T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞMİŞ POISSON YARIGRUBU TARAFINDAN ÜRETİLEN KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRALLERİN YAKINSAMA HIZLARI ÜZERİNE

Çiğdem AKAY

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞMİŞ POISSON YARIGRUBU TARAFINDAN ÜRETİLEN KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRALLERİN YAKINSAMA HIZLARI ÜZERİNE

Çiğdem AKAY

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2022
ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ POİSSON YARIGRUBU TARAFINDAN ÜRETİLEN KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRALLERİN YAKINSAMA HIZLARI ÜZERİNE

Çiğdem AKAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 27/01/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Melih ERYİĞİT (Danışman) M. Eryiğit

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

GENELLEŞMİŞ POISSON YARIGRUBU TARAFINDAN ÜRETİLEN KESİKLİ HİPERSİNGÜLER İNTEGRALLERİN YAKINSAMA HIZLARI ÜZERİNE

Çiğdem AKAY

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç.Dr. Melih ERYİĞİT

Ocak 2022; 22 sayfa

Bu çalışmada, ilk olarak genelleşmiş Poisson yarı grupları kullanarak, ε-parametresine bağlı kesikli hipersingüler integral operatörler tanıtılmıştır. Ardından, tezin temel amacı olan $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayından alınan bir f fonksiyonunun pürüzsüzlük derecesiyle bu kesikli hipersingüler integral operatörlerin $\varepsilon \to 0^+$ için noktasal yakınsama hızları arasında bazı bağıntılar elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Flett potansiyelleri, genelleşmiş Poisson yarı grubu, kesikli hipersingüler integraller, μ-pürüzsüzlük, yakınsama hızı

JÜRİ: Doç. Dr. Melih ERYİĞİT
Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

ON THE RATE OF CONVERGENCE OF THE TRUNCATED HYPERSINGULAR INTEGRALS GENERATED BY GENERALIZED POISSON SEMIGROUP

Çiğdem AKAY

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Melih ERYİĞİT
January 2022; 22 pages

In this dissertation, we first introduce the truncated hypersingular integral operators generatated by modified Poisson semigroup. Then, obtain some relation between the order of smoothness of a function $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ and the rate of pointwise convergence of this truncated hypersingular integrals as $\varepsilon \to 0^+$.

KEYWORDS: Flett potentials, generalized Poisson semigroup, truncated hypersingular integrals, μ-smoothness, rate of convergence

COMMITTEE: Assoc.Prof.Dr. Melih ERYİĞİT
Assoc.Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Asst.Prof.Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin modern teorisinde Sobolev uzayları ve türevlerine benzer fonksiyon uzayları belirli bir rol oynamaktadır. Bu bağlamda Riesz ve Bessel potansiyelleri olarak adlandırılan ve formal olarak sırasıyla

$$\left(I^{\alpha} f\right)^{\wedge}(x) = |x|^{-\alpha} f(x), x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < n,$$

$$\left(J^{\alpha} f\right)^{\wedge}(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{-\alpha}{2}} x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < \infty,$$

biçiminde tanımlanan integral dönüşümler önemli bir yere sahiptir. Daha açık ifadeyle, $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının bir alt uzayı olan $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ Sobolev uzayını I^α ve J^α operatörlerini kullanarak tanımlayabiliriz.

Bu operatörlerin çekirdeklerinin sıfır noktasının komşuluğunda lokal davranışları benzerdir, fakat sonsuzlukta Riesz potansiyeline ait çekirdeğin davranışı Bessel potansiyeline ait çekirdeğin davranışı kadar iyi değildir. Flett potansiyelleri, Flett (1971) kaynağında, davranışları Riesz ve Bessel potansiyellerinin ortasında olan ve Fourier dönüşümü dilinde,

$$\left(T^{\alpha} f\right)(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\alpha} f^{\wedge}(x), x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < \infty$$

şeklinde tanımlanan potansiyellerdir. Bu tez çalışmasında, Flett potansiyellerinin terslerini belirlemek için tanımlanan, genelleşmiş Poisson yarıgrupları yardımıyla oluşturulan ε-parametresinde bağlı kesikli hipersingüler integral ailelerinin, $\varepsilon \to 0^+$ için noktasal yaklaşım hızını T^α potansiyelinin etki ettiği $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun pürüzsüz derecesine bağlı olarak inceledik.

Bu çalışmanın fonksiyon uzaylarında ve integral denklemler alanında çalışan uzmanlar için bir yardımcı kaynak olacağını düşünmekteyiz.

Çalışmam boyunca benden desteklerini esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Melih Eryiğit'e, tez çalışmamın her aşamasında yanımda olan kıymetli dostum Arş. Gör. Çağla Sekin'e minnetlerimi sunarım. Ayrıca, her zaman manevi desteğini hissettiğim anneme, babama ve eşime teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Genelleşmiş Poisson Yarıgrubu Tarafından Üretilen Kesikli Hipersingüler İntegrallerin Yakınsama Hızları Üzerine" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

27/01/2022

Çiğdem AKAY

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \cdots\}$
$L_P \equiv L_P(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir ve p-inci kuvveti integrallenen fonksiyonlar uzayı
$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$	: Lokal integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$C(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$'de sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$(M\varphi)(x)$	: Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü
$\Gamma(t)$	: Gamma Fonksiyonu
$f^\wedge$	: f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$f^\vee$	: f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü
$f * g$	: f ile g fonksiyonlarının girişimi

Kısaltmalar:

h.h.h.	: Hemen hemen her

1. GİRİŞ

Bu tez, bu bölüm hariç toplam dört ana kısımdan oluşmaktadır. Tezin ikinci kısmında kaynak taraması yapılarak, tez boyunca kullanılacak önemli kavramlar tanıtılmış ve bu kavramlara ait teoremler, bazıları ispatlarıyla birlikte ifade edilmiştir.

Üçüncü bölüm, iki alt kısımdan oluşmaktadır. İlk bölümün, ilk alt başlığında Flett potansiyellerinin terslerini bulmak için kurulan modifiye Poisson yarıgrubunun doğurduğu bir $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı kesikli hipersingüler integraller ailesi tanıtılmış ve bu aile yardımıyla Flett potansiyelleri için bir ters belirleme formülü verilmiştir.

Bu bölümün ikinci alt başlığında, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Lebesgue kümesine ait olan μ-pürüzsüzlük kavramı tanıtılmış ve bu pürüssüzlük noktasının komşuluğunda f fonksiyonunun integralinin büyüklüğü hakkında bilgi veren çeşitli eşitsizlikler kanıtlanmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde, tezin temel sonucu olan, Flett potansiyellerinin terslerini belirlemek için kurulan ve $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı hipersingüler integraller ailesinin, $\varepsilon \to 0$ için noktasal yaklaşım hızı, Flett potansiyelinin etki ettiği fonksiyonun μ-pürüzsüzlük derecesine bağlı olarak incelenmiştir.

Tezin beşinci bölümü olan sonuç bölümünde, dördüncü kısımda elde edilen sonuçların Harmonik Analizdeki yerinin ne olabileceği tartışılmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu çalışma boyunca $\mathbb{R}^n$ ile $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ noktalarından oluşan n-boyutlu öklid uzayını, $x \cdot y$ ile de bu uzaydaki standart iç çarpımı göstereceğiz.

Ayrıca, $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty; \ \|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan normla birlikte oluşturduğu Banach uzayını $L^p(\mathbb{R}^n) \equiv L^p$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1 (Gamma Fonksiyonu). $\operatorname{Re} z > 0$ *için Gamma Fonksiyonu,*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.2. *(Folland G.B. (1999)) Gamma Fonksiyonunun bazı temel özellikleri aşağıdaki gibidir.*

i) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$,

ii) $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

Tanım 2.3 (Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü). φ, $\mathbb{R}^n$*'de intergallenebilir bir fonksiyon olsun.* φ *fonksiyonunun klasik Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu (operatörü)*

$$(M\varphi)(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |\varphi(y)| \, dy, \ x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $m(B)$*,* B *yuvarının Lebesgue ölçümüdür.*

Teorem 2.4. *(Folland G.B. (1999))* $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *intergallenebilir bir fonksiyon ise,*

i) $M\varphi$ *ölçülebilirdir.*

ii) h.h.h.$x \in \mathbb{R}^n$ *için* $M\varphi(x) < \infty$ *dir.*

iii) $M\varphi$ *operatörü,* $A = 3^n$ *ve* $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |(M\varphi)(x)| \, dx$ *olmak üzere, her* $\alpha > 0$ *için,*

$$m\left(\{x \in \mathbb{R}^n : (M\varphi)(x) > \alpha\}\right) \leq \frac{A}{\alpha} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

koşulunu sağlar.

$L^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde Fourier doğrusal dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f^{\wedge}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx,\ f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Fourier dönüşümüne ait ters belirleme formülü de

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi)e^{i\xi\cdot x}d\xi,\ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

şeklindedir.

Teorem 2.5 (Minkowski Eşitsizliği). *(X,μ) ve (Y,v) ölçülebilir fonksiyonlar uzayı ve $F(x,y)$, $X\times Y$'de $\mu\otimes v$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $F(\cdot,y)\in L^p(X,\mu)$, $(1\le p\le\infty)$ h.h.h.y ve $\int_Y \|F(\cdot,y)\|_{p,\mu}dv(y) = A < \infty$ ise, $\int_Y F(x,y)dv(y)$ hemen hemen her yerde yakınsaktır ve,*

$$\left\|\int_Y F(x,y)dv(y)\right\|_{p,\mu} \le \int_Y \|F(x,y)\|_{p,\mu}dv(y)$$

sağlanır.

Tanım 2.6. *$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p\le\infty$ fonksiyonunun $\alpha>0$ mertebeden Flett potansiyeli,*

$$(F^\alpha f)(x) = (\mathcal{P}_\alpha * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{P}_\alpha(y)f(x-y)dy \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\mathcal{P}_\alpha(x)$ çekirdeğinin Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{P}_\alpha^{\wedge}(x) = (1+|x|)^{-\alpha},\ x\in\mathbb{R}^n, \alpha>0$$

dir.

Önteorem 2.7 (Flett (1971), syf.447, Samko vd. (1993), syf.542)**.** *a) $\mathcal{P}_\alpha(y)$ çekirdeği aşağıdaki gösterime sahiptir:*

$$\mathcal{P}_\alpha(y) = \frac{1}{\lambda_n(\alpha)}|y|^{\alpha-n}\int_0^\infty \frac{s^\alpha e^{-s|y|}}{(1+s^2)^{\frac{n+1}{2}}}ds,\ (\alpha>0). \tag{2.5}$$

Burada, $\lambda_n(\alpha) = \frac{\pi^{(n+1)/2}\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ dir.

b) $\mathcal{P}_\alpha(y)$ fonksiyonunun sıfırın komşuluğunda davranışı aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{P}_\alpha(y) \sim c_n(\alpha)|y|^{\alpha-n},\ |y|\to 0,\ (0<\alpha<n)$$

ve

$$\mathcal{P}_\alpha(y) \sim \frac{c_n}{(n-1)!}\ln\frac{1}{|y|},\ |y|\to 0.$$

Burada,

$$c_n(\alpha) = \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)\Gamma((n-\alpha)/2)}{2\Gamma(\alpha)\pi^{(n+1)/2}}$$

ve

$$c_n = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}$$

dir.

c) $\alpha > 0$ için $\mathcal{P}_\alpha(y)$ fonksiyonunun $|y| \to \infty$'da davranışı aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{P}_\alpha(y) \sim \alpha c_n \, |y|^{-n-1}, \; |y| \to \infty.$$

d) Her $\alpha > 0$ değeri için, $\mathcal{P}_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $\|\mathcal{P}_\alpha\|_1 = 1$'dir.

Sonuç 2.8. *Flett potansiyeli güçlü (p,p)-tiplidir, yani*

$$\|F^\alpha f\|_p \leq \|f\|_p, \, \forall\alpha > 0, \, 1 \leq p \leq \infty \tag{2.6}$$

dır.

İspat

$$\begin{aligned}
\|F^\alpha f\|_p &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |(F^\alpha f)(x)|^p \, dx\right]^{1/p} = \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}_\alpha(y) f(x-y) dy \right\|_{P,dx} \\
&\leq \text{(Minkowski Eşitsizliği)} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{P}_\alpha(y)|^p \, |f(x-y)|^p \, dx \right)^{1/p} dy \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{P}_\alpha(y)| \, dy\right] \|f\|_p = \underbrace{\|\mathcal{P}_\alpha\|_1}_{=1} \|f\|_p = \|f\|_p \, .
\end{aligned}$$

□

Tanım 2.9. *(Stein ,E and Weiss, G (1971)) $x \in \mathbb{R}^n$ verilsin. Bu durumda,*

$$U_f(x,t) \equiv (U_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(y,t) f(x-y) dy, \; t > 0, x \in \mathbb{R}^n \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, f fonksiyonunun Poisson integrali denir. Burada $p(y,t)$ Poisson çekirdeği aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$p(y,t) = \frac{c_n t}{(|y|^2 + t^2)^{(n+1)/2}}, \; c_n = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}. \tag{2.8}$$

Önteorem 2.10 (Rubin (1998), syf.217)**.** *$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ verilsin. Ayrıca, $U_f(x,t)$ fonksiyonu (2.7)'de ve $p(y,t)$ fonksiyonu da (2.8)'de tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda,*

a) $\int_{\mathbb{R}^n} p(y,t)dy = 1$ ve her $t > 0$ için,

$$(p(\cdot,t))^\wedge(y) = e^{-t|y|}$$

dir.

b)

$$\|U_t f\|_p \leq \|f\|_p\,. \tag{2.9}$$

c)

$$\sup_x |(U_t f)(x)| \leq ct^{-n/p}\|f\|_p\,,\ 1 \leq p < \infty,\ c = c(n,p). \tag{2.10}$$

d) Mf Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu olmak üzere,

$$\sup_{t>0} |(U_t f)(x)| \leq (Mf)(x). \tag{2.11}$$

e) $U_t f$ yarıgrup özelliğini sağlar:

$$(U_\alpha(U_\beta f))(x) = (U_{\alpha+\beta} f)(x), (\forall\alpha > 0, \beta > 0 \text{ için}). \tag{2.12}$$

f)

$$\lim_{t\to 0^+} (U_t f)(x) = f(x), \tag{2.13}$$

burada limit L^p-normunda, h.h.h.x için noktasal anlamda geçerlidir. Ayrıca, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ için limit düzgün yakınsaktır.

Önteorem 2.11 (Flett (1971), syf. 446)**.** *$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ($1 \leq p \leq \infty$) olsun. O halde, Flett potansiyeli için,*

$$(F^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} (U_t f)(x)dt,\ \alpha > 0, x \in \mathbb{R}^n \tag{2.14}$$

eşitliği sağlanır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Modifiye Poisson yarıgrubu ve bu gruba ilişkin kesikli integral operatörler

Bu bölümde, Poisson integralinin bir genelleşmesini tanıtacağız. Daha sonra, bu genelleşmiş Poisson yarıgrubunu kullanarak kesikli hipersingüler integral dönüşümler kuracağız.

Tanım 3.12. *$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ ve $U_t f$ Poisson integrali (2.7)'de tanımlandığı gibi olsun. Bu yarıgrup yardımıyla, Poisson integralinin bir genelleşmesi olan Modifiye Poisson yarıgrubu aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$(S_t f)(x) = e^{-t}(U_t f)(x), \; (t \ge 0, x \in \mathbb{R}^n). \tag{3.1}$$

Not: $t = 0$ için,

$$(S_0 f)(x) = (U_0 f)(x) = f(x)$$

dir.

Önerme 3.13. *Modifiye Poisson integrali için*

$$(S_\alpha(S_\beta f)(x)) = (S_{\alpha+\beta} f)(x)$$

yarıgrup özelliği sağlanır.

İspat

$$\begin{aligned}
(S_\beta f)(x) &= e^{-\beta}(U_\beta f)(x) \\
&\Rightarrow (S_\alpha(S_\beta f)(x)) = e^{-\alpha}\left(U_\alpha\left(e^{-\beta}(U_\beta f)(x)\right)\right) = e^{-\alpha} \cdot e^{-\beta}\left(U_\alpha(U_\beta f)(x)\right) \\
&\overset{(2.12)}{=} e^{-(\alpha+\beta)}(U_{\alpha+\beta} f)(x).
\end{aligned}$$

□

Tanım 3.14. *$g(t)$, $t \in \mathbb{R}$ fonksiyonunun $l \in \mathbb{N}$ mertebeden $\tau \in \mathbb{R}$ adımlı sonlu farkı,*

$$\Delta_\tau^l[g](t) = \sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} (-1)^k g(t + k\tau) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. $t = 0$ *özel değeri,*

$$\Delta_\tau^l[g](0) = \sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} (-1)^k g(k\tau) \tag{3.3}$$

dir.

Bu modifiye Poisson yarıgrubu $S_t f$ ve $l \in \mathbb{N}$ mertebeden Δ_τ^l sonlu farklar operatörünü kullanarak aşağıdaki kesikli hipersingüler integral dönüşümlerini kuracağız. Bu tanım, Rubin (1986); Rubin (1987) ve Rubin (1986) kaynaklarında kullanılan tekniklerden ilham alarak yapılmıştır.

Tanım 3.15. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty, \alpha > 0$ *ve* $l \in \mathbb{N}$ *değeri* $l < \alpha$ *olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} (D_\varepsilon^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \Delta_\tau^l[(S_t f)(x)](0) \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \\ &\overset{(3.3)}{=} \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \left[\sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} (-1)^k e^{-k\tau} (U_{k\tau} f)(x) \right] \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanan operatöre ε*-parametreli kesikli hipersingüler integraller, veya kısaca, kesikli integraller diyeceğiz. Buradaki* $\chi_l(\alpha)$ *normalleyici katsayı*

$$\chi_l(\alpha) = \int_0^\infty (1 - e^{-t})^l t^{-1-\alpha} dt \tag{3.5}$$

dir.

Önerme 3.16. D_ε^α *operatörü,* $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere, her* $\alpha > 0, \varepsilon > 0$ *için güçlü* (p, p)*-tiplidir.*

İspat

$$
\begin{aligned}
\|D_\varepsilon^\alpha f\|_p &= \left\| \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \left[\sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} (-1)^k e^{-k\tau} \int_{\mathbb{R}^n} p(y,k\tau) f(x-y)dy \right] \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \right\|_{p,dx} \\
&= \left\| \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix} (-1)^0 e^0 \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(y,0) f(x-y)dy \right) \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} + \cdots \right. \\
&\quad + \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \begin{pmatrix} l \\ 1 \end{pmatrix} (-1)^1 e^{-\tau} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(y,k\tau) f(x-y)dy \right) \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} + \cdots \\
&\quad \left. + \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix} (-1)^l e^{-\tau l} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(y,l\tau) f(x-y)dy \right) \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \right\|_{p,dx} \\
&\leq \left\| \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(y,0) f(x-y)dy \right) \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \right\|_{p,dx} \\
&\quad + \cdots + \left\| \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix} e^{-\tau l} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(y,l\tau) f(x-y)dy \right) \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \right\|_{p,dx} .
\end{aligned}
$$

Son eşitlikteki her bir ifadeye Minkowski eşitsizliğini uygularsak; (Sondaki ifade için Minkowski eşitsizliğinin nasıl uygulandığını gösterelim):

$$
\begin{aligned}
&\left\| c_1 \int_\varepsilon^\infty e^{-\tau l} \frac{1}{\tau^{1+\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{l\tau}{(|y|^2 + l^2(\tau^2))^{(n+1)/2}} f(x-y)dyd\tau \right\|_{p,dx} \\
= &\left\| c_2 \int_\varepsilon^\infty e^{-\tau l} \frac{1}{\tau^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|y|^2 + l^2(\tau^2))^{(n+1)/2}} f(x-y)dyd\tau \right\|_{p,dx} \\
\leq &\left\| \frac{c_3}{l\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-\tau}d\tau}{\tau^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \frac{l\varepsilon}{|y|^2 + l^2(\varepsilon^2)} dy \right\|_{p,dx} \\
\leq &\left\| c_4 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, p(y,l\varepsilon)dy \right\|_{p,dx} \\
\leq &\ \text{(Minkowski Eşitsizliği)} \\
\leq &\ c_4 \int_{\mathbb{R}^n} p(y,l\varepsilon)dy \cdot \|f\|_p \overset{(2.8)}{=} c_4 \|f\|_p .
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak,

$$
\|D_\varepsilon^\alpha f\|_p \leq \sum_{k=0}^{l} c_k \|f\|_p \leq c \|f\|_p
$$

dir. □

Teorem 3.17. *$\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$, $0 < \alpha < \infty$ ve D_ε^α kesikli integral dönüşümü (3.4)'deki gibi tanımlansın. Eğer $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Flett potansiyeli $F^\alpha\varphi$ ve Poisson integrali $U_t\varphi$, $(t > 0)$ ise, o zaman aşağıdaki eşitlik noktasal olarak h.h.h.$x \in \mathbb{R}^n$ için sağlanır,*

$$(D_\varepsilon^\alpha F^\alpha \varphi)(x) = \int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta) e^{-\varepsilon\eta}(U_{\varepsilon\eta}\varphi)(x)d\eta,\ \varepsilon > 0, \tag{3.6}$$

buradaki $K_\alpha^{(l)}(\eta)$ fonksiyonu,

$$a_+^\alpha = \begin{Bmatrix} a^\alpha, & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{Bmatrix}$$

olmak üzere,

$$K_\alpha^{(l)}(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)K_l(\alpha)\cdot\eta}\sum_{k=0}^{l}(-1)^k(\eta - k)_+^\alpha,\ l > \alpha \tag{3.7}$$

şeklindedir.

İlk olarak bu teoremin ispatında kullanılacak olan Önteorem'i verelim:

Önteorem 3.18. *$h(t)$, $(0 < t < \infty)$ fonksiyonu için,*

$$\begin{aligned}(I_-^\alpha h)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty \frac{h(r)}{(r-t)^{1-\alpha}}dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty \frac{h(r+t)}{r^{1-\alpha}}dr,\ \alpha > 0\end{aligned} \tag{3.8}$$

olsun. Bu durumda, her $t > 0$ ve h.h.h.$x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$S_t[F^\alpha f](x) = I_-^\alpha[(S.f)(x)](t) \tag{3.9}$$

eşitliği sağlanır.

İspat (3.1)'den,

$$\begin{aligned}(F^\alpha f)(z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}(U_t f)(z)dt \\ &\Rightarrow\ S_t[F^\alpha f](x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t}p(y,t)(F^\alpha f)(x-y)dy,\ t > 0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t}p(y,t)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-r}(U_r f)(x-y)drdy\end{aligned} \tag{3.10}$$

Şimdi, (3.9) eşitliğinin sağ tarafını yazalım:

$$I_-^\alpha[(S.f)(x)](t) \overset{(3.8)}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty \frac{(S_{r+t}f)(x)}{r^{1-\alpha}}dr,\, t>0$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty \frac{1}{r^{1-\alpha}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-r-t}p(y,r+t)f(x-y)dydr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty \frac{1}{r^{1-\alpha}}e^{-r}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t}p(y,r+t)f(x-y)dydr,\, t>0 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty r^{\alpha-1}e^{-r}e^{-t}(U_{r+t}f)(x)dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty r^{\alpha-1}e^{-r}e^{-t}U_t(U_rf)(x)dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty r^{\alpha-1}e^{-r}e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n} p(y,t)(U_rf)(x-y)drdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t}p(y,t)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty r^{\alpha-1}e^{-r}(U_rf)(x-y)drdy \\
&\overset{(3.10)}{=} S_t[F^\alpha f](x).
\end{aligned}$$

□

Önteorem 3.18 verildikten sonra,

Teorem 3.16'nın ispatı:

$$\begin{aligned}
(D_\varepsilon^\alpha F^\alpha\varphi)(x) &= \frac{1}{\chi_l(\alpha)}\int_\varepsilon^\infty \left[\sum_{k=0}^{l}\begin{pmatrix} l \\ k\end{pmatrix}(-1)^k e^{k\tau}(S_{k\tau}F^\alpha\varphi)(x)\right]\frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}} \\
&\overset{(3.9)}{=} \frac{1}{\chi_l(\alpha)}\int_\varepsilon^\infty \left[\sum_{k=0}^{l}\begin{pmatrix} l \\ k\end{pmatrix}(-1)^k\right]^\alpha \left[[(S.\varphi)(x)]\,(k\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Bu son ifadede yer alan toplam için,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{l}\begin{pmatrix} l \\ k\end{pmatrix}(-1)^k I_-^\alpha\left[(S.\varphi)(x)\right](k\tau) \\
&\overset{(3.8)}{=} \sum_{k=0}^{l}\begin{pmatrix} l \\ k\end{pmatrix}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{k\tau}^\infty (r-k\tau)^{\alpha-1}(S_r\varphi)(x)dr \\
&= \int_0^\infty h_\tau(r)(S_r\varphi)(x)dr,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

burada,

$$(r-k\tau)_+^{\alpha-1} = \begin{cases} (r-k\tau)^{\alpha-1}, & r>k\tau \text{ ise} \\ 0, & r\le k\tau \text{ ise}\end{cases}$$

olmak üzere,

$$h_\tau(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} (-1)^k (r - k\tau)_+^{\alpha-1} \tag{3.13}$$

dir.

Şimdi, (3.12) değerini (3.11) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
(D_\varepsilon^\alpha F^\alpha \varphi)(x) &= \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}} \left(\int_0^\infty h_\tau(r)(S_r\varphi)(x) dr \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\chi_l(\alpha)} \int_0^\infty (S_r\varphi)(x) \left(\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}} h_\tau(r) d\tau \right) dr \\
(r &= \varepsilon\eta, 0 < \eta < \infty \text{ değişken değiştirmesi yapalım}) \\
&= \frac{\varepsilon}{\chi_l(\alpha)} \int_0^\infty (S_{\varepsilon\eta}\varphi)(x) \left(\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}} h_\tau(\varepsilon\eta) d\tau \right) d\eta
\end{aligned}$$

$$\overset{(3.12)}{=} \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)\chi_l(\alpha)} \int_0^\infty (S_{\varepsilon\eta}\varphi)(x) \left(\sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} (-1)^k \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{\tau^{1+\alpha}} h_\tau (\varepsilon\eta - k\tau)_+^{\alpha-1} d\tau \right) d\eta \tag{3.14}$$

olur. Bu son (3.14) eşitliğindeki, ifadesi aşağıda verilen, integralleri hesaplayalım,

$$i_k = \int_\varepsilon^\infty \tau^{-1-\alpha} (\varepsilon\eta - k\tau)^{\alpha-1} d\tau, \, (k = 0, 1, \cdots, l).$$

$k = 0$ için,

$$i_0 = \int_\varepsilon^\infty \tau^{-1-\alpha} (\varepsilon\eta)^{\alpha-1} d\tau = \frac{1}{\alpha\varepsilon} \eta^{\alpha-1};$$

$k = 1, 2, \cdots, l$ için:

$$i_k = \begin{Bmatrix} \int_\varepsilon^{\varepsilon\eta/k} \tau^{-1-\alpha} (\varepsilon\eta - k\tau)^{\alpha-1} d\tau, & n > k \text{ ise} \\ 0, & n \le k \text{ ise} \end{Bmatrix}$$

Bu ifadede,

$$\tau = \frac{\varepsilon\eta}{k} \cdot \frac{1}{t+1}, 0 < t < \frac{\eta}{k} - 1$$

değişken değiştirmesi yaparak, $n \ge k$ için

$$i_k = \frac{k^\alpha}{\varepsilon\eta} \int_0^{\frac{\eta}{k}-1} t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\varepsilon\eta} (\eta - k)^\alpha$$

elde ederiz. Sonuç olarak,

$$i_k = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\varepsilon\eta} (\eta - k)^\alpha, & n > k \text{ ise} \\ 0, & n \le k \text{ ise} \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

olur.

Şimdi, i_k için (3.15)'te bulduğumuz değerleri (3.14)'te yerine koyalım,

$$\begin{aligned}&(D_\varepsilon^\alpha F^\alpha \varphi)(x)\\&= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)\chi_l(\alpha)} \int_0^\infty (S_{\varepsilon\eta}\varphi)(x) \left(\sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} (-1)^k (\eta - k)_+^\alpha \right) \frac{d\eta}{\eta}\\&= \int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta) e^{-\varepsilon\eta} (U_{\varepsilon\eta}\varphi)(x) d\eta\end{aligned}$$

olur. Buradaki $K_\alpha^{(l)}(\eta)$ fonksiyonu (3.7)'de tanımlandığı gibidir.

Not: Teorem 3.17'in ispatında kullandığımız teknik Rubin (1986); Rubin (1987) kaynaklarında, Riesz ve Bessel potansiyelleri için kullanılan tekniğin Flett potansiyellerine uyarlanışıdır.

Bu bölümü, ilerleyen bölümlerde kritik bir rol oynayan $K_\alpha^{(l)}$ çekirdeğinin bazı özelliklerini vererek bitiriyoruz:

Önteorem 3.19 (Rubin (1996), syf.158], Samko vd. (1993), syf.125)**.** $K_\alpha^{(l)}(\eta)$ *fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

a) Her $\alpha > 0$ ve $l > \alpha$ ($l \in \mathbb{N}$) için,

$$K_\alpha^{(l)}(\eta) \in L^1(0,\infty) \text{ ve } \int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta) d\eta = 1;$$

b)

$$K_\alpha^{(l)}(\eta) = \left\{ \begin{array}{ll} O(\eta^{\alpha-1}), & \eta \to 0^+ \\ O(\eta^{\alpha-l-1}), & \eta \to \infty \end{array} \right\}.$$

3.2. μ-pürüzsüzlük noktası

Bu bölümde bir $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Lebesgue kümesine ait olan μ-pürüzsüzlük noktasını tanımlayacağız ve bu noktanın komşuluğunda f fonksiyonunun integralinin büyüklüğü hakkında bilgi veren Lemma'yı ispatlayacağız.

Tanım 3.20. $\rho \in (0,1)$ *olmak üzere,* $\mu(r)$ *fonksiyonu* $[0,\rho)$ *aralığında sürekli,* $(0,\rho]$ *üzerinde pozitif ve* $\mu(0) = 0$ *olsun. Eğer bir* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *noktasında,*

$$\mathcal{M}_\mu(x^0) \equiv \sup_{0<r\le\rho} \frac{1}{r^n \mu(r)} \int_{|x|\le r} \left|\varphi(x^0 - x) - \varphi(x^0)\right| dx < \infty, \tag{3.16}$$

*sağlanıyorsa, o zaman $x^0 \in \mathbb{R}^n$ noktası$\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun bir μ-*pürüzsüzlük noktası *olarak adlandırılır ve φ fonksiyonu $x^0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında μ-pürüzsüzlük özelliğine sahiptir denir.*

Uyarı: Bundan sonra bir $a > 0$ sabiti için $\mu(r) \geq ar$, $(0 \leq r \leq \rho)$ ve $\mu(r) = \mu(\rho)$, $(\rho \leq r < \infty)$ olduğunu kabul edeceğiz.

Bir fonksiyona ait μ-pürüzsüzlük noktasının basit bir karakterizasyonu yoktur. Fakat klasik anlamda "pürüzsüz" fonksiyonlar sınıfından olan fonksiyon μ-pürüzsüzlük özelliğine sahiptir. Örneğin, f fonksiyonu bir x noktasında Lipschitz α sınıfından ise, yani,

$$|f(x-t) - f(x)| \leq c\,|t|^{\alpha}\,,\, 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.17}$$

o zaman bu fonksiyonun bu x noktasında, $\mu(r) = r^{\alpha}$ olmak üzere, μ-pürüzsüzlük özelliğine sahip olduğunu görebiliriz.

Önteorem 3.21 (Aliev ve Eryiğit (2013))**.** *$\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu bir $x^0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında μ-pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun.Ayrıca, $\Psi(r)$, $(0 \leq r \leq \rho)$ fonksiyonu da $[0, \rho]$ aralığı üzerinde artan, negatif olmayan sürekli diferansiyellenebilir olsun. O zaman,*

$$\begin{aligned} &\int_{|x|\leq\rho} \left|\varphi(x^0 - x) - \varphi(x^0)\right| \Psi(|x|)dx \\ \leq\ & \mathcal{M}_{\mu}(x^0)\left[\rho^n \mu(\rho)\Psi(\rho) + \int_0^{\rho} r^n \mu(r)(-\Psi'(r))dr\right] \end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $g(x) = |\varphi(x^0 - x) - \varphi(x^0)|$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{|x|<\rho} \left|\varphi(x^0 - x) - \varphi(x^0)\right| \Psi(|x|)dx \\ (x &= r\theta, r = |x| \text{ kutupsal koordinatlara geçersek)} \\ &= \int_0^{\rho} r^{n-1}\Psi(r)\left(\int_{|\theta|} g(r\theta)d\sigma(\theta)\right) dr, \end{aligned}$$

olur. Ek olarak $\lambda(r)$ ve $\Omega(r)$ fonksiyonlarını,

$$\lambda(r) = \int_{|\theta|=1} g(r\theta)d\sigma(\theta)$$

ve

$$\Omega(r) = \int_0^r \lambda(t)t^{n-1}dt$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\rho \Psi(r)\lambda(r)r^{n-1}dr = \int_0^\rho \Psi(r)d\Omega(r) \\ &= \Psi(r)\Omega(r)|_0^\rho - \int_0^\rho \Omega(r)\Psi'(r)dr \\ &= \Psi(\rho)\Omega(\rho) + \int_0^\rho \Omega(r)(-\Psi'(r))dr. \end{aligned}$$

(3.16) koşulu altında,

$$\begin{aligned} \Omega(r) &= \int_0^r \lambda(t)t^{n-1}dt = \int_{|x|\le r} g(x)dx \\ &= \int_{|x|<r} \left|\varphi(x^0-x)-\varphi(x^0)\right| dx \\ &\le r^n\mu(r)\mathcal{M}_\mu(x^0). \end{aligned}$$

Böylece,

$$I = \mathcal{M}_\mu(x^0)\left[\rho^n\mu(\rho)\Psi(\rho) + \int_0^\rho r^n\mu(r)(-\Psi'(r))dr\right],$$

ki bu da istediğimiz sonuçtur. □

Önteorem 3.22. *$p(x;\varepsilon)$ Poisson çekirdeği (2.8)'de tanımlandığı gibi olsun, yani*

$$p(x;\varepsilon) = \frac{a_n\varepsilon}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{(n+1)/2}},\ a_n = \pi^{-(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

O zaman öyle bir $c>0$ bulunabilir ki,

$$\int_{|x|<\rho} \left|\varphi(x^0-x)-\varphi(x^0)\right| p(x;\varepsilon)dx \le c\mathcal{M}_\mu(x^0)\left[\varepsilon + \int_0^\infty \mu(\varepsilon t)\frac{dt}{1+t^2}\right], \tag{3.19}$$

sağlanır.

İspat (3.18) ifadesindeki Ψ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım,

$$\Psi(|x|) = p(x;\varepsilon) = a_n\varepsilon(\varepsilon^2+|x|^2)^{-(n+1)/2}.$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} &\int_{|x|\le\rho} \left|\varphi(x^0-x)-\varphi(x^0)\right| p(x;\varepsilon)dx \\ \le\ & \mathcal{M}_\mu(x^0)\left[\rho^n\mu(\rho)\frac{a_n\varepsilon}{(\varepsilon^2+\rho^2)^{(n+1)/2}} + \int_0^\rho r^n\mu(r)\left(\frac{-a_n\varepsilon}{(\varepsilon^2+r^2)^{(n+1)/2}}\right)' dr\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

Basit bir hesaplamayla,

$$\rho^n \mu(\rho) \frac{a_n \varepsilon}{(\varepsilon^2 + \rho^2)^{(n+1)/2}} \leq c_1 \varepsilon, \left(c_1 = a_n \frac{\mu(\rho)}{\rho} \right) \tag{3.21}$$

ve

$$\left(-\frac{a_n \varepsilon}{(\varepsilon^2 + r^2)^{(n+1)/2}} \right)' = c_2 \frac{\varepsilon r}{(\varepsilon^2 + r^2)^{(n+3)/2}}, (c_2 = a_n(n+1)). \tag{3.22}$$

$c = \max\{c_1, c_2\}$ seçerek, (3.21) ve (3.22)'yi (3.20)'de yerine koyalım:

$$\begin{aligned} & \int_{|x| \leq \rho} \left| \varphi(x^0 - x) - \varphi(x^0) \right| p(x; \varepsilon) dx \\ \leq \quad & c \mathcal{M}_\mu(x^0) \left[\varepsilon + \int_0^\rho \frac{\varepsilon r^{n+1}}{(\varepsilon^2 + r^2)^{(n+3)/2}} \mu(r) dr \right] \\ = \quad & c \mathcal{M}_\mu(x^0) \left[\varepsilon + \int_0^{\rho/\varepsilon} \frac{t^{n+1}}{(1 + t^2)^{(n+3)/2}} \mu(\varepsilon t) dt \right] \\ \leq \quad & c \mathcal{M}_\mu(x^0) \left[\varepsilon + \int_0^\infty \frac{\mu(\varepsilon t)}{1 + t^2} dt \right]. \end{aligned}$$

Böylece ispatı bitirmiş olduk. □

Sonuç 3.23. *$\mu(r)$, $(0 \leq r \leq \rho < 1)$ fonksiyonu $[0, \rho]$ aralığında sürekli, $(0, \rho]$ aralığında pozitif ve $\mu(0) = 0$ olsun. Ayrıca, bir $a > 0$ için $\mu(t) > at$, $(0 \leq t \leq \rho)$ ve $\rho \leq t < \infty$ için $\mu(t) = \mu(\rho)$ olsun. Eğer,*

$$\mu(\varepsilon t) \leq \mu(\varepsilon) w(t) \text{ ve } \int_0^\infty \frac{w(t)}{1 + t^2} dt < \infty, (\varepsilon \in (0, \rho), \, t \in (0, \infty)), \tag{3.23}$$

olacak şekilde lokal sınırlı bir $w(t) > 0$ fonksiyonu varsa, o zaman $\varepsilon \in (0, \rho)$ parametresinden bağımsız öyle $A > 0$ değeri vardır ki,

$$\int_{|x| \leq \rho} \left| \varphi(x^0 - x) - \varphi(x^0) \right| p(x; \varepsilon) dx \leq A \mu(\varepsilon), (\forall \varepsilon \in (0, \rho)) \tag{3.24}$$

sağlanır.

İspat (3.23) koşullarını (3.19)'te kullanırsak ve $0 \leq \varepsilon \leq \rho$ için $\mu(\varepsilon) \geq a\varepsilon$ olduğunu hesaba katarak,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq \rho} \left| \varphi(x^0 - x) - \varphi(x^0) \right| p(x; \varepsilon) dx & \leq c \mathcal{M}_\mu(x^0) \left[\varepsilon + \int_0^\infty \frac{w(t)}{1 + t^2} dt \right] \\ & \leq A \mu(\varepsilon), \end{aligned}$$

burada $A > 0$ değeri $\varepsilon > 0$'dan bağımsızdır. □

Örnek 3.24. $0 < \gamma < 1$ *ve*

$$\mu(r) = \begin{cases} r^{\gamma}, & 0 \leq r \leq \rho < 1 \textit{ ise} \\ \rho^{\gamma}, & r \geq \rho \textit{ ise} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda, $w(t) = t^{\gamma}$ *olmak üzere,* $\mu(r)$ *fonksiyonu Sonuç 3.23'in tüm şartlarını sağlar. Bunu görelim:* $0 \leq \varepsilon t \leq \rho$ *olsun,*

$$\begin{aligned} \mu(\varepsilon t) &= \varepsilon^{\gamma} \cdot t^{\gamma}, 0 \leq \varepsilon t \leq \rho < 1 \\ &= \mu(\varepsilon) w(t), \varepsilon \in (0, \rho). \end{aligned}$$

$\varepsilon t \geq \rho$ *olsun,*

$$\mu(\varepsilon t) = \rho^{\gamma} \overset{(\rho \leq \varepsilon t)}{\leq} \varepsilon^{\gamma} t^{\gamma} = \mu(\varepsilon)\mu(t).$$

Geriye sadece $\int_0^{\infty} \frac{w(t)}{1+t^2} dt < \infty$ *olduğunu göstermek kaldı.*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{w(t)}{1+t^2} dt &= \int_0^{\infty} \frac{t^{\gamma}}{1+t^2} dt = \int_0^{1} \frac{t^{\gamma}}{1+t^2} dt + \int_1^{\infty} \frac{t^{\gamma}}{1+t^2} dt \\ &\leq c_1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{2-\gamma}} dt < \infty. \end{aligned}$$

çünkü $2 - \gamma > 1$.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Temel sonuçların formülizasyonu ve ispatları

Bu bölümde, tezimin temel sonucu olan teoremi ifade ve ispat ediyoruz.

Teorem 4.25. *$\mu(r)$, $(0 < r < \infty)$ fonksiyonu Sonuç 3.23'in tüm koşullarını sağlasın, ayrıca $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu $x^0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında μ-pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun. Ek olarak, kesikli hipersingüler integral operatörü D_ε^α (3.4)'de tanımlandığı biçimde olsun ve $l \in \mathbb{N}$ parametresi $l > \alpha + 1$ koşulunu sağlasın, o zaman $F^\alpha\varphi$, $(0 < \alpha < \infty)$ Flett potansiyelleri olmak üzere,*

$$\left|(D_\varepsilon^\alpha F^\alpha \varphi(x^0) - \varphi(x^0)\right| = O(\mu(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0^+. \tag{4.1}$$

İspat (3.6) eşitliğini ve Önteorem 3.19-(a)'yı kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\left|(D_\varepsilon^\alpha F^\alpha \varphi(x^0) - \varphi(x^0)\right| \\
&= \left|\int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)(U_{\varepsilon\eta}\varphi)(x^0)d\eta - \int_0^\infty K_\alpha^{(l)}(\eta)\varphi(x^0)d\eta\right| \\
&\le \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| \left|U_{\varepsilon\eta}\varphi(x^0) - \varphi(x^0)\right| d\eta.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Poisson çekirdeği için $\int_{\mathbb{R}^n} p(y,\eta) = 1$, $(\forall \eta > 0)$ olduğunu kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\left|U_{\varepsilon\eta}\varphi(x^0) - \varphi(x^0)\right| \\
= \ & \left|\int_{\mathbb{R}^n} p(y;\varepsilon\eta)\left(\varphi(x^0 - y) - \varphi(x^0)\right) dy\right| \\
\le \ & \int_{|y|\le\rho} p(y;\varepsilon\eta)\left|\varphi(x^0 - y) - \varphi(x^0)\right| dy + \int_{|y|\ge\rho} p(y;\varepsilon\eta)\left|\varphi(x^0 - y) - \varphi(x^0)\right| dy \\
\equiv \ & i_1 + i_2.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

(3.24)'den $i_1 \le A\mu(\varepsilon)$ ve buradan A değeri ε ve μ parametrelerinden bağımsızdır. Şimdi i_2'yi tahmin edelim: Hölder eşitsizliğinden, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
i_2 \ &\le \ \left|\varphi(x^0)\right| \int_{|y|>\rho} \rho(y;\varepsilon\eta)dy + \|\varphi\|_p \left(\int_{|y|>\rho} (\rho(y;\varepsilon\eta)^{p'} dy\right)^{1/p'} \\
&= \ i_3 + i_4.
\end{aligned}$$

(3.24)'den,

$$\begin{aligned}
i_3 &= \left|\varphi(x^0)\right| \int_{|y|>\rho} \frac{a_n \varepsilon\eta}{((\varepsilon\eta)^2 + |y|^2)^{(n+1)/2}} dy \\
&= c_1 \varepsilon\eta \int_{|y|>\rho} \frac{dy}{((\varepsilon\eta)^2 + |y|^2)^{(n+1)/2}} \\
&\quad \text{(Kutupsal koordinat dönüşümü uygularsak)} \\
&= c_2 \varepsilon\eta \int_{\rho}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{((\varepsilon\eta)^2 + r^2)^{(n+1)/2}} dr \\
&\leq c_2 \varepsilon\eta \int_{\rho}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{n+1}} dr = c_3 \varepsilon\eta,
\end{aligned}$$

burada $c_3 \equiv c_3(\rho, n)$ değeri ve ε ve η değerlerine bağlı değildir.

Benzer adımlarla,

$$\begin{aligned}
i_4 &= \|\varphi\|_p \varepsilon\eta \left(\int_{|y|>\rho} \frac{dy}{((\varepsilon\eta)^2 + |y|^2)^{p' \cdot \frac{(n+1)}{2}}} \right)^{1/p'} \\
&= c_4 \varepsilon\eta \left(\int_{\rho}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{((\varepsilon\eta)^2 + |y|^2)^{p' \cdot \frac{(n+1)}{2}}} dr \right)^{1/p'} \\
&\leq c_4 \varepsilon\eta \left(\int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^{(n+1)p' - n + 1}} \right)^{1/p'} \leq c_5 \varepsilon\eta,
\end{aligned}$$

burada c_5 sabiti ε ve η değerlerine bağlı değildir.

Tüm bu tahminleri bir araya getirirsek,

$$\begin{aligned}
\left|(U_{\varepsilon\eta}\varphi)(x^0) - \varphi(x^0)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} p(y; \varepsilon\eta) \left|\varphi(x^0 - y) - \varphi(x^0)\right| dy \\
&\leq c_6(\mu(\varepsilon\eta) + \varepsilon\eta). \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Böylece, (4.2) ve (4.4)'ü kullanarak

$$\begin{aligned}
\left|(D_\varepsilon^\alpha F^\alpha \varphi(x^0) - \varphi(x^0)\right| &\leq c_7 \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| (\mu(\varepsilon\eta) + \varepsilon\eta) d\eta \\
&\leq c_7 \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| (\mu(\varepsilon) w(\eta) + \varepsilon\eta) d\eta \\
(\mu(\varepsilon) &\geq a\varepsilon, \varepsilon \in (0, \rho) \text{ koşulu kullanarak)} \\
&\leq c_8 \mu(\varepsilon) \int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| (w(\eta) + \varepsilon\eta) d\eta \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Önteorem 3.19-(b) ve $\int_0^\infty \frac{w(\eta)}{1+\eta^2} d\eta < \infty$ koşullarından,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| w(\eta) d\eta &= \int_0^1 \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| w(\eta) d\eta + \int_1^\infty \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| w(\eta) d\eta \\
&\leq c_9 + \int_1^\infty \frac{w(\eta)}{1+\eta^2}(1+\eta^2) \left|K_\alpha^{(l)}(\eta)\right| d\eta \\
(l &< \alpha + 1 \text{ koşulu ve Önteorem 3.19-(c)'den}) \\
&\leq c_9 + c_{10} \int_1^\infty \frac{w(\eta)}{1+\eta^2} d\eta \equiv c_{11} < \infty.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, bu elde ettiğimiz tahminleri (4.5)'te kullanırsak, hedefimiz olan

$$\left|(D_\varepsilon^\alpha F^\alpha \varphi(x^0) - \varphi(x^0)\right| \leq c\mu(\varepsilon), \varepsilon \to 0^+$$

eşitsizliğini elde ederiz. (Buradaki c sabiti ε parametresine bağlı değildir). □

Sonuç 4.26. *$\mu(t) = t^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $t \in [0, \rho)$ ve $x^0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu μ-pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun. O zaman,*

$$\left|(D_\varepsilon^\alpha F^\alpha \varphi(x^0) - \varphi(x^0)\right| = O(\varepsilon^\gamma), \varepsilon \to 0^+.$$

İspat Örnek 3.24'de $\mu(t) = t^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $t \in [0, \rho)$ fonksiyonunun Sonuç 3.23'in tüm koşullarını sağladığını kanıtlamıştık. Teorem 4.25'den ispat biter. □

5. SONUÇLAR

Harmonik Analizde, potansiyel-tipli integral dönüşümler için ters belirleme formüllerini elde edebilmek büyük bir öneme sahiptir.

Bu bağlamda, bu çalışma Sobolev Uzayları ve türevleri gibi pürüzsüz fonksiyonlar uzaylarında çalışan matematikçiler için yardımcı kaynak rolü oynayabilir.

Ayrıca, Aliev vd. (2006) çalışmasında Flett potansiyelleri için sonlu farklar yerine, dalgacık tipli ölçüm kullanarak, ters belirleme formülü bulunmuştur. Benzer çalışmanın, bu ters belirleme formülü için de yapılabileceğini düşünmekteyiz.

6. KAYNAKLAR

Aliev, I.A. and Sezer, S. and Eryiğit, M. 2006. *An integral transform asssociated to the Poisson integral and inversion of Flett potentials*. *Journal of Math. Analysis and Applications*, 321: 691-704.

Aliev, I.A. 2009. *Bi- parametric potentials, relevant funcitons spaces and Wavelet-like transforms. Integral Equations and Operator Theory,* 65: 151-167.

Aliev, I.A. and Eryigit M. 2013. *On a rate of convergence of truncated hypersingular integrals associated to Riesz and Bessel Potentials*. *J. Math. Anal. Appl.*, 406: 352-359.

Aliev, IA. and Çobanoğlu, S. 2014. *The rate of convergence of truncated hypersingular integrals generated by the Poisson and metaharmonic semigroups*. *Integ. Transf. Spec. F.* , 25: 943-954.

Balakrishnan, V. 1960. *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them*. *Pasific J. Math*, 10: 419-437.

Devore, R.A. and Lorentz, G.G. 1993. Constructive Approximation. Berlin, Germany. Springer,Verlag.

Eryigit, M. and Çobanoğlu, S. *On the rate of L_p-convergence of Balakrishnan- Rubin hypersingular integrals associated to Gauss-Weierstrass semigroup. Turk. J. Math. , 41(6): 1376-1384.*

Fisher, M.J. 1971. *Singular Integrals and fractional powers of operators*. *Trans Amer Math Soc*, 161: 307-326.

Flett, T.M. 1971. Tempratures, *Bessel potentials and Lipschitz space*, *Proc. London Math Soc*, 22: 385-451.

Folland, G. B. 1999. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, New York: Wiley.

Kokilashvili, V.M. and Kufner, A. 1989. *Fractional Integrals on Spaces of Homogeneous type. Comment Math Univ Carolinae*, 30: 511-523.

Landkof, N.S. 1972. Foundations of Modern Potential Theory. Translated from Russian by A.P. Doohovskoy, Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarst Band 180. New York, NY, USA.Springer,Verlag.

Lizorkin, P.I. 1970 *Characterization ot the spaces* $L_p^r(\mathbb{R}^n)$ *in terms of difference singular integrals. Mat. Sb. (N.S.)*, (in Russian), 81: 79-91.

Nogin, V.A. 1982. *On inversion of Bessel potentials*. *J. Differential Equations*, 18: 1407-1411.

Rubin, B. 1986. *A method of Characterization an inversion of Bessel and Riesz potentials*. *Sov. Math. Japonicae*, 30: 78-89.

Rubin, B. 1986. *Description an inversion of Bessel potentials by means of hypersingular integrals with weighted differenes*. *Differ. Uravn*, 22: (10) 1805-1818.

Rubin, B. 1987. *Inversion of potentials of* $\mathbb{R}^n$ *with the aid of Gauss-Weierstrass integrals*. *Math. Notes*, 41: 22-27. English translation from Math Zametki 1987. 41: 34-42.

Rubin, B. 1996. Fractional Integrals and potentials. Harlow, UK. Pitman Monographs and Survey in Pure and Applied Mathematics.

Rubin, B. 1998. *Fractional calculus and wavelet transforms in integral geometry*. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 1: 193-219.

Samko, S.G. 1977. *Spaces* $L_{p,r}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *and hypersingular integrals*. *Studia Math.* , 61: 193-230.

Samko, S.G. and Kilbas, A.A. and Marichev O.I. 1993. Fractional integrals and Derivatives. Theory and Applications. London, UK. Gordon and Breach. Sci. Publ.

Samko, S.G. 2002. Hypersingular integrals an their Applications, In: Ser.: Analytical Methods and Special Funcitons. London, UK. Taylor and Francis.

Sezer, S. and Aliev, I.A. 2010. *A new characterization of the Riesz potential spaces with the aid of composite Wavelet transform*. *J. Math. Anal. Appl.* , 372: 549-558.

Sezer, S. and Aliev, I.A. 2011. *On the Gauss Weierstarss summability of multiple trigonometric series at μ-smoothness points*. *Acta Mathematica Sinica. English series*, 27: 741-746.

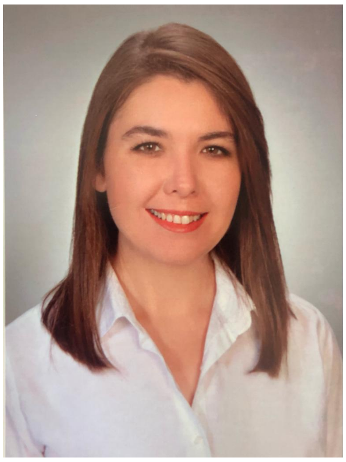
Stein, E. 1961. *The characterization of functions arising as potentials*. *I. Bull. Amet. Math. Soc.* , 67: 102-104.

Stein, E. 1970. Singular integrals and Differantiability Properties of Funcitons. Princeton, NJ, USA, Princeton University.

Stein, E. and Weiss G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton, NJ, USA. Princeton University.

Wheeden, R.L. 1968. *On hypersingular integrals and Lebesque spaces of differentiable funcitons*. *Trans. Amer. Math. Soc.* , 134: 421-435.

ÖZGEÇMİŞ



Çiğdem AKAY

gvncgdm@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans: 2018-2022	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans: 2010-2014	Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara