T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FARKLI KONVEKSLİK SINIFLARI İÇİN CARATHEODORY, RADON, HELLY TEOREMLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Bahadır ŞENSES

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FARKLI KONVEKSLİK SINIFLARI İÇİN CARATHEODORY, RADON, HELLY TEOREMLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Bahadır ŞENSES

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARKLI KONVEKSLİK SINIFLARI İÇİN CARATHEODORY, RADON, HELLY TEOREMLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Bahadır ŞENSES

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 21/01/2022 tarihinde jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Gabil ADİLOV (Danışman)

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ÖZET

FARKLI KONVEKSLİK SINIFLARI İÇİN CARATHEODORY, RADON, HELLY TEOREMLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Bahadır ŞENSES

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Ocak 2022 ; 61 sayfa

Bu tezdeki amacımız, konvekslik sınıflarına ait Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri, bu teoremlerin bazı uygulamaları ve biribirleriyle olan ilişkileri ile ilgili, bir literatür taraması yapmaktır. Ayrıca, bu zamana kadar ortaya konmuş konvekslik sınıflarındaki Carathéodory, Radon ve Helly Teoremlerini incelemek ve aralarındaki bazı ilişkileri tespit ederek ortaya konabilecek yeni konvekslik sınıfları hakkında fikir üretmektir. Bunun yanı sıra, tezde Helly teoreminin bazı uygulamaları verilerek, ispatı ve grafiksel ifadesi gösterilmiştir.

Literatür taraması yapıldığında, konvekslik kavramının soyutlaştırılması ile birçok soyut konveks fonksiyon sınıfının elde edildiği görülmektedir. Ayrıca, bu sınıfların tanımlı olduğu soyut konveks kümeler için konvekslikte temel teoremlerden Carathéodory ve Helly teoremlerinin çalışıldığı görülmüştür. Literatür taramasında, bu alanda yazılmış ve erişimi mümkün olan birçok akademik çalışma, tez ve kitap incelenmiştir.

Altı bölümden oluşan tezde; birinci bölümde konvekslik hakkında ve Carathéodory, Radon ve Helly'nin hayatı ve matematiğe katkıları hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde konu ile ilgili kaynak araştırmasına yer verilmiştir. Üçüncü bölüm olan "Materyal ve Metotlar" bölümünde ise, topolojik temel kavramlar, soyut konvekslik ile ilgili temel kavramlar, soyutlaştırma yöntemleri ve bazı soyut konveks fonksiyonlara değinilmiştir. Dördüncü bölümde farklı konvekslik sınıfları için incelenmiş olan Carathéodory, Radon ve Helly teoremleri, Helly teoreminin bazı uygulamaları verilmiş ve son olarak bu temel teoremler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Beşinci bölümde bu tezde yapılan çalışmaların sonuçları ve diğer tezlerdeki araştırmalar doğrultusunda daha neler yapılabileceği ile ilgili öneriler verilmiştir. Altıncı bölümde de bu tezin içeriğini oluşturan kaynaklar belirtilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Altkafes Konvekslik, $\mathbb{B}$-konvekslik, $\mathbb{B}^{-1}$-konvekslik, Carathéodory, Helly, Konvekslik, Max-Plus Konvekslik, p-Konvekslik, Radon, Soyut Konvekslik

JÜRİ: Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ABSTRACT

CARATHEODORY, RADON, HELLY THEOREMS FOR THE DIFFERENT CONVEXITY CLASSES AND THE SOME APPLICATIONS

Bahadır ŞENSES

MSc. Thesis, Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Gabil ADİLOV

January 2022; 61 pages

In this thesis, our aim is to conduct a literature is to conduct review of the Carathéodory, Radon and Helly theorems of convexity classes, the some applications of these theorems, their relations with each other. It is also to study the Carathéodory, Radon and Helly Theorems in the convexity classes put forward by this time and to produce ideas about new convexity classes that can be put forward by detecting some relations between them. In addition, this thesis was shown some applications proof and graphical expression of the Helly Theorem.

A literature review found that a large number of convexity class was defined by abstracting the concept of convexity, and the study of abstract convex functions related to these concepts proved the theorems of Carathéodory, Radon and Helly, which are the main theorems for many of them. In our study for this purpose, all academic studies and newly printed books made in this field and accessible were examined.

In this thesis, which consists of six parts; In section 1 which is introduction, general information is given about the concept of convexity, Carathéodory, Radon and Helly. In section 2, the source research on the subject is included. 3. in the chapter materials and methods, topological basic concepts, basic concepts related to abstract convexity, abstraction methods and some abstract convex functions are discussed. In section 4, Carathedory, Radon and Helly Theorems were investigated for different convexity classes, some applications of Helly Theorem were proven and finally the association between these basic theorems were investigated.

KEY WORDS: Abstract Convexity, $\mathbb{B}$-convexity, $\mathbb{B}^{-1}$-convexity, Carathéodory, Convexity, Helly, Max-Plus Convexity, p-convexity, Radon, Sublattice Convexity.

JURY: Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Assoc. Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Assoc. Prof. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ÖNSÖZ

2018 yılında başlamış olduğum yüksek lisanstaki öğrencilik hayatımı bu tez ile tamamlamanın mutluluğunu yaşamaktayım. Tez yazım sürecinde, akademik hayat içerisinde ve akademik hayatın haricinde hayatın getirdiği bazı sürprizler neticesinde yaşanan problemler nedeniyle süregelen birtakım aksamalar dahi olsa da, tezimin tamamlanmasında danışman hocamın emeği çoktur. Bu ve bunun gibi birçok nedenden ötürü bu çalışmanın tamamlanması için vermiş olduğu bütün destekler için danışman hocam Prof. Dr. Gabil ADİLOV'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Öğrencilik doğumdan ebediyete kadar uzanan engin bir denizdir. Öğrenmeyi bırakmak, hayat damarlarımızdan birisinin koptuğu manasına gelir. Bu tezin de öğreneceklerinizden birisine vesile olması dileğiyle...

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunmuş olduğum "Farklı Konvekslik Sınıfları İçin Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri ve Bazı Uygulamaları" başlıklı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

21/01/2022

Bahadır ŞENSES

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Negatif Olmayan Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}^n_+$	: $\{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \geq 0, i = 1,2,\dots n\}$
$\mathbb{R}^n_{++}$	: $\{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i > 0, i = 1,2,\dots n\}$
$\langle\ \rangle$	: İç Çarpım
$\Vert . \Vert$	: Öklid Normu
d(x, y)	: Öklid Metriği
(V, $\Vert . \Vert$)	: V Kümesi İçin Bir Normlu Uzay
(V, $\langle .,. \rangle$)	: V Kümesi İçin Bir İç Çarpım Uzayı
V($\mathbb{R}$)	:Vektör Uzayı
dim(V)	: V Vektör Uzayının Boyutu
B(a, r)	: a Noktasının r Yarıçaplı Açık Komşuluğu
$\overline{B(a,r)}$	: a Noktasının r Yarıçaplı Kapalı Komşuluğu
$B^*(a,r)$	: a Noktasının r Yarıçaplı Delinmiş Komşuluğu
$\{x_k\}$	: x_k Dizisi
e_n	: $\left(0,0,\dots,\underset{n.bileşen}{1},\dots,0\right)$
intA	: A Kümesinin İç Noktalar Kümesi
$\overline{A}$	: A Kümesinin Kapanışı
bdA	: A Kümesinin Sınırı
infD	: D Kümesinin İnfimumu
supD	: D Kümesinin Supremumu

L	: Lineer Alt Uzay
H(x)	: Hessian Matrisi
∂	: Kısmi Türev
Σ	: Toplam Sembolü
$\cup$	: Birleşim
$\cap$	: Kesişim
$\vee$	: Koordinatlara Göre Maksimum
$\wedge$	: Koordinatlara Göre Minimum
$\blacksquare$	: İspatın Bittiğini Gösterir
epi(f)	: f Fonksiyonunun Epigrafı
dom(f)	: f Fonksiyonunun Tanım kümesi $\{x: f(x) < \infty\}$
supp(f, H)	: f Fonksiyonunun Destek Kümesi $\{h \in H \mid h \leq f\}$
$k = \overline{1,n}$	: k = 1,2,…,n
conv(A)	: A Kümesinin Konveks Kabuğu
K(A)	: Konveks Kombinasyonlar Kümesi
$\mathrm{Co_H f}$	: f Fonksiyonun H-konveks Kabuğu
$Co^r(A)$	: A Kümesinin r-konveks Kabuğu
$Co^\infty(A)$	: A Kümesinin B-konveks Kabuğu
$B[A]$	: A Sonlu Kümesinin B-konveks Kabuğu
lim sup	: Üst Limit
lim inf	: Alt Limit

Kısaltmalar:

IPH	: Artan Pozitif Homojen
InR	: Artan Radyant
ICR	: Artan Ko-Radyant
ICAR	: Artan ve Işınlar Üzere Konveks

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Matematiğin önemli alanlarından biri olan Konveks Analiz, özellikle son yıllarda yapılan çalışmalar sonucunda hız kazanmış ve yeniliklere açık hale gelmiştir. Konvekslik kavramının Günlük hayatta sıkça karşımıza çıkan uygulama alanları vardır, ayrıca bilimsel hayatta da kayda değer şekilde çalışma alanı bulmuştur ve önemini gittikçe arttıran bir konu haline gelmiştir. Konveks analizin uygulama alanlarına örnek olarak Optimizasyon Teorisi (Bertsekas, 2003), Eşitsizlikler Teorisi (Hardy, 1934), Matematiksel Ekonomi (Tarasov, 2020) verilebilir. Bu alanlarda Konveks Analiz bir çalışma alanı olarak ilgi toplamaktadır.

Bu tezde konvekslik kavramı üzerinde durularak, konvekslik sınıfları için Carathéodory, Radon ve Helly Teoremlerine yer verilmiştir (Carathéodory, 1907, Radon, 1921 ve Helly, 1923). Teorik çalışmalar ve uygulamalarının ürettiği sonuçlar neticesinde, bu üç değerli bilim insanının bilim dünyasına kazandırmış olduğu bu teoremler günümüzde de kullanılabilirliğini devam ettirmektedir.

Bu tezde Klasik konvekslik, Max-Plus (Gaubert ve Meunier, 2010), p-konveks (Bastero, Bernues ve Pena, 1995), Altkafes (Queyranne ve Tardella, 2015), B-konveks (Briec ve Horvath, 2004), B^{-1}-konveks (Adilov ve Yeşilce, 2016) vb. farklı konvekslik sınıfları ele alınacak ve bu sınıflardan bazıları için çalışılmış olan Caratheodory, Radon ve Helly teoremleri bir araya getirilecek aynı zamanda bunlarla ilgili açıklayıcı örneklere yer verilecek ve bununla birlikte uygulamaları araştırılacaktır.

Örneğin;

C kümesi $\mathbb{R}^n$'nin bir alt kümesi ve $x_1, x_2, \dots, x_m \in C$ olsun. $\lambda_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ sağlayan reel sayıları için

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in C$$

oluyorsa C kümesine konveks küme ve x vektörüne de $x_1, x_2, \dots x_m$ noktalarının konveks kombinasyonu denir. Bir başka deyişle C kümesinin konveks küme olması için herhangi iki noktasının konveks kombinasyonunun yine C kümesine ait olması gerekmektedir.

Şimdi ise tezimize konu olan teoremleri literatüre kazandıran, Carathéodory, Radon ve Helly'nin hayatlarına değinelim.

Constantin Carathéodory (1873 - 1950)

1881'den 1891'e kadar değişik okullarda eğitim görmüştür. Belçika'nın en iyi Matematik öğrencisi seçilmiştir. 1891-1896 yılları arasında askeri mühendis olmak için École Militaire de Belgique ve École d'Application okullarına devam etmiştir. 1897 yılında Osmanlı-Yunan Savaşı başlayınca babasının Osmanlı hükümetinin bir görevlisi olması dolayısıyla duygusal karmaşalar yaşamıştır. Britanya koloni servisinde işe girerek 1900 yılına kadar Mısır'ın Asyut kentinde çalışmıştır. 1900'de Berlin Üniversitesi'ni, 1902'de Göttingen Üniversitesi'ni bitirmiştir.

1908 yazında Kuruçeşme'ye gelmiş, burada termodinamik üzerindeki çalışmalarını tamamlayarak aynı yılın Ekim ayında Göttingen Üniversitesi'ne dönmüş ve profesör olmuştur. Sonra tekrar Kuruçeşme'ye gelen Carathéodory'nin bir altı ay daha burada kaldığı bilinmektedir. 1909'da Hannover Üniversitesi'nde, 1910'da Wroclaw Teknoloji Üniversitesi'nde, 1913'te Göttingen Üniversitesi'nde, 1919'da Berlin Üniversitesi'nde çalışmıştır. Elefterios Venizelos'un çağrısına uyarak, işgal yıllarında (1919 - 1922) İzmir'de kurulan İyonya Üniversitesi rektörlüğünü yapmıştır. 1922'de Atina Teknik Üniversitesi'nde, 1924'te Münih Ludwig Maximilian Üniversitesi'nde çalışmıştır. 1938'de emekli olmuştur ancak çalışmalarına hayatını kaybettiği 1950 yılına kadar Bavyera Bilimler Akademisi'nde devam etmiştir.

Caratheodory, Yunanca, Almanca, Türkçe, İtalyanca, Fransızca, İngilizce ve bazı antik dillerde konuşup yazabilmekteydi. Ailesi Yunanistan'ın Türkiye sınırında bulunan Yeni Vize şehrinden olduğundan burada bir Caratheodory aile müzesi kurulmuştur. 2009 yılında Gümülcine'de bir müze daha açılmıştır (Boerner, 1970).

Johann Radon (1887 - 1956)

Avusturyalı Matematikçi Johann Radon, şimdiki Decin Czech Republic olan Tetschen, Bohemia, Avusturya-Macaristan İmparatorluğu'nda doğmuştur. 1910'da Viyana Üniversitesi'nde varyasyon hesabi üzerine doktorasını yapmıştır ve doktor ünvanını almıştır. 1912'den 1919'a kadar Viyana Teknik Üniversitesinde görev almıştır ve burada habilitasyonunu bitirmiştir. Habilitasyon, bazı Asya ve Avrupa ülkelerinde en yüksek dereceli akademik sınav olup doktora derecesinden sonra, bir bilimsel eser daha verilerek kazanılan ve "Privatdozent" veya "Dr. Habil" unvanını eklemeye hak kazanılan bir eğitim sürecidir.

Birçok üniversiteden ordinaryüs profesör ünvanı verilmek üzere davet almıştır; 1919 Hamburg Üniversitesi, 1922 Greifswald Üniversitesi, 1925 Erlangen Üniversitesi. Daha sonra 1928-1945 tarihlerinde Breslau Üniversitesi'nden ordinaryüslük yapmıştır.

1954-1955 yıllarında Viyana Üniversitesi'nde rektörlük, 1939-1947 yıllarında Avusturya Bilimler Akademisi üyeliği, 1952-1956 yıllarında Class of Mathematics'in sekreterliği, 1948-1950 yıllarında ise Mathematical Society'nin başkanlığı görevlerinde bulunmuştur (Burkovics, 1994).

Eduard Helly (1884 - 1943)

Eduard Helly, 1884'te Viyana'da doğmuştur. Viyana Üniversitesi'nde okumuştur. Wirtinger ile Merten'in danışmanlığını yaptığı Fredholm denklemleri ile bağıntılı bitirme tezini yazmıştır. Ardından 1907'de Gettingen'de doktoraya başlamıştır. O zamanlar Gettingen Üniversitesi dünyaca ünlü matematikçiler için ünlü bir isme sahipti ve Helly burada Klein, Hilbert, Runge ve Minkowski gibi dünyaca ünlü matematikçilerden 1907 ve 1908 yıllarında ders almıştır.

Geri döndüğünde akademik çaba göstermeden, yaşamını sürdürmek için farklı bir yol seçmiştir. Gimnazyumda ders vermiş, matematikten çözümlü problemleri olan kılavuz kitapları yazmıştır. Bununla beraber matematikte yepyeni bir alan olan Fonksiyonel Analiz alanı için girişimlerde bulunmuştur. 1912'de Hahn-Banach Teoremi'ni ispatlamıştır, bu ispat Hahn'ın yapmış olduğu aynı ispattan 15 sene önce, Banach'ın da bu teoreme modern bir şekilde biçimlendirmesinden 20 sene önce yapılmıştır.

Helly 1912'de yayımlanmış olan makalesinde bir takım önemli sonuçlara imza atmıştır. Onlardan ilki "Helly'nin Seçim Prensibi"dir. Bu makalesinde olan diğer sonuçlar da sonraki yıllarda Helly'e Matematik dünyasında hak ettiği yüksek makamını kazandırmıştır. Aynı zamanda "Düzgün Sınırlılık Prensibi'ni ilk defa ortaya atan kişi olarak da tarihe geçmiştir.

Eduard Helly, matematik dünyasında Helly Teoremi, Helly Aileleri, Helly Seleksiyon Teoremi, Helly Metriği ve Helly-Bray Teoremi ile tanınmaktadır.

Bu bölümde Caratheodory, Radon ve Helly'nin hayatlarına değindikten sonra, ileriki bölümlerde tezin ana konusu olan farklı konveks kümeler için Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri ve bu teoremler arasındaki bazı ilişkileri, çok sayıda literatür taraması yapılarak, günümüzdeki halini alan biçimleriyle incelenmiş, bir araya getirilmiş ve listelenmiştir (Butzer, 1970).

2. KAYNAK TARAMASI

Konvekslik, Arşimed'in tarafından M.Ö. 250 yılında π sayısını hesaplamasına kadar uzanmaktadır. Ancak matematik dünyasında 19. yy. sonlarında keşfedilmeye başlanmıştır. 1881 yılında ilk kez Hermite tarafından elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanması ile ortaya çıkmıştır.

Birçok matematikçi konveks fonksiyon ve eşitsizlikler teorisi ile ilgili birçok çalışmaya imza atmıştır:

- Inequalities (Hardy, 1952)
- Inequalities (Beckenbach ve Bellman, 1961)
- A Generalization of Radon's Theorem (Tverberg, 1966)
- Analytic Inequalities (Mitrinovic, 1970)
- Some Elementary Properties of Interval Convexities (Calder, 1971)
- Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivative (Mitrinovic, 1991)
- Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications (Dragomir ve Pearce, 1991)
- Convex Functions Partial Orderings and Statistical Applications (Pečarić, Proschan ve Tong, 1992)
- Classical and New Inequalities in Analysis (Mitrinović, 1993)
- The Theorems of Caratheodory and Gluskin for $0 < p < 1$ (Bastero, Bernués ve Pena, 1995)
- $\mathbb{B}$-Convexity (Briec ve Horvath, 2004)
- Mathematical Inequalities (Pachpatte, 2005)
- Convex Functions and Their Applications (Persson, 2006)
- Caratheodory, Helly and the Others in the Max-Plus World (Gaubert ve Meunier, 2009)
- Helly's Theorem and Its Equivalences via Convex Analysis (Robinson, 2014)
- Caratheodory, Helly and Radon Numbers for Sublattice Convexities (Queyranne ve Tardella, 2015)
- Caratheodory's Theorem for B^{-1}-convex Sets (Yeşilce ve Adilov, 2016)

- Radon’s and Helly’s Theorems for B^{-1}-convex Sets (Kemali, Yeşilce ve Adilov, 2021)

Konveks Analiz’in Optimizasyon Teorisi’nde, Eşitsizlikler Teorisi’nde, Ekonomi’de olan uygulamaları bu alana olan ilgiyi her geçen gün daha da arttırmıştır. Bundan dolayı, konveks fonksiyonlar, Optimizasyon Teorisi, Eşitsizlikler Teorisi, Ekonomi alanı gibi birçok alanda önemli bir yere sahiptir ve birçok çalışmada hem teorik olarak hem de bu uygulamaları ile çalışılmaktadır. Bu nedenledir ki, son yıllarda çok sayıda yeni soyut konvekslik kavramları tanımlanmış, bu kavramlarla ilgili fonksiyonlar incelenmiş ve temel teoremler olan Carathéodory, Radon ve Helly teoremleri ispatlanmıştır. Bu çalışmada klasik konvekslikte ve Max-Plus, p-konveks, Altkafes, $\mathbb{B}$-konveks, $\mathbb{B}^{-1}$-konveks vb. soyut konveksliklerle ilgili Caratheodory, Radon ve Helly Teoremleri araştırılıp ele alınmış, bazıları için açıklayıcı örnekler verilmiş ve bazı uygulamaları bulunmuştur. Bu alanda yapılmış bazı çalışmalar;

- Klasik konvekslik için Carathéodory Teoremi 1907 yılında, Radon Teoremi 1921 yılında, Helly Teoremi 1923 yılında yayınlanmıştır.

- $\mathbb{B}$-konvekslik için Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri 2004 yılında W. Briec ve C. D. Horwath tarafından yayınlanan makalede (s.103-127) ortaya konulmuştur.

- $\mathbb{B}^{-1}$-konvekslik için Carathéodory Teoremi’ne 2016 yılında G. Adilov ve İ. Yeşilce tarafından yayınlanan makalede (s. 444-447) yer verilmiştir.

- $\mathbb{B}^{-1}$-konvekslik için Radon ve Helly Teoremlerine 2021 yılında G. Adilov, S. Kemali ve İ. Yeşilce tarafından yayınlanan makalede yer verilmiştir.

- Max-Plus konvekslikte Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri ilk kez 2008 yılında S. Gaubert ve F. Meunier tarafından yayınlanan makalede (s. 648-662) ortaya konulmuştur.

- p-konvekslik için Carathéodory Teoremine ilk kez 1995 yılında J. Bastero, J. Bernués ve A. Peña tarafından yayınlanan makalede (s.141-144) yer verilmiştir.

- Helly Teoremi’nin Bazı Uygulamaları 2002’de Yusubov ve Fatullayev tarafından gösterilmiştir.

- Altkafes konvekslik için Carathéodory, Radon ve Helly Sayıları 2015 yılında M. Queyranne ve F. Tardella tarafından yayınlanmıştır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Topolojik Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir:

$\forall\, x, y, z \in X$ için

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
ii. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri);
iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Üçgen eşitsizliği)

Tanım 3.1.2. V boş olmayan bir küme, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olsun. Toplama işlemi olarak adlandırılan,

$$T: V \times V \rightarrow V, T(x, y) = x + y$$

fonksiyonu ve skalerle çarpma işlemi olarak adlandırılan,

$$S: \mathbb{R} \times V \rightarrow V, S(\alpha, x) = \alpha x$$

fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V kümesine $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı veya lineer uzay denir ve V($\mathbb{R}$) ile gösterilir:

I) Her $x, y, z \in V$ için,

i. $x + y \in V$ (Kapalılık);
ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Birleşme);
iii. $x + y = y + x$ (Değişme);
iv. $x + 0 = x$ (Birim elemanın varlığı);
v. $x + (-x) = 0$ (Ters elemanın varlığı).

II) Her α, β ∈ $\mathbb{R}$ ve her x, y ∈ V için,

i. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

ii. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

iii. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

iv. $1x = x$.

$V(\mathbb{R})$ vektör uzayında V kümesinin elemanlarına vektör, $\mathbb{R}$ kümesinin elemanlarına skaler denir.

Tanım 3.1.3. V bir lineer uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna V üzerinde bir norm ve $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir:

$\forall\, x, y \in V$ ve $\lambda \in R$ için

i. $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (Pozitif homojenlik),

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği).

Her normlu uzayda bu normdan üretilen bir metrik tanımlanabilir.

Teorem 3.1.1. $(V, \|\cdot\|)$, V kümesi için bir normlu uzay olsun. $d: V \times V \to \mathbb{R}, d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlı fonksiyon V üzerinde bir metriktir.

Tanım 3.1.4. V bir vektör uzayı olsun. $\langle \cdot,\cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, bu fonksiyona V üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu, $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ ikilisine bir iç çarpım uzayı denir:

$\forall\, x, y \in V$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

i. $\langle x, x \rangle \geq 0 ve \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

iii. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;

iv. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

Teorem 3.1.2. $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ şeklinde tanımlı fonksiyon V üzerinde bir normdur.

Reel sayıların bütün sıralı n-lilerinin kümesi $\mathbb{R}^n$ ile gösterilir. Yani

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R},\}$$

burada $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ elemanına $\mathbb{R}^n$'nin noktası, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ sayılarına da x'in koordinatları denir.

Tanım 3.1.5. $\mathbb{R}^n$'de i-inci koordinatı 1, diğer koordinatları 0 olan vektörlere eksenlerin birim vektörü denir ve e_i ile gösterilir:

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0);\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0); \cdots; e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1).$$

Teorem 3.1.3. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı üzerinde tanımlı fonksiyon, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur.

Teorem 3.1.2'ye göre her iç çarpımdan bir norm üretilebilir.

$$\langle \cdot,\cdot \rangle: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

şeklinde tanımlı iç çarpımın ürettiği norm

$$\|.\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \|\mathrm{x}\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2$$

şeklindedir. Dolayısıyla ($\mathbb{R}^n$, ‖·‖) ikilisi bir normlu uzaydır.

Teorem 3.1.1'e göre her normdan bir metrik üretilebilir. Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.3'e göre normun ürettiği metrik

$$d: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

şeklindedir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}^n, d)$ ikilisi bir metrik uzaydır.

Tanım 3.1.6. $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda x, y ∈ $\mathbb{R}^n$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|cos\theta$$

eşitliği doğrudur.

Tanım 3.1.7. $\mathbb{R}^n$ iç çarım uzayı ve x, y ∈ $\mathbb{R}^n$ iki vektör olmak üzere,

$$|x. y| \leq \|x\|\|y\|$$

eşitsizliğine Cauchy – Schwarz Eşitsizliği denir.

Tanım 3.1.8. V, ℝ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve

$$U = v_1, v_2, \dots, v_n$$

kümesi V'nin boş olmayan sonlu bir altkümesi olsun. ℝ cisminden herhangi $c_1, c_2, \dots, c_n$ elemanları alınarak elde edilen

$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

vektörüne $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörünün lineer kombinasyonu denir.

Tanım 3.1.9. $U = v_1, v_2, \dots, v_n$ boş olmayan bir vektörler kümesi ve $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ olsun.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$$

denklemin

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

ile tanımlanan en az bir çözümü vardır. Tek çözüm bu sıfır çözümü ise vektörler lineer bağımsızdır denir. En az bir $c_i \neq 0$ olacak şekilde çözüm var ise vektörler lineer bağımlıdır denir.

Tanım 3.1.10. V bir $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $U \subset V$ olsun. Bu durumda U kümesi Tanım 3.1.2'de verilen vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı oluyorsa U'ya V'nin bir alt uzayı denir.

Tanım 3.1.11. U, V vektör uzayının hem üreteci, hem de lineer bağımsız bir alt kümesi ise U'ya V'nin bir tabanı veya bazı denir.

$\mathbb{R}^n$'nin standart tabanları, e_n eksenlerin birim vektörleridir.

Tanım 3.1.12. V bir vektör uzayı ve U bu vektör uzayının bazı olsun. U kümesinin eleman sayısına V'nin boyutu denir ve $dim(V)$ile gösterilir.

Tanım 3.1.13. V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $\forall x, y \in V için \langle x, y \rangle = 0$ ise bu iki vektör ortagonaldır denir.

Tanım 3.1.14. Herhangi bir $a \in \mathbb{R}^n$ noktasının r > 0 yarıçaplı komşulukları aşağıdaki gibi tanımlanır:

i) $B(a, r) \coloneqq x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \| < r$ (açık komşuluk),

ii) $\overline{B(a, r)} \coloneqq x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \| \leqslant r$ (kapalı komşuluk)

iii) $B^*(a, r) \coloneqq x \in \mathbb{R}^n : 0 < \| x - a \| < r = B(a, r)$ (delinmiş komşuluk).

Tanım 3.1.15. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $a \in A$ olmak üzere, eğer $\exists \varepsilon > 0$ öyle ki $B(a, \varepsilon) \subset A$ gerçekleniyor ise a noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. A kümesinin tüm iç noktalarının kümesi $intA$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.16. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer A kümesinin her noktası A kümesinin bir iç noktası ise A kümesine $\mathbb{R}^n$ uzayında bir açık küme denir.

Tanım 3.1.17. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer $\mathbb{R}^n \setminus A$ kümesi bir açık küme ise A kümesine kapalı küme denir.

Tanım 3.1.18. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere bir x_k dizisi ve bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası verilsin. Eğer

$$\lim_{k \to \infty} \| x_k - x_0 \| = 0$$

ise x_k dizisi x_0 noktasına yakınsar denir. x_0 noktasına da x_k dizisinin limiti denir. Bu durum

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$$

yazılarak ifade edilir.

Tanım 3.1.19. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $z \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer $\forall \varepsilon > 0$için$A \cap B(z, \varepsilon) \neq \emptyset$ ise z noktası A kümesinin bir kapanış noktasıdır denir. A kümesinin tüm kapanış noktalarının kümesi $\bar{A}$ ile gösterilir ve A kümesinin kapanışı ya da kapanış kümesi olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.20. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $s \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $A \cap B(s, \varepsilon) \neq \emptyset$ ve $(\mathbb{R}^n \backslash A) \cap B(s, \varepsilon) \neq \emptyset$ ise, s noktasına A kümesinin bir sınır noktası denir. A kümesinin tüm sınır noktalarının kümesine A'nın sınırı denir ve bdA ile gösterilir.

Tanım 3.1.21. $\{x_k\}$, $\mathbb{R}^n$'de bir dizi olmak üzere, eğer $\exists M > 0$ öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\| \leqslant M$ ise x_k dizisine bir sınırlı dizi denir.

Tanım 3.1.22. x_k, $\mathbb{R}^n$'de bir dizi ve k_1 kesin artan bir doğal sayı dizisi olmak üzere x_{k_1} dizisine x_k dizisinin bir alt dizisi denir.

Teorem 3.1.4. Her sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Tanım 3.1.23. Eğer A içerisindeki her dizinin A içerisindeki bir noktaya yakınsayan bir alt dizisi var ise A kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında kompakttır denir.

Teorem 3.1.5. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere A kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul kapalı ve sınırlı olmasıdır.

Tanım 3.1.24. $D \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\exists m \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\forall x \in D$ için $m \leqslant x$ ise m sayısı D kümesi için bir alt sınırdır ve D kümesine de alttan sınırlı küme denir. Benzer biçimde $\exists M \in \mathbb{R}$ öyle ki $\forall x \in D$ için $x \leqslant M$ ise M sayısı D kümesi için bir üst sınırdır ve D kümesine de üstten sınırlı küme denir.

Tanım 3.1.25. $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ kümesi alttan sınırlı olsun. D kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne D kümesinin infimumu denir ve $infD$ ile gösterilir. $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ kümesi üstten sınırlı olsun. D kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne D kümesinin supremumu denir ve $supD$ ile gösterilir.

Eğer D kümesi alttan sınırlı değil ise $infD = -\infty$, üstten sınırlı değil ise $supD = +\infty$ yazılır. Ayrıca $inf\emptyset = +\infty$ ve $sup\emptyset = -\infty$ kabul edilir.

Tanım 3.1.26. $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olsun.

Eğer $\exists\ \delta > 0$ var öyle ki $\forall\ x \in B(x_0, \delta) \cap\ A$ için $f(x_0) \leq f(x)$ şartı sağlanıyor ise f, A üzerinde x_0 noktasında yerel minimuma sahiptir denir. Eğer $\forall\ x \in A$ için $f(x_0) \leq f(x)$ geçerli ise f, A üzerinde x_0 noktasında mutlak minimuma sahiptir denir.

Eğer $\exists\ \delta > 0$ var öyle ki $\forall\ x \in B(x_0, \delta) \cap A$ için $f(x_0) \geq f(x)$ şartı sağlanıyor ise f, A üzerinde x_0 noktasında yerel maksimuma sahiptir denir. Eğer $\forall$ x $\in$ A için $f(x_0) \geq f(x)$ geçerli ise f, A üzerinde x_0 noktasında mutlak maksimuma sahiptir denir.

Teorem 3.1.6. $K \neq \emptyset$ kompakt bir küme ve $f: K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu kompakt K kümesi üzerinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerine ulaşır, yani

$$\exists\, x_0, y_0 \in K \text{ öyle ki } f(x_0) = min f(x): x \in K \text{ve} f(y_0) = max f(x): x \in K$$

olur.

Teorem 3.1.7. $f: C \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu açık konveks bir C kümesi üzerinde reel değerli ve ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun C üzerinde konveks olması için gerek ve yeter koşul Hessian matris denilen

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right), i, j = 1,2, \dots, n$$

şeklinde tanımlanmış simetrik matrisin $\forall x \in C$ için pozitif yarı-tanımlı olmasıdır.

Eğer $H(x)$ matrisi $\forall x \in C$ için pozitif tanımlı ise o zaman f kesin konveks fonksiyondur.

Tanım 3.1.27. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri için $A \cap \bar{B} = \emptyset = B \cap \bar{A}$ doğru ise A ve B kümeleri ayrılmıştır denir. Eğer bir küme boştan farklı iki ayrılmış kümenin birleşimi olarak ifade edilemiyorsa o kümeye bağlantılı küme denir.

3.2. Klasik Konvekslik ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 3.2.1 $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$$

toplamına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının lineer kombinasyonu denir.

Tanım 3.2.2 $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ve $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ olmak üzere

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$$

toplamına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının afin kombinasyonu denir.

Tanım 3.2.3 $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ve $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0$ olmak üzere

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$$

toplamına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının konveks kombinasyonu denir.

Tanım 3.2.4 $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m > 0$ olmak üzere

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$$

toplamına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının konik kombinasyonu denir.

Tanım 3.2.5. $L \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere

i) $x_1, x_2 \in L$ için $x_1 + x_2 \in L$
ii) $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda x \in L$

sağlanıyorsa L kümesine bir lineer alt uzay denir.

Lemma 3.2.1. $L \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin bir lineer alt uzay olması için gerek ve yeter koşul L kümesinin, içerdiği noktaların lineer kombinasyonlarını da içermesidir.

Tanım 3.2.6. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall\, x, y \in M$ için $(1-\lambda)x + \lambda y \in M$ sağlanıyor ise M kümesine $\mathbb{R}^n$'de bir afin küme denir.

Not: $x, y \in R^n$ olmak üzere $\{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)x + \lambda y, \lambda \in \mathbb{R}\}$ kümesi x ve y noktalarından geçen doğru olduğundan afin kümeyi böyle de tanımlayabiliriz:

Herhangi iki noktasından geçen doğruyu da içeren kümelere afin küme denir.

Lemma 3.2.2. $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin afin küme olabilmesi için gerek ve yeter koşul, M kümesinin içerdiği noktaların afin kombinasyonlarını da içermesidir. Yani, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ eşitliğini sağlayan $\forall\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ve $x_1, x_2, \dots, x_m \in M$ için $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in M$ olmasıdır.

Tanım 3.2.7. $C \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer $\forall\, x, y \in C, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ için $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ ise, diğer bir deyişle C kümesindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası C kümesi içerisinde kalıyor ise C kümesine bir konveks küme denir.

Lemma 3.2.3. $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks küme olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall\, x_1, x_2, \dots, x_m \in C$, $\forall\, x_i \geq 0$ ve için $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in C$ olmasıdır, yani, C kümesinden alınan sonlu sayıda noktanın konveks kombinasyonlarının da C kümesinde olmasıdır.

Tanım 3.2.8. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ve $x \in K$ için $\lambda x \in K$ ise yani pozitif skaler çarpım işlemine göre kapalı ise K kümesine bir koni denir. Eğer K kümesi aynı zamanda konveks bir küme ise konveks koni olur.

Lemma 3.2.4. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks koni olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ve $x_1, x_2 \in K$ için $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K$ olmasıdır.

Lemma 3.2.5. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi konveks koni belirtmesi için gerek ve yeter koşul $\forall\, x_1, x_2, \dots, x_m \in K$ ve $\forall\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_+$ için $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in K$ olmasıdır.

Yani K kümesinin, K kümesine ait olan noktalarının konik kombinasyonlarını da içermesidir.

Konvekslik özelliğini koruyan bazı önemli işlemler aşağıdakilerdir.

Lemma 3.2.6. I herhangi bir indis kümesi olmak üzere $\forall\, \mathrm{i} \in \mathrm{I}$ için $\mathrm{C_i} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ kümeleri konveks ise $\bigcap_{i \in I} C_i$ kesişim kümesi de konvekstir.

Lemma 3.2.7. $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks ise aşağıdaki toplam kümesi de konvekstir,

$$C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 :\ x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\}.$$

Lemma 3.2.8. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $C \subseteq \mathbb{R}^n$ bir konveks küme ise aşağıdaki skaler kat kümesi de konvekstir,

$$\alpha C = \{x: x = \alpha x_1, x_1 \in C\}.$$

Lemma 3.2.9. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks ise $\bar{C}$ kapanış kümesi de konvekstir.

Lemma 3.2.10. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks ise $intC$ iç kümesi de konvekstir.

Lemma 3.2.11. $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineer dönüşüm ve $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olsun. Bu durumda

$$T(C) = y: y = T(x), x \in C$$

görüntü kümesi $\mathbb{R}^m$'de konvekstir.

Tanım 3.2.9. Bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine, yani

$$\bigcap \{B \subset \mathbb{R}^n |\ B \text{ konvekstir ve } A \subset B\}$$

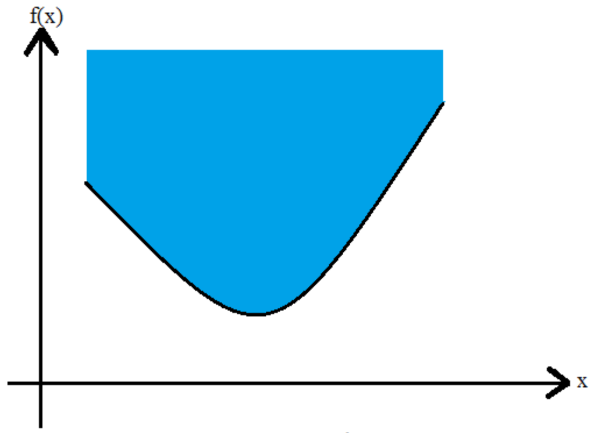
kesişim kümesine A kümesinin konveks örtüsü ya da konveks zarfı denir ve bu küme $conv(A)$ ile gösterilir.

Lemma 3.2.12. Bir A kümesini kapsayan en küçük konveks küme, A kümesinin konveks örtüsüdür. Daima $A \subseteq conv(A)$ geçerlidir. A konveks bir küme ise $conv(A) = A$ doğrudur.

Lemma 3.2.13. $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarının kümesi $K(A)$ ile gösterilmek üzere, $A \subset \mathbb{R}^n$ için $conv(A) = K(A)$ geçerlidir.

Teorem 3.2.1. (Ayırma Teoremi) $M, N \subset \mathbb{R}^n$, $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall\, m \in M, \forall\, n \in N$, için $\langle a, m\rangle \leq b \leq \langle a, n\rangle$ eşitsizliği sağlanıyor ise, $H = x|\langle a, x\rangle = b$ hiperdüzlemi M ve N kümelerini ayırır denir.

Tanım 3.2.10. $\overline{\mathbb{R}}$=$\mathbb{R}\cup \pm\infty = [-\infty, +\infty]$ genişletilmiş reel sayılar kümesi olmak üzere $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için $dom(f) = x \in \mathbb{R}^n: f(x) < +\infty$ kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, $epi(f) = (x, \alpha) \in \mathbb{R}^n x\mathbb{R}: f(x) \leqslant \alpha$ kümesine f fonksiyonunun grafiküstü (ya da f fonksiyonunun epigrafı) denir.



Şekil 3.2.10. Konveks Bir Fonksiyon İçin Epigraf

Tanım 3.2.11. Grafiküstü kümesi konveks olan fonksiyonlara konveks fonksiyon denir. Yani, bir $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için $epi(f)$ kümesi $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında konveks ise f fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ uzayında konvekstir denir.

Tanım 3.2.12. Eğer $-f$ fonksiyonu konveks ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

Tanım 3.2.13. Eğer $x_1 \neq x_2$ ve $0 < \lambda < 1$ için

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

ise f fonksiyonu kesin konvekstir denir.

Lemma 3.2.14. Her $i \in I$ için f_i fonksiyonları konveks ise $f(x) = sup_{i\in I} f_i(x)$ şeklinde tanımlanan konveks fonksiyonların supremum fonksiyonu da konvekstir.

Lemma 3.2.15. Her $i \in 1,2, \dots, m$ için f_i fonksiyonları konveks ve $\alpha_i \geqslant 0$ olmak üzere

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_m f_m(x)$$

fonksiyonu da konvekstir.

Lemma 3.2.16. f konveks ise $dom(f)$ de konveks kümedir.

Teorem 3.2.2. Jensen Eşitsizliği f konveks fonksiyon olmak üzere $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ için,

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots \lambda_m f(x_m)$$

eşitsizliği sağlanır. (Rockafellar 1970)

Lemma 3.2.17. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $a, b \in I$, $x \in (a, b)$ ve $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3. Soyut Konvekslik ile İlgili Temel Kavramlar

3.3.1. Soyutlaştırma Yöntemleri

Tanım 3.3.1.1. H, X kümesi üzerinde tanımlanmış olan sonlu fonksiyonlara ait bir fonksiyon kümesi ve $f: X \to \mathbb{R} \cup \mp\infty$ olsun. Eğer, H'nin $f(x) = sup\{h(x)|h \in U, \forall\, x\ \in\ X\}$, olacak şekilde bir U alt kümesi bulunursa, f fonksiyonu H'ye göre soyut konvekstir ya da H-konvekstir denir. Burada H fonksiyonlar sınıfına elemanter fonksiyonlar ailesi denir. $H = \emptyset$ olması durumunda $f(x) = -\infty$ olarak kabul edilecektir (Rockafellar 1970).

Tanım 3.3.1.2. $f: X \to \mathbb{R} \cup \mp\infty$ fonksiyonlarının sınıfı Y olmak üzere $H \subset Y$ olsun. Eğer, $f \in Y$ fonksiyonu H-konveks ise, H kümesine Y'nin süpremal üreteç sınıfı denir (Rockafellar 1970).

Teorem 3.3.1.1. f fonksiyonunun H-konveks olması için gerek ve yeter koşul bu fonksiyonun $\forall\, x \in X$ için $f(x) sup = h(x)|h \in H, h \leqslant f$ biçiminde gösterilebilir olmasıdır (Rockafellar 1970).

Tanım 3.3.1.3. $f: X \to \mathbb{R} \cup \mp\infty$ olsun. $supp(f, H) = h \in H|h \leqslant f$kümesine, f fonksiyonunun destek kümesi denir. Burada H, elemanter fonksiyonların kümesini gösterir (Rockafellar 1970).

Tanım 3.3.1.4. $f: X \to \mathbb{R} \cup \mp\infty$ olsun. $\forall\, x\ \in\ X$ için $Co_H f(x) sup = h(x)|h \in supp(f, H)$ kümesine, f'nin H-konveks kabuğu denir (Rockafellar 1970).

Teorem 3.3.1.2. $f: X \to \mathbb{R} \cup \mp\infty$ olsun. $\forall\, x\ \in\ X$ için $Co_H f(x) = sup h(x)|h \in supp(f, H)$ f fonksiyonunun H-konveks olması için gerekli ve yeterli koşul $f = Co_H f$ olmasıdır (Rockafellar 1970).

Tanım 3.3.1.5. Topolojik Soyut Konvekslik X bir vektör uzay, $C \subset X$ olsun. $\forall m \geqslant 2$ tam sayısı için, $V_m \subset \mathbb{R}^m$ kümesi alalım. Bir ϕ_m:C^mx$V_m \to C$ fonksiyonlar ailesi verilsin. Eğer, $U \subset C$ için, $(x_1, x_2 \ldots, x_m) \in U, (\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots, \alpha_m) \in V_m$ ise $\phi_m(x_1,\ x_2, \ldots, x_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in U,\ m = 2, 3, \ldots$ şeklinde verilen U kümesi ϕ_m fonksiyonlar ailesine göre soyut konvekstir denir.

Tanım 3.3.1.6. Fonksiyonel Soyut Konvekslik X bir vektör uzay, $C \subset X$ ve L'de ℓ:C$\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer $U \subset C$ olmak üzere, $\forall x \notin U$ noktası L'den bir fonksiyon ile U kümesinden ayrılabilir ise, yani öyle bir $\ell \in L$ vardır ki

$$\ell(x) > \sup_{u \in U} \ell(u)$$

ise, U kümesine L'ye göre soyut konveks küme denir.

3.3.2. Soyut Konveks Kümeler

3.3.2.1. Homeomorfizm (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) topolojik uzaylar ve $\varphi: X \to Y$ birebir fonksiyon olsun. Eğer φ ve φ^{-1} sürekli ise f'ye X'den Y'ye bir homeomorfizm denir.32

$r \in \mathbb{Z}$ için, $\varphi_r(x) \to x^{2r+1}$ eşleşmesi $K = \mathbb{R} \backslash \{0\}$'dan kendisine bir homeomorfizmdir;

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \phi_r(x) = \big(\varphi_r(x_1), \varphi_r(x_2), \dots, \varphi_r(x_n)\big),$$

K^n'den kendisine homeomorfizmdir.

Sonlu boş olmayan bir $A = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}\} \subset K^n$ kümesi için $Co^r(A)$ ile gösterilmiş olan A'nın ϕ_r-konveks örtüsü

$$Co^r(A) = \left\{\phi_r^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} t_i \phi_r\big(x^{(i)}\big)\right) :\ t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} t_i = 1\right\}$$

biçiminde verilir.

$\bigvee_{i=1}^{m} x^{(i)}$ ile, $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$'nin koordinatlarına göre maksimumu gösterilir, yani:

$$\bigvee_{i=1}^{m} x^{(i)} = \left(max\{x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(m)}\}, \dots, max\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)}\}\right),$$

$\bigwedge_{i=1}^{m} x^{(i)}$ ile, $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$'nin koordinatlarına göre minimumu gösterilir, yani:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} x^{(i)} = \left(min(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(m)}), \dots, min(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)})\right),$$

$x_j^{(i)}, x^{(i)}$ noktasının j. koordinatını gösterir.

3.3.2.2. $\mathbb{B}$-politopları A'nın sonlu olduğu durumda, $\big(Co^r(A)\big)_{r \in \mathbb{N}}$ kümelerinin Kuratowski-Painleve anlamdaki üst limiti $Co^\infty(A)$ ile gösterilecektir. $\mathbb{R}^n$'nin sonlu alt kümeleri için $Co^\infty(A)$, B-politop olarak isimlendirilir (Briec ve Horvath, 2004).

3.3.2.3. $\mathbb{B}$-konvekslik Tüm sonlu $A \subset L$ alt kümeleri için $Co^\infty(A)$, L'nin alt kümesi ise L, B-konvekstir denir (Briec ve Horvath, 2004).

Teorem 3.3.2.1. Tüm boş olmayan $A \subset \mathbb{R}_+^n$ sonlu altkümeleri için

$$Co^\infty(A) = \lim_{r \to \infty} Co^r(A) = \left\{\bigvee_{x \in A} t_x x : t_x \in [0,1], max_{x \in A}\{t_x\} = 1\right\}$$

kümesi vardır (Briec ve Horvath, 2004).

Lemma 3.3.2.1.

(a) Boş küme, $\mathbb{R}^n$ ve tüm tek elemanlı kümeler $\mathbb{B}$-konvekstir.

(b) Eğer $L_\lambda: \lambda \in \Lambda$, $\mathbb{B}$-konveks kümelerin keyfi bir ailesi ise, $\cap_\lambda L_\lambda$ kesişimleri de $\mathbb{B}$-konvekstir.

(c) Eğer $L_\lambda: \lambda \in \Lambda$ $\mathbb{B}$-konveks kümelerin keyfi bir ailesi ve $\forall\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ öyle ki $L_{\lambda_1} \cup L_{\lambda_2} \cup L_{\lambda_3}$ ise o zaman $\cup_\lambda L_\lambda$ $\mathbb{B}$-konvekstir (Briec ve Horvath, 2004).

3.3.2.4. $\mathbb{B}^{-1}$-politopları A'nın sonlu olduğu durumda, $\left(Co^r(A)\right)_{r \in Z^-}$ kümelerinin Kuratowski-Painleve anlamdaki üst limiti, $Co^{-\infty}(A)$ ile gösterilecektir. K^n'nin sonlu alt kümeleri için $Co^{-\infty}(A)$, $\mathbb{B}^{-1}$-politop olarak isimlendirilir (Adilov, Kemali ve Yeşilce, 2021).

3.3.2.5. $\mathbb{B}^{-1}$-konvekslik Tüm sonlu $A \subset L$ altkümeleri için $\mathbb{B}^{-1}$-politop $Co^{-\infty}(A)$ kümesi, L'nin alt kümesi ise L, $\mathbb{B}^{-1}$-konvekstir denir.

Teorem 3.3.2.2. Tüm boş olmayan sonlu $A = x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)} \subset \mathbb{R}^n_{++}$ alt kümeleri için

$$Co^{-\infty}(A) = \lim_{r \to -\infty} Co^r(A) = \left\{ \bigwedge_{i=1}^{m} t_i x^{(i)} \ :\ t_i \geq 1,\ \min_{1 \leq i \leq m} t_i = 1 \right\}$$

kümesi vardır (Adilov, Kemali ve Yeşilce, 2021).

Teorem 3.3.2.3. K'nin bir $A \subset U$ altkümesi $\mathbb{B}^{-1}$-konveks olması için gerek ve yeter koşul tüm $x^{(1)}, x^{(2)} \in U$ ler ve tüm $\lambda \in [1, \infty)$ ları için $\lambda x^{(1)} \wedge \lambda x^{(2)} \in U$ vardır.

3.3.2.6. $\mathbb{B}^{-1}$-konveks Gövde Bir $S \subset K^n$ dizisi verildiğinde, S içeren K^n'nin tüm $\mathbb{B}^{-1}$-konveks altkümelerinin kesişimi, S'nin $\mathbb{B}^{-1}$-konveks gövdesi olarak adlandırılır ve $\mathbb{B}^{-1}[S]$ile gösterilir.

3.3.2.7. *p*-konvekslik $0 < p < 1$ olsun. $\forall\ x, y \in A$, $\lambda, \mu \geq 0$ öyle ki $\lambda^p + \mu^p = 1$ olmak üzere

$$\lambda x + \mu y \in A$$

ise A kümesi p-konveks kümedir denir (Bastero, Bernués ve Peña, 1995).

3.3.2.7. Artan Radyant (InR) Küme $Q \subset \mathbb{R}^n_+$ bir konik küme ve $U \subset Q$ olsun. Her $x \in U, 0 < \lambda \leq 1$ için $\lambda x \in U$ oluyorsa U kümesi Q'nun radyant alt kümesidir denir (Rubinov 2000).

3.3.2.8. Ko-Radyant Alt Küme $Q \subset \mathbb{R}^n_+$ kapalı koni, V boş kümeden farklı ve $V \subset Q$ olsun. Eğer $x \in V, \lambda \geq 1$ için $\lambda x \in V$ ise V kümesi Q'nun ko-radyant alt kümesidir denir (Rubinov 2000).

3.3.3. Soyut Konveks Fonksiyonlar

3.3.3.1. Quasi Konveks Fonksiyonlar $f: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve boştan farklı konveks küme olsun. $\forall\, x, y \in\ S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

doğru ise f fonksiyona quasi-konveks fonksiyon, eğer

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği doğru ise f fonksiyona kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Benzer şekilde

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği doğru ise f fonksiyona quasi-konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği doğru ise f fonksiyona kesin quasi-konkav fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce 1998).

3.3.3.2. Godunova-Levin Fonksiyonları

$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall\, x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için,

$$f(\lambda x + (1-\lambda\,)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyonu denir (Godunova 1985).

3.3.3.3. Jensen-Quasi Konveks Fonksiyon $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\, x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna Jensen-Quasi konveks veya kısaca J-Quasi konveks fonksiyon denir (Jensen 1905, Dragomir ve Pearce 2000).

3.3.3.4. Wright-Quasi Konveks Fonksiyonlar $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall\, x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[f(\lambda x + (1-\lambda)y) + f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big)\right] \leq max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği, ya da, denk olarak, her $x, y + \delta \in I$ olmak üzere $x < y$ ve $\delta > 0$ için;

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(\delta)] \leq max\{f(x), f(y + \delta)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu Wright-Quasi konvekstir veya kısaca W-Quasi konvekstir denir (Wright 1954, Dragomir, Pearce 1998).

3.3.3.5. P-fonksiyonlar $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $p: I \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\forall\, x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq p(x) + p(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu fonksiyona P-tipi bir fonksiyon (ya da kısaca, P-fonksiyon) denir (Singer 1997).

3.3.3.6. Multiplikativ Konveks Fonksiyonlar $I, J \subset (0, \infty)$ olmak üzere, $f: I \to J$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(x^{1-\lambda} y^{\lambda}\right) \leq f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna multiplikativ konveks fonksiyon denir (Rubinov 2000).

3.3.3.7. Birinci Anlamda s-konveks Fonksiyonlar $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $s \in (0,1]$ olmak üzere eğer $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Orlicz 1961).

3.3.3.8. İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $s \in [0,1]$ olmak üzere eğer $\forall\, x, y \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \geq 0$, için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Hudzik ve Mligranda 1994).

3.3.3.9. m-konveks Fonksiyonlar $m \in [0,1]$ ve $b > 0$ olmak üzere, $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\, x, y \in [0, b]\ ve\ \lambda \in [0,1]$ için,

$$f(\lambda x + m(1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + m(1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu fonksiyona m-konveks fonksiyon denir (Toader 1988, Dragomir ve Pečarić 1995, Toader 1984).

3.3.3.10. Artan Pozitif Homojen (IPH) Fonksiyonlar $\mathbb{R}^n_{++}$'da f fonksiyonu için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, f birinci dereceden artan pozitif homojen (IPH) fonksiyondur denir:

a) Her $x, y \in \mathbb{R}^n_{++}$ için $x \geq y$ iken $f(x) \geq f(y)$ olsun, yani f artan fonksiyondur;

b) Her $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ ve $\lambda > 0$ için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, yani f birinci dereceden pozitif homojen fonksiyondur (Rubinov 2000).

3.3.3.11. Min-tip ve Max-tip Fonksiyonlar $\forall\, x, l \in \mathbb{R}^n_{++}$ için $\langle l, x\rangle = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{l_i}$, $\langle x, l\rangle^+ = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \frac{l_i}{x_i}$'dir ve bu fonksiyonlara, sırasıyla, min-tip ve max-tip fonksiyonlar denir (Rubinov 2000).

3.3.3.12. Artan Radyant Fonksiyonlar $Q \subset \mathbb{R}^n_+$ radyant küme olmak üzere, $f: Q \to [0, +\infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, f artan radyant fonksiyondur denir:

a) Her $x, y \in Q$ için $x \geq y$ iken $f(x) \geq f(y)$ olsun, yani f artan fonksiyondur;

b) Her $x \in Q$ ve $\lambda \in (0,1)$ iken $f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$ olsun, yani f radyant fonksiyondur (Rubinov 2000).

3.3.3.13. Artan Ko-radyant (ICR) Fonksiyonlar $Q \subset \mathbb{R}^n_+$ co-radyant küme olmak üzere, $f: Q \to \mathbb{R} \cup +\infty$ fonksiyon olsun. Eğer her $x \in Q$ ve $\lambda \geq 1$ için

$$f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$$

ise f fonksiyonu ko-radyanttır denir (Rubinov 2000).

3.3.3.14. Artan ve Işınlar Üzere Konveks (ICAR) Fonksiyonlar $f: K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ve $K \subset \mathbb{R}^n$ bir konik küme olsun. Eğer f konveks bir fonksiyon ve sıfırdan başlayan ışın üzerine kısıtlanışı bir değişkenli konveks fonksiyon ise, bu fonksiyona ışınlar üzere konveks fonksiyon denir. Farklı bir ifadeyle, her bir $x \in K$, $t \geq 0$ için,

$$f_x(t) = f(tx),$$

fonksiyonu konveks ise, f fonksiyonuna ışınlar üzere konveks fonksiyon denir ve ICAR ile gösterilir (Rubinov 2000).

3.3.3.15. $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m})$-konveks Fonksiyon $b > 0$ ve $f: [0, b] \to \mathbb{R}$olsun. Her $x, y \in [0, b], \lambda \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ için

$$f(\lambda x + m(1-\lambda)y) \leq \lambda^\alpha f(x) + m(1-\lambda^\alpha)f(y)$$

ise f fonksiyonuna (α,m)-konvekstir denir (Miheşan 1993, Bakula 2006).

Burada $(\alpha, m) \in (0,0), (\alpha, 0), (1,0), (1, m), (1,1), (\alpha, 1)$ seçilirse, sırasıyla artan, α-starshaper, starshaped, m-konveks, konveks ve α-konveks fonksiyon sınıfları elde edilir.

Varosanec, h-konveks fonksiyonlar sınıfı adını verdiği negatif olmayan fonksiyonlar için yeni ve büyük bir sınıf tanımladı. Öyle ki bu sınıf, ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar, Godunova-Levin fonksiyonlar ve P-fonksiyonları kapsar.

3.3.3.16. $\boldsymbol{h}$-konveks Fonksiyon $f: I \to \mathbb{R}$ ve $h: J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan iki fonksiyon olsun. Her $x, y \in I, \lambda \in (0,1)$için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq h(\lambda)f(x) + h(1-\lambda)f(y)$$

Eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna, h-konveks fonksiyondur veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varosanec 2007).

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda f fonksiyona h-konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfına aittir denir. Eğer $h(\lambda) = \lambda$ alınırsa, bu takdirde tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir.

3.3.3.17. tgs-konveks Fonksiyon $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda(1-\lambda)[f(x) + f(y)]$$

ise, f fonksiyona tgs-konveks fonksiyon denir. Eğer $(-f)$, tgs-konveks fonksiyon ise f, tgs-konkav fonksiyondur denir (Tunç 2015).

3.3.3.18. $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{h})$-konveks Fonksiyon $k, h: (0,1) \to \mathbb{R}$verilen iki fonksiyon ve $D \subset X$ konveks küme olsun. Her $x, y \in D$ ve $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere $f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f(k(\lambda)x + k(1-\lambda)y) \leq h(\lambda)f(x) + h(1-\lambda)f(y)$$

ise, f fonksiyonuna (k, h)-konveks fonksiyon denir.

Uygun h ve k fonksiyonları için yukarıdaki eşitsizlik, konveks, Jensen-konveks, h-konveks, s-Olricz konveks, s-Breckner konveks, Godunova-Levin, strashaped fonksiyonlar ile P-fonksiyonlarını ve alttoplamsal dönüşümlerin ailesini üretir (Micharda ve Rajba, 2012).

3.3.3.19. $\boldsymbol{\varphi}$-konveks Fonksiyon $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi: [a, b] \to [a, b]$ fonksiyonları verilsin. Her $x, y \in [a, b]$ve$\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \leq \lambda f(\varphi(x)) + (1-\lambda)f(\varphi(y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna φ-konveks fonksiyon denir (Cristescu 2004).

3.3.3.20. $\boldsymbol{\varphi_h}$-konveks Fonksiyon $I \subset \mathbb{R}$ ve $h: (0,1) \to (0, \infty)$ ve f: I → (0, ∞) olsun. Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f\big(\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)\big) \leq h(\lambda)f\big(\varphi(x)\big) + h(1-\lambda)f\big(\varphi(y)\big)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna φ_h-konveks fonksiyon denir.

Eşitsizlik yön değiştirir ise f fonksiyonuna φ_h-konkav fonksiyon denir. f fonksiyonu $h(\lambda) = t, h(\lambda) = \lambda^s$, $h(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ ve $h(\lambda) = 1$ için sırasıyla φ-konveks, φ_s-konveks, φ-Godunova-Levin fonksiyonu ve φ-P-fonksiyonuna indirgenir (Sarıkaya 2012b).

3.3.3.21. log-φ-konveks Fonksiyon) $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\varphi:[a,b] \to [a,b]$ ve $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}_+$ olsun. Her$x,y \in I$ve$\lambda \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)\big) \leq \big[f\big(\varphi(x)\big)\big]^{\lambda}\big[f\big(\varphi(y)\big)\big]^{1-\lambda}$$

ise, f fonksiyonuna log-φ-konveks fonksiyon denir (Sarıkaya 2012c).

3.3.3.22. (h,m)-konveks Fonksiyon $J \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $h: J \to \mathbb{R}$ ve $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan iki fonksiyon olsun. Her $x,y \in [0,b]$ ve $m,\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + m(1-\lambda)y) \leq h(\lambda)f(x) + mh(1-\lambda)f(y)$$

ise, f fonksiyonuna (h,m)-konveks fonksiyon denir (Özdemir 2011).

3.3.3.23. Geometrik Konveks Fonksiyon $I \subset \mathbb{R}_+$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Her$x,y \in I$ve$\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(x^{\lambda}y^{1-\lambda}\right) \leq [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda}$$

ise, f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang 2012).

3.3.3.24. s-Geometrik Konveks Fonksiyon $I \subseteq \mathbb{R}_+$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ olsun. Her$x,y \in I, s \in (0,1]$ve$\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(x^{\lambda}y^{1-\lambda}\right) \leq [f(x)]^{\lambda^s}[f(y)]^{(1-\lambda)^s}$$

ise, f fonksiyonuna s-geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang 2012).

$s = 1$ için, s-geometrik konveks fonksiyon tanımı geometrik konveks fonksiyon tanımına dönüşmektedir.

3.3.3.25. α-star s-konveks Fonksiyon $I \subseteq \mathbb{R}_+$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$ olsun. Her $x,y \in I$ ve $\lambda,\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda^s f(x) + (1-\lambda)\alpha^s f(y)$$

ise f fonksiyonuna α-star s-konveks fonksiyon denir (Park 2010).

3.3.1.26. Harmonik Konveks Fonksiyon $I \subset \mathbb{R}\, 0$ bir açık aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ olsun. Her $x,y \in I$ve$\lambda \in [0,1]$için

$$f\left(\frac{xy}{\lambda x + (1-\lambda)y}\right) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x)$$

ise, f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir (İşcan 2014).

3.3.3.27. $\mathbb{B}$-konveks Fonksiyonlar $U \subset \mathbb{R}_+^n$, $\mathbb{B}$-konveks bir küme ve $f: U \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun B-konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall\ x,y \in U, \lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x \vee y) \leq \lambda f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Briec ve Horvath, 2004).

3.3.3.28. $\mathbb{B}^{-1}$-konveks Fonksiyonlar $U \subset \mathbb{R}^n_{++}$, $\mathbb{B}^{-1}$-konveks bir küme ve $f: U \to \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun $\mathbb{B}^{-1}$-konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall$ $x, y \in U, \lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x \wedge y) \leq \lambda f(x) \wedge f(y)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Adilov, Yeşilce 2016).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Farklı Konvekslik Sınıfları İçin Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri

4.1.1. Klasik Konvekslik İçin Carathéodory, Radon ve Helly Teoremi

Teorem 4.1.1.1. Klasik Konvekslik İçin Carathéodory Teoremi $A \subset \mathbb{R}^n$, herhangi bir küme olsun. $conv(A)$ kümesinin herhangi bir elemanı, A kümesinin $n+1$'den daha fazla olmayan sayıdaki elemanının konveks kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

İspat. $x \in conv(A) = K(A)$ olsun, dolayısıyla öyle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ sayıları ve $x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, m$ noktaları vardır ki, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ şeklinde yazılabilir. Şimdi bu yazılışta $m > n+1$ dolayısıyla $m - 1 > n$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ uzayında en fazla n tane vektörün lineer bağımsız olabileceği bilgisi kullanılarak, $x_1 - x_m, x_2 - x_m, \ldots, x_{m-1} - x_m$ vektörlerinin $\mathbb{R}^n$ uzayında lineer bağımlı olmak zorunda oldukları sonucu elde edilir. Bu ise hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\alpha_1(x_1 - x_m) + \alpha_2(x_2 - x_m) + \cdots + \alpha_{m-1}(x_{m-1} - x_m) = 0 \qquad (4.1)$$

eşitliğinin sağlanmasını gerektirir.

$$\alpha_m := -\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i$$

denirse (4.1) eşitliğinden

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{m-1} x_{m-1} - \alpha_1 x_m - \alpha_2 x_m - \cdots - \alpha_{m-1} x_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_m x_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0$$

elde edilir.

Böylece $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i - t \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - t\alpha_i) x_i$$

yazılabilir.

Şimdi amacımız, öyle bir $t_0 \in \mathbb{R}$ bulmaktır ki $i = 1, 2, \ldots, m$ için $\lambda_i - t_0 \alpha_i \geq 0$ ve

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - t_0 \alpha_i) = 1$$

sağlansın ve en az bir $\lambda_i + t_0\alpha_i$ katsayısını sıfır yapsın. $i = 1, 2, \dots, m$ için $\alpha_i$lerin hepsi birden sıfır değil ve $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$ olduğundan $I \coloneqq \{i: \alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, m\}$ indis kümesi iyi tanımlıdır. Dolayısıyla

$$\exists\, t_0 \coloneqq \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \coloneqq min\left\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i} : i \in I\right\} \geq 0$$

Bu şekilde belirlenen t_0 için, eğer i ∈ I ise $\lambda_i - t_0\alpha_i = \alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i} - t_0\right) \geq 0$, özel olarak $i = i_0$ ise, $\lambda_{i_0} - t_0\alpha_{i_0} = \lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}\alpha_{i_0} = 0$, i ∉ I ise $\alpha_i \leq 0$ ve $t_0 \geq 0$ olduğundan $\lambda_i - t_0\alpha_i \geq 0$ olur.

Böylece $i = 1, 2, \dots, m$ için $\lambda_i - t_0\alpha_i \geq 0$,

$$\exists\, i_0 \in I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}\ için\ \lambda_{i_0} - t_0\alpha_{i_0} = 0,$$

ve

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - t_0\alpha_i) = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i - t_0\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1 - t.0 = 1$$

gerçeklenir.

Sonuçta $x = \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - t_0\alpha_i)x_i$ noktası, A kümesinin $x_1, x_2, \dots x_m$ noktalarının bir konveks kombinasyonu ve en az bir $i_0 \in \{1,2,\dots,m\}$ için $\lambda_{i_0} - t_0\alpha_{i_0} = 0$ olduğundan x noktası A kümesinin m – 1 tane elemanının konveks kombinasyonu şeklinde yazılmış olur.

Eğer $m - 1 = n + 1$ ise ispat biter, $m - 1 > n + 1$ ise ispatın başındaki m yerine $m - 1$ yazılarak aynı işlemler tekrar edilerek yine en az bir katsayı 0 yapılabilir. Bu indirgeme işlemi x noktasının konveks kombinasyondaki eleman sayısı $n + 1$ olana kadar devam ettirilebilir.

■

Teorem 4.1.1.2. Klasik Konvekslik İçin Radon Teoremi $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ olsun $(m \geq n + 2)$. Buradan $\{1, \dots, m\}$ kümesi, $conv\,\{a_i: i \in I\}$'nın $conv\,\{a_j: j \in J\}$ ile kesişmesi için iki I ve J alt kümelerine bölünebilir.

İspat. $a_1, \dots, a_m$ farklı olduğunda önemsiz olmayan durumu düşünüyoruz. $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ skalerleri sıfırdan farklı, öyle ki $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ ve $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$. λların bazıları pozitif, bazıları negatif olacak. $I = \{i: \lambda_i \geq 0\}$ ve $J = \{j: \lambda_j < 0\}$.

Buradan

$$\frac{\sum_{i \in I} \lambda_i a_i}{\sum_{i \in I} \lambda_i} = \frac{\sum_{j \in J}(-\lambda_j)\, a_j}{\sum_{j \in J}(-\lambda_j)} = x$$

denilebilir.

Böylece x, hem $a_i: i \in I$ hem $\{a_j: j \in J\}$ nin noktalarının konveks bir kombinasyonudur, bu da I ve J nin teoremin gereksinimlerini karşıladığını gösterir.

■

Helly teoremi , 1913 yılında Helly tarafından ortaya konmuştur ancak 1923 yılına kadar yayınlanmamıştır. Sonraki yıllarda Radon (1921) ve König (1922) tarafından alternatif ispatlar ortaya çıkmıştır.

Teorem 4.1.1.3. Klasik Konvekslik İçin Helly Teoremi f, $\mathbb{R}^n$'de en az $n+1$ elemanı olan sonlu bir konveks kümeler ailesi olsun. f'nin her $n+1$ üyesinin boş olmayan bir kesişime sahip olduğunu varsayalım. Öyleyse f boş olmayan bir kesişime sahiptir.

İspat. f'deki eleman sayısını tümevarım ile iddia edelim.

f'nin $n+1$ üyesi olduğunda teorem önemsizdir. $m \geq n+1$ durumunda iddianın konveks kümeler ailesi için doğru olduğunu varsayalım.

$A_0, \ldots, A_m$; $\mathbb{R}^n$'de $m+1$ tane konveks kümenin bir ailesi olsun, her $n+1$ üyesi boş olmayan bir kesişime sahip olsun.

Tümevarım hipotezi ile, her $i = 0, \ldots, m$ için $a_i \in A_0 \cap \ldots \cap A_{i+1} \cap \ldots \cap A_m$ gibi bir noktası vardır.

Radon'un Teoremi ile, $\{0, \ldots, m\}$ kümesi; $conv\{a_j: j \in J\}$ ve $conv\{a_k: k \in K\}$ kümelerinin buluştuğu şekilde iki küme, J ve K'ye bölünebilir.

a $\in conv\{a_j: j \in J\} \cap conv\{a_k: k \in K\}$ olduğunu varsayalım. Açıkçası, her $j \in J$ için

$$a_j \in \cap \{A_k: k \in K\}$$

dır. Böylece, $\cap \{A_k: k \in K\}$'nın konveksliği

$$conv\{a_j: j \in J\} \subseteq \{A_k: k \in K\}$$

dır. Benzer şekilde,

$$conv\{a_k: k \in K\} \subseteq \{A_j: j \in J\}$$

Böylece

$$a \in conv\{a_j: j \in J\} \cap conv\{a_k: k \in K\} \subseteq A_0 \cap \ldots \cap A_m,$$

$A_0 \cap \ldots \cap A_m$'nin boş olmadığını gösterir. İspat burada biter.

■

4.1.2. Max-Plus Konvekslik İçin Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri

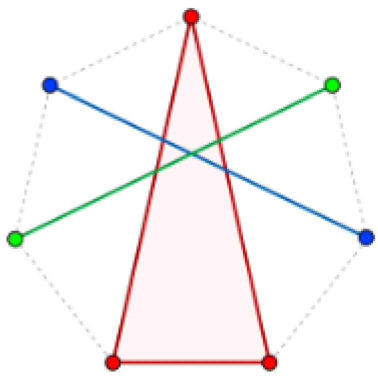
Tanım 4.1.2.1. İki $u, v \in (R \cup \{-\infty\})^n$ noktası ve $\alpha \vee \beta = 0$ koşulunu sağlayan $\alpha, \beta \in R \cup \{-\infty\}$ için, $(\alpha + u) \vee (\beta + v)$ biçimindeki noktalar kümesi max-plus konveks kümedir.

Tanım 4.1.2.2. $(R \cup \{-\infty\})^n$'deki noktaların ikisinin altkesiti max-plus konveks ise $(R \cup \{-\infty\})^n$'nin bir altkümesi max-plus konvekstir.

Max-plus kümeler için Carathéodory, Tverberg, Helly ve Radon teoremleri birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır [Zimmermann, Litvinov, Maslov, Shpiz, Cohen, Gaubert, Quadrat, Develin, Sturmfels, Joswig, Sturmfels, Yu, Briec, Horvath, Nitica ve Singer] (Gaubert ve Meunier, 2010).

Tverberg Teoremi, ilk olarak 1966'da Helge Tverberg tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Teorem 4.1.2.1. Tverberg Teoremi X, $\mathbb{R}^n$'de $(n+1)(r-1)+1$ tane noktaların kümesi olsun. Bu durumda, X'in, konveks örtüleri ortak bir noktaya sahip olan $X_1, X_2, \ldots, X_r$ ikili ayrık alt kümeleri vardır.



Şekil 4.1.2.2. Düzgün bir yedigenin köşelerinin, kesişen konveks kabuğa sahip üç alt kümeye Tverberg bölümü.

Sonuç 4.1.2.2: Teorem 4.1.2.1'de $r = 2$ alınırsa, konveks kabukları kesişen iki alt kümeye parçalanır. Bu özel durum da Radon Teoremi olur.

Colorful Carathéodory Teoremi'ni, Max-plus kümeler için ifade eden teorem aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.1.2.2. Colorful Max-plus Konvekslik Sınıfı İçin Carathéodory Teoremi, Zayıf Form $d+1$ tane $X_1, X_2, \ldots, X_{d+1}$ sonlu nokta kümeleri verilsin ve her X_i'nin max-plus konveks örtüsü bir $p \in \mathbb{R}^n_{max}$ noktasını içersin. O halde $d+1$ tane $x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}$ noktaları vardır öyle ki her i için $x_i \in X_i$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}$ noktalarının max-plus konveks örtüsü $mpconv\{x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}\}$, p noktasını içerir (Gaubert ve Meunier, 2010).

İspat. $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_{max}$, $max_{j \in [d+1]} \lambda_j = 0$ ve $y^{(1)}, \ldots, y^{(d+1)} \in X_1$ iken $p \in \mathbb{R}^n_{max}$ noktası

$$p = \max_{j \in [d+1]} \left(\lambda_j + y^{(j)} \right) \quad (1)$$

biçiminde yazılabilir. Bir j indisi bulunur öyle ki $\lambda_j + y^{(j)}$'nin ilk bileşeni p_1'e eşit olur.

x_1, bu $y^{(j)}$ ve μ_1'e karşılık gelen λ_j olarak tanımlansın. İlk bileşen için olan eşitlik ile $\mu_1 + x_1 \leq p$ olur. Aynı yolla, $i = d$'ye kadar her $i \geq 2$ için, bir μ_i skaleri ve bir $x_i \in X_i$ vektörü var öyle ki $\mu_i + x_i \leq p$ şeklinde i. bileşeni için eşitlik buluur.

Son olarak, her $y^{(j)}$ vektörünün X_{d+1}'e ait olduğu şekilde (1)'in yeni bir ayrışmasını yazıyoruz, ancak bu sefer $\lambda_j = 0$ olacak şekilde bir $y^{(j)}$ vektörü olabilmesi için $x_{d+1} \in X_{d+1}$ seçiyoruz ve $\mu_{d+1} \coloneqq 0$ olarak belirliyoruz. Ve aynı zamanda hala $\mu_{d+1} + x_{d+1} \leq p$ olur.

Dolayısıyla, $i \in [d+1]$ için $d+1$ tane $x_i \in X_i$ noktaları inşa edilir, böylece $max_{i \in [d+1]} \mu_i = 0$ ve

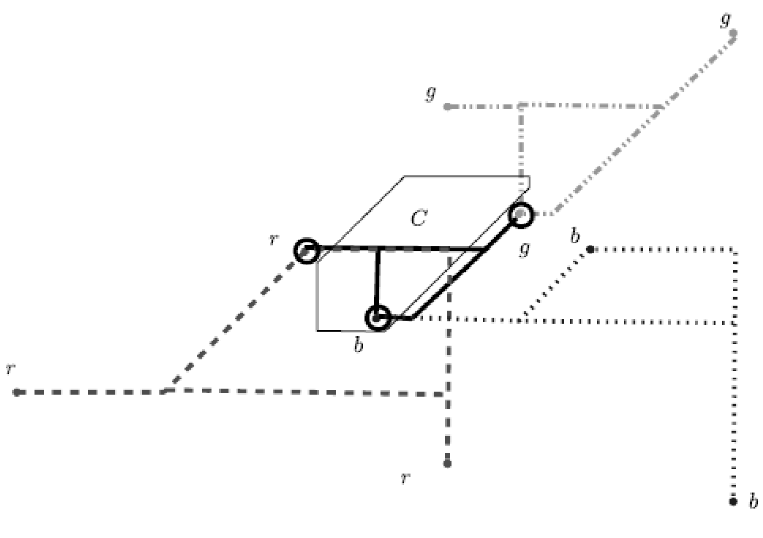
$$p = \max_{i \in [d+1]} (\mu_i + x_i).$$

■

Teorem 4.1.2.3. Colorful Max-plus Konvekslik Sınıfı İçin Carathéodory Teoremi, Güçlü Form

$d+1$ tane $X_1, X_2, \dots, X_{d+1}$ sonlu nokta kümesi ve $\mathbb{R}^n_{max}$'ta C max-plus konveks kümesi verilsin öyle ki her X_i'nin max-plus konveks örtüsü C ile kesişir. Bu durumda $d+1$ tane $x_1, x_2, \dots, x_{d+1}$ noktaları vardır öyle ki her i için $x_i \in X_i$ ve böylece $mpconv\{x_1, x_2, \dots, x_{d+1}\}$, C max-plus konveks kümesi ile kesişir (Gaubert ve Meunier, 2010).

Şekil 4.1.2.3, bu teoremin bir örneğidir.



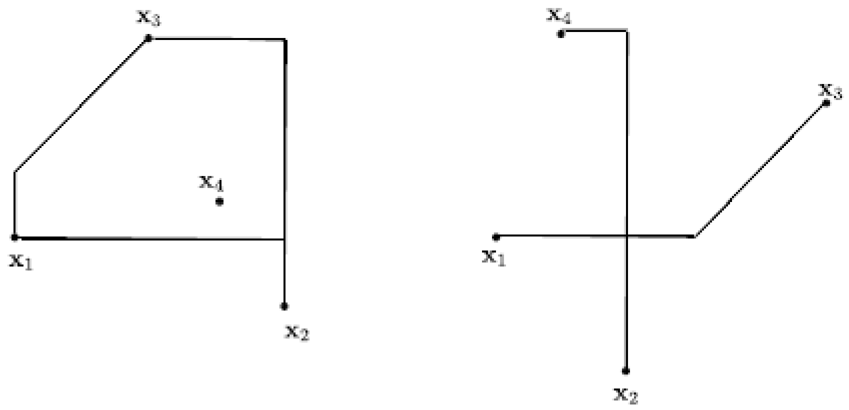
Şekil 4.1.2.3. Max-Plus genelleştirilmiş Colorful Carathéodory teoreminin iki boyutlu gösterimi.

Şekil 4.1.2.3'te üç nokta kümeleri vardır: r ile belirlenen X_r, g ile belirlenen X_g ve b ile belirlenen X_b. Burada koyu siyah ile gösterilen doğru parçaları, C kümesi ile kesişen ve canlı (colorful) "köşe" kümesine sahip olan max-plus "üçgen"in "kenarlarını" temsil eder. (Gaubert ve Meunier, 2008).

Bu teorem de Teorem 4.1.2.2 gibi ispatlanır.

Teorem 4.1.2.4. Max-plus Radon Teoremi X, $\mathbb{R}^d_{max}$'ta bir $d+2$ noktalar kümesi olsun. O halde, max-plus konveks kabuklarının ortak bir noktası olan X'in iki çift ayrık X_1 ve X_2 alt kümesi vardır (Gaubert ve Meunier, 2010).

Bu ifade, Şekil 4.1.2.4'te verilmiştir.



Şekil 4.1.2.4. 2 Boyutlu Max-plus Radon Teoremi'nin Şekli

Teorem 4.1.2.5. Max-plus Helly Teoremi $\mathcal{F}$, $\mathbb{R}^d_{max}$'ta max-plus konveks kümelerinin sonlu bir koleksiyonu olsun. $\mathcal{F}$'nin her d + 1 elemanının boş olmayan bir kesişimi varsa, $\mathcal{F}$'nin tüm elemanlarının boş olmayan bir kesişimi vardır (Gaubert ve Meunier, 2010).

İspat. $C_1, \ldots, C_n$'nin $\mathbb{R}^d_{max}$'ta n tane max-plus konveks kümeleri olsun ve n tane küme seçilsin, bu kümeler seçildiğinde boş olmayan bir kesişime sahip olsun. İspat, n üzerindeki indüksiyonla yapılabilir. İlk önce $n = d + 2$ olduğunu varsayalım. x_i, $\cap_{j=1, j\neq i}^{d+2} C_j$'de bir nokta olsun. Daha sonra $d+2$ tane $x_1, \ldots, x_{d+2}$ noktası vardır. Eğer ikisi eşitse, o zaman bu nokta tüm kesişimin ortak noktasıdır. Bu nedenle, tüm x_i'nin farklı olduğunu varsayabiliriz. Max-plus Radon Teoremi ile, S ve T'nin iki ayrık $[d+2]$ alt kümesine sahibiz, böylece

$$mpconv(\cup_{i\in S} x_i) \cap mpconv(\cup_{i\in T} x_i)'de$$

bir x noktası vardır. Bu x noktası her C_i'ye aittir.

Gerçekten de, S veya T cinsinden olan $j \in [d+2]$ alınsın. Genellik kaybı olmadan j'nin S'de olduğunu varsayalım. O zaman, mpconv($\cup_{i\in T} x_i$), C_j'ye ve böylece $x \in C_j$'ye dahil edilir. $n = d+2$ durumu kanıtlanmıştır. Şimdi $n > d+2$ olduğunu ve teoremin $n-1$'e kadar ispatlandığını varsayalım. $C'_{n-1} := C_{n-1} \cap C_n$'yi tanımlansın.

$d + 2$ max-plus konveks C_i kümeleri seçildiğinde, ispatladığımıza göre boş olmayan bir kesişime sahiptirler. Bu nedenle, $C_1, \dots, C_{n-2}, C'_{n-1}$ koleksiyonunun her $d + 1$ üyesinin boş olmayan bir kesişimi vardır. İndüksiyonla, tüm koleksiyonun boş olmayan bir kesişimi vardır.

■

4.1.3. $\mathbb{B}$-Konvekslik İçin Carathéodory, Radon ve Helly Teoremi

Teorem 4.1.3.1. $\mathbb{B}$-Konvekslik İçin Carathéodory Teoremi Eğer L, $\mathbb{R}_+^n$'nın kompakt bir altkümesi ise o halde

$$Co^{\infty}(L) = \bigcup_{A \in \langle L \rangle_{n+1}} Co^{\infty}(A).$$

Burada $\langle L \rangle_{n+1}$, L'nin boş olmayan sonlu alt kümeleri ailesidir.

Sonuç olarak, $\mathbb{R}$'nin tüm S altkümeleri için, $\mathbb{B}[S] = \bigcup_{A \in \langle S \rangle_{n+1}} \mathbb{B}[A] = \bigcup_{A \in \langle S \rangle_{n+1}} Co^{\infty}(A)$ ve eğer S kompakt ise, $\mathbb{B}[S] = Co^{\infty}(S)$ (Briec ve Horvath, 2004).

İspat. $x \in Co^{\infty}(L)$ ise, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ x'e yakınsak bir $x_{r_k} \in Co^{r_k}(L)$, $\left(x_{r_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. Carathéodory Teoremi'nden, her bir k için, L'de $x_k^1, \dots, x_k^{n+1}$ noktalarının ve $\rho_k^1, \dots, \rho_k^{n+1}$ sayıları vardır öyle ki

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\rho_k^j\right)^{2r_k+1} = 1$$

olmak üzere

$$\phi_{r_k}\left(x_{r_k}\right) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\rho_k^j\right)^{2r_k+1} \phi_{r_k}\left(x_k^j\right)$$

yani, $i = 1, \dots, n$ için,

$$x_{r_k,i} = \left(\sum_{j=1}^{n+1} \left(\rho_k^j x_{r_k,i}^j\right)^{2r_k+1} \right)^{\frac{1}{2r_k+1}}$$

olur.

L kompakt olduğundan, genelliği kaybetmeksizin, $\left(x_k^j\right)_{k \in \mathbb{N}}$ dizilerin her birinin, L'de bir x^j noktasına yakınsadığı ve ayrıca ρ_k^j, j = 1, ..., n + 1 dizilerinin her birinin [0,1]'deki bir ρ^j noktasına yakınsadığı varsayılabilir. Tüm sayıların pozitif olduğu göz önüne alındığında,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n+1}\left(\rho_k^j x_{r_k,i}^j\right)^{2r_k+1}\right)^{\frac{1}{2r_k+1}} = \max_{1\le j\le n+1}\{\rho^j x^j\}$$

ve

$$\max_{1\le j\le n+1}\{\rho^j\} = 1$$

olur. Bileşenlere göre limit alındığında, $\rho^j \geq 0$ ile, her j için, $x = \vee_{j=1}^{n+1} \rho_j x_j$ elde edilir ve $\max_{1\le j\le n+1}\{\rho^j\} = 1$ olur. $x \in Co^{\infty}(A)$'yı $A = x_1, \dots, x_n \subset L$ ile gösterilir. Son olarak, tüm sonlu A kümeleri için $\mathbb{B}[A] = Co^{\infty}(A)$'dan, $\mathbb{B}[S] = \cup_{A\in S} Co^{\infty}(A)$ ve ilk bölüm sonlu $A \in \langle S\rangle$ kümelerine uygulandığında $\mathbb{B}[S] = Co^{\infty}(S)$ olur.

■

Teorem 4.1.3.2. $\mathbb{B}$-konvekslik İçin Radon Teoremi $S \subset \mathbb{R}_+^n$, sonlu ve en az $n+2$ elemanlı bir küme ise bu durumda, boş olmayan alt kümelerde, bir

$$S = A_1 \cup A_2$$

parçalanışı vardır öyle ki

$$Co^{\infty}(A_1) \cap Co^{\infty}(A_2) \neq \emptyset$$

(Briec ve Horvath, 2004).

İspat. Radon Teoremi'ni $A \to Co^r(A)$ operatörlerinin her birine uygulayabiliriz; her r için S'nin bir $(A_{r,1}, A_{r,2})$ parçalanışı vardır, böylece $Co^{\infty}(A_{r,1}) \cap Co^{\infty}(A_{r,2}) \neq \emptyset$. S parçalanışlarının sayısı sonlu olduğundan, bir (A_1, A_2) parçalanışı ve tüm $k \in \mathbb{N}$ için $(A_{r_k,1}, A_{r_k,2}) = (A_1, A_2)$ olacak şekilde bir $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Her k için bir $x_{r_k} \in Co^{r_k}(A_{r_k,1}) \cap Co^{r_k}(A_{r_k,2}) = Co^{r_k}(A_1) \cap Co^{r_k}(A_2)$ noktası seçilsin; bir B küpü alınsın öyle ki $S \subset B$, o halde tüm k için $Co^{r_k}(A_1) \cap Co^{r_k}(A_2) \subset Co^{r_k}(S) \subset B$ vardır. Kompaktlık ile, $\{x_{r_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$'nın bir x^* noktasına yakınsadığını varsayalım; o halde

$$x^* \in Co^{\infty}(A_1) \cap Co^{\infty}(A_2)$$

vardır.

■

Teorem 4.1.3.3. $\mathbb{B}$-konvekslik İçin Helly Teoremi Eğer $\{L_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, $\mathbb{R}_+^n$'nın kapalı $\mathbb{B}$-konveks alt kümelerinin bir ailesiyse, herhangi bir $n+1$ üyesinin ortak bir noktası varsa, o halde Λ'nın tüm sonlu F alt kümeleri için $\cap_{\lambda\in F} L_\lambda \neq \emptyset$; ayrıca, en az bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için L_{λ_0} kompakt ise, o zaman $\cap_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda \neq \emptyset$ (Briec ve Horvath, 2004).

İspat. $F \subset \Lambda$'nın en az $n+2$ elemanlı bir alt kümesi olsun, aksi takdirde kanıtlanacak bir şey yoktur; $n+1$ elemanının her bir $A \subset F$ alt kümesi için bir $x_A \in \cap_{\lambda \in A} L_\lambda$ noktası seçilsin ve B'nin tüm bu noktaların $\mathbb{B}$-kabuğu olsun, bu kompakttır.

Her $\lambda \in F$ için $B_\lambda = \mathbb{B}[x_A: \lambda \in A]$ kümesi için B, kompakt ve $\mathbb{B}$-konveks olarak bulunur. $A \subset F$, n + 1 elemanlı ise o halde $x_A \in \cap_{\lambda \in A} B_\lambda$ ve bu nedenle tüm r için $x_A \in \cap_{\lambda \in A} \phi_r(B_\lambda) \neq \emptyset$ olur.

Şimdi, her zamanki Helly Teoremi'nden $\cap_{\lambda \in F} Co\big(\phi_r(B_\lambda)\big) \neq \emptyset$ vardır; ϕ_r tarafından ters görüntüyü almak $\cap_{\lambda \in F} Co^r(B_\lambda) \neq \emptyset$ verir. $\prod_{i=0}^n [a_i, b_i]$ küpünü $B \subset \prod_{i=0}^n [a_i, b_i]$ gibi seçelim; ayrıca tüm r ve tüm $\lambda \in F$ için, $B_\lambda \subset B$ ve $Co^r(B_\lambda) \subset Co^r(B) \subset Co^r(\prod_{i=0}^n [a_i, b_i]) = \prod_{i=0}^n [a_i, b_i]$ olur. Daha sonra, her r için bir $x_r \in \cap_{\lambda \in F} Co^r(B_\lambda)$ noktası seçilsin; kompaktlık ile, bir $x^* \in \prod_{i=0}^n [a_i, b_i]$ noktasına yakınsayan bir $\{x_{r_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. Ama tüm $\lambda \in F$ için $x_{r_k} \in Co^{r_k}(B_\lambda)$'dan $x^* \in Ls_{r \to \infty} Co^r(B_\lambda) = Co^\infty(B_\lambda)$ vardır. Böylece $x^* \in \cap_{\lambda \in F} Co^\infty(B_\lambda)$ olduğu gösterilmiştir. B_λ kompakt ve $\mathbb{B}$-konveks olduğundan $B_\lambda = Co^\infty(B_\lambda)$; tüm $\lambda \in F$ için $B_\lambda \subset L_\lambda$ ve dolayısıyla $\cap_{\lambda \in F} L_\lambda \neq \emptyset$. $\{L_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ ailesi sonlu kesişim özelliğine sahip olur; eğer tüm L_λ kapalı kümeler ve bunlardan biri kompakt ise $\cap_{\lambda \in F} L_\lambda \neq \emptyset$ olur.

■

4.1.4. $\mathbb{B}^{-1}$-Konvekslik İçin Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri

Lemma 4.1.4.1. $\mathbb{R}_{++}^n$'de, $\prod_{i=1}^n [x_i, y_i]$ kümesi $\mathbb{B}^{-1}$-konveks kümedir (Adilov, Yeşilce 2016).

İspat. Eğer $A \subset \prod_{i=1}^n [x_i, y_i]$ ise, o zaman $\phi_r(A) \subset \prod_{i=1}^n [x_i^{2r+1}, y_i^{2r+1}]$, ϕ_r ile ters görüntü aldıktan sonra, aralıkların konveksliğinden $Co^r(A) \subset \prod_{i=1}^n [x_i, y_i]$ elde edilir ve dolayısıyla

$$Co^{-\infty}(A) \subset \prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i].$$

■

$\langle L \rangle_m$ ile, en fazla m elemanlı L'nin boş olmayan alt kümelerinin ailesi belirtilir.

Teorem 4.1.4.1. $\mathbb{B}^{-1}$-konvekslik için Carathéodory Teoremi L, $\mathbb{R}_{++}^n$'nin kompakt bir altkümesi olduğu durumda

$$Co^{-\infty}(L) = \cup_{A \in \langle L \rangle_{n+1}} Co^{-\infty}(A)$$

olur.

İlaveten, $\mathbb{R}^n_{++}$'nin tüm L alt kümeleri için $\mathbb{B}^{-1}[L] = \bigcup_{A\in\langle L\rangle_{n+1}} \mathbb{B}^{-1}[A] = \bigcup_{A\in\langle L\rangle_{n+1}} Co^{-\infty}(A)$ ve eğer L kompakt ise, $\mathbb{B}^{-1}[L] = Co^{-\infty}(L)$'dir. (Adilov, Yeşilce 2016)

İspat. Eğer $x \in Co^{-\infty}(L)$ ise, x'e yakınsayan $x_{r_k} \in Co^{-r_k}(L), \forall k \in \mathbb{N}$ ile bir $\left(x_{r_k}\right)_{r_k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Carathéodory Teoremi'nden, her k için, L'de bir $x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^{n+1}$ noktaları kümesi ve $[1,\infty)$'da $\rho_k^1, \rho_k^r, \dots, \rho_k^{n+1}$ sayıları vardır öyle ki

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\rho_k^j\right)^{-2r_k+1} = 1$$

olmak üzere

$$\phi_{-r_k}\left(x_{r_k}\right) = \sum_{j=1}^{n+1}\left(\rho_k^j\right)^{-2r_k+1}\phi_{-r_k}\left(x_k^j\right)$$

olur, ya da $i = 1, 2, \dots, n$ için,

$$x_{r_k,i} = \left(\sum_{j=1}^{n+1}\left(\rho_k^j x_{k,i}^j\right)^{-2r_k+1}\right)^{\frac{1}{-2r_k+1}}$$

olur. L kompakt olduğundan, genelliği kaybetmeksizin, $\left(x_k^j\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 1, 2, \dots, n+1$ dizilerinin her birinin L'de bir x_j noktasına yakınsadığını ve ayrıca ρ_k^j, $j = 1, 2, \dots, n+1$, dizilerinin her birinin L de $[1,\infty)$'daki ρ^j noktasında yakınsadığı varsayılabilir. İlgili tüm sayıların pozitif olduğu göz önüne alındığında,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n+1}\left(\rho_k^j x_{k,i}^j\right)^{-2r_k+1}\right)^{\frac{1}{-2r_k+1}} = \min_{1\le j\le n+1}\left\{\rho^j x_i^j\right\}$$

dahası $\min\limits_{1\le j\le n+1}\left\{\rho^j\right\} = 1$ olur. Limit bileşenini alarak, tüm j ler için $\rho^j \ge 1$ ve $\min\limits_{1\le j\le n+1}\left\{\rho^j\right\} = 1$ ile $x = \bigwedge_{j=1}^{n+1}\rho^j x^j$ elde ederiz. $x \in Co^{-\infty}(A)$'nın $A = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ ile olduğunu gösterdik. Son formül, her sonlu A kümesi için, $\mathbb{B}^{-1}[A] = Co^{-\infty}(A)$, $\mathbb{B}^{-1}[L] = \bigcup_{A\in\langle L\rangle} Co^{-\infty}(A)$ ve $A \in \langle L\rangle$'den gelir.

■

Sonuç 4.1.4.1. Eğer L, $\mathbb{R}^n_{++}$'nin kompakt bir altkümesi ise $\mathbb{B}^{-1}[L]$ kompakttır.

İspat. Eğer $L \subset \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ise, o zaman $Co^{-\infty}(L) \subset \prod_{i=1}^n [x_i, y_i]$; $Co^{-\infty}$(L) bu nedenle kompakttır. $\mathbb{B}^{-1}[L] = Co^{-\infty}(L)$ eşitliği ispatı sonuçlandırır.

■

Teorem 4.1.4.2. $\mathbb{B}^{-1}$-konvekslik için Radon Teoremi Eğer $A \subset \mathbb{R}^n_{++}$, en az $n+2$ elemanlıysa, boş olmayan alt kümelerde

$$Co^{-\infty}(A_1) \cap Co^{-\infty}(A_2)$$

gibi bir $A = A_1 \cup A_2$ parçalanışı vardır (Adilov, Kemali ve Yeşilce 2021).

İspat. Konveks kümeler için sağlanan Radon Teoremi'ni operatöre uygulayalım;

$$A \to Co^r(A)(r \in \mathbb{Z}^-).$$

A, tüm $r \in \mathbb{Z}^-$ ler için $Co^r(A_{r,1}) \cap Co^r(A_{r,2}) \neq \emptyset$ olacak şekilde $A_{r,1}, A_{r,2}$ kümelerine bölünebilir. A sonlu bir küme olduğundan, bir (A_1, A_2) parçalanışı ve bir $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır, böylece $k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki

$$(A_{r_k,1}, A_{r_k,2}) = (A_1, A_2)$$

eşitliği doğrudur.

Buradan, $k \in \mathbb{N}$ için,

$$a_{r_k} \in Co^{r_k}(A_{r_k,1}) \cap Co^{r_k}(A_{r_k,2}) = Co^{r_k}(A_1) \cap Co^{r_k}(A_2)$$

gibi bir $\{a_{r_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ nokta dizisi elde edilir.

$\mathbb{R}^n_{++}$'den bir prizma alalım, öyle ki $A \subset \prod_{i=1}^n [x_i, y_i]\,, x_i, y_i \ \in \mathbb{R}^n_{++}, i = 1,2, \dots, n.$

Bu durumda, $k \in \mathbb{N}$ için

$$a_{r_k} \in Co^{r_k}(A_1) \cap Co^{r_k}(A_2) \subset Co^{r_k}(A) \subset \prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$$

doğrudur.

$\{a_{r_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sınırlı bir dizi olduğundan, yakınsak bir alt diziye sahiptir (Bolzano-Weierstrass Teoremi). Genellik kaybetmeksizin $lim\, a_{r_k} = a^*$ limiti alalım. Painleve-Kuratowski tarafından tanımlanan limite göre

$$x^* \in Co^{-\infty}(A_1) \cap Co^{-\infty}(A_2)$$

doğrudur.

■

Teorem 4.1.4.3. $\mathbb{B}^{-1}$-Konvekslik İçin Helly Teoremi $\mathfrak{F}$, en az n + 1 eleman içeren $\mathbb{R}^n_{++}$'de $\mathbb{B}^{-1}$-konveks kümelerin sonlu bir ailesi olsun. $\mathfrak{F}$'nin her n + 1 elemanının boş olmayan bir kesişimine sahip olsun. O halde $\mathfrak{F}$, boş olmayan bir kesişime sahiptir (Adilov, Kemali ve Yeşilce 2021).

İspat. Tümevarım yöntemini uygulayalım. Teorem, $\mathfrak{F}$ ailesi n + 1 kümeden oluşuyorsa geçerlidir. Teoremin, $\mathfrak{F}$ ailesinin kümelerinin sayısı $m \geq n+1$ olduğunda sağlandığını varsayalım; ve $\mathfrak{F}$ ailesinin kümelerinin sayısı m + 1 olduğunda teoremin doğrulandığını gösterelim.

$i = 0,1,\dots,m$ için F_i, $\mathbb{R}^n_{++}$'de $\mathbb{B}^{-1}$-konveks küme olsun, öyle ki, $\mathfrak{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_m\}$ ve her $n+1$ kümesinin kesişimi boş değildir.

Teoremin m tane kümeden oluşan bir aile için geçerli olduğu göz önüne alındığında, tüm i = 0, 1, ..., m için

$$a_i \in F_0 \cap F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_m$$

olacak şekilde $a_0, a_1, \dots, a_m$ vardır.

Teorem 4.1.4.2'ye göre, $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$'nın $A_1 = \{a_j : j \in J\}$, $A_2 = \{a_k : k \in K\}$ parçalanışları vardır, böylece,

$$Co^{-\infty}(A_1) \cap Co^{-\infty}(A_2) \neq \emptyset.$$

Bu durumda,

$$a \in Co^{-\infty}(A_1) \cap Co^{-\infty}(A_2) \qquad (1)$$

olsun.

$\cap\,(F_k : k \in K)$, $\mathbb{B}^{-1}$-konveks küme olduğundan, ve tüm $j \in J$ için, $a_j \in \cap\,(F_k : k \in K)$'dir ve aşağıdaki ilişki doğrudur:

$$Co^{-\infty}(A_1) \subset \bigcap_{k \in K} F_k \qquad (2)$$

Benzer şekilde,

$$Co^{-\infty}(A_2) \subset \bigcap_{j \in J} F_j \qquad (3)$$

de sağlandığı görülebilir.

Böylelikle, (1), (2) ve (3)'ten,

$$a \in Co^{-\infty}(A_1) \cap Co^{-\infty}(A_2) \subset \left[\bigcap_{k\in K} F_k\right] \cap \left[\bigcap_{j\in J} F_j\right] = F_0 \cap F_1 \cap \ldots \cap F_m\,.$$

Böylece,

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_m \neq \emptyset\,.$$

■

Kümelere kompaktlık koşulu da eklenirse, Helly Teoremi sonsuz kümeler ailesi için sağlanır. Bunu ispatlamak için aşağıdaki lemma kullanılır.

Lemma 4.1.4.2. $\{C_i : i \in I\}$, kesişimi boş olan $\mathbb{R}^n$'de kompakt kümeler ailesi olsun. Böylece, $(C_i : i \in I)$ ailesinin kesişiminin boş olduğu sonlu bir $I^* \subset I$ altkümesi vardır.

Teorem 4.1.4.4. $\mathbb{B}^{-1}$-konvekslikteki Sonsuz Aileler İçin Helly Teoremi $\mathfrak{F}$, $\mathbb{R}^n_{++}$'de kompakt $\mathbb{B}^{-1}$-konveks kümelerin sonsuz bir ailesi olsun. $\mathfrak{F}$'nin her n + 1 üyesinin boş olmayan bir kesişime sahip olduğunu varsayalım. Böylece $\mathfrak{F}$ boş olmayan bir kesişime sahiptir (Adilov, Kemali ve Yeşilce 2021).

İspat. Tam tersini varsayalım. Teoremin koşulları doğrulanmış olsa bile, $\mathfrak{F}$ kümeler ailesinin kesişimi boş bir küme olsun. Bu durumda,

Lemma 4.1.4.2'ye göre $\mathfrak{F}$, kesişimleri boş kümeler olan sonlu sayıda $\mathfrak{F}^* \subset \mathfrak{F}$ alt kümesine sahiptir.

Öte yandan $\mathfrak{F}$, Teorem 4.1.4.3'ü sağladığından, kesişim boş bir küme olamaz. Bu bir çelişkidir.

■

4.1.5. *p*-Konvekslik Sınıfı İçin Carathéodory Teoremi (0 < *p* < 1)

X, gerçek bir vektör uzayı olarak gösterilsin ve $0 < p < 1$ olmak üzere p reel bir sayı olsun. $x, y \in A$ olduğunda ve eğer $\lambda, \mu \geq 0$ ise, $\lambda^p + \mu^p = 1$, eğer $\lambda x + \mu y \in A$ ise bir $A \subset X$ kümesi p-konveks diye adlandırılır. Bu küme p-conv(A) ile gösterilir. (Gerçek) bir $(X, \|.\|)$ p-normlu uzayı, $x + y$ gibi bir yarı-norm ile donatılmış (gerçek) bir vektör uzayıdır. Bir p-normlu alanın birim topu bir p-konveks kümedir ve B_x ile gösterilir. M_n^p ile tüm n boyutlu p-normlu uzayların sınıfı gösterilmektedir. Eğer X, Y, M_n^p ise, Banach-Mazur mesafesi $d(X, Y)$, infimumun X'ten Y'ye tüm izomorfizmleri T üzerinden alındığı $\|T\|.\|T^{-1}\|$ ürünlerinin infimumudur. Banach uzay teorisinde yaygın olarak kullanılan notasyonu ve terminolojiyi $[T - J]$'de göründüğü gibi kullanılacaktır (Bastero, Bernués ve Peña, 1995).

Teorem 4.1.5.1. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $0 < p < 1$ olsun. Her $x \in p - conv(A), x \neq 0$, için, $x \in \{P_1, \ldots, P_k\}$ gibi $k \leq n$ ile doğrusal olarak bağımsız $\{P_1, \ldots, P_k\} \subseteq A$ vektörleri vardır.

Dahası, eğer $0 \in p - conv(A)$ ise, $k \leq n + 1$ ile $\{P_1, \dots, P_k\} \subseteq A$ var öyle ki $0 \in p - conv\{P_1, \dots, P_k\}$ (Bastero, Bernués ve Peña, 1995).

Teorem 4.1.5.2. $0 < p < 1$ olsun. Bir $C_p > 0$ vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$C_p n^{2/p-1} \leq diam(M_p^n) \leq n^{2p-1}.$$

Teorem 4.1.5.1'in Carathéodory'den daha güçlü göründüğünü, $k < n$ ve sadece $k < n + 1$'in $p = 1$ için güvence altına alınabileceğini gözlemleyin. Vektör 0'n özellikle özel bir rol oynadığı için bunun böyle olmadığı açık olacaktır (Bastero, Bernués ve Peña, 1995).

p-konveks gövdelerin ana özelliğini hatırlayarak başlayalım.

Lemma 4.1.5.1. $A \subset X$ olsun. A'nın p-konveks gövdesi, x_i'nin (muhtemelen tekrarlama ile), $\lambda_i \geq 0$ ve $0 \leq \sum \lambda_i^p$'den alındığı tüm sonlu toplam $\sum \lambda_i x_i$ kümesi ile çakışır (Bastero, Bernués ve Peña, 1995).

İspat. Basit argümanlar, p-conv(A)'nın tüm sonlu $\sum \lambda_i x_i$ toplamları, $x_i \in A, \lambda_i \geq 0$ ve $\sum \lambda_i^p = 1$, kümesiyle çakıştığını göstermektedir. Şimdi, sadece $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, x_i \in A, \sum_{i=1}^n x_i^p < 1$, formundaki her sıfır olmayan x öğesinin $x = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i, y_i \in A, \sum_{i=1}^n \mu_i^p < 1$, olarak yazılabileceği ispatlanmalıdır. $\lambda_1 \neq 0$ varsayılsın. $\beta_1 \geq 0$ ile, $\lambda_1 = \sum_{i=1}^k \beta_1$ yazılsın. $\sum_{i=1}^n \lambda_i^p \leq \sum_{i=1}^k \beta_i^p + \sum_{i=2}^n \lambda_i^p \leq k^{1-p}\lambda_1^p + \sum_{i=2}^n \lambda_i^p$ durumu vardır. Şimdi, süreklilik argümanı ile k ve β_i'yi bulunabileceği açıktır, $1 \leq i \leq k$, öyle ki $\lambda_i = \sum_{i=1}^k \beta_i$ ve $\sum_{i=1}^k \beta_i^p + \sum_{i=2}^n \lambda_i^p = 1$. $x = \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i$ temsilen işi yapmaktadır.

■

Dikkat edelim, özellikle, her $0 \neq x \in X$ için, p-conv$\{x\}$ = (0, x] = {λx; 0 < λ <1} olduğunu gözlemleyelim. Durum, p = 1 olduğu durumdan oldukça farklıdır.

Teorem 4.1.5.1'in İspatı. $x \in p - conv(A), x \neq 0$, olsun. N en küçük tamsayı olsun, böylece x, A'nın bir $P_1, \dots, P_N$ altkümesinin p-konveks gövdesindedir. $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$, $0 < \sum_{i=1}^N \alpha_i^P < 1$ ile tüm $(\alpha_i) \geq 0$ kümesi düşünülsün. Bu kümede $\sum_{i=1}^N \alpha_i^P$ en aza indirilsin, ayarlansın ve (λ_i) ile optimum değeri belirtilsin. Açıkça, tüm $i = 1, \dots, N$ için, $\lambda_i > 0$. $P_1, \dots, P_N$'in doğrusal olarak bağımlı olduğu varsayılsın; önemli olmayan (μ_i) katsayıları vardır, böylece $\sum_{i=1}^N \mu_i P_i = 0$. $\delta > 0$ yeterince küçükse, tüm $\lambda_i + t\mu_i > 0$ katsayıları ve $t \in (-\delta, \delta)$ için tanımlanan $\phi(t) = \sum_{i=1}^N (\lambda_i + t\mu_i)^p$ fonksiyonu, $t = 0$'da minimuma sahiptir, bu da $\phi(t)$'nin ikinci türevinin negatif olduğu gerçeğine aykırıdır. $0 \in p - conv(A)$ ise, o zaman $0 = \sum_{i=1}^N \lambda_i P_i, P_i \in A, \lambda_i > 0, \forall i, ve \sum_{i=1}^N \lambda_i^p = 1$. $P_1, \dots, P_m$'nin doğrusal olarak bağımsız $m \leq n$ olduğu varsayılabilir. $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i P_i = -\sum_{i=m+2}^N \lambda_i P_i$'yi düşünüyoruz. İspatın ilk bölümünü x'e uygulanırsa, $\sum_{i=1}^{m+1} \beta_i^p \leq 1$ ile $\sum_{i=1}^m \beta_i P_i = -\sum_{i=m+2}^N \lambda_i P_i$ elde edilir. Bu nedenle $0 \leq p - convex, n - 1$ noktalarının örtüsüdür. Uzunluk $\leq n + 1$ gösterimine ulaşana kadar argümanı tekrarlansın.

■

4.1.6. Altkafes Konvekslik İçin Carathéodory, Radon ve Helly Teoremi

Tanım 4.1.6.1. Kafesler ve Yarı Kafesler

İlk önce kafeslerin ve yarıkafeslerin tanımlarını ve temel özelliklerini verelim. Bir cebirsel kafeslerde eleman çiftleri arasındaki bir işlem için yarıkafes, her bir x, y eleman çiftinin, eşleşmeleri olarak adlandırılan en büyük ortak alt sınır $x \wedge y$'ye sahip olduğu bir $(S, \leq)$ kısmi sıralı kümesidir. $(S, \leq)$ ikilisi, x, y öğelerinin her çifti, birleştirme adı verilen en az ortak bir $x \vee y$ üst sınırına sahipse, birleştirme yarıkafesidir. Bir kafes, hem birleştirme hem de kesiştirme yarıkafes olan kısmi sıralı bir kümedir. Cebirsel işlemler için cebirsel işlem kafesinin altkümesi kapalı ise bu cebirsel işlem kafesinin altkümesi cebirsel altyarıkafestir; üst sınır altyarıkafesleri olarak tanımlanır. Kafesin bir altkümesi, bir cebirsel kafes işlemi ve üst sınır altyarıkafesi ise bu kafesin bir altkümesi altkafestir. $\mathcal{M}_S$ ile bir $(S, \leq)$ cebirsel işlem yarıkafesinin tüm cebirsel işlem yarıkafeslerinin ailesini ve $\mathcal{L}_S$ bir $(S, \leq)$ kafesin tüm cebirsel işlem yarıkafeslerinin ailesini belirtiriz. $(L, \leq)$ kafesi, tüm $x, y, z \in L$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ise dağılımıdır (veya tüm $x, y, z \in L$ için $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ise, ikili ve eşdeğerdir) (Queyranne ve Tardella, 2015).

Her zamanki bileşensel kısmi $\leq$ düzeni ile donatılmış $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı göz önünde bulundurulsun (bu sayede tüm $i = 1$ için $x \leq y$ ancak ve ancak tüm $i = 1, \ldots, d$ için $x_i \leq y_i$). Böylece, iki $x, y \in \mathbb{R}^n$ noktalarının $x \vee y$ birleşimi ve $x \wedge y$ kesişimi tüm $i = 1, \ldots, d$ bileşenleri ve $\mathbb{R}^n$ için

$$(x \vee y)i = max\{x_i, y_i\} ve (x \wedge y)i = min\{x_i, y_i\},$$

bu birleşim ve cebirsel kafes işlemleri için bir dağılım kafesidir. Ayrıca, tüm d tamsayı vektörlerinin $\mathbb{Z}^n$ kümesi ve $\mathbb{B}^n = \{0, 1\}$ d kümesi $\mathbb{R}^n$'nin alt noktalarıdır ve bu nedenle kendileri aynı (bileşensel) birleştirme ve kesiştirme işlemleri için kafeslerdir. ($\mathbb{B}^n$, $\leq$)'nin, D'nin tüm alt kümelerinin Boolean kafesine $(2^D, \subseteq)$ izomorfiktir.

Uygun S altyarıkafesinin uygun $\mathcal{M}_S$ altyarıkafesi, S üzerinde altyarıkafes konveksliği olarak adlandırdığımız bir konveksliktir. Benzer şekilde, altkafes konveksliği bir S kafesinin $\mathcal{L}_S$ altkafes ailesidir. Bir altkafes konveksliğinin Carathéodory sayısı, kafesin genişliği olarak adlandırılır (Birkhoff, 1967). $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$, $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}^n}$ ve $\mathcal{L}_{\mathbb{B}^n}$ alt çizgi aileleri, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$ ve $\mathbb{B}^n$ uzaylarındaki alt çizgi konveksliklerdir. Ayrıca, $\mathcal{L}^\natural$-konveks kümelerin $\mathcal{L}^\natural{}_{\mathbb{Z}^n}$ ailesi $\mathbb{Z}^n$'de bir konveksliktir ve integral $\mathcal{L}^\natural$-konveks polihedranın ailesi $\mathbb{R}^n$'de birdir (Queyranne ve Tardella, 2015).

Tanım 4.1.6.2. Radon ve Helly Sayıları Helly ve Radon sayılarından yola çıkarak, aşağıdaki tanımlar ve bilinen özellikler kullanılır, soyut konvekslikte M. van de Hel tarafından yapılan kapsamlı incelemeden alıntı yapılmıştır. $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$ ise aynı X kümesi üzerindeki $\mathcal{F}$ konveksliği $\mathcal{G}$ konveksliğinden incedir.

Teorem 4.1.6.1. X kümesinde, $\mathcal{F}$ konveksliği $\mathcal{G}$ konvekslikten daha ince ise, Helly ve Radon sayıları $h(X, \mathcal{F}) \geq h(X, \mathcal{G})$ ve $r(X, \mathcal{F}) \geq r(X, \mathcal{G})$'yi sağlar. Bir $(X, \mathcal{F})$ konvekslik yapısı ve bir $Y \subseteq X$ altkümesi $\mathcal{F}|Y$ konveksliğiyle bağlıdır. $F \in \mathcal{F}$ için tüm $F \cap Y$'nin ailesidir. Buna ilişkin gövde formülü tüm $T \subseteq Y$ için $co_{\mathcal{F}|Y}(T) = co_{\mathcal{F}}(T) \cap Y$ olduğunu ifade eder. Buna ilişkin bir konveksliği sağlayan Helly ve Radon sayıları:

Teorem 4.1.6.2. $(X,\ \mathcal{F})$ konveks bir yapı ve $Y \in \mathcal{F}$ ise $h(X,\ \mathcal{F}|Y) \leq h(X,\ \mathcal{F})$ ve $r(X,\ \mathcal{F}|Y) \leq r(X,\ \mathcal{F})$ (Queyranne ve Tardella, 2015).

Calder tarafından Helly sayısının kullanışlı karakterizasyonunu aşağıda verilmiştir:

Teorem 4.1.6.3. Her $n \geq 1$ tamsayısı için, $(X,\ \mathcal{F})$ konveks yapısının Helly sayısı olan $h(X,\ \mathcal{F}) \leq n$'yi karşılaması için gerek ve yeter koşul $|T| > n$ ile tüm $T \subseteq X$ için

$$\bigcap_{a\in T} co_F(T\backslash\{a\}) \neq \emptyset.$$

$\bigcap_{a\in T} co_F(T\backslash\{a\}) = \emptyset$ ise, X'in T alt kümesinin H-bağımsız olduğu söylenebilir. Dolayısıyla, $h(X,\ \mathcal{F})$ Helly sayısının, X'in H-bağımsız bir alt kümesinin maksimum kardinalitesi olduğu kastedilir. H-bağımsız bir kümenin bir alt kümesi kendisinin H-bağımsız kümesinin kendisidir, yani H-bağımsız kümenin tüm elemanlarının özelliğini içermektedir (Calder, 1971).

Tanım 4.1.6.3 Yarıkafes Konvekslik İçin Helly ve Radon Sayıları

Kısmi sıralı bir kümede zincir, S'nin bir kısmi sıralı kümesidir. Bir $(S, \leq)$kısmi sırlı kümesinin $depth(S)$ derinliği, S'de bir zincirin maksimum kardinalitesidir (S keyfi uzun zincir içeriyorsa $depth(S) = +\infty$).

Teorem 4.1.6.4. S yarıkafesindeki bir işlem üzerindeki altyarıkafes konveksliğin $h(S, \mathcal{M}_S)$ Helly sayısı $depth(S)$'ye eşittir (Queyranne ve Tardella, 2015).

Sonuç 4.1.6.1. L kafes üzerinde $\mathcal{L}$ Altkafes konveksliğin $h(L, \mathcal{L})$ Helly sayısı $depth(L)$'ye eşittir.

İspat. $h(L, \mathcal{L}) \geq depth(L)$ eşitsizliği L'de her sonlu zincirden dikkate alınır. Çünkü $\mathcal{M}$ altyarıkafes konveksliğindeki bir işlem L'nin işlem tarafından tanımlanır. L bu altkafes konvekslikten incedir. Buradan $h(L, \mathcal{L}) \leq h(L, \mathcal{M}) = depth(L)$ kastedilir.

■

Sonuç 4.1.6.2. (i) Bir $(S, \leq)$ yarıkafesin $\mathcal{M}$ altyarıkafes konveksliğinin Radon sayısı $r(S,\ \mathcal{M}) \geq depth(S) + 1$ olduğunu ifade eder.

(ii) Bir $(L, \mathcal{L})$ kafesin $\mathcal{L}$ altkafes konveksliğinin Radon sayısı $r(L, \mathcal{L}) \leq depth(L) + 1$ olduğunu kasteder.

Tanım 4.1.6.4. $\mathbb{B}^n$, $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{Z}^n$'deki Tüm Altkafes Konvekslikler İçin Helly ve Radon Sayıları

Aşağıdaki teoremde $\mathbb{B}^n$, $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{Z}^n$'deki altkafes konvekslikler için Helly ve Radon Sayıları verilmektedir.

Teorem 4.1.6.5. Tüm $n \geq 1$ tam sayıları için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$(i)h(\mathbb{B}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{B}}{}^n) = h(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L}^{\natural}{}_{\mathbb{Z}}{}^n) = h(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^{\natural}{}_{\mathbb{R}}{}^n) = h(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}{}^n \cap \mathcal{C}) = h(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}) = n + 1$;

(ii) $r(\mathbb{B}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{B}}{}^n) = r(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L}^{\natural}{}_{\mathbb{Z}}{}^n) = r(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^{\natural}{}_{\mathbb{R}}{}^n) = r(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}{}^n \cap \mathcal{C}) = r(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}) = n + 2$;

(iii) $h(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}{}^n) = r(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}{}^n) = h(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}{}^n) = r(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}{}^n) = +\infty$ (Queyranne ve Tardella, 2015).

Sonuç 4.1.6.3. Tüm $n \geq 1$ tam sayıları için aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

(i) $n + 1 \leq h(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L} \cap \mathcal{C} \mid \mathbb{Z}^n) \leq 2^n$

(ii) $n + 2 \leq r(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L} \cap \mathcal{C} \mid \mathbb{Z}^n) \leq r(\mathbb{Z}^n, \mathcal{C})$ (Queyranne ve Tardella, 2015).

Teorem 4.1.6.6. (i) $n \leq 3\ için\ h(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L} \cap \mathcal{C}\ |\mathbb{Z}^n) = 2^n$ ve

(ii) $r(\mathbb{Z}^2, \mathcal{L} \cap \mathcal{C}\ |\mathbb{Z}^2) = 6$ (Queyranne ve Tardella, 2015).

Tanım 4.1.6.5. Altkafes Konvekslik İçin Carathéodory Sayıları

Verilen bir $(X, \mathcal{F})$ konvekslik yapısı, $co_{\mathcal{F}}(T) \subseteq \bigcup_{a \in T} co_{\mathcal{F}}(T\{a\})$ ise $T \subseteq X$ C-bağımlıdır ve aksi durumda C-bağımsızdır denir. Bu nedenle $c(X, \mathcal{F})$ Carathéodory sayısı, C-bağımsız bir altkümenin en geniş kardinalitesine eşittir. Bu konvekslikte aşağıdaki genel sonucu kullanacağız:

Teorem 4.1.6.7. $(X, \mathcal{F})$ bir konvekslik yapısı ve $Y \subseteq X$ ise, $c(Y, \mathcal{F}|Y \leq c(X, \mathcal{F})$ (Queyranne ve Tardella, 2015).

Bir $\mathcal{L}$ kafesin $c(X, \mathcal{L})$ Carathéodory sayısı genişliği ile tanımlanır. $\mathcal{L}$Q kısa notasyonu ile bir $(L, \leq)$ kafeste $Q \subseteq L$ altkümesinin $co_{\mathcal{L}}$(Q) altkafes gövdesi belirtilir. Bazı I indeks kümeleri için $\bar{x} = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} q^{i,j}$ gibi $\bar{x} \in \mathcal{L}$Q ile ifade edilebildiğini varsayalım. $q^{i,j}$ noktası $\bar{x}$'i oluşturur. $\mathbb{R}^n$'de tüm 0'a eşit bileşenler ile d-vektörü 0 olarak belirtilir ve 1'e eşit olan tüm bileşenler ile 1 olduğu belirtilir.

Tanım 4.1.6.6. Boolean Altkafes Konvekslik İçin Carathéodory Sayıları

Teorem 4.1.6.8. Her pozitif n tam sayısı için $(\mathbb{B}^n, \mathcal{L})$ konvekslik yapısının Carathéodory sayısı $(\mathbb{B}^n, \mathcal{L}) = max \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor, n$ (Queyranne ve Tardella, 2015).

Tanım 4.1.6.7. $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{Z}^n$'de Altkafes Konveksliker İçin Carathéodory Sayıları

$\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{Z}^n$'de altkafes konveksliklerin Carathéodory sayılarının değerlendirmesi yapılacaktır, yani, $(\mathbb{R}^n, \leq)$ ve $(\mathbb{Z}^d, \leq)$ kafeslerinin genişliklerinin değerlendirmesi - yapılacaktır.

İlk gösterilecek olan bu iki sayının eşit olduğudur: $c(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L}) = c(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$ (Queyranne ve Tardella, 2015).

İspat. T, $(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L})$'nin sonlu bir C-bağımsız kümesi olsun. Tam sayı noktalarının birleşiminden ve cebirsel kafeslerde eleman çiftleri arasındaki bir işlem, $co_{(\mathbb{Z}^n,\mathcal{L})}(T) = co_{(\mathbb{R}^n,\mathcal{L})}(T)$ tam sayı noktalarıdır. Buradan T, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$'de C-bağımsızdır, $c(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L}) \leq c(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$ olduğunu kasteder. Aksine T, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$'nin sonlu bir C-bağımsız kümesi olsun. Her $i \in D$ için $v_{i,1} \leq v_{i,2} \leq \cdots \leq v_{i,k(i)}$ ile $\pi_i T = v_{i,1}, \ldots, v_{i,k(i)}$ gibi T'nin i-inci izdüşüm koordinatı yazılır. Kartezyen çarpımda her x kümesi için $V = \otimes_{i=1}^{d} \pi_i T$, $\alpha(x)_i = j$ tarafından bir $\alpha(x) \in K = \otimes_{i=1}^{d} 1,2, \ldots, k(i) \subseteq \mathbb{Z}^d$ tam sayı noktası tanımlanması için $x_i = v_{i,j}$'dir. Burada $\alpha\colon V \to K$ bir izomorfik kafestir. $\alpha(T)$, $|\alpha(T)| = |T|$ ile, $(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L})$'de C-bağımsız bir kümedir, $c(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L}) \leq c\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\big)$'yi ifade eder.

■

Teorem 4.1.6.9. Her n pozitif tam sayısı için $\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\big)$ ve $\big(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L}\big)$ konvekslik yapılarının Carathéodory sayıları

$$c\big(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L}\big) = c\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\big) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + n$$

biçimindedir (Queyranne ve Tardella, 2015).

Tanım 4.1.6.8. Konveks Altkafes Konvekslikler İçin Carathéodory Sayıları

Bu bölümde $\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L} \cap \mathcal{C}\big)$ ve $\big(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L} \cap \mathcal{C}\,\big|\mathbb{Z}^n\big)$ konvekslik yapılarının Carathéodory sayıları değerlendirilecektir.

$n = 2$ ile başlansın. Verilen iki $a, b \in \mathbb{R}^2$ noktalarında,

$$box(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : a \wedge b \leq x \leq a \vee b\}$$

Aşağıda $n = 2$ için Carathéodory sayılarında hesaplama ve $n \geq 3$ için analiz yapılacaktır.

Teorem 4.1.6.10. $n = 2$ iken, konveks altkafes $\big(\mathbb{R}^2, \mathcal{L} \cap \mathcal{C}\big)$ ve $\big(\mathbb{Z}^2, \mathcal{L} \cap \mathcal{C}\,\big|\mathbb{Z}^2\big)$ konvekslik yapılarının Carathéodory sayıları $c\big(\mathbb{R}^2, \mathcal{L} \cap \mathcal{C}\big) = c\big(\mathbb{Z}^2, \mathcal{L} \cap \mathcal{C}\,\big|\mathbb{Z}^2\big)$'dir.

$n \geq 3$ için $\mathbb{R}^n$'deki konveks altkafes gövde elemanı problemi çözülüp bir algoritma sunulacaktır. Verilen $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ve bir $x \in \mathbb{R}^n$ noktası, $x \in \mathcal{L}\, conv\, Q$ olsa da olmasa da değerlendirilir. $x \in \mathcal{L}\, conv\, Q$ ise algoritma bir $R \subseteq Q$ altküme sertifikasına döner öyle ki $x \in \mathcal{L}\, conv\, Q$ ve $|R| \leq \tau(n) + 1$ boyutu ile; burada, $\tau(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + n$. Burada $c\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L} \cap \mathcal{C}\big) \leq \tau(n) + 1$ olduğu ifade edilir. Bu algoritma ve açınım Bölüm 4.2'deki gibidir ama bazı önemli farklılıklar ile buradaki gibidir.

Teorem 4.1.6.11. Her $n \geq 3$ için $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L} \cap C)$ konvekslik yapısının Carathéodory sayısı

$$2\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \leq (\mathbb{R}^n, \mathcal{L} \cap C) = (\mathbb{Z}^n, \mathcal{L} \cap C|\mathbb{Z}^n) \leq 2\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + n + 1$$

şeklindedir (Queyranne ve Tardella, 2015).

Konvekslik	Değişmezler		
	Helly sayısı $h(n)$	Radon sayısı $r(n)$	Carathéodory sayısı $c(n)$
Standart $(\mathbb{R}^n, C)$	$n+1$ (Helly, 1923)	$n+2$ (Radon, 1921)	$n+1$ (Carathéodory, 1921)
Tamsayı $(\mathbb{Z}^n, C \mid \mathbb{Z}^n)$	2^n Doignon (1973)	$r(n) \leq (2^n - 1) + 3$ Sierksma (1977) $r(n) \geq 5.2^{n-2} + 1$, $r(2) = 6$ Onn (1991) $r(3) \leq 17$ Bezdek ve Blokhuis (2003)	$n+1$ Doignon (1973)
Box $(\mathbb{R}^n, B)$ $(\mathbb{Z}^n, B)$	2 Soltan (1976)	$min\left\{m: \frac{m}{\lfloor m/2 \rfloor} > 2n\right\}$ Eckhoff (1969)	n Reay (1970)
Max-plus $(\mathbb{R}^n, \boldsymbol{M}^+)$ $(\mathbb{R}^n_{max}, \boldsymbol{M}^+)$	$n+1$ Briec ve Horvath (2004) Gaubert ve Sergeev (2007)	$n+2$ Butkovič (2003) Gaubert ve Meunier (2008)	$n+1$ Develin ve Sturmfels (2004)

Şekil 4.1.6.1. İlgili Konvekslikler İçin Bilinen Sonuçlar (Queyranne ve Tardella, 2015)

Konvekslik	Değişmezler		
	Helly sayısı $h(n)$	Radon sayısı $r(n)$	Carathéodory sayısı $c(n)$
Altkafes $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L})$ $(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L})$	$+\infty$	$+\infty$	$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + n$
Konveks Kafes $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L} \cap C)$ $(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L} \cap C)$	$n+1$ $n+1 \leq h(n) \leq 2^n$, $n \leq 3$ için 2^n	$n+2$ $n+2 \leq r(n) \leq r(\mathbb{Z}^n, C \mid \mathbb{Z}^n)$, $r(2) = 6$	$2\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \leq c(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L} \cap C)$ $\leq c(\mathbb{R}^n, \mathcal{L} \cap C)$ $\leq 2\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + n + 1$, $c(\mathbb{R}^2, \mathcal{L} \cap C)$
İntegral L-doğal $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^\natural)$ $(\mathbb{Z}^n, \mathcal{L}^\natural)$	$n+1$	$n+2$	$max\left\{\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor, n\right\} \leq c(n)$ $\leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$
Boolean Kafesi $(B^n, \mathcal{L})$	$n+1$	$n+2$	$max\left\{\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor, n\right\}$

Şekil 4.1.6.2. 2015'te Bulunan Sonuçlar (Queyranne ve Tardella, 2015)

4.2. Helly Teoremi'nin Bazı Uygulamaları

Teorem 4.2.1. Düzlemde her üçlüsünü, yarıçapı 1 olan daire ile örtmek mümkün olan k tane $M_1, M_2, \dots, M_k$, $(k \geq 3)$ noktaları verilmiştir. Bu noktaların tümünü örten birim daire vardır (Yusubov, Fatullayev 2002).

İspat. M merkezli birim dairenin merkezleri $M_1, M_2, \dots, M_k$'de olan birim dairelerin M noktasını içermesi teoremin doğruluğu için hem gerekli hem de yeterlidir. O halde bu problem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

"Düzlemde merkezleri $M_1, M_2, \dots, M_k$'de olan birim dairelerin üçer – üçer arakesitleri boş değilse, onların hepsinin arakesitinin boş olmadığını gösteriniz." Bu ise Helly teoreminden başka bir şey değildir. Daireleri $D_1, D_2, \dots, D_k$ olarak işaretlersek,
$D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_k \neq \emptyset$ ve her $\mathrm{M} \in D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_k$ merkezli birim D dairesi, $M_1, M_2, \dots, M_k$ noktalarının hepsini içerecektir.

■

Teorem 4.2.2. (TÜBİTAK BAYG Problem Semineri 96/6, Teorem 4.7.3.) $k > 2$ olmak üzere, $\mathbb{R}^2$'de k tane farklı $M_1, M_2, \dots, M_k$ noktaları verilmiş olsun. Bu noktaların ikişer-ikişer birbirinden olan uzaklıklarının en büyüğüne D, en küçüğüne ise d diyelim. Bu durumda $D > \frac{\sqrt{3}}{2} d\left(\sqrt{k} - 1\right)$'dir.

İspat. Bu noktaların her birini merkez alarak, k tane $\frac{\sqrt{3}}{3} D$ yarıçaplı daireler çizelim. Bu dairelerin her üçlüsünün en az bir kesişme noktası vardır. Helly Teoremi'ne göre bu dairelerin hepsinin en az bir ortak noktası vardır. Bu ortak nokta merkez alınarak çizilen $\frac{\sqrt{3}}{3} D$ yarıçaplı C dairesi k tane noktanın tümünü örtecektir. k tane noktanın her birini merkez alarak $\frac{d}{2}$ yarıçaplı daireler çizelim. Bu daireler birbirlerini örtmezler ve alanları toplamı $k\pi\left(\frac{\mathrm{d}}{2}\right)^2$'dir. $\frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{d}{2}$ yarıçaplı ve merkezi C dairesi merkezi ile çakışık olan bir daire ise bu dairelerin hepsini örtecektir. Buna göre de,

$\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{d}{2}\right)^2 > k\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ ve $\frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{d}{2} > \sqrt{k}\frac{d}{2}$ ve buradan $D > \frac{\sqrt{3}}{2} d\left(\sqrt{k} - 1\right)$ elde edilir.

■

Teorem 4.2.3. $k > 3$ olmak üzere, $\mathbb{R}^3$'te k tane $M_1, M_2, \dots, M_k$ farklı noktaları verilmiş olsun. Bu noktaların ikişer-ikişer birbirinden olan uzaklıkların en büyüğüne D, en küçüğüne ise d diyelim. Bu durumda $D > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} d\left(\sqrt[3]{k} - 1\right)$'dir (Yusubov, Fatullayev 2002).

İspat. Her ikilisi arasında D mesafe olan dört noktadan (düzgün dörtyüzlünün tepelerinden) geçen sferanın yarıçapı $R = \frac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ olduğundan, merkezleri verilen noktalarda ve yarıçapları $R = \frac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ olan kürelerin dörder-dörder arakesitleri boş olmayacaktır. O halde üç boyutlu Helly Teoremi'ne göre bu kürelerin hepsinin en az ortak bir M noktası vardır. O halde merkezi M'de ve yarıçapı $R = \frac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ olan küre $M_1, M_2, \ldots, M_k$ noktalarının hepsini örtecektir. Merkezleri $M_i\left(i = \overline{1,k}\right)$ noktalarında ve yarıçapları $\frac{d}{2}$ olan küreler birbirini örtmezler ve toplam hacimleri $k\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{k\pi d^3}{6}$ olacaktır. Öte yandan merkezi M'de ve yarıçapı $R = \frac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{d}{2}$ olan bir küre bu küçük kürelerin hepsini içerdiğinden $\frac{4}{3}\pi\left[\frac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{d}{2}\right]^3 > \frac{k\pi d^3}{6}$ veya $D > \frac{\sqrt{3}}{2}d\left(\sqrt{k} - 1\right)$ elde edilir.

■

Helly teoreminin bir sonraki uygulamasını söylememiz için bir yardımcı önermeye ihtiyacımız var.

Önerme 4.2.1. Düzlemde $[A_1B_1], [A_2B_2] ve [A_3B_3]$ üç doğru parçası üç noktada kesişiyor ise, düzlemde öyle bir M noktası var ki,

$$\begin{cases} |A_1M| + |MB_1| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}|A_1B_1| \\ |A_2M| + |MB_2| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}|A_2B_2| \\ |A_3M| + |MB_3| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}|A_3B_3| \end{cases}$$

eşitsizlikler sistemini sağlıyor (Yusubov ve Fatullayev, 2002).

Teorem 4.2.4. Düzlemde n tane $[A_i, B_i]$ parçalarından her üçlüsü farklı üç noktada kesişiyor ise, bu düzlemde tüm $[A_i, B_i]$ parçaları için

$$|A_iM| + |MB_i| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}|A_iB_i|, i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

eşitsizlikler sistemini sağlayan bir M noktası vardır (Yusubov, Fatullayev 2002).

İspat. Düzlemde $|A_iX| + |XB_i| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}|A_iB_i|$ eşitsizliğini sağlayan $X \in \mathbb{R}^2$ noktaları, odak noktaları A_i, B_i büyük çapı $\frac{2}{\sqrt{3}}|A_iB_i|$ olan bir elipsin noktasıdır. Önerme 4.2.1'e göre problemin koşullarında bu elipslerden keyfi üç tanesinin ortak noktası vardır. O halde Helly teoremine göre bunların hepsinin de ortak bir M noktası var ki, bu nokta her $i = \overline{1,n}$ için (1) eşitsizliğini sağlayacaktır.

■

Teorem 4.2.5. $\mathbb{R}^n$'de $k > n$ olmak üzere k tane $M_1, M_2, \ldots, M_k$ noktaları veriliyor. Bu noktaların ikişer – ikişer birbirinden olan uzaklıklarının en küçüğü d, en büyüğü D ise

$$D > d\sqrt{\frac{n+1}{2n}\left(\sqrt[n]{k}-1\right)}$$

olur.

İspat. Her ikilisi arasında D mesafe olan k noktadan geçen n boyutlu kürenin yarıçapı $R=\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}d$ olduğundan merkezleri verilen noktalarda ve yarıçapları $R=\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}d$ olan kürelerin k'er k'er arakesitleri boş olmayacaktır. O halde Helly Teoremi'ne göre bu kürelerin hepsinin en azından ortak bir M noktası var. O halde merkezi M'de ve yarıçapı $R=\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}d$ olan küre $M_1, M_2, \ldots, M_k$ noktalarının hepsini örtecektir. Merkezleri M_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ noktalarında ve yarıçapları $\frac{d}{2}$ olan küreler birbirini örtmezler ve toplam hacimleri

$$k\frac{\pi^{n/2}\left(\frac{d}{2}\right)^{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

olacaktır. Öte yandan merkezi M'de ve yarıçapı

$$R=\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}d+\frac{d}{2}$$

olan bir küre bu küçük kürelerin hepsini içerdiğinden

$$\frac{\pi^{n/2}\left(\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}D+\frac{d}{2}\right)^{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} > k\frac{\pi^{n/2}\left(\frac{d}{2}\right)^{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

olur. Buradan

$$\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}D+\frac{d}{2} > \frac{d}{2}\sqrt[n]{k}$$

yazılabilir. Böylece

$$D > \sqrt{\frac{n+1}{2n}}d\left(\sqrt[n]{k}-1\right)$$

elde edilir.

■

Teorem 4.2.6. $\mathbb{R}^3$'te k tane $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}$ yarıçaplı küreler verilmiş ve ve kürelerin bu düzlem üzerindeki izdüşümlerinin her üçlü kesişimleri ortak noktaya sahip olacak biçimde bir düzlem olsun. Bu durumda

(i) Kürelerin hepsini aynı anda kesen bir doğru vardır.

(ii) Simetri ekseni izdüşüm yönünde olan ve tüm küreleri içine alan en küçük silindirin yarıçapı r

$$1 \le r \le \frac{3}{2}$$

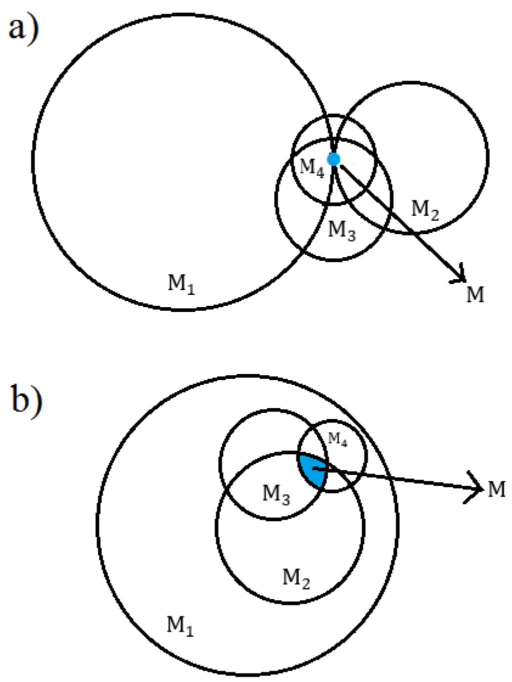
sağlar.

İspat. Yarıçapları $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}$ olan küreleri, sırası ile $B_1, B_2, B_3 \dots, B_k$ ile, bunların verilen düzlem üzerindeki izdüşümlerin de $M_1, M_2, \dots, M_k$ ile gösterelim.

(i) $M_1, M_2, \dots, M_k$ kümelerinin üçer – üçer kesişmeleri boş değilse, Helly Teoremi'ne göre

$$M = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k \neq \emptyset$$

doğrudur. Duruma göre M kümesi tek noktadan da oluşabilir (Şekil 4.2.6 (a)), sonsuz küme de olabilir (Şekil 4.2.6 (b)).



Şekil 4.2.6. $k = 4$ durumunda oluşabilen $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4$ kümesi için iki farklı durum.

Bu durumda $a \in M$ noktasından geçen, izdüşüm yönüne paralel olan her doğru $B_1, B_2, B_3 \dots, B_k$ yuvarlarının her birini keseceği açıktır.

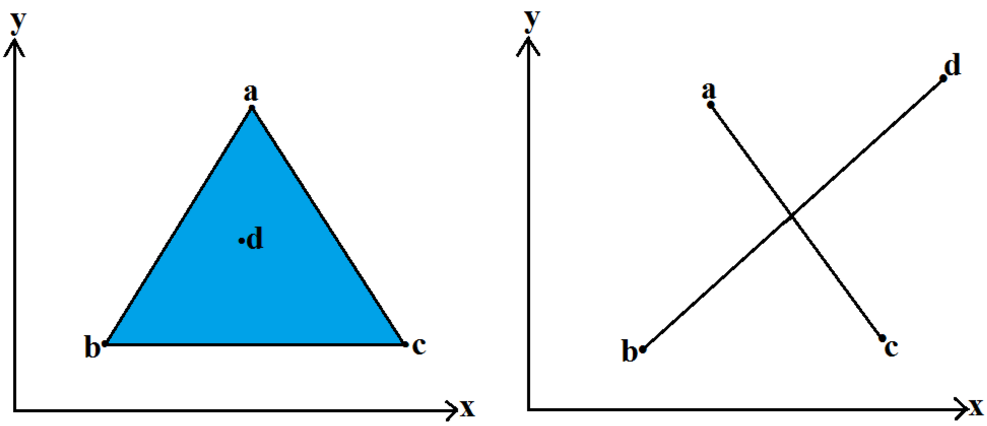
(ii) İzdüşüm düzlemi üzerindeki M_1 dairesi diğer daireleri içeriyorsa (örneğin Şekil 4.2.6 (a) gibi) $B_1, B_2, B_3 \dots, B_k$ yuvarlarını içeren en küçük silindirin yarıçapı $r = 1$ olur.

M_2 dairesi M_1'in dışında kalmakla M_1'e teğet oluyorsa (örneğin Şekil 4.2.6 (b) gibi) tüm yuvarları içine alan en küçük silindirin yarıçapı $r = \frac{3}{2}$ olur.

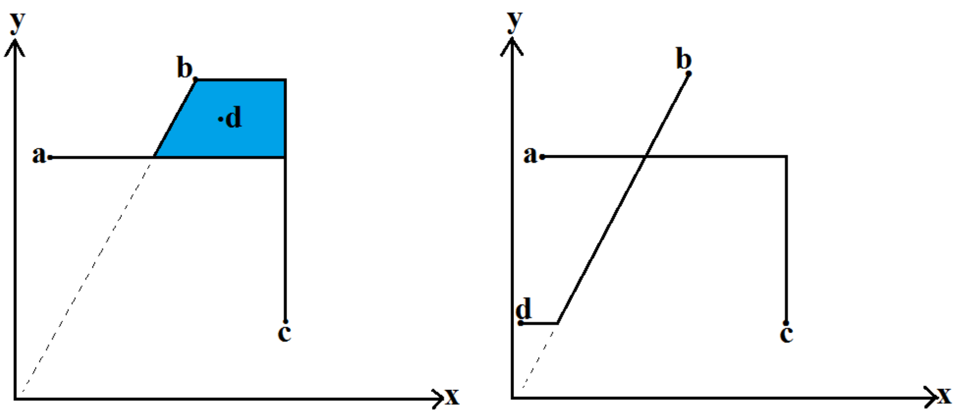
Geriye kalan tüm durumlarda r değeri bu iki değerin arasında kalacağı açıktır.

■

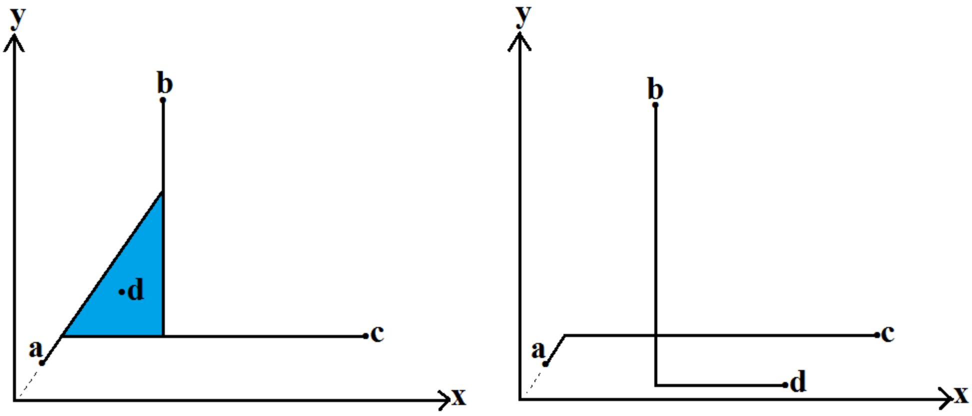
4.3. Bazı Konvekslik Sınıfları İçin $\mathbb{R}^2$'de Radon Teoremi'nin Grafikler Üzerinde Açıklanması



Şekil 4.3.1. Konveks Kümeler İçin Radon Teoremi'nin Açıklanması



Şekil 4.3.2. $\mathbb{B}$-konveks Kümeler İçin Radon Teoremi'nin Açıklanması



Şekil 4.3.3. $\mathbb{B}^{-1}$-konveks Kümeler İçin Radon Teoremi'nin Açıklanması

4.4. Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri Arasındaki İlişkiler

4.4.1. Carathéodory ve Helly Teoremlerinin Eşdeğerliliği

Bu bölümde, metrik fonksiyonlarının alt diferansiyel özelliklerine dayanan Carathéodory ve Helly Teoremlerinin eşdeğerliliği incelenecektir. İki yararlı lemma aşağıdaki gibidir (Robinson, 2014).

Lemma 4.4.1.1. Ω_i, $i = 1, \dots, m$, $\mathbb{R}^n$'de boş olmayan kapalı konveks kümeler olsun. Ω_i kümelerinden en az biri sınırlıysa, maksimum

$$f(x) \coloneqq max\{d(x;\Omega_i)|i = 1, \dots, m\}, x \in \mathbb{R}^n \qquad (4.4.1.1)$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$'de mutlak minimuma sahiptir.

İspat. $\gamma \coloneqq inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) \geq 0$ olmasından, γ'nın bir reel sayı olduğu açıktır. $\{x_k\}$, $\mathbb{R}^n$'de limit sağlayan bir dizi olsun, böylece $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \gamma$. Genellik kaybedilmeden, Ω_1'in sınırlı olduğu varsayılsın. Limit tanımına göre, bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki, her $k \geq k_0$ için $0 \leq d(x;\Omega_1) \leq f(x_k) < \gamma + 1$ olur.

$\|x_k - \omega_k\| = d(x_k;\Omega)$ olmak üzere, $\omega_k \in \Omega_1$ için, $\|x_k - \omega_k\| \leq \gamma + 1$ elde edilir ve dolayısıyla her $k > k_0$ için $\|x_k\| \leq \|\omega_k\| + 1$ alınır. Ω_1 sınırlılığından, $\{x_k\}$ dizisi de sınırlıdır, böylece bu dizinin bir $\bar{x}$'e yakınsak bir $\{x_{k_l}\}$ alt dizisine sahip olduğu varsayılabilir. f fonksiyonunun sürekliliğinden her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\gamma = \lim_{l\to\infty} f(x_{k_l}) = f(\bar{x}) \leq f(x)$ olur. Bu nedenle, f fonksiyonu, $\bar{x}$'te mutlak bir minimuma sahiptir.

■

$$I(u) \coloneqq \{i = 1, \dots, m \mid d(u;\Omega_i) = f(u)\}$$

ile (4.4.1.1)'de verilen f fonksiyonuyla ilişkili u'da aktif indis kümesi tanımlanır.

Lemma 4.3.1.2. Ω_i, $i = 1, \ldots, m$, $\cap_{i=1}^{m} \Omega_i = \emptyset$ ile, boş olmayan, kapalı konveks kümeler olsun. f fonksiyonu (4.4.1.1)'de tanımlansın. Bu durumda, f, $\bar{x}$'te mutlak minimuma sahip olması için gerek ve yeter koşul $\omega_i := \prod(x; \Omega_i)$ olmak üzere, $\bar{x} \in co\{\omega_i \mid i \in I(\bar{x})\}$ olmasıdır.

İspat. $\cap_{i=1}^{m} \Omega_i = \emptyset$ varsayımı her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = max\{d(x; \Omega_i) \mid i = 1, \ldots, m > 0\}$ ve her $i \in I(x)$ için $x \notin \Omega_i$ anlamına gelir. Bu durumda f fonksiyonu $\bar{x}$'te mutlak minimuma sahiptir ancak ve ancak

$$0 \in \partial f(\bar{x}) = co\{\partial d(x; \Omega_i) \mid i \in I(\bar{x})\} = co\left\{\frac{\bar{x} - \omega_i}{d(\bar{x}; \omega_i)} \mid i \in I(\bar{x})\right\}$$

dir. Her $i \in I(\bar{x})$ için $f(\bar{x}) = d(\bar{x}; \Omega_i) > 0$ için, bu ortak değeri r ile gösterilebilir. Öyle $i \in I(\bar{x})$ vardır ki,

$$0 = \sum_{i \in I(x)} \lambda_i \frac{\bar{x} - \omega_i}{r}, \bar{x} \in co\{\omega_i \mid i \in I(\bar{x})\}$$

sağlanır ve bu durumuna eşdeğer olan

$$\sum_{i \in I(x)} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0$$

vardır.

■

Şimdi, bu bölümün ana teoremi kanıtlanmaya hazırdır, yani burada Carathéodory Teoremi ve Helly Teoremi'nin tarif edilen anlamda eşdeğer olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.4.1.1. Aşağıdakiler göz önüne alınsın:

(i) Carathéodory Teoremi: Boş olmayan, konveks bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $\bar{x} \in coA$ için, $\lambda_i \geq 0$ olacak şekilde ve $\omega_i \in \Omega$, i = 1, ..., n vardır. Böylece

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \omega_i.$$

(ii) Helly Teoremi: $\mathbb{R}^n$'de boş olmayan kapalı, konveks kümelerin herhangi bir $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_m\}, m \geq n + 2$ koleksiyonu için, bu koleksiyondan herhangi bir $n + 1$ kümesinin kesişiminin boş olmaması durumunda, bir

$$\bigcap_{i=1}^{m} \Omega_i \neq \emptyset$$

vardır.

Bu durumda (i) ve (ii) ifadeleri denktir ve bunun tersi de geçerlidir.

İspat. İlk olarak (ii) sağlandığı varsayılıp (i) ispatlansın. $i = 1, \dots, m$ için Ω_i'nin boş olmayan kapalı, konveks kümeler olduğu ve bunlardan en az birinin sınırlı olduğu durumu ele alınsın. $k \leq n + 1$ olmak üzere, tüm aileden alınan herhangi k sayıdaki kümenin kesişiminin boş olmadığını ifade eder. $\bigcap_{i=1}^{m} \Omega_i = \emptyset$ olduğu varsayılsın. (4.4.1.1) ile tanımlanan f fonksiyonunu ele alınsın. Burada $\bar{x}$, f'nin mutlak bir minimuma sahip olduğu $\mathbb{R}^n$'de bir nokta olsun. Bu nokta Lemma 4.4.1.1 tarafından var olmuştur. Lemma 4.4.1.2'den, $\omega_i \coloneqq \prod(\bar{x}; \Omega_i)$ olmak üzere,

$$\bar{x} \in co\{\omega_i \mid i \in I(\bar{x})\}$$

olur. Carathéodory Teoremi uygulandığında $J \subset I, |J| \leq n + 1$ için,

$$\bar{x} = \sum_{j \in J} \lambda_j \omega_i$$

olur. Tanımlanan

$$g(x) \coloneqq max\{d(x; \Omega_j) \mid j \in J\}$$

fonksiyonunda, $\cap_{j \in J} \Omega_j \neq \emptyset$, varsayımı verildiğinde bu kesişimde bir $\mathrm{g(u)} = 0$ olan u noktası vardır. Çünkü her $j \in J$ için $d(\bar{x}; \Omega_j) = r > 0$'dır, burada $r \coloneqq f(\bar{x}) = g(\bar{x}) > 0$, g fonksiyonuyla ilgili $\bar{x}$'te aktif indeks kümesi J'dir. Lemma 4.1.2.2.ye göre, g ile ilgili $\bar{x}$'te mutlak bir minimuma sahip olması ve dolayısıyla $0 < r = g(\bar{x}) \leq g(u) = 0$ olması gerekir. Bu çelişki (ii)'yi ifade eder.

Kümelerden en az birinin sınırlı olduğu varsayılamadığı bir durumda, $n + 1$ kümenin her kesişiminden bir eleman seçilir. $t > 0, B(0; t)$ kapalı küresi tüm bu noktaları kaplayacak şekilde yeterince büyük olsun. O halde sadece $\{\Theta_i \mid 1 = 1, \dots, m\}$, buradan $\Theta_i \coloneqq \Omega_i \cap B(0; t)$ koleksiyonu için önceki durumun uygulanması gerekmektedir.

Şimdi ise (ii)'den (i)'in nasıl çıkarılacağı gösterilecektir. Herhangi bir $\bar{y} \in co\Omega$ elemanı seçilsin. $\bar{y} \in \Omega$ ise, bu kendi başına konveks bir kombinasyondur, bu yüzden sonuç açıktır. $\bar{y} \in \Omega$ olduğu varsayılsın. Özellikle $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, kapalı ve sınırlı olduğu varsayılmayacaktır. Her bir $\bar{x} \in \Omega$ noktası için, $L_1(\bar{x})$ ve $L_2(\bar{x})$ ile $\bar{x}$'ten geçen, $\bar{x}$ ve $\bar{y}$'yi birbirine bağlayan doğruya dik olan sınırlayıcı hiper düzlem ile kapalı yarı-uzayları belirtildiğinde, burada $L_2(\bar{x}), \bar{y}$'yi içerir, yani,

$$L_1(\bar{x}) \coloneqq \{\omega \in \mathbb{R}^n \mid \langle \bar{x} - \bar{y}, \omega - \bar{x} \rangle \geq 0\},$$

$$L_2(\bar{x}) \coloneqq \{\omega \in \mathbb{R}^n \mid \langle \bar{x} - \bar{y}, \omega - \bar{x} \rangle \leq 0\}.$$

Şimdi

$$\bigcap_{x \in \Omega} L_l(\bar{x}) = \emptyset$$

olduğu gösterilsin. Bu kümenin boş olmadığı varsayılsın. O halde $\bar{z} \in \bigcap_{x\in\Omega} L_1(\bar{x})$, her x $\in \Omega$ için

$$\langle x - \bar{y}, \bar{z} - x \rangle \geq 0$$

olduğunu ifade eder. Bunu, her x $\in \Omega$ için,

$$\begin{aligned}\langle \bar{z} - \bar{y}, \bar{y} - x \rangle &= \langle \bar{z} - x + x - \bar{y}, \bar{y} - x \rangle = \langle \bar{z} - x, \bar{y} - x \rangle + \langle x - \bar{y}, \bar{y} - x \rangle \\ &= \langle \bar{z} - x, \bar{y} - x \rangle - \|x - \bar{y}\|^2 < 0\end{aligned}$$

olması takip eder ($\|x - \bar{y}\|^2$ not edilmesi gerekir, çünkü $\bar{y} \notin \Omega$).

$\bar{y} \in co\Omega$ olduğu için, $x_i \in \Omega$ ve i = 1, ..., m için $\lambda_i \geq 0$'dır öyle ki

$$\bar{y} \in \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \ ve \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

O halde

$$0 = \langle \bar{z} - \bar{y}, \bar{y} - \bar{y} \rangle = \langle \bar{z} - \bar{y}, \bar{y} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle \bar{z} - \bar{y}, \bar{y} - x_i \rangle < 0.$$

Bu çelişki

$$\bigcap_{x\in\Omega} L_1(\bar{x}) = \emptyset$$

olduğunu göstermektedir. Çünkü $L_1(\bar{x})$, her $\bar{x}$ için boş olmayan kapalı, konveks bir kümedir, (ii) ile $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \Omega$ var öyle ki

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} L_1(x_i) = \emptyset.$$

Ama bu da $y \in co\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ olduğunu ifade eder. Olmayana ergi yöntemi ile ispatlayalım. Bunun böyle olmadığı varsayılırsa, $a, b \in \mathbb{R}^n$ vardır öyle ki her i = 1, ..., n + 1 için $\langle a, \bar{y} \rangle > b$ ve $\langle a, x_i \rangle \leq b$. $\{\bar{y} - ta \mid t \geq 0\}$ şeklinde tanımlansın. O halde

$$\langle x_i - \bar{y}, \bar{y} - ta - x_i \rangle = \langle x_i - \bar{y}, \bar{y} - x_i \rangle - t\langle a, x_i - \bar{y} \rangle.$$

Böylece, bu ifadenin tüm $t > t_0$ ve tüm i için pozitif olduğu bir t_0 değer bulunabilir, ancak bu $\bigcap_{i=1}^{n+1} L_1(x_i) \neq \emptyset$ olduğunu ifade eder. Bu çelişki $\bar{y} \in co\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ olduğunu göstermektedir.

■

4.4.2. Carathéodory ve Radon Teoremlerinin Eşdeğerliliği

Bu bölümde, Carathéodory ve Radon Teoremlerinin eşdeğerliği incelenecek, böylece üç teoremin eşdeğerliği belirlenecektir.

Teorem 4.4.2.1. Aşağıdaki ifadeler değerlendirilsin:

(i) Carathéodory Teoremi: Boş olmayan konveks bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için, $\bar{x} \in coA$ ile, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ ile $\lambda_i \geq 0$ ve $i = 1, \dots, n+1$ için $\omega_i \in A$ vardır öyle ki

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \omega_i.$$

(ii) Radon Teoremi: Bir $\Omega \coloneqq \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ kümesi verilsin, $m \geq n+2$, $\mathbb{R}^n$'de, iki boş olmayan, ayrık $\Omega_1 \subset \Omega$ ve $\Omega_2 \subset \Omega$ altkümeleri var öyle ki

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ ve } co\Omega_1 \cap co\Omega_2 \neq \emptyset.$$

(i) ve (ii) ifadeleri eşdeğerdir (Robinson, 2014).

İspat. (i)⇒(ii): $m \geq n+2$ ile $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ tarafından tanımlanan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi değerlendirilsin. O halde

$$\frac{\omega_1 + \dots + \omega_m}{m} \in co\{\omega_1, \dots, \omega_m\}.$$

Carathéodory Teoremi tarafından, $\lambda_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ ile,

$$\frac{\omega_1 + \dots + \omega_m}{m} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \omega_i$$

şeklinde temsili vardır. Bunu

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \omega_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega_i$$

takip eder, burada $\beta_i = \frac{1}{m}, i = 1, \dots, m, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, ve her $i = n+2, \dots, m$ için $\lambda_i = 0$. Bu yüzden

$$\sum_{i=1}^{m} (\beta_i - \lambda_i) \omega_i = 0.$$

Yukarıdakiler

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \omega_i = 0$$

olarak yeniden yazılırsa, $\gamma_i = \beta_i - \lambda_i$ ile, $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 0$, burada her γ_i'ler sıfır değildir. O halde

$$\sum_{i \in I} \gamma_i x_i + \sum_{j \in J} \gamma_j x_j = 0,$$

burada $I := \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid \gamma_i > 0\}$ ve $J := \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid \gamma_i \leq 0\}$. I ve J'nin her ikisi de boş değildir. $\gamma := \sum_{i \in I} \gamma_i$ ve $\Omega_2 := \{\omega_j \mid j \in J\}$ şeklinde tanımlandığında

$$\gamma = -\sum_{j \in J} \gamma_j \ ve \ \frac{1}{\gamma} \sum_{i \in I} \gamma_i \omega_i = -\frac{1}{\gamma} \sum_{i \in I} \gamma_j \omega_j \in co\Omega_1 \cap co\Omega_2.$$

Bu noktada, Ω_1 ve Ω_2'nin Radon Teoremi'nin gereksinimlerin karşıladığı görülebilir.

Şimdi, Caratéodory Teoremi'nin Radon Teoremi'nden geldiği ispatlanmaya çalışılacaktır.

(ii)⇒(i): Herhangi $\bar{x} \in coA$ seçilsin. O halde $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ ile $i = 1, \ldots, m$ için $\lambda_i > 0$, vardır ve

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega_i,$$

burada tüm $i = 1, \ldots, m$ için $\omega_i \in A$ ve öyle ki m minimaldir.

$m \leq n + 1$ olduğu gösterilecektir. Bunun için öncelikle aksi varsayılsın, yani, $m > n + 1$. Radon Teoremi'nin $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ kümesine uygulandığı varsayılsın, genellik kaybedilmeden,

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \omega_i = \sum_{i=k+1}^{m} \gamma_i \omega_i,$$

burada $i = 1, \ldots, m$ için $\gamma_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i = \sum_{i=k+1}^{m} \gamma_i = 1$, $1 \leq k < m$. O halde

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \omega_i = 0$$

şeklindedir, burada $i = 1, \ldots, k$ için $\beta_i := \gamma_i$ ve $i = k + 1, \ldots, m$ için $\beta_i = -\gamma_i$. $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 0$ olduğunu görülmektedir. $i_0 \in 1, \ldots, k$ indisi seçilsin öyle ki

$$e := \frac{\lambda_{i_0}}{\beta_{i_0}} = min\left\{\frac{\lambda_i}{\beta_i} \mid i = 1, \ldots, k, \beta_i > 0 \ ile\right\}.$$

i = 1, ..., m için $\alpha_i \coloneqq \lambda_i - e\beta_i$ tanımlansın. O halde i = 1, ..., m için $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_{i_0} = 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ ve

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \omega_i.$$

Bu ise m'nin minimalliğine aykırıdır. İspat böylece tamamlanır.

■

4.4.3. Radon ve Helly Teoremleri Arasındaki İlişki

Bu bölümde Helly'nin Teoremini ve ispatı sunulacaktır. Aşağıda sunulan ispat, indüksiyon ve Radon Teoremi'ne dayanmaktadır.

Teorem 4.4.3.1. Helly Teoremi $\mathbb{R}^n$'de boş olmayan kapalı, konveks kümelerin herhangi bir $O := \{\Omega_1, \ldots, \Omega_m\}, m \geq n+2$ koleksiyonu için, bu koleksiyondan herhangi bir $n+1$ kümesinin kesişiminin boş olmaması durumunda,

$$\bigcap_{i=1}^{m} \Omega_i \neq \emptyset$$

olur.

İspat. Teoremi $|O|$ üzerine indüksiyonla kanıtlayacağız. $m = n+1$ için teoremin sonucu açıktır. İndüksiyon adımı için, teoremin $|O| = m \geq n+1$ için geçerli olduğu varsayalım. $\mathbb{R}^n, \Omega_1, \Omega_m, \ldots, \Omega_{m+1}$'deki konveks kümelerin bir koleksiyonu, kümelerin herhangi bir $n+1$'inin boş olmayan bir kesişme özelliğine sahip olduğu düşünelim. $i = 1, \ldots, m+1$ için aşağıdaki tanımlansın:

$$\Theta_i \coloneqq \bigcap_{j=1, j\neq i}^{m+1} \Omega_j,$$

bu durum $\Theta_i \subset \Omega_i$ özelliği olduğu durumda $j \neq i$ ve $i, j \in 1, \ldots, m+1$ için sağlanır. Hipotezden tarafından, $\Theta_i \neq \emptyset$, yani her bir $i \in 1, \ldots, m+1$ için $\omega \in \Theta_i$ elemanı vardır.

$W \coloneqq \{\omega_1, \ldots, \omega_{m+1}\}$ tanımlansın. Radon Teoremi W kümesine uygulandığında, iki boş olmayan, ayrık $W_1 \coloneqq \{\omega_i \mid i \in I_1\}$ ve $W_2 \coloneqq \{\omega_i \mid i \in I_2\}$ alt kümeleri bulunabilir. Bu alt kümeler takip eden şu özelliklere sahiptir: $W_1 \cup W_2 = W$ ve $coW_1 \cap coW_2 \neq \emptyset$. $\omega \in coW_1 \cap coW_2$ öğesi seçilebilir ve $\omega \in \bigcap_{i=1}^{m+1} \Omega_i \neq \emptyset$ gösterilecektir. Bunun yapılması için, önce $i \in I_1$ ve $j \in I_2$ için $i \neq j$ olduğunu not edelim, böylece $i \in I_1$ ve $j \in I_2$ olduğunda $\Theta_i \subset \Omega_i$ olduğunu ifade eder. Belirli $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, $i \in I_1$ için ve her $j \in I_2$ için $\omega_i \in \theta_i \subset \Omega_j$. Çünkü Ω_i konvekstir. Buradan $\omega \in coW_2 = \{\omega_i \mid j \in I_2\} \subset \Omega_i$ olur. Böylelikle herhangi bir $i \in I_1$ için $\omega \in \Omega_i$ vardır. Benzer bir argümanla $i \in I_2$ için $\omega \in \Omega_i$ de gösterilebilir.

■

Açıklama 4.4.3.1. (i) Teorem 4.4.2.1 (ii)'de sunulan Radon Teoremi'nde kabul edilen kapalılık özelliği gevşetilebilir, yani Teorem 4.4.2.1 ve Teorem 4.4.3.1'deki ifadeler aşağıdaki ifadeye eşdeğerdir:

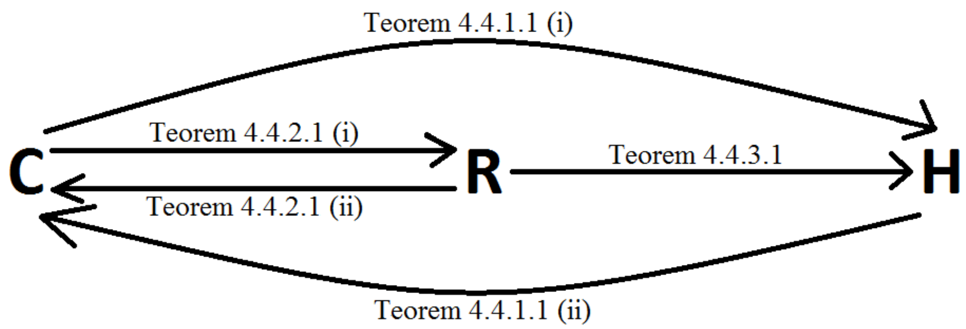
Herhangi boş olmayan bir $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, $m \geq n + 2$, konveks kümelerinin koleksiyonu için, $\mathbb{R}^n$'de bu koleksiyondan herhangi $n + 1$ kümenin kesişiminin boş olmadığı özelliği ile,

$$\bigcap_{i=1}^{m} \Omega_i \neq \emptyset$$

olur. Aslında, bu ifade açıkça Teorem 4.4.2.1 (ii) anlamına gelir ve Carathéodory Teoremi'nden gelir.

(ii) Bir sonraki adım olarak, mevcut araştırmaların genelleştirilmiş konvekslik kavramlarına taşınması mümkün olacaktır, örneğin H-konvekslik.

Aşağıdaki tablo ile konveks geometride Carathéodory, Radon ve Helly Teoremi'nin eşdeğerliği gösterilmiş olacaktır (Robinson, 2014).



Şekil 4.4. Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri Arasındaki İlişkinin Şematik Gösterimi (Robinson, 2014)

5. SONUÇLAR

5.1. Sonuçlar

Soyut konvekslik ile ilgili çalışmalar gün geçtikçe daha çok önem taşımaktadır. Bugüne kadar farklı matematikçiler bu alanda çok sayıda makaleler, kitaplar yayınlamış, bu alan ile ilgili çalışmalar yapılmış ve tezler savunulmuştur. Bu makalelerin, kitapların ve tezlerin büyük kısmını içeren literatür taraması yapılan bu tezde:

1. Günümüze kadar araştırılmış olan bazı soyut konveks kümeler ve fonksiyonlar incelenmiştir.
2. Carathéodory, Radon ve Helly'nin hayatı ve Matematiğe yapmış oldukları katkılarla ilgili bilgi verilmiştir.
3. Klasik konvekslikte Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri ispatlarıyla birlikte verilmiştir.
4. Max-Plus konvekslik için Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri incelenmiş ve ispatlarıyla birlikte verilmiştir.
5. $\mathbb{B}$-konvekslik için Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri ispatları ile verilmiştir.
6. $\mathbb{B}^{-1}$-konvekslik incelenmiş, $\mathbb{B}^{-1}$-konvekslik için Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri ispatları ile verilmiştir.
7. p-konvekslik ve bu konvekslik için Carathéodory Teoremi ispatı verilmiştir.
8. Altkafes konvekslik sınıfı için Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri ve ispatları verilmiş, ayrıca Carathéodory, Radon ve Helly sayıları da tablolarda belirtilmiştir.
9. Helly Teoremi'nin Yusubov ve Fatullayev tarafından yapılmış bazı uygulamaları verilmiştir.
10. Helly Teoremi'nin iki farklı uygulaması da tarafımızdan ifade edilmiş ve ispatlanmıştır (Teorem 4.2.5, Teorem 4.2.6).
11. $\mathbb{R}^2$'de verilen Konveks, $\mathbb{B}$-konveks, $\mathbb{B}^{-1}$-konveks kümeler için Radon Teoremi'nin resimlerle açıklaması gösterilmiştir (Bölüm 4.3).
12. Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri arasındaki ilişkiler ispatları ve şematik gösterimleri verilmiştir.

5.2. Öneriler

Tezdeki araştırmalar sonucu araştırmaya açık birçok öneri sunulabilir:

1. Matematik dünyası durmadan gelişmektedir. Doğal olarak Konveks Analiz alanında da yapılan araştırmalar sonucu yeni soyut konvekslik sınıfları oluşmaktadır. Bu çalışmalar da incelenerek tezdeki tarama listesi genişletilebilir.
2. Yeni soyut konvekslik sınıfları üretilebilir.
3. Yeni soyut konvekslik sınıfları için Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri incelenebilir.
4. Klasik konvekslikte verilen Carathéodory, Radon ve Helly Teoremleri arasındaki ilişkiler diğer soyut konvekslik sınıfları için de incelenebilir.

5. Tezde Helly Teoremi'nin bazı uygulamaları verilmiştir. Helly Teoremi'nin daha farklı uygulamaları verilebilir.
6. Carathéodory ve Radon Teoremlerinin de farklı uygulamaları ele alınabilir.
7. Tezde Konveks, $\mathbb{B}$-konveks, $\mathbb{B}^{-1}$-konveks kümeleri için Radon Teoremi'nin resimlerle açıklaması verilmiştir. Bu tür açıklamalar diğer soyut konvekslik sınıfları için de verilebilir.
8. Resimlerle açıklama Carathéodory ve Helly Teoremleri için de verilebilir.
9. Tez, bu alanda çalışma yapan araştırmalar için bir kaynak olabilir.

6. KAYNAKLAR

Adilov, G. and Yeşilce, I., 2016. *Caratheodory's Theorem for B^{-1}–Convex Sets*, 27, *Malaya Journal of Matematik*, 4(3), 444-447.

Adilov, G. and Rubinov, A., 2006. *B-Convex Sets and Functions. Numerical Functional Analysis and Optimization*, 27, (3-4), 237-257.

Adilov, G. and Kemali, S., 2009. *Abstract Convexity and Hermite-Hadamard Type İnequalities*. *Journal of İnequalities and Applications*, Article ID 943534, 2009a, 13pages, doi:10.1155/953534.

Adilov, G. and Tinaztepe, G., 2009. *The Sharpening Some Inequalities via Abstract Convexity. Mathematical Inequalities and Applications 2009b*, 12, 33-51.

Adilov, G.; Yesilce, I., 2010. *Some Inequalities for L(j)-convex Functions. Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications Proceeding Book*, 19-24.

Adilov, G., 2011. *Increasing Co-radiant Functions and Hermite-Hadamard Type Inequalities. Mathematical Inequalities and Applications*, 14, 1, 45-60.

Avriel, M., 1972. *r-convex Functions. Mathematical Programming 2*, 309-323.

Bastero, J. and Bernués, J.; Peña, A., 1995. *The Theorems of Carathéodory and Gluskin for 0<p<1*, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Volume 123, Number 1.

Beckenbach, E. F., 1937. *Generalized Convex Functions. Bull. Amer. Math. Soc*. 1937, 43, 363-371.

Beckenbach, E. F., 1948. *Convex Functions. Bull. Amer. Math. Soc*., 54, 439-460.

Beckenbach, E. F. and Bellman, R., 1961. *Inequalities, Springer*, Berlin.

Ben-Tal, A., 1977. *On Generalized Means and Generalized Convex Functions*. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 21, (1), 1-13.

Berkovitz, L. D., 2002. *Convexity and Optimization in* . Wiley, New York.

Bertsekas, D. P. and Nedic, A., 2003. *Convex Analysis and Optimization, Athena Scientic.*

Bessenyei, M., 2008. *Hermite-Hadamard-Type Inequalities For Generalized Convex Functions*. *Journal of Inequalities In Pure and Applied Mathematics*, 9.

Boerner, H., 1970. *Biography in* Dictionary of Scientific Biography *(for Carathéodory)*, New York.

Borwein, J. M. and Lewis, A. S., 2000. *Convex Analysis and Nonlinear Optimization, Theory and Examples, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics Springer*, New York.

Boyd, S. and Vandenberghe, L., 2004. *Convex Optimization, Cambridge University Press*, Cambridge, MA.

Briec, W., Horvath, C. D. Rubinov, A. M., 2004. *B-convexity, Optimization* Vol. 53, No. 2, pp. 103 127, University of Perpignan, 52 avenue Villeneuve, 66860 Perpignan cedex, France.

Briec, W., Horvath, C. D., Rubinov, A. M., 2005. *Separation in B-convexity*. Pacific J. Optimiz. 1, 13–30.

Briec W. and Horvath, C. D., 2008. *Nash points, Ky Fan Inequality and Equilibria of Abstract Economies in Max-Plus and B-convexity*. *J. Math. Anal. Appl. 2008a*, 341, (1), 188–199.

Briec, W. and Horvath, C. D., 2008. *Halfspaces and Hahn-Banach Like Properties in B-convexity and Max-Plus Convexity*. *Pacific J. Optimiz. 2008b*, 4, (2), 293-317.

Briec, W., Horvath, C. D., 2009. *A $\mathbb{B}$-convex Production Model for Evaluating Performance of Firms*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 355, 131–144.

Briec, W., and Horvath, C. D., 2011. *On the Separation of Convex Sets in Some Idempotent Semimodules. Linear Algebra and its Applications 2011a*, 435, 1542-1548.

Briec, W. and Liang, Q. B., 2011. *On Some Semilattice Structures for Production Technologies*. *European Journal of Operational Research* 2011b, 215, 740–749.

Briec, W., 2015. Some Remarks on an Idempotent and Non-Associative Convex Structure. *Journal of Convex Analysis*, 22, 1, 259-289.

Burkovics, B., 1994. *Biography of Johann Radon, Proc. Lecture Notes Math. Phys. IV, 75 years of Radon transform* (Cambridge, MA), 13-25).

Butzer, P. L., 1970. Biography in Dictionary of Scientific Biography (for Helly), New York.

Calder, J. R., 1971. *Some elementary properties of interval convexities, J. London Math. Soc. (2) 3 (1971), 422 – 428.*

Dragomir, S. S. and Toader, G. H., 1993. *Some Inequalities for m−convex Functions. Studia Univ. Babe¸s-Bolyai*, Math., 38, (1), 21-28.

Dragomir, S. S.; Pečarić, J. E.; Presson, L. E., 1995. *Some Inequalities of Hadamard Type*. *Soochow J. Of Math.*, 21, 335-341.

Dragomir, S. S. and Pearce, C. E. M., 2000. *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University.

Dutta, J.; Martinez-Legaz, J. E.; Rubinov, A.M., 2004. *Monotonic Analysis Over Cones: I. Optimization 2004a*, 53, 2, 129-146.

Dutta, J.; Martinez-Legaz, J. E.; Rubinov, A. M., 2004. *Monotonic Analysis Over Cones: II. Optimization 2004b*, 53, 5-6, 529-547.

Eckhoff, J., 1993. *Helly, Radon, and Carathéodory type theorems. Handbook of convex geometry*, Vol. A, B, North-Holland, pp. 389--448.

Fujishige, S., 2005. *Submodular Functions and Optimization. Second Edition, Elsevier*.

Gaubert, S.; Meunier, F., 2010. *Carathéodory, Helly and the Others in the Max-Plus World*, Discrete Comput Geom 43: 648-662.

Godunova, E. K. and Levin, V. I., 1985. *Inequalities For Functions of a Broad Class That Contains Convex, Monotone and Some Other Forms of Functions. Numerical Mathematics and Mathematical Physics* (Moskov. Gos. Ped. Inst, Moscow), 166, 138–142 (in Russian).

Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.; Polya, G., 1934. *Inequalities, Cambridge University Press*, Cambridge, England.

Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. *Some remarks on s−convex functions. Aequationes Math.*, 48, 100-111.

Jensen, J. L. W. V., 1905. *Om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier. Nyt Tidsskrift Mat. B*, 16, 49-68.

Kemali, S.; Yeşilce, I.; Adilov, G., 2021. *Radon's and Helly's Theorems for B^{-1}-convex Sets*, Filomat volume. 35 no. 3, 2021

Kuratowski, K., 1968. *Topology*. Vol. 2, *Academic Press*, New York.

Minoux, M., 1986. *Mathematical Programming: Theory and Algorithms. Wiley*, Chichester, pp. 489.

Mitrinović, D. S., Fink, A. M. and Pecaric, J. E., 1993. *Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht/Boston/London.

Murota, K., 2003. *Discrete Convex Analysis*. *SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications* 10.

Niculescu, C. P., 2001. *A Multiplicative Mean Value and its Applications, in Inequality Theory and Applications*. (Y.J. Cho, J.K. Kim and S.S. Dragomir(Ed.s)), Nova Science Publishers, 249-261.

Niculescu, C. P. and Persson, 2003. L. - E., *Old and New on the Hermite-Hadamard Inequality*. Real Anal. Exchange, 29, 2, 663-685.

Niculescu, C. P.; Persson, L. - E., 2006. *Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach*. *CMS Books in Mathematics* vol. 23, Springer-Verlag, New York.

Orlicz, W., 1961. *A note on modular spaces*. I. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 9, 157–162.

Pečarić, J. and Beesack, P. R., 1986. *On Jessen's Inequality for Convex Functions* II. J. Math. Anal. Appl., 118, 125-144.

Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y. L., 1992. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press Inc.*

Queyranne, M. and Tardella, F., 2015. *Carathéodory, Helly and Radon Numbers for Sublattice Convexities, Core Discussion Paper.*

Rado, T., 1935. *On Convex Functions. Trans. Amer. Math. Soc.*, 37, 266-285.

Roberts, A. W. and Varberg, P. E., 1973. *Convex Functions. Academic Press*.

Robinson, A., 2014. *Helly's Theorem and its Equivalences via Convex Analysis*, *University Honors Theses*, Paper 67, Portland State University.

Rockafellar, R., 1970. *Tyrrell, Convex Analysis*. *Princeton University Press*, Princeton, New Jersey.

Rubinov, A. M. and Kutateladze, S. S., 1972. *Minkowski Duality and its Applications*. *Russian Mathematical Surveys* 27.

Rubinov, A. M., 1999. *Some Properties of Increasing Convex-along-rays Functions. Processings of the Centre for Mathematics and its Applications*, 19, 593-614.

Rubinov, A. M., 2000. *Abstract Convexity and Global Optimization, Kluwer Academic Publishers*, 2000a, Boston Dordrecht-London.

Rubinov, A. M., 2000. *Abstract Convexity: Examples and Applications*. *Optimization 2000b*, 47, 1-13.

Sharikov, E. V., 2003. *Hermite-Hadamard Type Inequalities for Increasing Radiant Functions*. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 4, 2, Article 47.

Singer, I., 1997. *Abstract Convex Analysis*. *Wiley-Interscience Publication*, New York.

Suo, H., 2009. *Some Properties of B-convexity. J. Nonlinear Sci. Appl.*, 2, 2, 71–77.

Tarasov, V. E., 2020. *Mathematical Economics, Application of Calculus*.

Toader, G. H., 1984. *Some generalisations of the convexity*. Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj- Napoca (Romania), 329-338.

Toader, G. H., 1988. *On a generalisation of the convexity*. Mathematica, 30, (53), 83-87.

Topkis, D. M., 1998. *Supermodularity and Complementarity*. *Princeton University Press.*

Tuy, H., 1998. *Convex Analysis and Global Optimization, Kluwer Academic Publishers* Dordrecht.

Tverberg, H., 1966. *A Generalization of Radon's Theorem, Journal of the London Mathematical Society*.

Van de Vel, M., 1993. *Theory of Convex Structures. Vol. 50. North Holland Mathematical Library, Elsevier*.

Vasic, P. M. and Lackovic, I. B., 1976 *Some Complements to the Paper: "On an Inequality for Convex Functions"*. Univ. Beograd Publ. Elek. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. 544-576, 59-62.

Wright, E. M., 1954. *An inequality for convex functions*. *Amer. Math. Monthly*, 61, 620-622.

Yeşilce, İ., 2016. *$\mathbb{B}$-konveks Fonksiyonlar ve Özellikleri*. Doktora Tezi. Mersin Üniversitesi, Mersin, 62

Yusubov, I. and Fatullayev, A., 2002. *Helly Teoremi ile İlgili Problemler, Matematik Dünyası-C:11-S:1*.

ÖZGEÇMİŞ

BAHADIR ŞENSES

bahadirsenses@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2018-2022	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Antalya
Lisans 2013-2017	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya