birer altmonoidinin $\{0\}$ ve $\mathbb{N}$ olduğu açıktır.

Tanım 2.3. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003)$(X, *)$ bir yarıgrup ve S, X in boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $(S, *)$ bir yarıgrup ise bu sisteme $(X, *)$ in altyarıgrubu denir.*

Burada $(S, *)$ ile anlaşılması gereken $*$'ın $S \times S$ ye kısıtlanışıdır.
$(X, *)$ bir monoid ve $(S, *)$, $(X, *)$ sisteminin bir altyarıgrubu olsun. Eğer e, $(X, *)$ sisteminin birim elemanı ve $e \in S$ ise $(S, *)$, $(X, *)$ sisteminin altmonoidi olarak adlandırılır. ($(X, *)$ için X yazacağız.

Teorem 2.4. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003) Bir yarıgrup (monoid) X olsun. X in altyarıgruplarının (altmonoidlerinin) herhangi kesişimi de X in bir altyarıgrubudur (altmonoididir).*

Tanım 2.5. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003) Bir yarıgrup (monoid) X ve X in bir altkümesi S olsun. X in S içeren bütün altyarıgruplarının kesişimine X in S tarafından üretilen altyarıgrubu (altmonoidi) denir ve $< S >$ ile gösterilir. Eğer $X =< S >$ ise S, X için üreteçler sistemidir, denir.*

$\langle S \rangle = X$ bir yarıgrup, $e \notin X$ ve $X' = X \cup \{e\}$ olsun. $* : X \times X \to X$ in $*' : X' \times X' \to X'$ genişlemesini $a, b \in X$ için $a *' b = a * b$ tanımlayalım. $a *' e = a = e *' a$

ve $e *' e = e$ dir. Bu durumda $(X', *')$ bir monoiddir ve X, X' in altyarıgrubudur. X bir monoid olsa bile e onun birim elemanı değilse X, X' in altmonoidi olamaz.

Tanım 2.6. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003) $(X, *)$ ve $(Y, \cdot)$ birer yarıgrup ve α bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in X$ için; $\alpha(a * b) = \alpha(a) \cdot \alpha(b)$ ise α fonksiyonuna X ten Y ye bir "homomorfizm" denir.*
α, X ten Y ye bir homomorfizm olsun. Eğer α birebir ise "monomorfizm", örten ise "epimorfizm", eğer hem birebir hem de örten ise "izomorfizm" olarak adlandırılır. X ve Y izomorftur, denir.

Tanım 2.7. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003) X, Y, Z birer yarıgrup olsun. Eğer $\alpha : X \longrightarrow Y$ bir homomorfizm ve $\beta : Y \longrightarrow Z$ bir homomorfizm ise $\beta \circ \alpha : X \longrightarrow Z$ bir homomorfizm olur.*

Tanım 2.8. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003) S bir küme olsun. S kümesi üzerinde bir F yarıgrubu, $\alpha : S \longrightarrow F$ fonksiyonu verilmiş olsun. Herhangi bir yarıgrup X ve her $\beta : S \longrightarrow X$ fonksiyonu için öyle tek türlü belirli homomorfizm $\gamma : F \longrightarrow X$ vardır ki $\gamma \circ \alpha = \beta$ oluyorsa F ye S üzerinde serbest yarıgruptur denir.*

Teorem 2.9. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003) S bir küme, F bir serbest yarıgrup ve $\alpha : S \longrightarrow F$ fonksiyonu için; α birebirdir ve $\langle \alpha(S) \rangle = F$ dir.*

Kanıt. $a, b \in S$ ve $a \neq b$ olsun. X birden fazla öge içeren bir yarıgrup olsun ve
$\beta : S \longrightarrow X$ bir fonksiyon olsun öyle ki $\beta(a) \neq \beta(b)$. $\gamma \circ \alpha = \beta$ olacak biçimde γ vardır. $\gamma(\alpha(a)) = \beta(a) \neq \beta(b) = \gamma(\alpha(b))$ olur ve buradan $\alpha(a) \neq \alpha(b)$ elde edilir. Yani α birebirdir.

Şimdi $\langle \alpha(S) \rangle = F$ olduğunu gösterelim; $\langle \alpha(S) \rangle = A$ olsun. Buradan α bir $\beta : S \longrightarrow A$ fonksiyonu tanımlar öyle ki $\iota \circ \beta = \alpha$. ($\iota : A \longrightarrow F$ ye birim homomorfizmdir). Serbest yarıgrup tanımı ile $\gamma : F \longrightarrow A$ şeklinde bir homomorfizma vardır öyle ki $\gamma \circ \alpha = \beta$ dır. σ bir birim izomorfizm ve $\delta = \iota \circ \gamma$ olsun. $\sigma \circ \alpha = \alpha$, $\delta \circ \alpha = \iota \circ \gamma \circ \alpha = \iota \circ \beta = \alpha$ dır. Serbest yarıgrupları tanımlayan teklik özelliğinden $\iota \circ \gamma = \delta = \sigma$ olur. Buradan ι, epiformizm olmalıdır. Böylece, $A = X$ olur ve $\alpha(S)$, F yi üretir. $\square$

2.2. Sayısal Yarıgruplar

Tanım 2.10. *(Rosales ve Branco 2011)* $\mathbb{N}_0$ *negatif olmayan doğal sayılar kümesi ve* $\mathbb{N}_0$ *ın toplama işlemi altında kapalı olan bir* S *alt kümesi için,* $\mathbb{N}_0 \backslash S$ *sonlu sayıda elemana sahipse ve* $0 \in S$ *ise* S *ye sayısal yarıgrup denir.*

Tanım 2.11. *(Rosales ve Garcia-Sanchez 2009)* S *bir yarıgrup ve* S *nin boştan farklı bir altkümesi* A *olsun.* S *nin* A *yı içeren en küçük alt yarıgrubu,* S *nin* A *yı içeren tüm alt yarıgrupların kesişimidir. Bu yarıgruba,* S *nin* A *tarafindan üretilen alt yarıgrubu denir ve* $< A >$ *ile gösterilir.*

$$< A >= \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n | n \in \mathbb{N}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{N}, a_1, ..., a_n \in A\}$$

$< A >= S$ *ise* S*,* A *tarafindan üretilir ve* A *ya* S *nin üreteç sistemi denir.*

Tanım 2.12. *(Garcia-Sanchez and Assi 2016)* S *bir sayısal yarıgrup olmak üzere;* $G(S) = \mathbb{N}_0 \backslash S$ *kümesi* S *nin boşlukları kümesi olarak adlandırılır. Bu kümenin kardinalitesi* $g(S)$ *ile gösterilir ve* S *nin cinsi olarak adlandırılır.* $\mathbb{N}_0 \backslash S$ *kümesindeki en büyük tamsayıya bu kümenin Frobenius sayısı denir ve* $F(S)$ *ile gösterilir.*

Örnek 1. $< 3, 7 >= \{0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, \rightarrow\} = S$ *olsun.*
i) $0 \in S$.
ii) $a, b \in S$ *için* $a + b \in S$ *dir.*
iii) $|\mathbb{N}_0 \backslash S| = |\{1, 2, 4, 5, 8, 11\}| = 6 < \infty$ *dur.*
Buradan S *bir sayısal gruptur.* $|\{1, 2, 4, 5, 8, 11\}| = 6 = g(S) = |G(S)|$ *olduğundan* S *nin cinsi 6 dır.* $F(S) = \max\{1, 2, 4, 5, 8, 11\} = 11$ *dir.*

Frobenius sayısı, ünlü Frobenius sorusu ile ilişkilidir.

İlk olarak 19. yüzyılda Ferdinand Georg Frobenius ve James Joseph Sylvester tarafından ele alınan ünlü Frobenius sorusu şöyle ifade edilebilir;

Bir restorandasınız, içinde 3 veya 7 adet nugget olan paketlerden alacaksınız. Peki satın alamayacağınız en fazla nugget sayısı nedir?

Aslında soru şu; a ve b aralarında asal iki doğal sayı, x≥ 0, y≥ 0 için $ax + by = n$ şeklinde yazılamayacak (a ve b nin lineer birleşimleri ile yazılamayacak) en büyük n sayısı nedir?

Bu n değeri $ab - a - b$ formülü ile bulunan değerdir ve bu değer Frobenius sayısı olarak adlandırılır.

Dolayısıyla nugget probleminin cevabı $3 \times 7 - 3 - 7 = 11$ olur.

Bu sorunun ünlenmesinin temel sebebi günlük hayatta birçok şekilde karşımıza çıkmasıdır.

Önteorem 2.13. *(Rosales ve Garcia-Sanchez 2009) $\mathbb{N}_0$ ın boştan farklı bir altkümesi A olsun. Eğer $ebob(A) = 1$ ise $\langle A \rangle$ bir sayısal yarıgrup olur.*

Kanıt. $d = ebob(A)$ olsun. Eğer, s$\in \langle A \rangle$ ise $d|s$ dir. $\langle A \rangle$ sayısal yarıgrup olduğundan $\mathbb{N}_0 \backslash \langle A \rangle$ sonludur ve bu nedenle $d|x$ ve $d|(x+1)$ olacak şekilde bir x pozitif tamsayısı vardır. Bu ise d'nin yalnız bir tane olduğunu gösterir. Bunun tersi için $\mathbb{N}_0 \backslash \langle A \rangle$ nın sonlu olduğunu kanıtlamak yeterlidir.
$ebob(A) = 1$ olduğundan, $z_1, z_2, ...z_n$ pozitif tamsayıları ve $a_1, ..., a_n \in A$ için;
$z_1a_1 + z_2a_2 + ... + z_na_n = 1$ dir. $z_1, z_2, ...z_k$ negatif tamsayılar ($k < n$) ve $z_{k+1}, z_{k+2}, ..., z_n$ pozitif tamsayılar olsun. Negatif terimleri eşitliğin sağ tarafına taşırsak,
$z_{k+1}a_{k+1} + z_{k+2}a_{k+2} + ... + z_na_n = 1 - z_1a_1 - z_2a_2 - ... - z_ka_k$ elde ederiz. Dolayısıyla $s \in \langle A \rangle$ vardır öyle ki $s + 1$ de $\langle A \rangle$ nın içindedir.
Biz "$n \geq (s-1)s + (s-1)$ ise $n \in \langle A \rangle$" olduğunu kanıtlamalıyız. q ve r tamsayılar olsun, öyle ki $n = qs + r$ ($0 \leq r < s$).
$n \geq (s-1)s + (s-1)$ den $q \geq s - 1 \geq r$ olduğunu anlıyoruz. Buradan;
$n = (rs + r) + (q - r)s = r(s + 1) + (q - r)s \in \langle A \rangle$ dır. □

Önerme 2.14. *(Rosales ve Garcia-Sanchez 2009) $\mathbb{N}_0$ ın aşikar olmayan bir altmonoidi M olsun. O zaman M, sayısal bir yarıgruba izomorftur.*

Kanıt. $d = ebob(M)$ olsun. Üstteki lemmadan biliyoruz ki $S = \langle \{ \frac{m}{d} \mid m \in M \} \rangle$ bir sayısal yarıgruptur. $f : M \longrightarrow S$, $f(m) = \frac{m}{d}$ bağıntısı açıkça bir monoid izomorfizmdir.
□

Önteorem 2.15. *(Rosales ve Garcia-Sanchez 2009)* $\mathbb{N}_0$ *ın bir altmonoidi* S *ve* $S^* = S \backslash \{0\}$ *dır. Bu durumda,* $S^* \backslash (S^* + S^*)$*,* S *nin üreteç sistemidir. Ek olarak,* S *nin tüm üreteç sistemleri* $S^* \backslash (S^* + S^*)$ *yi içerir.*

Burada, $S^* + S^*$ kümesi, S deki sıfırdan farklı ik ögenin toplamı şeklinde yazılabilen sayılardan oluşmaktadır.

Kanıt. S^* ın bir elemanı s olsun. Eğer $s \notin S^* \backslash (S^* + S^*)$ ise $s = x + y$ olacak şekilde $x, y \in S^*$ vardır. Bu prosedürü x ve y için tekrarlıyoruz ve sonlu sayıda adımdan $(x, y < s)$ sonra $s_1, s_2, ...s_n \in S^* \backslash (S^* + S^*)$ için $s = s_1 + s_2 + ... + s_n$ elde ederiz. Bu $S^* \backslash (S^* + S^*)$ kümesinin, S nin üreteç sistemi olduğunu kanıtlar. Şimdi, A, S nin üreteç sistemi olsun. Bir $x \in S^* \backslash (S^* + S^*)$ alalım. $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{N}$ ve $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ vardır. Böylece, $x \notin (S^* + S^*)$ olarak $i \in \{1, ..., n\}$ için $x = a_i$ olduğu sonucunu çıkarıyoruz. □

Önerme 2.16. *(Garcia-Sanchez and Assi 2016)* $\mathbb{N}_0$ *ın bir altkümesi* S *olsun.* S *nin sayısal yarıgrup olması için gerekli ve yeterli koşul* $\mathbb{N}_0 \backslash S$ *sonlu bir kümedir.*

Kanıt. S sayısal yarıgrup ve $< S >= G$ tamsayılar içinde bir grup olmak üzere; $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ ve $a_i \in S$ için $1 \in G$ ise $1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ dir. $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n < 0$ ve $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, ..., \lambda_k > 0$ olsun. $s = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ ise $s \in S$ ve $\sum_{i=1+n}^{k} \lambda_i a_i = 1 + s \in S$ dir. Her $n \in S$ için $n \geq (s-1)(s+1)$ olduğunu göstermeliyiz. $n \geq (s-1)(s+1)$ ve $0 \leq r < s$ olacak şekilde $n = qs + r$ alalım. $n = qs + r \geq (s-1)s + (s-1)$ olduğundan $q \geq s - 1 \geq r$ dir ve buradan $n = qs + r = (rs + r) + (q - r)s = r(s+1) + (q-r)s \in S$ dir. Tersine, $\mathbb{N} \backslash S$ nin sonlu sayıda elemanı olduğunu varsayalım. O halde, $s + 1 \in S$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. Buradan $1 = s + 1 - s \in G$ dir. □

Önerme 2.17. *(Garcia-Sanchez and Assi 2016)* $\mathbb{N}_0$ *ın aşikar olmayan bir altmonoidi* S *olsun. O halde* S *bir sayısal yarıgruba izomorftur.*

Kanıt. $\gcd(S) = d$ olsun. O halde d, S tarafından üretilen grubun üretecidir. Bir $S_1 = \{s/d \mid s \in S\}$ sayısal yarıgrubu için $\phi : S \longrightarrow S_1$ e tanımlı $\phi(s) = s/d$ bağıntısı vardır, öyle ki; bu bağıntı birebir ve örten monoid homomorfizmidir. □

Herhangi bir sayısal yarıgrup sonsuz sayıda elemana sahip olmasına rağmen, sonlu sayıda eleman aracılığıyla tanımlanabilir.

Tanım 2.18. *(Garcia-Sanchez and Assi 2016) S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S \backslash \{0\}$ olsun. Bu durumda, $Ap(S, n) = \{s \in S |\ s - n \notin S\}$ kümesine S nin n ye göre "Apéry kümesi" denir.*

Önteorem 2.19. *(Garcia-Sanchez and Assi 2016)Bir sayısal yarıgrup S ve $n \in S \backslash \{0\}$ olsun. Tüm $i \in \{1, ..., n-1\}$ için $w(i) \equiv i \bmod(n)$ olacak şekilde S nin en küçük elemanı $w(i)$ olsun. O halde;*

$$Ap(S, n) = \{0, w(1), w(2), ..., w(n-1)\} \text{ dir.}$$

Kanıt. $0 \leq i \leq (n-1)$ olsun. Tanıma göre $w(i) \in S$ dir ve $w(i) - n \equiv i \bmod(n)$ yazabiliriz. Buradan $w(i) \in Ap(S, n)$ iken $w(i) - n \notin S$ olduğu görülür. Dolayısıyla $a \equiv b \bmod(n)$ olacak şekilde $a, b \in Ap(S, n)$ yoktur. □

Örnek 2. *$S = \langle 2, 5 \rangle = S = \{0, 2, 4, 5, 6, 7 \longrightarrow\}$ dir. ("$7 \longrightarrow$" sembolü 7 den büyük her tamsayının bu kümenin içinde olduğu anlamına gelir.) Buradan $Ap(S, 2) = \{s \in S |$ $s - 2 \notin S\} = \{0, 5\}$ ve $Ap(S, 2)$ nin kardinalitesinin (eleman sayısının) 2 olduğu görülür. Önteorem 2.19, $n \notin S$ için geçerli değildir. Bu örnekteki, $3 \notin S$ için görelim;*
$Ap(S, 3) = \{s \in S |\ s - 3 \notin S\} = \{0, 2, 4, 6\}$ dır ve $Ap(S, 3)$ kümesinin kardinalitesi 4 olur.

Önteorem 2.19 e bakarsak, $Ap(S, n)$ kümesinin kardinalitesinin n olduğunu görürüz. Bu lemmanın bir sonucu olarak şu kanıya varılır;
Apéry kümeleri, sayısal yarıgruplarla uğraşırken en önemli araçlardan biridir. Sayısal bir yarıgruptaki öğeleri tek türlü şekilde temsil etmek için kullanılabileceklerini görelim.

Önteorem 2.20. *(Garcia-Sanchez and Assi 2016) S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S \backslash \{0\}$ olsun. O halde her $s \in S$ için $s = kn + w$ olan tek türlü belirli bir $(k, w) \in \mathbb{N} \times Ap(S, n)$ vardır.*

Kanıt. $s \in S$ alalım. Eğer $s \in Ap(S, n)$ ise $k = 0$, $w = s$ olarak alalım. Eğer $s \notin Ap(S, n)$ ise $s_1 = s - n \in S$ dir. s_1 ile yeniden başlıyoruz. Açıkça;
$s_k = s - kn \in Ap(S, n)$ olacak şekilde k vardır. $s = k_1 n + w_1$ olacak şekilde
$k_1 \in \mathbb{N}$, $w_1 \in Ap(S, n)$ olsun. Farzedelim ki, $k_1 \neq k$ olsun. Buradan;
$0 \neq (k_1 - k)n = w - w_1$ olur. Özellikle $w \equiv w_1 \bmod(n)$ olur ki bu bir çelişkidir. □

Tanım 2.21. *$\mathbb{N}$ in bir altmonoidi S olsun. S nin sıfırdan farklı en küçük elemanına S nin katlılığı denir ve $m(S) = \min S^*$ ile gösterilir.*

Tanım 2.22. *G bir grup ve G nin üreteç kümesi S olmak üzere, her $x \in S$ için $S \setminus \{x\}$ kümesi G için üreteç kümesi değil ise S ye G nin minimal üreteç kümesi denir.*

Sonuç 2.23. *(Garcia-Sanchez and Assi 2016) Her sayısal yarıgrup sonlu üretilir.*

Sonuç 2.24. *(Garcia-Sanchez and Assi 2016) S bir sayısal yarıgrup olsun. O halde S nin tek türlü belirli ve sonlu bir minimal üreteç kümesi vardır.*

Kanıt. Her üreteç kümesi bir minimal üreteç kümesine indirgenebilirdir. $A = S^* \backslash (S^* + S^*)$ ve B de başka bir üreteç küme olsun. Eğer B, A tarafından kapsanmıyor ise $a = b + c$ olacak şekilde $a, b, c \in B$ vardır. Ancak bu, B nin minimal olmasıyla çelişir, çünkü $B \backslash \{a\}$, S için bir üreteç sistemidir. Buradan $B \subseteq A$ olduğu kanıtlanır.
Şimdi $a \in A \subseteq S = \langle B \rangle$ olsun. Bu durumda, $a = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ olur. Fakat $a \in S^* \backslash (S^* + S^*)$ dır ve $\sum_{b \in B} \lambda_b = 1$ dir. Bu $\lambda_b = 1$ ve geri kalan her $b' \in B$ için $\lambda_{b'} = 0$ olacak şekilde bir $b \in B$ olduğu anlamına gelir. Böylece diğer kapsamayı gösteren $a = b \in B$ sonucuna ulaşılır. □

Tanım 2.25. *S bir sayısal yarıgrup olsun. S nin üreteç kümesinin kardinalitesine S nin gömülüşü denir ve $e(S)$ ile gösterilir.*

Örnek 3. $S = \langle 4, 6, 9 \rangle = \{0, 4, 6, 9, 10, 12, 13, 14, 15...\}$ *bir sayısal yarıgruptur ve* $m(S) = \min S^* = 4,\; e(S) = |\{4, 6, 9\}| = 3$ *tür.*

Önerme 2.26. *(Garcia-Sanchez and Assi 2016) S bir sayısal yarıgrup olmak üzere $e(S) \leq m(S)$ dir.*

Önerme 2.27. $S = \mathbb{N} \Leftrightarrow e(S) = 1$

Kanıt. Eğer $S = \mathbb{N}$ ise

$$G = \langle S \rangle = \{\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n \mid n, i \in \mathbb{N}, a_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \longrightarrow\} = \langle \{1\} \rangle$$

dir. Buradan $e(S) = |S| = 1$ olur. Eğer $e(S) = 1 = |S|$ ise $S = \{a\}$ ve $G = \langle S \rangle = \{\lambda a \mid a \in S, \lambda \in \mathbb{Z}\} = \{0, a, 2a, 3a, 4a, \longrightarrow\}$ dir. Özellikle $a = 1$ alınırsa $S = \mathbb{N}$ olur. □

Önerme 2.28. *(Rosales ve Garcia-Sanchez 2009) Eğer m bir pozitif tamsayı ise açıkça görülür ki $S = \{0, m, \longrightarrow\}$ katlılığı m olan bir sayısal yarıgruptur.*

Kanıt. S nin üreteçlerinin minimal sisteminin $\{m, m+1, ..., 2m-1\}$ olduğunu görmek oldukça basittir. Buradan $e(S) = m = m(S)$ olduğu açıktır. □

Önerme 2.29. *(Garcia-Sanchez and Assi 2016) (Selmer'in formülü). S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır;*
(i) $F(S) = \max(Ap(S, n)) - n$
(ii) $g(S) = \frac{1}{n}(\sum_{w \in Ap(S,n)} w) - \frac{n-1}{2}$

Kanıt. (i) Açıkça görülür ki $\max(Ap(S, n)) - n) \notin S$. Eğer $x > \max(Ap(S, n)) - n$ ise $x + n > \max(Ap(S, n))$ dir. $x + n = qn + i$ olacak şekilde $q \in N_0$, $i \in \{0, ..., n-1\}$ yazalım ve i modulo n ile uyumlu olan S'nin en küçük elemanı $w(i) \in Ap(S, n)$ olsun. $x + n > w(i)$ olduğundan, $x + n = kn + w(i)$ olacak şekilde $k > 0$ var. Buradan $x = (k-1)n + w(i) \in S$ dir.
(ii) Her $w \in Ap(S, n)$ için $w = k_i n + i$ olacak biçimde $k_i \in N$ vardır. $i \in \{0, ..., n-1\}$ için;

$$Ap(S, n) = \{0, k_1 n + 1, ..., k_{n-1} n + n - 1\}.$$

$x \in \mathbb{N}$ için varsayalım ki $x \equiv w(i) \bmod(n)$. Biz iddia ediyoruz ki, $x \in S \Leftrightarrow w(i) \leq x$. Aslında, $x = q_i n + i$ ise $x - w(i) = (q_i - k_i)n$ dir. Buradan;

$w(i) \leq x \Leftrightarrow k_i \leq q_i \Leftrightarrow x = (q_i - k_i)n + w(i) \in S$. Böylece, $x \notin S \Leftrightarrow x = q_i n + i$, $q_i < k_i$ dir. Sonuç olarak;

$$g(S) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n-1}(k_i n + i)) - \frac{n-1}{2} = \frac{1}{n}(\sum_{w \in Ap(S,n)} w) - \frac{n-1}{2}$$

elde edilir. □

Örnek 4. *$S = \langle a, b \rangle$ bir sayısal yarıgrup olsun. Biliyoruz ki;*
$Ap(S, a) = \{0, b, 2b, ..., (a-1)b\}$ dir. Buradan;

i) $F(S) = (a-1)b - a = ab - a - b$
ii) $g(S) = \frac{1}{a}(a + 2a + \cdots + (b-1)a) - \frac{a-1}{2} = \frac{(a-1)(b-1)}{2} = \frac{F(S)+1}{2}$.

Önteorem 2.30. *(Garcia-Sanchez and Assi 2016) S bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda, $g(S) \geq \frac{F(S)+1}{2}$ dir.*

Kanıt. $s \in \mathbb{N}$ alalım. Eğer $s \in S$ ise $F(S) - s \notin S$ dir. Böylece $g(S) \geq n(S)$ dir. Fakat $n(S) + g(S) = F(S) + 1$. Eğer $g(S) = n(S)$ ise $2g(S) = F(S) + 1$ olur ve $g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$ elde edilir. Eğer $g(S) > n(S)$ ise $g(S) > \frac{F(S)+1}{2}$ olur. □

2.2.1. Pseudo-Frobenius Sayılar

Bir sayısal yarıgrup S olsun. Her $s \in S \backslash \{0\}$ için $x + s \in S$ sağlayan $x \notin S$ tamsayısına pseudo-Frobenius sayısı denir. Pseudo-Frobenius sayıları kümesi $PF(S)$ ile gösterilir ve $PF(S)$ nin kardinalitesini (eleman sayısı) $t(S)$ ile göstereceğiz.

Tamsayılar kümesi üzerinde şu ilişkiyi tanımlayabiliriz: Eğer $b - a \in S$ ise $a \leq_S b$ dir. S sayısal bir yarıgrup olduğundan, bu ilişkinin bir sıralama bağıntısı (dönüşlü, geçişli ve antisimetrik) olduğu kolayca görülür. Frobenius sayılarının tanımından, bunların $\mathbb{Z} \backslash S$ nin $\leq_S$ ye göre maksimal elemanlar olduğu elde edilir (Rosales ve Garcia-Sanchez 2009).

Önerme 2.31. *S bir sayısal yarıgrup ise;*
i) $PF(S) = Maksimal \leq_S (\mathbb{Z} \backslash S)$,
ii) $x \in \mathbb{Z} \backslash S$ olması için gerek ve yeter koşul uygun $f \in PF(S)$ için $f - x \in S$ olmasıdır.

Önerme 2.32. *(Rosales ve Garcia-Sanchez 2009) S sayısal yarıgrup ve $n \in S \backslash \{0\}$ olsun. Bu durumda*

$$PF(S) = \{w - n | w \in Ap(S, n)\}$$

dir.

Kanıt. $x \in PF(S)$ alalım. O halde $x \notin S$ ve $x + n \in S$ dir, bir başka deyişle, $x + n \in Ap(S, n)$ dir. $x + n \leq_S w$ olacak şekilde $w \in Ap(S, n)$ olsun. Buradan $w - (x + n) = w - n - x \in S$. Yani, uygun $s \in S$ için $w - n = x + s$ olmasıdır. $w - n \notin S$ ve $x \in PF(S)$ olduğundan bu s yi sıfır olmalıdır ve bu da $w = x + n$ demektir. Şimdi; $w \in Maksimals \leq_S Ap(S, n)$ alalım. $w - n \notin S$ dir. Eğer $s \in S \backslash \{0\}$ için $w - n + s \notin S$ ise $w + s \in Ap(S, n)$ dir ve bu w nin maksimum olmasına aykırıdır. □

Örnek 5. $S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14 \longrightarrow\}$ *alalım.* $Ap(S, 5) = \{0, 7, 9, 16, 18\}$ *ve* $Maksimals \leq_S Ap(S, 5) = \{16, 18\}$. *Buradan* $PF(S) = \{16-5, 18-5\} = \{11, 13\}$ *olur.*

2.2.2. Maksimal gömme boyutuna sahip sayısal yarıgruplar:

S bir sayısal yarıgrup olsun. S nin gömülüşünün, S nin katlılığından küçük veya eşit olduğunu biliyoruz. ($e(S) \leq m(S)$). Bir sayısal yarıgrup S için ve $e(S) = m(S)$ ise S maksimal gömülüşe sahiptir (Rosales ve Garcia-Sanchez 2009).

Önerme 2.33. *S nin üreteçlerinin minimal kümesi $n_1 < n_2 < ... < n_e$ olsun. O halde S maksimal gömülüşe sahip olması için gerek ve yeter koşul $Ap(S, n_1) = \{0, n_2, ..., n_e\}$ olmasıdır.*

Kanıt. S nin maksimal gömülüşe sahip olduğunu varsayalım. $n_2, ..., n_e \in Ap(S, n_1)$ dir. Fakat $n_1 = m(S) = e$ dir ve buradan $Ap(S, n_1) = \{0, n_2, ..., n_e\}$ olur. Tersine, $S = \langle (Ap(S, n_1) \backslash \{0\}) \cup \{n_1\} \rangle = \langle n_1, n_2, ..., n_e \rangle$ dir. Buradan $e = e(S) = m(S)$ gelir. □

2.2.3. Arf Sayısal Yarıgruplar

Sayısal yarıgruplar, matematikte birçok alanda yer bulmuştur. Arf sayısal yarıgrupları halkalar, cebirsel geometri uygulamaları, cebirsel hata düzeltme kodları gibi alanlara da katkı sağlamıştır. Arf sayısal yarıgrupların ortaya çıkışı; Du Val'ın, 1942'de İstanbul Üniversitesi'ne gelerek "Bir cebirsel eğrinin bir noktası civarındaki tekilliklerin özelliklerini belirten teorisinden bahsetmesi üzerine, dinleyiciler arasında olan Cahit Arf'in, bu geometrik argümanların hesaplanışının cebirsel yollarla hesaplanabileceğini söylemesiyle olmuştur. Bir hafta eve kapanıp bu konu üzerine yoğunlaşan Arf, yaptığı çalışma sonucu bunun nasıl yapılabileceğini göstermiş, aynı çalışmada ilk kez Arf sayısal yarıgruplardan bahsetmiştir (Arf 1949). Bu sayede *Arf sayısal yarıgruplar* matematik literatürüne girmiştir.

S bir sayısal yarıgrup olmak üzere $\forall x, y, z \in S$ için $x \geq y \geq z,\ x + y - z \in S$ ise S ye *Arf sayısal yarıgrup* denir. Arf sayısal yarıgruplar maksimal gömme boyutuna sahiptir (Rosales ve Garcia-Sanchez 2009).

Sonlu sayıda Arf sayısal yarıgrup ailesinin kesişiminin yine bir Arf sayısal yarıgrubu olduğunu gözlemlemek kolaydır. Dolayısıyla, $\mathbb{N}_0$ bir Arf sayısal yarıgrubu olduğu için, belirli bir sayısal yarıgrubu içeren Arf sayısal yarıgrubu düşünülebilir. Sayısal bir yarıgrup olan S yi içeren en küçük Arf sayısal yarıgrubuna, S nin Arf kapanışı denir ve bu $Arf(S)$ ile gösterilir. Eğer S ve T sayısal yarıgruplar ve $S \subseteq T$ ise $Arf(S) \subseteq Arf(T)$ dir. Sayısal bir yarıgrup S verildiğinde $Arf(S)$ yi aşağıdaki gibi ifade edilebilir; (Karakas ve İlhan 2017)

$$Arf(S) = \{x + y - z : x, y, z \in S \text{ ve } x \geq y \geq z\}$$

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Yarıgruplar İçindeki Belirtisiz İdealler

S yarıgrubunun boştan farklı bir altkümesi olan I kümesi eğer $IS \subseteq I$ ve $SI \subseteq I$ özelliklerini sağlıyorsa I kümesine *S nin ideali* denir. İdeal kavramı, bir yarıgrubun cebirsel yapısının incelenmesinde önemli yere sahiptir. Bu birçok araştırmacı tarafından sistematik olarak tartışılmış ve Kuroki tarafından belirtisiz ideale genişletilmiştir. Kuroki, basit yarıgruplardan oluşan yarıkafes şeklindeki bir yarıgrubu karakterize etmiştir.

Bu bölümde, belirtisiz idealler, yarıgruplardaki belirtisiz idealler ve belirtisiz ideallerin karakterizasyonu hakkında bazı tanımlar vereceğiz.

3.1.1. Yarıgruplar İçindeki İdealler

S bir yarıgrup ve $A, B \subseteq S$ olsun. A ve B nin çarpımı şu şekilde tanımlanır;

$$AB = \{ab \in S |\ a \in A\ ve\ b \in B\}.$$

Sıralı bir yarıgrup $(S, \cdot, \leq)$ kısmi sıralı kümedir, aynı zamanda $(S, \leq)$ bir yarıgruptur; $a, b \in S$ için $a \leq b$ ise $xa \leq xb$ ve $ax \leq bx$ tir. $A \subseteq S$ için, $(A] := \{t \in S, h \in A : t \leq h\}$ şeklinde tanımlayalım.
$A, B \subseteq S$ için $AB := \{ab : a \in A, b \in B\}$ dir.

Tanım 3.1. *(Khan and Shabir 2014) Bir yarıgrup olan S nin boştan farklı bir altkümesi olsun. $A^2 \subseteq A$ ise, A, S* nin alt yarıgrubu *olarak adlandırılır. S nin boştan farklı bir altkümesi A için;*
(1) $SA \subseteq A$ (sırasıyla $AS \subseteq A$)
(2) $a \in A$, $b \in S \leq a$ için $b \leq a$ ise $b \in A$ dır.
sağlanırsa A ya, S nin sol ideali *(sırasıyla sağ ideali) denir.*

S nin boştan farklı bir altkümesi A, S nin hem sağ hem de sol ideali ise A ya S nin *iki taraflı ideali* denir.

Sıralı bir yarıgrup olan S nin boştan farklı bir altkümesi A için;
(1) $SAS \subseteq A$,
(2) $a \in A$, $S \ni b \leq a$ için $b \in A$.
sağlanırsa A ya, S nin bir *iç ideali* denir

Her $a \in S$ için $a \leq axa$ olacak şekilde $x \in S$ varsa $(S, \cdot, \leq)$ sıralı yarıgrubu *düzenli* olarak adlandırılır.

Denk olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

(1) $A \subseteq (ASA],\ \forall A \subseteq S,$

(2) $a \in (aSa],\ \forall a \in S.$

Her $a \in S$ için $a \leq xa^2y$ olacak şekilde $x, y \in S$ varsa S sıralı yarıgrubu *iç-düzenli* olarak adlandırılır.

Denk olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

(1) $A \subseteq (SA^2S] \quad \forall A \subseteq S,$

(2) $a \in (Sa^2S] \quad \forall a \in S.$

Sıralı yarıgrup S nin altkümeleri olan A ve B için biliyoruz ki $A \subseteq (A]$ ve $A \subseteq B$ ise $(A] \subseteq (B],\ (A](B] \subseteq (AB]$ ve $((AB]] = (A]$ dir.

$(S, \cdot, \leq)$ bir sıralı yarıgrup olsun. S nin boştan farklı bir altkümesi olan Q için;

(1) $(QS] \cap (SQ] \subseteq Q$

(2) $a \in Q$ ve $S \ni b \leq a$ ise $b \in Q$.

sağlanıyorsa Q ya, S nin *yarı ideali* denir.

$(S, \cdot, \leq)$ bir sıralı yarıgrup olsun. S nin altyarıgrubu olan B için;

(1) $BSB \subseteq B$

(2) Eğer $a \in B,\ S \ni b \leq a$ ise $b \in B$.

sağlanıyorsa B ye S nin *ikili ideali* denir.

S nin boştan farklı bir altkümesi olan A için, $ASA \subseteq A$ sağlanıyorsa A ya S nin *genelleştirilmiş ikili-ideali* denir.

S sıralı yarıgrubunun bir altkümesi A için $A = (A^2]$ sağlanıyorsa, A ya S nin *etkisizi* denir.

$a \in S$ tarafından üretilen S nin sağ ideali $R(a)$, sol ideali $L(a)$, iki taraflı ideali $I(a)$, iç ideali $\overline{I}(a)$, yarı ideali $Q(a)$ ve ikili ideali $B(a)$ ile gösterilir.

$R(a) = (a \cup Sa],\ L(a) = (a \cup Sa],\ I(a) = (a \cup Sa \cup aS \cup SaS],\ Q(a) = (a \cup (aS \cap Sa)]$ ve $B(a) = (a \cup a^2 \cup aSa]$ dır.

3.1.2. Yarıgruplar içindeki Belirtisiz İdealler

Tanım 3.2. *(Xie 1999) S bir yarıgrup olsun ve "$\mathcal{F}$" belirtisizliği göstermek üzere, S den $[0,1]$ birim aralığına tanımlı f fonksiyonuna S nin* belirtisiz kümesi *denir. S içindeki tüm belirtisiz kümelerin ailesi $\mathcal{F}(S)$ ile gösterilir.*

Tanım 3.3. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003) $f \in \mathcal{F}(S)$ olsun. $t \in [0,1]$ için $f_t = \{x \in S|\ f(x) \geq t\}$ kümesine f nin* düzey kümesi *ya da* t-kesmesi *denir.*
f ve g, S nin iki belirtisiz altkümesi olsun. $f \circ g$ çarpımı $(f \circ g)(x) : S \longrightarrow [0,1]$;

$$x \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \bigvee\limits_{x=yz} \{f(y) \wedge g(z)\}, & \exists y, z \in S \text{ için } x = yz \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu "$\circ$" işleminin birleşmeli olduğu açıktır.
$\mathcal{F}(S)$ üzerindeki "$\preceq$" sıralama bağıntısı her $x \in S$ için;

$$f \preceq g \Leftrightarrow f(x) \subseteq g(x)$$

şeklinde tanımlanır.
S nin belirtisiz altkümesi f her $a, b \in S$ için;

$$f(ab) \geq f(a) \wedge f(b)$$

koşulu sağlarsa f ye S nin belirtisiz yarıgrubu *denir.*
Aşağıdaki koşul;

$$f(ab) \geq f(b) \quad (f(ab) \geq f(a))$$

sağlanırsa da f ye S nin belirtisiz sol(sağ) ideali *denir.*
S nin belirtisiz altkümesi, S nin hem sağ hem de sol belirtisiz ideali ise f ye S nin belirtisiz iki yönlü ideali *(ya da* belirtisiz ideali*) denir.*

Başka bir deyişle aşağıdaki koşul sağlanıyorsa;

$$f(ab) \geq \max\{f(a), f(b)\} = f(a) \vee f(b)$$

$f \in \mathcal{F}(S)$, S nin belirtisiz idealidir.

Tanım 3.4. *(Xie 1999) Her $x \in S$ ve $f, g \in \mathcal{F}(S)$ için $f \cap g$ ve $f \cup g$;*

$$(f \cap g) = \min((f(x), g(x)) = f(x) \wedge g(x)$$
$$(f \cup g) = maks((f(x), g(x)) = f(x) \vee g(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Önteorem 3.5. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003) Her $f, g \in \mathcal{F}(S)$ ve S nin belirtisiz idealleri f ve g ise $f \cap g$ ve $f \cup g$ de S nin belirtisiz idealleridir.*

Kanıt. Her $\forall x, y \in S$ ve $\forall xy \in S$ için;

$$\begin{aligned}(f \cap g)(xy) &= f(xy) \wedge g(xy)\\ &\geq (f(x) \wedge f(y)) \wedge (g(x) \wedge g(y))\\ &= (f(x) \wedge g(x)) \wedge (f(y) \wedge g(y))\\ &\geq (f \cap g)(x) \wedge (f \cap g)(y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \cup g)(xy) &= f(xy) \vee g(xy)\\ &\geq (f(x) \wedge f(y)) \vee (g(x) \wedge g(y))\\ &= (f(x) \vee g(x)) \wedge (f(y) \vee g(y))\\ &\geq (f \cup g)(x) \wedge (f \cup g)(y).\end{aligned}$$

□

Tanım 3.6. *S yarıgrubunun f belirtisiz altkümesi ve her $x, y, z \in S$ için;*

$$f(xyz) \geq f(x) \wedge f(z)$$

ise f ye S nin belirtisiz ikili-ideali denir.

$(S, \cdot, \leq)$ sıralı yarıgrubunun f belirtisiz altkümesi $f \circ f = f$ eşitliğini sağlıyorsa S ye eşgüçlüdür denir.

Tanım 3.7. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003)* $(S, \cdot, \leq)$ *bir sıralı yarıgrup ve* $A \subseteq S$ *olsun.* S *nin belirtisiz altkümesi olan* A *nın* karakteristik fonksiyonu C_A *(ya da* f_A*) aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$\begin{aligned} C_A : S &\longrightarrow [0,1] \\ x \longrightarrow C_A(x) &:= \begin{Bmatrix} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Önteorem 3.8. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003)* S *yarıgrubunun boştan farklı bir altkümesi* A *olsun.O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:*

i) A*,* S *nin altyarıgrubudur.* $\Longleftrightarrow$ C_A*,* S *nin belirtisiz altyarıgrubudur.*

ii) A*,* S *nin sol(sağ, iki taraflı) idealidir.*$\Longleftrightarrow$ C_A*,* S *nin belirtisiz sol(sağ, iki taraflı) idealidir.*

Önteorem 3.9. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003)* S *yarıgrubunun bir belirtisiz altkümesi* f *olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(1) f *,* S *nin belirtisiz altyarıgrubudur* $\Longleftrightarrow f \circ f \subseteq f$.

(2) f *,* S *nin belirtisiz sol idealidir*$\Longleftrightarrow C_S \circ f \subseteq f$.

(3) f *,* S *nin belirtisiz sağ idealidir*$\Longleftrightarrow f \circ C_S \subseteq f$.

(4) f *,* S *nin belirtisiz iki taraflı idealidir*$\Longleftrightarrow C_S \circ f \subseteq f$ *ve* $f \circ C_S \subseteq f$.

Kanıt. Öncelikle (2) özelliğini kanıtlayalım. f , C_S nin belirtisiz sol ideali ve $a \in C_S$ olsun. $(C_S \circ f)(a) = 0$ ise $C_S \circ f \subseteq f$ olduğu açıktır. Diğer durumda $\alpha = xy$ olacak şekilde $x, y \in C_S$ vardır. Öyleyse f , C_S nin belirtisiz sol ideali olduğundan;

$$\begin{aligned} (C_S \circ f)(\alpha) &= \bigvee_{a=xy} (C_S(x) \wedge f(y)) \\ &\leq \bigvee_{a=xy} (1 \wedge f(xy)) \\ &= \vee(1 \wedge f(a)) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

ve böylece $C_S \circ f \subseteq f$ elde edilir. Şimdi de tersine, $C_S \circ f \subseteq f$ olsun. $a = xy$ olacak şekilde $x, y \in C_S$ alalım. O halde;

$$\begin{aligned} f(xy) &= f(a) \geq (C_S \circ f)(a) \\ &= \bigwedge_{a=bc} C_S(b) \wedge f(c) \\ &\geq C_S(x) \wedge f(y) \\ &= 1 \wedge f(y) \\ &= f(y) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece f , C_S nin belirtisiz sol idealidir.

(1) Biliyoruz ki $f \leq C_S$. O halde $f \circ f \subseteq C_S \circ f \subseteq f$ dir.

(3) Varsayalım ki f, C_S nin belirtisiz sağ ideali olsun. $a \in S$ alalım. $(f \circ C_S)(a) = 0$ ise açıkça görülür ki $f \circ C_S \subseteq f$ dir. Aksine $\alpha = xy$ olacak şekilde x, $y \in C_S$ alalım. Öyleyse, C_S nin belirtisiz sağ ideali f olduğu için, biliyoruz ki;

$$\begin{aligned} (f \circ C_S)(\alpha) &= \bigvee_{a=xy} (f(x) \wedge C_S(y)) \\ &\leq \bigvee_{a=xy} (f(xy) \wedge 1) \\ &= \vee(f(a) \wedge 1) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

ve böylece $C_S \circ f \subseteq f$ elde edilir.

(4) Benzer şekilde görülür. □

Önteorem 3.10. *(Malik - Kuroki ve Mordeson 2003) S bir yarıgrup ise aşağıdaki özellikler sağlanır;*

(1) f ve g, S nin belirtisiz altyarıgrupları olsun. O halde $f \cap g$ de S nin belirtisiz altyarıgrubu olur.

(2) f ve g, S nin belirtisiz sol(sağ, iki taraflı.) idealleri olsun. O halde $f \cap g$ de S nin belirtisiz sol(sağ, iki taraflı) ideali olur.

Kanıt. (1) f ve g, S nin belirtisiz altyarıgrupları olsun. $a, b \in S$ için;

$$\begin{aligned}(f \cap g)(ab) &= f(ab) \wedge g(ab)\\ &\geq (f(a) \wedge f(b)) \wedge (g(a) \wedge g(b))\\ &= (f(a) \wedge g(a)) \wedge (f(b) \wedge g(b))\\ &\geq (f \cap g)(a) \wedge (f \cap g)(b) \quad \text{dir.}\end{aligned}$$

Bu nedenle $f \cap g$, S nin belirtisiz altyarıgrubudur.

(2) f ve g, S nin belirtisiz sol idealleri olsun. $a, b \in S$ için;

$$\begin{aligned}(f \cap g)(ab) &= f(ab) \wedge g(ab)\\ &\geq f(b) \wedge g(b)\\ &= (f \cap g)(b) \quad \text{dir.}\end{aligned}$$

Bu nedenle $f \cap g$, S nin sol idealidir. (Sağ ideal de benzer şekilde ispat edilebilir.) □

Önteorem 3.11. *A ve B, S yarıgrubunun boştan farklı altkümeleri olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır;*

(1) $C_A \cap C_B = C_{A \cap B}$.

(2) $C_A \circ C_B = C_{AB}$.

Kanıt. (1) $a \in S$ olsun. $a \in A \cap B$ olduğunu varsayalım. O halde $a \in A$ ve $a \in B$ dir. Buradan;

$$\begin{aligned}(C_A \cap C_B)(a) &= C_A(a) \wedge C_B(a)\\ &= 1 \wedge 1 = 1\\ &= C_{A \cap B}(a)\end{aligned}$$

dır. $a \notin A \cap B$ olduğunu varsayalım. O halde $a \notin A$ veya $a \notin B$ dir. Buradan;

$$\begin{aligned}(C_A \cap C_B)(a) &= C_A(a) \wedge C_B(a) = 0\\ &= C_{A \cap B}(a) \quad \text{dır.}\end{aligned}$$

Böylece $(C_A \cap C_B)(a) = C_{A\cap B}(a)$ eşitliğini elde ederiz.

(2) $a \in S$ olsun. $a \in AB$ olduğunu varsayalım. Bazı $x \in A$ ve $y \in B$ için $a = xy$ sağlanır. Buradan;

$$\begin{aligned}(C_A \circ C_B)(a) &= \bigvee_{a=uv} \{C_A(u) \wedge C_B(v)\} \\ &\geq C_A(x) \wedge C_B(y) \\ &= 1 \wedge 1 = 1 \quad \text{dir.}\end{aligned}$$

Böylece $(C_A \circ C_B)(a) = 1$ elde ederiz.

$a \in AB$ olduğundan $C_{AB}(a) = 1$ dir. Bu durumda $a \notin AB$ olduğunda her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $a \neq xy$ dir. Bazı $u, v \in S$ için $a = uv$ olsun. O halde;

$$\begin{aligned}(C_A \circ C_B)(a) &= \bigvee_{a=uv} \{C_A(u) \wedge C_B(v)\} \\ &= 0 = C_{AB}(a) \quad \text{dır.}\end{aligned}$$

$\forall u, v \in S$ için $a \neq uv$ ise;

$$(C_A \circ C_B)(a) = 0 = C_{AB}(a)$$

olur. Böylece her durumda $C_A \circ C_B = C_{AB}$ olur. □

Önteorem 3.12. *f , S nin belirtisiz sağ (sol) ideali olsun. O halde $f \cup (S \circ f)$ ($f \cup (f \circ S)$), S nin belirtisiz iki taraflı idealidir.*

Kanıt. S nin bir sağ idealinin f olduğunu varsayalım. O halde;

$$\begin{aligned}S \circ (f \cup (S \circ f)) &= (S \circ f) \cup (S \circ (S \circ f)) \\ &= (S \circ f) \cup ((S \circ S) \circ f) \\ &\subseteq (S \circ f) \cup (S \circ 1) = S \circ f \\ &\subseteq f \cup (S \circ f)\end{aligned}$$

Buradan $f \cup (S \circ f)$, S için bir sol ideal olur. Ayrıca;

$$(f \cup (S \circ f)) \circ S = (f \circ S) \cup ((S \circ f) \circ S)$$

$$
\begin{aligned}
&= (f \circ S) \cup (S \circ (f \circ S)) \\
&\subseteq (f \circ S) \cup (S \circ f) \\
&\subseteq f \cup (S \circ f)
\end{aligned}
$$

Olduğundan $f \cup (S \circ f)$, S için bir sağ idealdir. $\square$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Belirtisiz Sayısal Yarıgruplar

Tanım 4.13. *Her* $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow [0,1]$ *için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa;*

i) $f(0) = 1$

ii) $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$, $f(x+y) \geq f(x) \wedge f(y)$

iii) $\mathbb{N}_0^f = \{n \in \mathbb{N}_0 : f(n) = 0\}$ *için* $|\mathbb{N}_0^f| < \infty$.

f fonksiyonu 0 birim elemanını içeren bir belirtisiz sayısal yarıgruptur, denir.

$\mathbb{N}_0^f$ için f in destek kümesinin tümleyeni denilebilir. Burada f in destek kümesi $Suppf = \{n : f(n) > 0\}$ ile gösterilir.

Önerme 4.14. $S \subset \mathbb{N}_0$ *bir sayısal yarıgruptur ve* S *nin karakteristik fonksiyonu;*

$$C_S(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{array} \right\}$$

dir. Bu durumda, $C_S(x)$ *belirtisiz sayısal yarıgruptur.*

Kanıt.

i) $0 \in S \Longrightarrow C_S(0) = 1$.

ii) $\forall x, y \in S \Longrightarrow x \in S \wedge y \in S \Longrightarrow C_S(x) = 1 \vee C_S(y) = 1$

$\Longrightarrow C_S(x+y) \geq C_S(x) \wedge C_S(y) = 1 \Longrightarrow x + y \in \mathbb{N}_0$.

Böylece $C_S(x+y) \geq C_S(x) \wedge C_S(y)$ olduğu görülür.

iii) $|\mathbb{N}_0 \backslash S| < \infty$. □

$|Supp(g)| < \infty$ olacak şekilde $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0)$ alalım. O halde; $Supp(g) = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \subset \mathbb{N}$ ve üreteç kümesi $\langle Supp(g) \rangle = \langle \{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \rangle$ içindeki her n için, $x_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$ olacak şekilde;

$$n = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_r a_r$$

eşitliği yazılabilir.

Önerme 4.15. *$|Supp(g)| < \infty$ olacak şekilde $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0)$ alalım. Her $n \in \langle Supp(g) \rangle$ ve her $\alpha \in Y(n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_r) : n = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i a_i,\ a_i \in Supp(g),\ x_i \in \mathbb{N}_0\}$ için,*

$$\delta(\alpha)(i) = \left\{ \begin{array}{ll} g(a_i), & x_i \neq 0 \\ 1, & x_i = 0 \end{array} \right\}$$ *olmak üzere $\delta : Y(n) \to [0,1]^r$,*

$\delta(\alpha) = (\delta(\alpha)(1), \delta(\alpha)(2), \ldots, \delta(\alpha)(r))$ tanımlayalım. Bu durumda; $\langle g \rangle : \mathbb{N}_0 \to [0,1]$ fonksiyonu;

$$\langle g \rangle(n) := \left\{ \begin{array}{ll} \bigvee\limits_{x \in Y(n)} (\bigwedge\limits_{i=1}^{r} \delta(\alpha)(i)), & n \in \langle Supp(g) \rangle \\ 0, & diğer \end{array} \right\}$$

belirtisiz sayısal yarıgruptur.

Kanıt. i) Her $\alpha = (0, 0, ..., 0) \in Y(0)$ ve $0 \in \langle Supp(g) \rangle$ için $\delta(\alpha) = (1, 1, \ldots, 1)$ ve $\langle g \rangle(0) = 1$ dir.

ii) $m = 0$ veya $n = 0$ ise açıkça görülür ki $\langle g \rangle(m+n) \geq \langle g \rangle(m) \wedge \langle g \rangle(n)$.

$m, n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} & m \notin \langle Supp(g) \rangle \vee n \notin \langle Supp(g) \rangle \\ & \Longrightarrow \langle g \rangle(m) = 0 \vee \langle g \rangle(n) = 0 \\ & \Longrightarrow \langle g \rangle(m+n) \geq \langle g \rangle(m) \wedge \langle g \rangle(n) = 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece; $m \in \langle Supp(g) \rangle \wedge n \in \langle Supp(g) \rangle \Longrightarrow m = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i a_i \wedge n = \sum\limits_{i=1}^{r} y_i a_i$ için $m + n = \sum\limits_{i=1}^{r} (x_i + y_i) a_i$ olacak şekilde $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in Y(x)$ ve $(y_1, y_2, \ldots, y_r) \in Y(y)$ vardır.

İddia1: $\alpha \in Y(m)$, $\beta \in Y(n)$; $\delta(\alpha + \beta)(i) = \delta(\alpha)(i) \wedge \delta(\beta)(i)$

$\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$ için,

$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_r + y_r)$.

Böylece $\delta(\alpha)(i) = \left\{ \begin{array}{ll} g(a_i), & x_i \neq 0 \\ 1, & x_i = 0 \end{array} \right\}$, $\delta(\beta)(i) = \left\{ \begin{array}{ll} g(a_i), & y_i \neq 0 \\ 1, & y_i = 0 \end{array} \right\}$ ve

$$\delta(\alpha + \beta)(i) = \left\{ \begin{array}{ll} g(a_i), & x_i + y_i \neq 0 \Longrightarrow x_i \neq 0 \text{ ya da } y_i \neq 0 \\ 1, & x_i + y_i = 0 \Longrightarrow x_i = y_i = 0 \end{array} \right\}$$ olur.

Buradan; $\delta(\alpha + \beta)(i) = \delta(\alpha)(i) \wedge \delta(\beta)(i)$ elde edilir.

İddia2: $Y(m+n) = Y(m) + Y(n)$

$$\begin{aligned}
\gamma \in Y(m+n) &\Longrightarrow \gamma = (u_1, u_2, \ldots, u_r),\ \sum_{i=1}^{r} u_i a_i = m+n \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{r}(v_i + z_i)a_i = m+n \Longrightarrow \sum_{i=1}^{r} v_i a_i + \sum_{i=1}^{r} z_i a_i = m+n \\
&\Longrightarrow (v_1, \ldots, v_r) \in Y(m) \text{ ve } (z_1, \ldots, z_r) \in Y(n). \\
v \in Y(m), z \in Y(n) &\Longrightarrow m = \sum_{i=1}^{r} v_i a_i,\ n = \sum_{i=1}^{r} z_i a_i \\
&\Longrightarrow m+n = \sum_{i=1}^{r} v_i a_i + \sum_{i=1}^{r} z_i a_i = \sum_{i=1}^{r}(v_i + z_i)a_i \\
&\Longrightarrow (v_1 + z_1, \ldots, v_r + z_r) = v + z \in Y(m+n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $\gamma \in Y(m+n)$;
$\bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\gamma)(i) = \bigwedge_{i=1}^{r} \delta(u+z)(i) = \bigwedge_{i=1}^{r} (\delta(u)(i) \wedge \delta(v)(i)) = (\bigwedge_{i=1}^{r} (\delta(u)(i)) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{r} (\delta(v)(i)).$
Böylece $\gamma = u + v$ için,

$$\bigwedge_{i=1}^{r} \delta(u+v)(i) = \bigwedge_{i=1}^{r}(\delta(u)(i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{r}(\delta(v)(i))$$

elde edilir. $\gamma \in Y(m+n)$ için,

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\gamma)(i) &= \bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\alpha+\beta)(i) \\
&= \bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\alpha)(i) \wedge \delta(\beta)(i) \\
&= [\bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\alpha)(i)] \wedge [\bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\beta)(i)]
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu nedenle her $\alpha \in Y(m)$ ve her $\beta \in Y(n)$ için;

$$\begin{aligned}
\langle g \rangle(m+n) &= \bigvee_{\gamma \in Y(m+n)} (\bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\gamma)(i)) \\
&\geq [\bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\alpha)(i)] \wedge [\bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\beta)(i)] \langle g \rangle(m+n) \\
&\geq [\bigvee_{\alpha \in Y(m)} \bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\alpha)(i)] \wedge [\bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\beta)(i)]
\end{aligned}$$

olur.

$$\langle g \rangle(m+n) \geq [\bigvee_{\alpha \in Y(m)} \bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\alpha)(i)] \wedge [\bigvee_{\beta \in Y(n)} \bigwedge_{i=1}^{r} \delta(\beta)(i)] = \langle g \rangle(m) \wedge \langle g \rangle(n)$$

elde edilir.

iii) $\langle g\rangle(n)$, $\mathbb{N}_0$ ın altmonoidi ve Önerme 2.16 ten bilinmektedir ki $\mathbb{N}_0 \backslash \langle g\rangle(n)$ sonlu kümedir. $\square$

Önerme 4.16. *$f, g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow [0,1]$ belirtisiz sayısal yarıgruplarını alalım. O halde $f \wedge g$ belirtisiz sayısal yarıgruptur.*

Kanıt. i) $(f(0) = 1) \wedge (g(0) = 1) \Rightarrow (f \wedge g)(0) = f(0) \wedge g(0) = 1$

ii) $\forall x, y \in f, g \Rightarrow x, y \in (f \wedge g)$

$$\begin{aligned}(f \wedge g)(x+y) &= f(x+y) \wedge g(x+y)\\ &\geq (f(x) \wedge f(y)) \wedge (g(x) \wedge g(y))\\ &= (f(x) \wedge g(x)) \wedge (f(y) \wedge g(y))\\ &= (f \wedge g)(x) \wedge (f \wedge g)(y) \quad \text{dir.}\end{aligned}$$

iii) $|\mathbb{N}_0^{f\wedge g}| = |\mathbb{N}_0^f \cup \mathbb{N}_0^g| < \infty$. $\square$

Sonuç 4.17. *Her sonlu indeks kümesi J ve belirtisiz sayısal yarıgruplar ailesi $\{f_j : j \in J\}$ için $f = \bigwedge\limits_{j\in J} f_j$ sonlu kesişimi belirtisiz bir sayısal yarıgruptur.*

Sonuç 4.18. *Belirtisiz sayısal yarıgrupların sonlu olmayan aileleri için, kesişimleri belirtisiz bir sayısal yarıgrup olmayabilir.*
Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k(k) = 0$ ve $f_k(x) \neq 0$ ise $x \in \mathbb{N}\backslash\{k\}$ olan belirtisiz sayısal yarıgruplar ailesi $f = \bigwedge\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ olsun. Her $x \in \mathbb{N}$ için $f(0) = 1$ ve $f(x) = 0$ dır. $\mathbb{N}_0^f = \mathbb{N}$ olduğundan belirtisiz sayısal yarıgrup olmanın 3.koşulu sağlanmaz.

Örnek 6. *$n \in \mathbb{N}_0$ için $g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow [0,1]$ ve $g(n) = \left\{\begin{array}{cc} 0.3, & n=3\\ 0.5, & n=5\\ 0.4, & n=7\\ 0, & \textit{aksi halde}\end{array}\right\}$ alalım.*

$$\langle g\rangle(n) := \left\{\begin{array}{ll} \bigvee\limits_{\substack{x\in Y(n)\\ k=\overline{1,|Y(n)|}}} \left(\bigwedge\limits_{i=1}^{r} \delta_k(\alpha)(i)\right), & n \in \langle\{3,5,7\}\rangle = \{0,3,5,6,7,8,\ldots\}\\ 0, & \textit{aksi halde}\end{array}\right\}$$

i) $0 = 0 \times 3 + 0 \times 5 + 0 \times 7$

$\delta(0)(1) = 1$, $\delta(0)(2) = 1$, $\delta(0)(3) = 1 \Longrightarrow \bigwedge_{i=1}^{3} \delta(0)(i) = 1 \Longrightarrow \langle g\rangle(0) = 1$ *dir.*

ii) $\forall n, m \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow \langle g\rangle(n+m) \geq \langle g\rangle(n) \wedge \langle g\rangle(m)$

iii) $|\mathbb{N}_0 \backslash \langle g\rangle| = |\mathbb{N}_0 \backslash \{0, 3, 5, 6, 7, 8, \ldots\}| = |\{1, 2, 4\}| = 3 < \infty$

$\langle g\rangle(6)$, $\langle g\rangle(8)$, $\langle g\rangle(9)$ *ve* $\langle g\rangle(10)$ *değerlerini bulalım;*

$\langle g\rangle(6) = \bigvee_{\substack{\alpha \in Y(6) \\ k=\overline{1,|Y(n)|}}} (\bigwedge_{i=1}^{3} \delta_k(\alpha)(i))$ *ve* $Y(6) = \{(2 \times 3 + 0 \times 5 + 0 \times 7)\}$ *dir.*

$\alpha_1(6) = (2, 0, 0)$ *için* $\delta_1(6) = (0.3, 1, 1)$ *dir. Buradan;*

$$\begin{aligned}
\langle g\rangle(6) &= \bigvee_{\substack{\alpha \in Y(6) \\ k=1}} (\bigwedge_{i=1}^{3} \delta_k(6)(i)) \\
&= \bigvee_{\substack{\alpha \in Y(6) \\ k=1}} \{\delta_k(6)(1) \wedge \delta_k(6)(2) \wedge \delta_k(6)(3)\} \\
&= \bigvee \{\delta_1(6)(1) \wedge \delta_1(6)(2) \wedge \delta_1(6)(3)\} = 0.3
\end{aligned}$$

bulunur.

$\langle g\rangle(8) = \bigvee_{\substack{\alpha \in Y(8) \\ k=\overline{1,|Y(n)|}}} (\bigwedge_{i=1}^{3} \delta_k(\alpha)(i))$ *ve* $Y(8) = \{(1 \times 3 + 1 \times 5 + 0 \times 7)\}$ *dir.*

$\alpha_1(8) = (1, 1, 0)$ *için* $\delta_1(8) = (0.3, 0.5, 1)$ *dir. Buradan;*

$$\begin{aligned}
\langle g\rangle(8) &= \bigvee_{\substack{\alpha \in Y(8) \\ k=1}} (\bigwedge_{i=1}^{3} \delta_k(8)(i)) \\
&= \bigvee_{\substack{\alpha \in Y(8) \\ k=1}} \{\delta_k(8)(1) \wedge \delta_k(8)(2) \wedge \delta_k(8)(3)\} \\
&= \bigvee \{\delta_1(8)(1) \wedge \delta_1(8)(2) \wedge \delta_1(8)(3)\} = 0.3
\end{aligned}$$

bulunur.

$\langle g\rangle(9) = \bigvee_{\substack{\alpha \in Y(9) \\ k=\overline{1,|Y(n)|}}} (\bigwedge_{i=1}^{3} \delta_k(\alpha)(i))$ *ve* $Y(9) = \{(3 \times 3 + 1 \times 5 + 0 \times 7)\}$ *dir.*

$\alpha_1(9) = (3, 0, 0)$ *için* $\delta_1(9) = (0.3, 1, 1)$ *dir. Buradan;*

$$
\begin{aligned}
\langle g\rangle(9) &= \bigvee_{\substack{\alpha\in Y(9)\\k=1}} \{\bigwedge_{i=1}^{3} \delta_k(9)(i)\}\\
&= \bigvee_{\substack{\alpha\in Y(9)\\k=1}} \{\delta_k(9)(1)\wedge\delta_k(9)(2)\wedge\delta_k(9)(3)\}\\
&= \bigvee\{\delta_1(9)(1)\wedge\delta_1(9)(2)\wedge\delta_1(9)(3)\} = 0.3
\end{aligned}
$$

bulunur. Şimdi $\langle g\rangle(10)$ u bulalım;
$\langle g\rangle(10) = \bigvee_{\substack{\alpha\in Y(10)\\k=\overline{1,|Y(n)|}}} (\bigwedge_{i=1}^{3} \delta_k(10)(i))$ *ve* $Y(10)=\{(0\times 3+2\times 5+0\times 7),(1\times 3+0\times 5+1\times 7)\}$
dir.

$\alpha_1(10)=(0,2,0)$ *için* $\delta_1(10)=(1,0.5,1)$ *iken* $\alpha_2(10)=(1,0,1)$ *için* $\delta_2(10)=(0.3,1,0.4)$ *tür. Buradan;*

$$
\begin{aligned}
\langle g\rangle(10) &= \bigvee_{\substack{\alpha\in Y(10)\\k=1,2}} (\bigwedge_{i=1}^{3} \delta_k(10)(i))\\
&= \bigvee_{\substack{\alpha\in Y(10)\\k=1,2}} \{\delta_k(10)(1)\wedge\delta_k(10)(2)\wedge\delta_k(10)(3))\}\\
&= \bigvee\{((\delta_1(10)(1)\wedge\delta_1(10)(2)\wedge\delta_1(10)(3))\,,\,(\delta_2(10)(1)\wedge\delta_2(10)(2)\wedge\delta_2(10)(3))\}\\
&= \bigvee\{0.5, 0.3\} = 0.5
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde $n\in\langle Supp(g)\rangle$ için $\langle g\rangle(n)$ bulunabilir.

Tanım 4.19. *$g:\mathbb{N}_0\longrightarrow[0,1]$ belirtisiz sayısal yarıgrup olsun.*
$\mathbb{N}_0^{\langle g\rangle}=\mathbb{N}\backslash Supp(g)$ kümesine "g nin boşluklar kümesi", $|\mathbb{N}_0^{\langle g\rangle}|=|\mathbb{N}\backslash Supp\langle g\rangle|$ ye "$\langle g\rangle$ nin cinsi" ve $maks\{\mathbb{N}\backslash\langle g\rangle\}$ ye "$\langle g\rangle$ nin Frobenius sayısı*" denir.*
Örneğin; Örnek 6 teki $\langle g\rangle$ nin boşluklar kümesi $\mathbb{N}_0^{\langle g\rangle}=\{1,2,4\}$, $\langle g\rangle$ nin cinsi $|\mathbb{N}_0^{\langle g\rangle}|=|\{1,2,4\}|=3$ ve $\langle g\rangle$ nin Frobenius sayısı $\max\{1,2,4\}=4$ tür.

İlk olarak Zadeh'in teknik bir soruna çözüm ararken keşfettiği ve bu sorunun çözümünün klasik yaklaşımla değil ancak "belirtisiz" yaklaşımla mümkün olacağını görmesi ile gündeme gelen "Belirtisizlik kuramı" matematik dünyasına büyük ses getirmiş ve yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Klasik mantıkta bir önermenin doğruluk değeri yalnızca 1 veya 0 olurken; belirtisiz mantıkta [0,1] aralığında sonsuz değer alması mümkündür. Tıpkı siyah ile beyaz arasında sonsuz ton bulunması gibi. Bu belirtisiz yaklaşım, matematiğin alt dallarına, mühendislik, tıp gibi birçok alana uygulanmış ve bu alanlarda çalışan insanların farklı ve daha geniş bakış açılarıyla konulara yaklaşmasını sağlamıştır. Matematiğin en temel alt dallarından biri olan Cebir alanında da belirtisizlik kuramı yerini almış, Cebir'in yapıtaşlarından grup teorisi belirtisiz yaklaşımla incelenmiş, Kuroki tarafından "yarıgruplar içindeki belirtisiz idealler"in tanımlanmasıyla gruplardan sonra yarıgrupların da belirtisizliği ele alınmıştır.

Bu tezde, matematikçi Ferdinand Frobenius ve James Joseph Sylvester'ın literatürümüze kattığı, ünlü Frobenius sorusuyla başlayan sayısal yarıgruplar üzerinde belirtisizlik kuramının söz konusu olup olmadığı, eğer söz konusu ise doğal sayıların altkümesi olan bir sayısal yarıgrubun karakteristik fonksiyonunun bu tanım içinde yer alıp almadığı araştırılmış, bir yarıgrubun karakteristik fonksiyonunun belirtisizliği ele alınmış, "Yarıgruplar için geçerli olan belirtisizlik özelliklerinin sayısal yarıgruplar için geçerliliği var mı?" sorusuna cevap aranmıştır.

Öncelikle, Tanım 4.13 ile belirtisizlik ve sayısal yarıgrup olma koşulları verilerek belirtisiz sayısal yarıgrup tanımı elde edilmeye çalışılmış, ardından Önerme 4.14 ile $\mathbb{N}_0$ ın bir altkümesi olan S sayısal yarıgrubunun karakteristik fonksiyonu $C_S(x)$ tanımlanarak bu karakteristik fonksiyonun verilen şartlar altında belirtisiz sayısal yarıgrup olup olmadığı incelenmiştir.

Önerme 4.15'de özel koşullar altında tanımlanmış bir üreteç fonksiyonunun belirtisizliği incelenmiş, belirtisiz sayısal yarıgruba da örnek niteliğinde olmuştur.

Önerme 4.16'da $f, g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow [0,1]$ belirtisiz sayısal yarıgrupları için $f \wedge g$ $= \min\{f, g\}$ ifadesinin de belirtisiz sayısal yarıgrup olduğu gerekli koşullar sağlatılarak gösterilmeye çalışılmıştır.

Sonlu olmayan belirtisiz sayısal yarıgrup ailelerinin kesişimlerinin belirtisiz sayısal yarıgrup olmayabileceği ters örnekle gösterilmiştir. (Bknz: Sonuç 4.18) Bu demektir ki, her belirtisiz sayısal yarıgrup ailesi kesişim altında belirtisiz sayısal yarıgrup olmayabilir.

Daha sonra ise; sayısal yarıgruplar için kullanılan "Frobenius sayısı", "boşluklar kümesi", "cinsi" ifadelerini belirtisiz sayısal yarıgruplar için tanımlanmıştır.

Tüm bu bulgulardan elde edilmek istenen; gruplar, yarıgruplardan sonra sayısal yarıgrupların da belirtisizlik yaklaşımıyla ele alınıp alınamayacağıdır. Bu da aslında belirtisiz yaklaşımın uygulanabileceği daha birçok alan olabileceğinin ışığıdır. Klasik yaklaşımla ele alınmış disiplinlerin belirtisiz yaklaşımla incelenmesi ve bu yaklaşımın uygulanabiliyor olması, bu disiplinleri genişletip geliştireceğinden, siyah ve beyaz yerine ara tonların çeşitliliği gibi çeşitlilik sağlayacağından oldukça önem arz etmektedir. Sayısal yarıgrup-lar, halen üzerinde çalışmalara devam edilen matematiğin önemli bir dalıdır. Geliştirilmeye açık olması sebebiyle tezde bu konu ele alınmıştır.

Belirtisizlik kuramı, klasik mantıktan daha kapsamlı, ucu açık ve "belirsiz" olduğundan, tanımlar verilirken bu etkenlerin sebep olduğu çelişkilerle karşılaşılmış ve bu çelişkilerin giderileceği şekilde tanımlar düzenlenmeye çalışılmıştır.

Literatürde yeni bir konu sayılması sebebiyle kaynaklar kısıtlı olmakla beraber, belirtisizlik yaklaşımı sayısal yarıgruplar üzerinde ilk defa denenmiştir. Halihazırda örnek bulunmayıp uygun örnekler üretilerek uygulama yapılmaya çalışılmıştır.

Sayısal yarıgruplara belirtisiz yaklaşımla ilgili ileride yapılacak çalışmalara temel oluşturabilecek bu çalışma, üzerinde çalışacak kişilere farklı fikirler yeni sonuçlar getirebilir. Gelecek zamanda bu alanda yapılacak çalışmalarda, sayısal yarıgruplardan bildiğimiz Apery küme, gömme boyutu gibi kavramlar belirtisiz sayısal yarıgruplar için araştırılabilir, Arf sayısal yarıgrupların, Pseudo-Frobenius sayılarının belirtisizliği incelenebilir.

5. SONUÇLAR

Doğa, bilim, evren belirsizliklerle doludur. Keskin sınırlar çizmek mümkün değildir. Klasik küme kuramının keskin sınırları olması nedeniyle kısıtlı kaldığını ve evrendeki her şeyin bu kadar kesin sınırlı olmadığı, belirsiz olabildiğini gören matematikçi Zadeh, 1965 yılında yayımladığı makale ile literatürümüze "belirtisiz küme" kuramını getirmiş, bu kuram zaman içerisinde diğer matematikçilerin de onayını kazanmıştır. Topoloji için oldukça önemli bir yere sahip olan belirtisizlik yaklaşımı, literatüre girdikten sonra birçok disipline uygulanmış, bu disiplinlerden biri de grup teorisi olmuştur.

Bilindiği üzere, grup teorisi Cebir anabilim dalı için büyük önem taşımaktadır. Bir yarıgrubun ideali, bu yarıgrubun cebirsel yapısının incelenirken önem arz etmektedir. Bu nedenle Kuroki, yarıgrupların cebirsel yapısını daha iyi anlamak için yarıgrupların belirtisiz yaklaşımla da incelenebileceğini söylemiş ve yarıgruplar içindeki belirtisiz idealleri araştırmıştır.

Bu tezde Kuroki'nin tanımladığı yarıgruplar içindeki belirtisiz ideallerden bahsedilmiş ve bundan esinlenilerek sayısal gruplar, belirtisizlik kuramıyla ele alınmıştır.

Bunun için tezin 1. ve 2. bölümünde önhazırlık olması amacıyla yarıgrup, sayısal yarıgrup, yarıgruplar içindeki idealler, yarıgruplar içindeki belirtisiz idealler gibi kavramlar ve bazı özellikleri verilmiştir.

Tezin son bölümünde ise belirtisiz sayısal yarıgruplar tanımlanmıştır.

$S \subset \mathbb{N}_0$ bir sayısal yarıgrup olmak üzere; S nin karakteristik fonksiyonu olan $C_S(x)$ fonksiyonu tanımlanarak bu fonksiyonunun belirtisiz sayısal yarıgrup olduğu ve f, g : $\mathbb{N}_0$ dan $[0, 1]$ e tanımlı f ve g belirtisiz sayısal yarıgruplar olduğu varsayımıyla $f \wedge g$ ifadesinin de belirtisiz sayısal yarıgrup olup olamayacağı gösterilmeye çalışılmıştır.

Son olarak, bir sayısal yarıgrup için tanımlanan "cins", "boşluklar kümesi", "Frobenius sayısı" kavramları belirtisiz sayısal yarıgruplar için de tanımlanmıştır.

6. KAYNAKLAR

A. Assi, P. A. Garcia-Sanchez, *Numerical Semigroups and Applications (2016) Pg. 1-20*

A. Rosenfeld, Fuzzy Groups, *Journal of Mathematical Analysis and Applications 35 (1971) 512-517*

C. Arf, Une interprétation algébrique de la suite des ordres de multiplicité d'une branche algébrique, *Proc. London Math. Soc., Series 2, 50 (1949), 256 - 287*

C. L. Chang, Fuzzy Topological Spaces, *Journel Of Mathematical Analysis And Aplli-cations 24 (1968) Pg. 182-190*

D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, *Academic Press, New York, 1980*

F. Curtis, On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup, *Math. Scand. 67 (1990), no. 2, 190–192*

H. I. Karakas, S. Ilhan, Arf Numerical Semigroups, *Turkish Journal of Mathematics, 2017*

J. C. Rosales, Families of Numerical Semigroups Closed Under Finite Intersections and for the Frobenius Number, *Houston J. Math. 34 (2008), 339–348*

J. C. Rosales, P. A. Garcia-Sanchez, *Numerical Semigroup Springer (2009)*

J. C. Rosales, M. B. Branco, The Frobenius problem for numerical semigroups, *Jurnal of Number Theory 131 (2011) Pg. 2310-2319*

J. C. Rosales, Symmetric numerical semigroups with arbitrary multiplicity and embedding dimension, *Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), no. 8, 2197–2203*

J. L. R. Alfonsin, The Diophantine Frobenius Problem, Oxford University Press, 2005

J. N. Mordeson, D. S. Malik, N. Kuroki, Fuzzy Semigroups, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, Studies in fuzziness and soft computing 131, 2003*

L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Inform. Control 8 (1965) 338–353*

M. Shabir, A. Khan, On fuzzy ordered semigroups, *Information Sciences 274 (2014) 236–248*

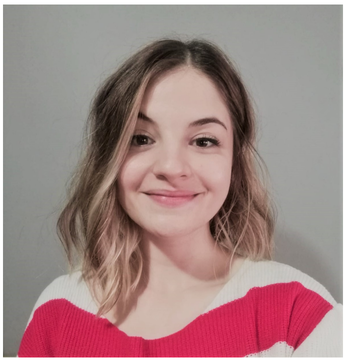
N. Kehayopulu, M. Tsingelis, Regular ordered semigroups in terms of fuzzy subsets, *Information Sciences 176 (2006) 3675–3693*

N. Kuroki, On fuzzy semigroups, *Inform. Sci. 53 (1991) 203–236*

P. A. Sanchez, B. A. Heredia, H. I. Karakas and J. C. Rosales, Parametrizing Arf Numerical Semigroups, *Journal of Algebra and Its ApplicationsVol. 16, No. 11, 2017*

X.Y. Xie, M.-F. Wu, Theory of Fuzzy Semigroups, *Beijing: Kexue Press, 2005.6*

ÖZGEÇMİŞ



Ahu Berika EMRAHOĞLU

E-mail: berikaemrahoglu_@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2018-2021	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2013-2018	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya