T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞININ İNCELEMESİ

Duygu Ecem KARABACAK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAYIS 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞININ İNCELEMESİ

Duygu Ecem KARABACAK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAYIS 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞININ İNCELEMESİ

Duygu Ecem KARABACAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 13/05/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Özkan ÖCALAN (Danışman)

Prof.Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Doç.Dr. Melih ERYİĞİT M. Eryiğit

ÖZET

BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIM DAVRANIŞININ İNCELEMESİ

Duygu Ecem KARABACAK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

Mayıs 2022, 34 sayfa

Bu yüksek lisans tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde gecikmeli fark denklemleri ile ilgili genel bilgilere ve literatür taramasına yer verilmiştir. İkinci bölümde gecikmeli fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise aşağıda verilen sabit katsayılı-sabit gecikmeli ve değişken katsayılı-sabit gecikmeli, $p \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0$$

fark denklemini, $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (0, \infty)$ ve $k_i \in \{0, 1, 2, ...\}$ iken veya $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (-\infty, 0)$ ve $k_i \in \{... - 3, -2, -1\}$ iken $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i} = 0$$

fark denklemini ve $p_n > 0$ ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} = 0$$

fark denkleminin çözümlerine ait salınım koşullarına yer verilmiştir. Dördüncü bölümde bulgular ve tartışma kısmına, beşinci bölümde ise sonuç kısmına yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Fark denklemi, Gecikmeli fark denklemi, Sabit gecikme terimi, Salınımlı çözüm, Salınımlı olmayan çözüm.

JÜRİ: Prof.Dr. Özkan ÖCALAN

Prof.Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Doç.Dr. Melih ERYİĞİT

ABSTRACT

INVESTIGATION OF OSCILLATION BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF FIRST ORDER DELAY DIFFERENCE EQUATIONS

Duygu Ecem KARABACAK

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
May 2022, 34 pages

This Msc thesis consists of five parts. In the first chapter, general information about delay difference equations and the literature summary of researches are given. In the second chapter, general definitions and theorems concerning delay difference equations are given. In the third chapter, the oscillation conditions of the solutions of constant coefficient-constant delays and variable coefficient-constant delay difference equations mentioned below are given.

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0$$

where $p \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ and $n = 0, 1, 2, ...$,

$$a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i} = 0$$

where $p_i \in (0, \infty)$ ve $k_i \in \{0, 1, 2, ...\}$ for $i = 1, 2, ..., m$ or $p_i \in (-\infty, 0)$ and $k_i \in \{... - 3, -2, -1\}$ and $n = 0, 1, 2, ...$ for $i = 1, 2, ..., m$ and

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} = 0$$

where $p_n > 0$ and k nonnegative integer. In the fourth chapter, findings and discussion sections and finally in the fifth chapter conclusion is included.

KEYWORDS: Constant delay term, Delay Difference equation, Difference equation, Nonoscillatory solution, Oscillatory solution.

COMMITTEE: Prof.Dr. Özkan ÖCALAN
Prof.Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Assoc.Prof.Dr. Melih ERYİĞİT

ÖNSÖZ

Son yıllarda uygulamalı matematiğin oldukça ilgi gören bir dalı haline gelen fark denklemleri, uygulamalı matematikçilerin ve uygulamalı bilimcilerin ilgisini büyük ölçüde çekmeyi başarmıştır. Fark denklemleri basit bir formda görünmesine rağmen onların çözümlerinin global davranışını tam olarak anlayıp, ortaya koymak oldukça zor bir süreçtir. Fark denklemlerinin dinamiğini anlamada, bu tezde incelenen literatürde çalışılmış sonuçlar bilimsel alanlardaki matematiksel modellemelerinin analizinde oldukça kullanışlı olacaktır. Bu tezde literatürde çalışılan sabit katsayılı sabit gecikmeli ve değişken katsayılı sabit gecikmeli fark denklemleri ele alınmıştır. Bu yüksek lisans tezinin bu alanda çalışan matematikçiler için yol gösterici ve faydalı bir kaynak olacağı düşünülmektedir.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Birinci Mertebeden Gecikmeli Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınım Davranışının İncelemesi" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

13/05/2022

Duygu Ecem KARABACAK

SİMGELER

Δ	: İleri fark operatörü
E	: Öteleme (Kaydırma) operatörü
$\sum$	: Toplam sembolü
$\prod$	: Çarpım sembolü
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
τ	: Gecikme terimi

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler, gerçek hayatta karşılaştığımız ve bizde merak uyandıran problemler için matematiksel model olarak rol oynamasının yanı sıra, bilim ve teknoloji alanında da karşımıza çıkmaktadır. Birçok uygulamalı bilim dalının ortak konusu olması diferensiyel denklem gelişimini hızlandırmıştır. Yeni problemlerin ortaya çıkmasına neden olmuştur.

Bilindiği üzere uygulamalı bilim dallarının birçoğunda ele alınan problemlerin matematiksel modellemesine bir diferensiyel denklem karşılık gelmektedir. Matematiksel modellemeler yapılırken gecikmeler ortaya çıkabilir. Ortaya çıkan bu gecikmelerle birlikte adi diferansiyel denklemler gecikmeli diferansiyel denklem formuna dönüşürler.

Uygulamalı bilim dallarında ele alınan problemlerde bağımsız değişkenin sürekli olmadığı durumlar da söz konusu olabilir. Bu gibi durumlarda ise karşımıza fark denklemleri çıkmaktadır. Çünkü fark denklemleri; bir ya da daha fazla değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki bağıntılardır.

Zamana bağlı parametrelerin ele alındığı durumların birçoğu kesikli olduğu için önemli matematiksel modellemelerde fark denklemleri kullanılır. Ayrıca fark denklemleri, diferensiyel denklemlere göre daha geniş kapsamlı bir yapıya sahiptir. Örneğin, birinci mertebeden bir diferensiyel denklemin ayrık bir benzeri olan bir fark denkleminin ”ghost” çözümleri olmasına rağmen bu durum yalnızca yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için geçerlidir. Böylece, fark denklemleri teorisinin diferansiyel denklemler teorisine göre daha zengin olduğu ve yakın gelecekte önemininin artacağını söyleyebiliriz.

Fark denklemlerinin çözümlerinin davranışları, birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir. Özellikle son kırk yıl boyunca elde edilen sonuçlarla birlikte bu konuda zengin bir literatür ortaya çıkmıştır. Son zamanlarda fark denklemlerinin çözümleri ve özellikle salınımlı olması ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır.

Ladas (1990), $p \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$x_{n+1} - x_n + px_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.1}$$

şeklinde verilen fark denklemlerinin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul elde etmiştir.

Erbe ve Zhang (1989), $n = 0, 1, 2, ...$ ve p_n negatif olmayan reel terimli dizi ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = 0, \tag{1.2}$$

şeklinde ifade edilen fark denklemlerinin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeter koşul elde etmişlerdir. Ladas, Philos ve Sficas (1989) yukarıda verilen otonom olmayan fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeter koşul elde etmişlerdir. Ayrıca diferensiyel denklemler ile fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı arasında ilginç benzerlikler söz konusudur. Fakat, bu benzerlik durumu daima geçerli olmayabilir. Örneğin,

$$x'(t) + p(t)x(t-k) = 0 \tag{1.3}$$

şeklinde verilen diferensiyel denklemi ele alalım. (1.2) fark denklemi (1.3) diferensiyel denkleminin ayrık benzeridir. Ayrıca, $k = 0$ için (1.3)

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(-\int p(s)ds\right)$$

çözümü mevcuttur, fakat elde edilen bu çözüm hiç bir durumda salınımlı olmaz. Ancak, $k = 0$ için (1.2) denklemi ise

$$x_n = \left[\prod_{j=n_0}^{n-1} (1 - p_j)\right] x_{n_0}$$

çözümüne sahip olur. Yani, elde edilen bu çözüm her $j \geq n_0$ için $1 - p_j < 0$ olduğunda salınımlı bir çözüme sahip olur.

Diferensiyel denklemler ile fark denklemleri arasında büyük benzerlikler bulunmaktadır. Fark denklemleri sayesinde diferensiyel denklemlerdeki süreksizlik durumları ortadan kaldırılabilmektedir. Hatta birçok diferensiyel denklem, fark denklemleri kullanılarak kolaylıkla çözülebilmektedir. Bu nedenle yukarıda bahsedilen bilgiler yardımıyla bu tez çalışmasında birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denklemleri çalışılmış ve bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için yeni şartlar elde edilmiş ve örneklere yer verilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak fark denklemleri ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci kısımda tez çalışmamız için gerekli olacak temel tanım, teorem ve şimdiye kadar yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise sabit gecikmeli $p \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0 \tag{1.4}$$

fark denklemini,

$i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (0, \infty)$ ve $k_i \in \{0, 1, 2, ...\}$ iken veya $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (-\infty, 0)$ ve $k_i \in \{... - 3, -2, -1\}$ iken $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i} = 0 \tag{1.5}$$

fark denklemini ve $p_n > 0$ ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} = 0 \tag{1.6}$$

fark denklemi ele alınmıştır.

Son olarak ise tartışma ve sonuç kısmına yer verilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Fark Analizi

Tanım 2.1. *E öteleme (kaydırma) operatörü, x sürekli bir değişken olmak üzere*

$$Ey(x) = y(x+1) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. İkinci mertebeden E operatörü

$$E^2y(x) = E[Ey(x)] = E[y(x+1)] = y(x+2)$$

şeklinde bulunur. Benzer işlem adımları devam ettirildiğinde

$$E^ky(x) = y(x+k)$$

eşitliği elde edilir. Böylece, E^k operatörü $k.$ dereceden bir öteleme operatörünü tanımlar.

E operatörünün özellikleri aşağıdaki gibidir.

(1) $E\left[f(x)+g(x)\right] = Ef(x)+Eg(x)$,

(2) c bir sabit olmak üzere, $E[cf(x)] = cE[f(x)]$,

(3) $E^r\left[E^sf(x)\right] = E^{r+s}f(x)$,

(4) $E^0\left[f(x)\right] = f(x)$.

Tanım 2.2. *y reel veya kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere ileri fark operatörü Δ,*

$$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x),\ \Delta x_n = x_{n+1} - x_n \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlıdır. Benzer işlem adımları devam ettirildiğinde

$$\Delta_h y(x) = y(x+h) - y(x)$$

eşitliği elde edilir. Burada x bağımsız değişkendir. Özel olarak $y(x) = x$ olarak alınırsa $\Delta_h x = (x+h) - x = h$ ya da $h = \Delta_h x$ bulunur. Bu nedenle h fonksiyon aralığı olarakta adlandırılır.

Yüksek mertebeden ileri farklar her birinin bir öncekine Δ operatörünün uygulanması ile elde edilir.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\left[\Delta f(x)\right] = \Delta\left[f(x+1) - f(x)\right] = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$$

burada Δ^2 ikinci dereceden fark operatörü olarak adlandırılır. Bu fark işlemlerine devam edildiğinde genel bir ifade olarak

$$\Delta^n f(x) = \Delta\left[\Delta^{n-1} f(x)\right]$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç olarak, $f(x)$ fonksiyonunun m. dereceden farkı $(a-b)^m$ ifadesinin Binom açılımına benzer biçimde

$$\Delta^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} f(x+(m-k)) \tag{2.3}$$

formulü ile elde edilir.

$f(x)$ ve $g(x)$ birbirinden farklı iki fonksiyon olsun. Bu durumda Δ operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) $\Delta\left[f(x)+g(x)\right] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$,

(2) c sabit olmak üzere $\Delta\left[cf(x)\right] = c\Delta f(x)$,

(3) $\Delta\left[f(x)g(x)\right] = \Delta\left[f(x)\right]g(x+h) + f(x)\Delta g(x)$,

(4) $\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\Delta[f(x)]g(x)-f(x)\Delta g(x)}{g(x+h)g(x)}$,

(5) $\Delta^r\left[\Delta^s f(x)\right] = \Delta^{r+s} f(x)$.

Ayrıca c bir sabit olmak üzere bazı temel fonksiyonlar aşağıdaki gibi ifade edilir.

(1) $\Delta c^x = (c-1)c^x$,

(2) $\Delta \sin cx = 2\sin\frac{c}{2}\cos c(x+\frac{1}{2})$,

(3) $\Delta \cos cx = -2\sin\frac{c}{2}\sin c(x+\frac{1}{2})$,

(4) $\Delta \log cx = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Böylece Δ ve E operatörü arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = Ef(x) - f(x) = (E-1)f(x) \Rightarrow \Delta = E-1$$

bu şekilde Δ ve E arasında birinci dereceden bir bağıntı bulunur. Bu işlemden faydalanarak

$$\Delta^m f(x) = (E-I)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} E^{m-k} f(x)$$

m. dereceden Δ ve E operatörleri arasındaki ilişkiyi görmüş oluruz. Benzer şekilde $E=$

$\Delta+1$ olur, buradan

$$E^m=(\Delta+1)^m=\sum_{k=0}^{m}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}\Delta^{m-k}$$

yazılır.

Toplam operatörü ile ilgili bazı kurallar ise aşağıdaki şekildedir.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{m}=mc,$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{m}cf(x)=c\sum\limits_{k=1}^{m}f(x),$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{m}[f(x)\pm g(x)]=\sum\limits_{k=1}^{m}f(x)\pm\sum\limits_{k=1}^{m}g(x),$

(d) $(A+B)^n=\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1.2...k}A^kB^{n-k}$ veya $(A+B)^n=\sum\limits_{k=0}^{m}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}A^kB^{n-k}.$

Tanım 2.3. *k. mertebeden bir fark denklemi $n\in\mathbb{N}$, x_n, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel veya kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere*

$$x_n,\ x_{n+1},...,x_{n+k} \tag{2.4}$$

ifadelerini içerir (Agarwal 2000).

Tanım 2.4. *Bir fark denkleminde, en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark, o fark denkleminin mertebesi olarak adlandırılır. Örneğin; $x_{n+4}-x_{n+1}+4x_n=0$ şeklinde verilen bir fark denkleminin mertebesi dört olur (Agarwal 2000).*

Tanım 2.5. *Eğer* (2.4) *fark denklemi,*

$$\sum_{i=0}^{k}a_{in}x_{n+i}=b_n \tag{2.5}$$

şeklinde verildiğinde, k. mertebeden (2.4) *fark denklemi lineer olarak adlandırılır. Eğer en az bir $n\in\mathbb{N}$ için b_n sıfırdan farklı ise bu durumda* (2.5) *fark denklemine homojen olmayan lineer fark denklemi denir.*

Eğer (2.5) *fark denklemi*

$$\sum_{i=0}^{k}a_{in}x_{n+i}=0 \tag{2.6}$$

formunda verildiğinde (2.6) *fark denklemi homojen lineer fark denklemi olarak adlandırılır (Agarwal 2000).*

2.2. Lineer Fark Denklemleri Teorisi

Bu kısımıda $k.$ mertebeden lineer fark denklemleri ile ilgili literatürde yer alan bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir. $k.$ mertebeden homojen olmayan lineer fark denklemi p_{in} ve g_n, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve her $n \geq n_0$ için $p_{kn} \neq 0$ olmak üzere

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + ... + p_{kn}x_n = g_n \tag{2.7}$$

şeklinde verilir.

Teorem 2.6.

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + ... + p_{kn}x_n = g_n$$

$$x_{n_0} = a_0,\ x_{n_0+1} = a_1, ..., \ x_{n_0+k-1} = a_{k-1}$$

şeklinde ifade edilen başlangıç değer problemi bir tek $\{x_n\}$ *çözümüne sahiptir (Elaydi 1999).*

Şimdi

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + ... + p_{kn}x_n = 0 \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilen fark denklemini ele alalım. Bu denklem (2.7) denkleminin lineer ve homojen halidir.

Tanım 2.7. *Eğer* $n \geq n_0$ *için*

$$a_1 f_{1n} + a_2 f_{2n} + ... + a_r f_{rn} = 0$$

eşitliği sadece $a_1 = a_2 = ... = a_r = 0$ *durumunda sağlanıyorsa* $n \geq n_0$ *için* $f_{1n}, f_{2n}, ...,$ f_{rn} *fonksiyonları lineer bağımsızdır denir (Lakshmikantham ve Trigiante 1988; Elaydi 1999).*

Tanım 2.8. (2.8) *denkleminin k tane lineer bağımsız çözümlerinden oluşan küme, temel çözümler kümesi olarak adlandırılır (Lakshmikantham ve Trigiante 1988; Elaydi 1999).*

Tanım 2.9. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (2.8) *fark denkleminin temel çözümler kümesi olsun. Bu durumda* a_i *ler keyfi sabitler olmak üzere* (2.8) *denkleminin genel çözümü* $x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_{in}$ *ile verilir (Elaydi 1999).*

2.3. Lineer Homogen Sabit Katsayılı Fark Denklemlerinin Çözümleri

Bu bölümde ilk olarak k. mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen fark denkleminin çözümleri ile ilgili, ardından k. mertebeden lineer, homojen olmayan fark denklemlerinin çözümleri ile ilgili literatürde yer alan bazı tanım ve teoremleri kullanacağız. İlk olarak p_i ler sabit ve $p_k \neq 0$ olmak üzere aşağıda verilen k. mertebeden fark denklemini ele alalım.

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + ... + p_k x_n = 0. \tag{2.9}$$

(2.9) denkleminde λ^n i çözüp kabul edip denklemde yerine yazarsak

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + ... + p_k = 0 \tag{2.10}$$

denklemi elde edilir. Bu ifadeye (2.10) denkleminin karakteristik denklemi denir ve λ lara ise (2.10) denkleminin karakteristik kökleri denir (Elaydi 1999).

(2.9) fark denkleminin çözümü için karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak üç farklı durum söz konusudur.

I. DURUM: (2.10) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ kökleri reel ve birbirinden farklı ise, bu durumda $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_k^n\}$ kümesi (2.9) denkleminin temel çözümler kümesi olur ve (2.9) denkleminin genel çözümü a_i ler sabit olmak üzere

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^n \tag{2.11}$$

şeklindedir (Goldberg 1958; Elaydi 1999).

II. DURUM: (2.10) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ kökleri reel ve sırasıyla $m_1, m_2, ..., m_r$ katlı ise (2.9) denklemi

$$(E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} ... (E - \lambda_r)^{m_r} x_n = 0 \tag{2.12}$$

şeklinde yazılır. $(E - \lambda_i)^{m_i} x_n = 0,\ 1 \leq i \leq r$, denkleminin temel çözümler kümesi $G_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, ..., n^{m_i - 1}\lambda_i^n\}$ olduğundan (2.12) denkleminin temel çözümler kümesi $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ olur ve (2.12) denkleminin genel çözümü

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(a_{i0} + a_{i1} n + a_{i2} n^2 + ... + a_{im_{i-1}} n^{m_i - 1}\right) \tag{2.13}$$

şeklinde ifade edilir (Goldberg 1958; Elaydi 1999).

III. DURUM: (2.10) karakteristik denklemi $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ kompleks köklerine ve $\lambda_3 \neq \lambda_4 \neq ... \neq \lambda_k$ şeklinde reel köklere sahip olsun. Bu durumda genel çözüm

$$x_n = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n + c_3\left(\lambda_3\right)^n + c_4\left(\lambda_4\right)^n + ... + c_k\left(\lambda_k\right)^n \tag{2.14}$$

şeklinde olur.

Burada $\alpha = r\cos\theta$, $\beta = r\sin\theta$, $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ olmak üzere

$$x_n = r^n\left[c_1\cos\left(n\theta\right) + c_2\sin(n\theta)\right] + c_3\left(\lambda_3\right)^n + c_4\left(\lambda_4\right)^n + ... + c_k\left(\lambda_k\right)^n \tag{2.15}$$

olur ve (2.15) ifadesinde

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},\ a_1 = c_1 + c_2,\ a_2 = i(c_1 - c_2),\ \omega = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

alarak genel çözümü

$$x_n = Ar^n\cos(n\theta - \omega) + c_3\left(\lambda_3\right)^n + c_4\left(\lambda_4\right)^n + ... + c_k\left(\lambda_k\right)^n \tag{2.16}$$

şeklinde verilir (Goldberg 1958; Elaydi 1999).

Örnek 2.10. $x_0 = 0$ *ve* $x_1 = 1$ *olmak üzere*

$$x_{n+3} - 7x_{n+2} + 16x_{n+1} - 12x_n = 0$$

şeklinde verilen başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm 2.11. *Bu denklemin karakteristik denklemi*

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

şeklindedir ve karakteristik denkleme ait kökler ise $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ *ve* $\lambda_3 = 3$ *olarak bulunur. Böylece denklemin genel çözümü*

$$x_n = (a_0 + na_1)2^n + b_1 3^n$$

şeklindedir. Verilen başlangıç değer koşulları denklemde yerine yazılırsa $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ *ve* $b_1 = -3$ *bulunur. Böylece problemin çözümü*

$$x_n = (3 + 2n)2^n - 3^n 3$$

olur.

Şimdi k. mertebeden lineer homojen olmayan her $n \geq n_0$ için $p_{kn} \neq 0$ olmak üzere

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + ... + p_{kn}x_n = g_n \tag{2.17}$$

fark denklemini ele alalım. (2.17) fark denkleminin çözümü, homojen kısmının genel çözümü x_{cn} ve homojen olmayan kısmının bir özel çözümü x_{pn} olmak üzere $x_n = x_{cn} + x_{pn}$ ile verilir.

Teorem 2.12. (2.17) *fark denkleminin genel çözümü*

$$x_n = x_{pn} + \sum_{i=1}^{k} a_i x_{in}$$

şeklinde verilir. Burada $\{x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{kn}\}$, (2.17) *fark denkleminin homojen kısmının temel çözümler kümesidir (Elaydi 1999).*

Diğer taraftan, belirsiz katsayılar metodu ile (2.17) denklemi çözülmek istendiğinde g_n in farklı durumlarında özel çözümler aşağıdaki gibi olur.

(a) $g_n = a^n$ ise $x_{pn} = c_1 a^n$

(b) $g_n = n^k$ ise $x_{pn} = c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k$

(c) $g_n = n^k a^n$ ise $x_{pn} = c_0 a^n + c_1 n a^n + ... + c_k n^k a^n$

(d) $g_n = \cos bn, \sin bn$ ise $x_{pn} = c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)$

(e) $g_n = a^n \cos bn,\ a^n \sin bn$ ise $x_{pn} = (c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn))\, a^n$

(f) $g_n = a^n n^k \cos bn,\ a^n n^k \sin bn$ ise

$x_{pn} = \left(c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k\right) a^n \sin(bn) + \left(d_0 + d_1 n + ... + d_k n^k\right) a^n \cos(bn)$.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı

Bu bölümde fark denklemlerinin çözümlerine ilişkin salınım koşulları verilecektir.

Tanım 3.13. *N pozitif bir tamsayı olmak üzere $n \geq N$ için $x_n x_{n+1} \leq 0$ ise x_n aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde x_n çözümü salınımlı olmayan çözüm olarak adlandırılır. Diğer taraftan, farklı bir şekilde ifade etmek gerekirse, eğer bir x_n çözümü belli bir yerden (n değerinden itibaren) sonra sadece pozitif ya da sadece negatif değilse sıfır etrafında salınımlı olarak adlandırılır (Gyori ve Ladas 1991; Elaydi 1999; Agarwal 2000).*

Bu tezde $p \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0 \tag{3.1}$$

fark denklemini,

$i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (0, \infty)$ ve $k_i \in \{0, 1, 2, ...\}$ iken veya $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (-\infty, 0)$ ve $k_i \in \{... - 3, -2, -1\}$ iken $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i} = 0 \tag{3.2}$$

fark denklemini ve $p_n > 0$ ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} = 0 \tag{3.3}$$

fark denklemini ele alacağız.

Teorem 3.14. (3.1) *denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter koşul aşağıda yer alan şartlardan herhangi birinin gerçeklenmesidir.*
(a) $k = -1$ ve $p \leq -1$,
(b) $k = 0$ ve $p \geq 1$,
(c) $k \in \{..., -3, -2\} \cup \{1, 2, ...\}$ ve $p\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > 1$
(Ladas 1990).

İspat (3.1) denklemine ait karakteristik denklem

$$F(\lambda) = \lambda - 1 + p\lambda^{-k} = 0 \tag{3.4}$$

dır.

(a) $k = -1$ ve $p \leq -1$ ise (3.1) denklemi

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n+1} = 0$$

haline dönüşür. Buradan

$$a_{n+1}(1+p) = a_n$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+p}$$

ve $p \leq -1$ olduğundan $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$ olur. Salınımlılık tanımı gereği (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

(b) $k = 0$ ve $p \geq 1$ ise (3.1) denklemi

$$a_{n+1} - a_n + pa_n = 0$$

halini alır. Buradan

$$a_{n+1}(1-p) = a_n$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - p$$

elde edilir. $p \geq 1$ olduğundan $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$ olur. Salınımlılık tanımı gereği (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

(c) $k \neq \{-1, 0\}$ olduğunda

$$F'(\lambda) = 1 - kp\lambda^{-(k+1)} = 0$$

$$kp\lambda^{-(k+1)} = 1$$

$$\lambda^{k+1} = kp$$

$$\lambda_0 = (kp)^{\frac{1}{k+1}}$$

elde edilir.

$$F^{''}(\lambda) = k(k+1)p\lambda^{-(k+2)}$$

$$F^{''}(\lambda_0) = k(k+1)p(kp)^{-\left(\frac{k+2}{k+1}\right)} > 0$$

olur. O halde $\lambda_0 = (kp)^{\frac{1}{k+1}}$ noktasında $F(\lambda)$ minimuma sahiptir. Ayrıca

$$\lim_{\lambda \to 0^+} F(\lambda) = \infty \text{ ve } \lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda) = \infty$$

dır. (3.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için $F(\lambda_0) > 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} F(\lambda_0) &= \lambda_0 - 1 + p\lambda_0^{-k} = \lambda_0 \left[1 - \frac{1}{\lambda_0} + p\lambda_0^{-(k+1)}\right] \\ &= \lambda_0 \left[1 - \frac{1}{\lambda_0} + p\frac{1}{kp}\right] \\ &= \lambda_0 \left[1 - \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{k}\right] \end{aligned}$$

olur. $F(\lambda_0) > 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$1 + \frac{1}{k} > \frac{1}{\lambda_0}$$

olmasıdır. Buradan $\lambda_0 > \frac{k}{k+1}$ ve $\lambda_0^{(k+1)} = kp$ olduğundan

$$kp = \lambda_0^{(k+1)} > \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$kp > \frac{(k)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}$$

$$p\frac{(k+1)^{k+1}}{(k)^{k+1}} > 1$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0$$

fark denklemi

$$x'(t) + px(t-\tau) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denkleminin ayrık benzeri olarak düşünülebilir. Bu diferensiyel denkleme ait salınımlılık şartı $p\tau > \frac{1}{e}$ şeklindedir. (3.1) fark denklemine ait salınımlılık şartı ise $p\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > 1$ dir. Buradan

$$pk > \frac{(k)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}$$

$$pk > \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$pk > \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{1}{e}$$

olduğundan

$$pk > \frac{1}{e} \tag{3.5}$$

elde edilir. □

Teorem 3.15. *$i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (0, \infty)$ ve $k_i \in \{0, 1, 2, ...\}$ veya $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (-\infty, 0)$ ve $k_i \in \{... - 3, -2, -1\}$ şartlarından biri sağlansın. Eğer*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i + 1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}} > 1 \tag{3.6}$$

ise (3.2) *denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Erbe ve Zhang 1989).*

İspat (3.2) fark denklemine ait

$$F(\lambda) = \lambda - 1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda^{-k_i} = 0 \tag{3.7}$$

karakteristik denkleminin pozitif bir köke sahip olmadığını göstermek bu denklemin her çözümünün salınımlı olduğunu gösterir.

İlk olarak $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (0, \infty)$ ve $k_i \in \{0, 1, 2, ...\}$ sağlansın. O halde $F(\lambda)$ $[1, \infty)$ aralığında köke sahip değildir. $i = 1, 2, ..., m$ için

$$\inf_{0<\lambda<1} \left(\frac{1}{1-\lambda} \right) = 1$$

eşitliğinden

$$\min_{0<\lambda<1} \left(\frac{\lambda^{-k_i}}{1-\lambda} \right) = \frac{(k_i + 1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}$$

olur. Gerçekten

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^{-k_i}}{1-\lambda}$$

ise

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \frac{-k_i \lambda^{-(k_i+1)}(1-\lambda) + \lambda^{-k_i}}{(1-\lambda)^2} \\ &= \frac{-k_i \lambda^{-(k_i-1)} + \lambda^{-k_i}(k_i+1)}{(1-\lambda)^2} \end{aligned}$$

olur. $f'(\lambda) = 0$ için $\lambda = \frac{k_i}{k_i+1}$ bulunur.

Diğer taraftan

$$f''(\lambda_0) = \frac{k_i (k_i + 1) \left[\lambda_0^{-(k_i+2)} - \lambda_0^{-(k_i+1)} \right] (1 - \lambda_0)^2}{(1 - \lambda_0)^4}$$

olur. Yani
$$\lambda_0^{-(k_i+2)} - \lambda_0^{-(k_i+1)} = \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+2} - \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} > 0$$
elde edilir. O halde $f''(\lambda_0) > 0$ olduğundan $\lambda_0 = \frac{k_i+1}{k_i}$ apsisli noktada $f(\lambda)$ minimuma sahiptir.
$$f(\lambda_0) = \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}$$
olup, buradan $0 < \lambda < 1$ için
$$F(\lambda) = (1-\lambda)\left(-1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\lambda^{-k_i}}{1-\lambda}\right) \geq (1-\lambda)\left(-1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}\right)$$
olup (3.6) ifadesinden $F(\lambda) > 0$ elde edilir. Yani karakteristik denklemin pozitif kökü yoktur. O halde (3.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Şimdi $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (-\infty, 0)$ ve $k_i \in \{... - 3, -2, -1\}$ olsun. O halde (3.2) denklemi $(0, 1]$ aralığında köke sahip değildir. $i = 1, 2, ..., m$ için
$$\inf_{0<\lambda<1}\left(\frac{\lambda^{-k_i}}{\lambda - 1}\right) = \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}$$
olup buradan $\lambda > 1$ için
$$F(\lambda) = (\lambda - 1)\left(1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\lambda^{-k_i}}{\lambda - 1}\right) \leq (\lambda - 1)\left(1 - \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}\right)$$
olur yani $F(\lambda) < 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

$$a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i} = 0$$
fark denklemi
$$x'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i x(t - \tau_i) = 0$$
gecikmeli diferensiyel denkleminin ayrık benzeri olarak düşünülebilir. Bu diferensiyel denkleme ait salınımlılık şartı $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \tau_i > \frac{1}{e}$ şeklindedir. (3.2) fark denklemine ait salınımlılık şartı ise $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}} > 1$ dir. Buradan
$$\sum_{i=1}^{m} p_i k_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i+1}} > 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i k_i \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} > 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i k_i \left(1+\frac{1}{k_i}\right)^{k_i+1} > 1$$

elde edilir. Ayrıca

$$\lim_{k_i\to\infty} \left(1+\frac{1}{k_i}\right)^{k_i+1} = e$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{m} p_i k_i e > \sum_{i=1}^{m} p_i k_i \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} > 1$$

olup

$$\sum_{i=1}^{m} p_i k_i > \frac{1}{e} \tag{3.7}$$

bulunur.

Teorem 3.16. *Kabul edelim ki*

$$\liminf_{n\to\infty} p_n \equiv c > 0 \text{ ve } \limsup_{n\to\infty} p_n > 1-c \tag{3.8}$$

olsun. Bu durumda

(a)

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} \leq 0 \tag{3.9}$$

eşitsizliği hiçbir pozitif çözüme sahip değildir.

(b)

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} \geq 0 \tag{3.10}$$

eşitsizliği hiçbir negatif çözüme sahip değildir.

(c) (3.3) *denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur (Erbe ve Zhang 1989).*

İspat Kabul edelim ki $n \geq N_1$ için $y = \{y_n\} > 0$, (3.9) eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olsun. Şimdi $0 < \varepsilon < c$ ve $n \geq N_2$ için $p_n \geq c - \varepsilon > 0$ olacak şekilde bir N_2 seçelim.

$$N = \max\{N_1 + k,\ N_2\} \tag{3.11}$$

olsun. Ayrıca (3.9) eşitsizliğinden

$$y_{n+1} - y_n \leq -p_n y_{n-k}$$

ve $p_n > 0$ ve $y_{n-k} > 0$ olduğundan $-p_n y_{n-k} < 0$ olur. Böylece

$$y_{n+1} - y_n \leq 0$$

olur, yani $\{y_n\}$ artmayan bir dizi olur. $n \geq N$ için $\{y_n\}$ artmayan olduğundan (3.3) denkleminden

$$y_{n+1} - y_n \leq -p_n y_{n-k}$$

$$y_n - y_{n+1} \geq p_n y_{n-k}$$

$$y_n \geq p_n y_{n-k}$$

olup

$$p_n \geq c - \varepsilon \tag{3.12}$$

olduğundan

$$y_n \geq (c - \varepsilon)\, y_{n-k}$$

ve

$$y_{n-k} \geq y_{n-1}$$

olduğundan

$$y_n \geq (c - \varepsilon)\, y_{n-1} \tag{3.13}$$

olur. Diğer taraftan $n \geq N$ için

$$0 \geq y_{n+1} - y_n + p_{n-k} \geq y_{n+1} - y_n + p_n y_n$$

$$0 \geq y_{n+1} + y_n(p_n - 1)$$

olur. Böylece (3.13) yardımıyla son eşitsizlikten

$$y_{n+1} \geq (c - \varepsilon)\, y_n$$

bulunur. Buradan $n \geq N$ için

$$0 \geq (c - \varepsilon)\, y_n + y_n(p_n - 1)$$

$$0 \geq (c - \varepsilon + p_n - 1) y_n$$

elde edilir. $c - \varepsilon + p_n - 1 \leq 0$ ve $p_n \leq 1 - c + \varepsilon$ olur. Böylece

$$\limsup_{n\to\infty} p_n \leq 1 - c + \varepsilon$$

olup ε keyfi olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty} p_n \leq 1 - c$$

elde edilir. Ancak bu durum (3.8) ile çelişir. Böylece (3.9) eşitsizliğinin hiçbir pozitif çözümü yoktur.

(b) $\{z_n\} = \{-y_n\}$ alınarak

$$-z_{n+1} + z_n - p_n z_{n-k} \geq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$z_{n+1} - z_n + p_n z_{n-k} \leq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin hiçbir pozitif çözüme sahip olmadığını biliyoruz. O halde (3.10) eşitsizliği de hiçbir negatif çözüme sahip değildir.

(c) (a) ve (b) ifadelerinden (3.3) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğu görülür.

□

Teorem 3.17. *$p_n > 0$ ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere,*

$$\liminf_{n\to\infty} p_n \equiv c > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.14}$$

ifadesi sağlansın. Bu durumda

(a) (3.9) *eşitsizliğinin pozitif çözümü yoktur.*

(b) (3.10) *eşitsizliğinin negatif çözümü yoktur.*

(c) (3.3) *denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.*

İspat (a) Çelişki oluşturmak adına (3.9) eşitsizliğinin $n \geq N_1$ için $y = \{y_n\} > 0$ şeklinde bir pozitif çözümünün olduğunu kabul edelim. Ayrıca

$$r_n = \frac{y_n}{y_{n+1}} \tag{3.15}$$

olsun. Şimdi (3.9) eşitsizliğini y_n ile bölelim.

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} - 1 + p_n \frac{y_{n-k}}{y_n} \leq 0,$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{r_n} \tag{3.16}$$

olduğundan
$$\frac{1}{r_n} \leq 1 - p_n \frac{y_{n-k}}{y_n} \tag{3.17}$$
bulunur ve $\frac{y_{n-k}}{y_n}$ bölümü
$$\frac{y_{n-k}}{y_n} = \frac{y_{n-k}}{y_{n-k+1}} \frac{y_{n-k+1}}{y_{n-k+2}} ... \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}} \frac{y_{n-1}}{y_n} \tag{3.18}$$
şeklinde ifade edilirse (3.17) eşitsizliği
$$\frac{1}{r_n} \leq 1 - p_n \frac{y_{n-k}}{y_{n-k+1}} \frac{y_{n-k+1}}{y_{n-k+2}} ... \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}} \frac{y_{n-1}}{y_n}$$
ya da
$$r_n^{-1} \leq 1 - p_n(r_{n-k} r_{n-k+1} ... r_{n-2} r_{n-1}) \tag{3.19}$$
elde edilir. (3.15) den $n \geq N_2$ için $p_n > 0$ olur. $N = \max\{N_1 + k, N_2\}$ olsun. $n \geq N$ için $\{y_n\}$ artmayandır. Ayrıca $r_n = \frac{y_n}{y_{n+1}}$ olduğundan $r_n \geq 1$ olur.
$$\liminf_{n\to\infty} r_n = l \tag{3.20}$$
olsun. Böylece
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{r_n} = \frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty} r_n} = \frac{1}{l} \tag{3.21}$$
olur. $\limsup\limits_{n\to\infty}(-p_n) = \liminf\limits_{n\to\infty}(p_n)$ eşitliği göz önüne alınarak (3.20) ifadesinin her iki tarafının limit supremumu alınırsa
$$\limsup_{n\to\infty} \left(r_n^{-1}\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(1 - p_n(r_{n-k} r_{n-k+1} ... r_{n-2} r_{n-1})\right),$$
$$\frac{1}{l} \leq 1 + \limsup_{n\to\infty} \left(-p_n(r_{n-k} r_{n-k+1} ... r_{n-2} r_{n-1})\right)$$
$$\frac{1}{l} \leq 1 - \liminf_{n\to\infty} \left(p_n(r_{n-k} r_{n-k+1} ... r_{n-2} r_{n-1})\right)$$
$$\frac{1}{l} \leq 1 - \left[\liminf_{n\to\infty} p_n \cdot \liminf_{n\to\infty} r_{n-k} \cdot ... \cdot \liminf_{n\to\infty} r_{n-2} \cdot \liminf_{n\to\infty} r_{n-1}\right]$$
$$\frac{1}{l} \leq 1 - [c \cdot l \cdot l \cdot ... \cdot l]$$
olup
$$\frac{1}{l} \leq 1 - \left[c l^k\right]$$
bulunur. Buradan
$$c \leq \frac{l-1}{l^k} \equiv h(l) \tag{3.22}$$

tanımlayalım. Ayrıca

$$h'(l) = \frac{l^{k+1} - (k+1)l^k(l-1)}{\left(l^{k+1}\right)^2} = 0$$

olup

$$l = \frac{k+1}{k}$$

bulunur. $l_0 = \frac{k+1}{k}$ için fonksiyonun ekstremum noktası vardır. Ayrıca

$$h''(l_0) = \frac{(k+1)l_0^k \left[1 - k + kl_0^{-2} - 1\right]}{(l_0^{k+1})^2}$$

olduğundan

$$k\left(l_0^{-2} - 1\right) = k\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 - 1\right]$$

bulunur. Diğer taraftan $\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 < 1$ olduğundan $k\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 - 1\right] < 0$ olur, yani $h''(l_0) < 0$ elde edilir. O halde h fonksiyonunun l_0 maksimumu vardır.

$$h(l_0) = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

ya da

$$\max_{l \geq 1} h(l) = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

ise (3.22) yardımıyla

$$c \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

elde edilir. Bu ise (3.14) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır. O halde (3.9) eşitsizliğinin hiçbir pozitif çözümü yoktur. □

(3.14) denkleminde $k = 0$ ise (3.3) denklemi

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_n = 0 \tag{3.23}$$

şeklini alır.

(3.3) fark denklemi aşağıda verilen

$$y'(t) + p(t)y(t) = 0 \tag{3.24}$$

diferensiyel denklemin ayrık benzeridir. (3.24) denklemini $y(t)$ ile bölüp integre edersek

$$\frac{y'(t)}{y(t)} + p(t) = 0,$$

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = -\int p(t)dt$$

ya da

$$\ln |y(t)| = -\int p(t)dt$$

olup

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt} \tag{3.25}$$

elde edilir. Buradan $y(t) > 0$ olduğu görülür. Yani (3.24) denkleminin tüm çözümleri pozitif olup salınımlı değildir.

Diğer taraftan, eğer

$$\liminf_{n\to\infty} p_n > 1 \tag{3.26}$$

ise (3.23) denklemi salınımlıdır.

$n \geq 0$ için eğer

$$p_n = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.27}$$

ise (3.3) denklemi

$$y_{n+1} - y_n + \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} y_{n-k} = 0 \tag{3.28}$$

denklemine dönüşür.

$y_n = d > 0$ ve $k = N, N+1, ...$ için

$$y_{m+1} = \frac{k}{k+1} y_m \tag{3.29}$$

pozitif çözümüdür. O halde $\{y_n\}$ (3.28) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümüdür. (3.28) denkleminde (3.29) ifadesi ve

$$y_{n-k} = \frac{y_{n-k}}{y_{n-k-1}} \frac{y_{n-k-1}}{y_{n-k-2}} ... \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}} \frac{y_{n-1}}{y_n} y_n$$

kullanılırsa

$$\frac{k}{k+1} y_n - y_n + \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \frac{y_{n-k}}{y_{n-k-1}} \frac{y_{n-k-1}}{y_{n-k-2}} ... \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}} \frac{y_{n-1}}{y_n} y_n = 0$$

olur.

$$\frac{y_m}{y_{m+1}} = \frac{k+1}{k}$$

olduğundan

$$\frac{k}{k+1} y_n - y_n + \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \frac{k+1}{k} \frac{k+1}{k} ... \frac{k+1}{k} y_n = 0$$

$$y_n \left[\frac{k}{k+1} - 1 + \frac{k}{k+1} \right] = 0$$
$$0 = 0$$

bulunur. Yani (3.29) ifadesi (3.28) denklemini sağlar. O halde (3.29) bir çözümdür ve bu çözüm pozitiftir. Yani (3.28) denkleminin çözümleri salınımlı değildir.

Teorem 3.18. *Kabul edelim ki $p_n \geq 0$ ve*

$$\sup p_n < \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.30}$$

olsun. Böylece (3.3) *denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir (Erbe ve Zhang 1989).*

İspat

$$r_n^{-1} = 1 - p_n r_{n-k} ... r_{n-1} \tag{3.31}$$

denkleminin pozitif bir çözüme sahip olduğunu gösterelim. Bunun için

$$s_{N-k} = ... = s_{N-1} = q = \frac{k+1}{k} > 1 \tag{3.32}$$

ve

$$s_N = (1 - p_N s_{N-k} ... s_{N-1})^{-1} > 1 \tag{3.33}$$

tanımlayalım. (3.30) ve $p_n \geq 0$ olduğundan $0 \leq p_n < 1$ olur. Böylece

$$s_N = \frac{1}{1 - p_N q^k} > \frac{1}{1 - p_N} > 1,$$

$$s_N = \frac{1}{1 - p_N q^k} < \frac{1}{1 - \sup p_N q^k} = \frac{1}{1 - \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}} = q$$

olup

$$s_N < q$$

bulunur. Şimdi

$$s_{N+1} = (1 - p_{N+1} s_{N+1-k} ... s_N)^{-1} \tag{3.34}$$

tanımlayalım.

$$s_{N+1} = \frac{1}{1 - p_{N+1} q^{k-1} s_N} < \frac{1}{1 - p_{N+1} q^{k-1} q} < \frac{1}{1 - \sup p_{N+1} q^k} = q$$

olup

$$1 < s_{N+1} < q$$

bulunur.

Şimdi $k = 1, 2, ...$ için $1 < s_{N+k} < q$ olduğunu gösterelim.

$k = 1$ için $1 < s_{N+1} < q$ olur.

$k = m$ için $1 < s_{N+m} < q$ olduğunu kabul edelim.

$k = m + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$k = m + 1$ için

$$s_{N+m+1} = \frac{1}{1 - p_{N+m+1} s_{N+m+1-k} \cdots s_{N+m}} < \frac{1}{1 - \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} q^{k-1} s_{N+m}}$$

ve $s_{N+m} < q$ olduğundan

$$s_{N+m+1} < \frac{1}{1 - \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} q^k} = q$$

olur. O halde her $k = 1, 2, ...$ için $1 < s_{N+k} < q$ olur. $n \geq N$ için $\{s_N\}$ dizisi (3.31) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca

$$y_N = 1,\ y_{N+1} = \frac{y_N}{s_N} \tag{3.35}$$

tanımlanırsa, bu şekilde devam edilerek $\{y_N\}$ dizisi (3.3) denklemini sağlayan bir çözüm olur. □

Şimdi $\{p_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve k pozitif tamsayı olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + p_n a_{n-k} = 0,\ n = 0, 1, 2, ... \tag{3.36}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin çözümlerinin salınımlılığı için Erbe ve Zhang tarafından elde edilen sonuçtan daha iyi olan aşağıda verilen sonucu inceleyelim.

Teorem 3.19. *k pozitif bir tamsayı ve $\{p_n\}$ negatif olmayan bir reel sayı dizisi olmak üzere, eğer*

$$\liminf_{n\to\infty} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \right] > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.37}$$

ise (3.36) *denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur (Ladas vd. 1989).*

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.36) denklemine ait pozitif salınımlı olmayan bir $\{a_n\}$ çözümünün varlığını kabul edelim. Böylece

$$a_{n+1} - a_n = -p_n a_{n-k} \leq 0$$

olur. Böylece $\{a_n\}$ pozitif sayıların artmayan bir dizisi olur. $a_n \leq a_{n-k}$ olduğundan (3.36) denkleminden

$$a_{n+1} - a_n + p_n a_n \leq 0$$

veya

$$p_n \leq 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{3.38}$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \leq \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) \tag{3.39}$$

olur.

$$\alpha = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.40}$$

tanımlayalım. Böylece yeterince büyük n ler için, (3.37) yardımıyla

$$\alpha \leq \beta \leq \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \tag{3.41}$$

olur. Buradan ve yeterince büyük n ler için, (3.39) ifadesinden

$$\beta \leq \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) \tag{3.42}$$

yazılabilir. (3.42) eşitsizliği ve aritmetik ortalama-geometrik ortalama arasındaki bağıntı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\beta &\leq \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) = 1 - \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right) \leq 1 - \left(\prod_{i=n-k}^{n-1}\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)^{\frac{1}{k}} \\
&= 1 - \left(\frac{a_{n-k+1}}{a_{n-k}}\frac{a_{n-k+2}}{a_{n-k+1}}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{k}} \\
&= 1 - \frac{a_n}{a_{n-k}}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan yeterince büyük n ler için

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right)^{\frac{1}{k}} \leq 1 - \beta \tag{3.43}$$

elde edilir. $\{a_n\}$ pozitif terimli dizi olduğundan $0 < \beta < 1$ olur. Ayrıca α (3.40) teki tanımlanmış olmak üzere

$$\max_{0\leq\lambda\leq 1}\left[(1-\lambda)\,\lambda^{\frac{1}{k}}\right] = \frac{k}{(k+1)^{1+\frac{1}{k}}} = \alpha^{\frac{1}{k}} \tag{3.44}$$

olur.

Gerçekten

$$f(\lambda) = (1-\lambda)\,\lambda^{\frac{1}{k}} \tag{3.45}$$

olsun.

$$f'(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{k}}\left(-1 + \frac{1}{k\lambda}(1-\lambda)\right) = 0$$

olup

$$\lambda = \frac{1}{k+1}$$

bulunur. Ayrıca

$$f''(\frac{1}{k+1}) = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}-1}\left[-k-k^2\right] < 0$$

olur. $f''(\lambda) < 0$ olduğundan $\lambda = \frac{1}{k+1}$ apsisli noktada $f(\lambda)$ maksimuma sahiptir.

$$f\left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{(k+1)^{1+\frac{1}{k}}}$$

olur. Bu nedenle $0 < \lambda \leq 1$ için

$$1-\lambda \leq \alpha^{\frac{1}{k}}\lambda^{-\frac{1}{k}}$$

olur ve $0 < \beta < 1$ olduğundan

$$1-\beta \leq \alpha^{\frac{1}{k}}\beta^{-\frac{1}{k}}$$

yazılabilir. (3.43) yardımıyla yeterince büyük n ler için

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right)^{\frac{1}{k}} \leq 1-\beta \leq \alpha^{\frac{1}{k}}\beta^{-\frac{1}{k}}$$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\beta}{\alpha}a_n \leq a_{n-k} \tag{3.46}$$

elde edilir. (3.46) eşitsizliğini (3.36) kullanırsak

$$a_{n+1} - a_n + p_n\frac{\beta}{\alpha}a_n \leq 0$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı a_n e bölersek

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 + p_n \frac{\beta}{\alpha} \leq 0$$

elde edilir.

Her iki tarafın $n-k$' dan $n-1$' e kadar toplamını alır ve $\frac{1}{k}$ ile çarparsak (3.41) yardımıyla

$$\frac{\beta}{\alpha}\beta \leq 1 - \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)$$

olur. Aritmetik ortalama ve geometrik ortalama arasındaki bağıntıyı kullanarak

$$\frac{\beta^2}{\alpha} \leq 1 - \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right) \leq 1 - \left(\prod_{i=n-k}^{n-1}\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)^{\frac{1}{k}},$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha} \leq 1 - \left(\frac{a_{n-k+1}}{a_{n-k}}\frac{a_{n-k+2}}{a_{n-k+1}}...\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{k}},$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha} \leq 1 - \left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

ya da

$$1 - \beta \leq \alpha^{\frac{1}{k}}\beta^{-\frac{1}{k}}$$

olduğundan yeterince büyük n ler için

$$1 - \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right) \leq \alpha^{\frac{1}{k}}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}$$

olur. Buradan

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right) \leq \alpha\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)$$

olup

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 a_n \leq a_{n-k} \tag{3.47}$$

olur.

Tümevarım yöntemiyle $m = 1, 2, ...$ olmak üzere $n \geq n_m$ için n_m tamsayısı

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m a_n \leq a_{n-k} \tag{3.48}$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca, yeterince büyük n ler için (3.41) ifadesinden

$$\sum_{i=n-k}^{n} p_i \geq \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \geq k\beta \tag{3.49}$$

elde edilir. Yeterince büyük n ler için

$$\sum_{i=n-k}^{n} p_i \geq M \tag{3.50}$$

öyle ki

$$M = k\beta > 0 \tag{3.51}$$

olur. Öyle bir m seçelim ki

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m > \left(\frac{2}{M}\right)^2 \tag{3.52}$$

olsun. Böylece yeterince büyük n ler için $n \geq n_0$ olmak üzere (3.48) ve (3.52) te seçilen özel m sağlanır. (3.48) dan $n \geq n_0 + k$ için $n - k \leq n^* \leq n$ olacak şekilde bir n^* tamsayısı vardır öyle ki

$$\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i \geq \frac{M}{2} \text{ ve } \sum_{i=n^*}^{n} p_i \geq \frac{M}{2}$$

olur. (3.36) ifadesinden ve $\{a_n\}$ azalan olmasından

$$a_{n^*+1} - a_{n-k} = \sum_{i=n-k}^{n^*} (a_{i+1} - a_i) = -\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i a_{i-k} \leq -\left(\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i\right) a_{n^*-k} \leq -\frac{M}{2} a_{n^*-k}$$

olup

$$\frac{M}{2} a_{n^*-k} \leq a_{n-k} \tag{3.53}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$a_{n+1} - a_{n^*} = \sum_{i=n^*}^{n} (a_{i+1} - a_i) = -\sum_{i=n^*}^{n} p_i a_{i-k} \leq -\left(\sum_{i=n^*}^{n} p_i\right) a_{n-k} \leq -\frac{M}{2} a_{n-k}$$

olup

$$\frac{M}{2} a_{n-k} \leq a_{n^*} \tag{3.54}$$

elde edilir. (3.48), (3.53) ve (3.54) birlikte düşünüldüğünde

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \leq \frac{a_{n^*-k}}{a_{n^*}} \leq \left(\frac{2}{M}\right)^2$$

olur ki bu ifade (3.52) ile çelişir. O halde (3.36) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. □

$p \in C\left[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+\right], \tau > 0$ olmak üzere

$$x'(t) + p(t)x(t - \tau) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denkleminin ayrık bir benzeri olarak

$$a_{n+1} - a_n + p_n a_{n-k} = 0$$

fark denklemini düşünebiliriz. Yukarıda verilen diferensiyel denklemin salınımlı olması için gerek şart aşağıda verilmiştir.

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}.$$

Fark denkleminin çözümlerinin salınımlı olması için gerek şart ise

$$\liminf_{t\to\infty} \left[\frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i\right] > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}},$$

$$\liminf_{t\to\infty} \left[\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i\right] > \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \left[\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i\right] > \left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$$

olup, buradan

$$\lim_{t\to\infty} \left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{1}{e}$$

olduğundan

$$\liminf_{t\to\infty} \left[\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i\right] > \frac{1}{e}$$

yazılır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu yüksek lisans tez çalışmasında aşağıda ifade edilen sabit katsayılı-sabit gecikmeli ve değişken katsayılı-sabit gecikmeli fark denklemleri ele alınmıştır.

$p \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0 \tag{4.1}$$

fark denklemini,

$i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (0, \infty)$ ve $k_i \in \{0, 1, 2, ...\}$ iken veya $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (-\infty, 0)$ ve $k_i \in \{... - 3, -2, -1\}$ iken $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i} = 0 \tag{4.2}$$

fark denklemini ve

$p_n > 0$ ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} = 0 \tag{4.3}$$

fark denklemleri çalışılmıştır. Bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılık davranışlarını incelenmiştir.

Bu bulgular ise aşağıdaki gibidir.

(4.1) denkleminin çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul aşağıda yer alan koşullardan herhangi birinin sağlanmasıdır.

(a) $p \leq -1$ ve $k = -1$,

(b) $p \geq 1$ ve $k = 0$

(c) $p\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > 1$ ve $k \in \{..., -3, -2\} \cup \{1, 2, ...\}$.

Ayrıca (4.1) fark denklemi

$$x'(t) + px(t - \tau) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denkleminin ayrık benzeri olarak düşünülebilir. Bu diferensiyel denkleme ait salınımlılık şartı $p\tau > \frac{1}{e}$ şeklindedir.

(4.2) denklemine ait salınımlılık koşulu ise aşağıdaki gibidir.

$i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (0, \infty)$ ve $k_i \in \{0, 1, 2, ...\}$ veya $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (-\infty, 0)$ ve $k_i \in \{... - 3, -2, -1\}$ şartlarından biri sağlansın. Eğer

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i + 1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}} > 1$$

ise (4.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır

Ayrıca (4.2) fark denklemi

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i x(t - \tau_i) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denkleminin ayrık benzeri olarak düşünülebilir. Bu diferensiyel denkleme ait salınımlılık şartı $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \tau_i > \frac{1}{e}$ şeklindedir.

(4.3) denklemine ait koşullar ise aşağıdaki gibidir.

Kabul edelim ki

$$\liminf_{n \to \infty} p_n \equiv c > 0 \text{ ve } \limsup_{n \to \infty} p_n > 1 - c$$

olsun. Bu durumda

(a)

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} \leq 0$$

eşitsizliğinin pozitif çözümü yoktur.

(b)

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} \geq 0$$

eşitsizliği hiçbir negatif çözüme sahip değildir.

(c) (4.3) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Diğer koşul ise aşağıdaki gibidir.

Kabul edelim ki $p_n \geq 0$ ve

$$\sup p_n < \frac{k^k}{(k + 1)^{k+1}}$$

olsun. Böylece (4.3) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir.

Bu araştırma sonraki çalışmalarda detaylandırılarak konu edinilebilir ve analiz edilebilir. Benzer şekilde, denklemin gecikme teriminin özelliklerine göre yeni ve farklı araştırmalar yapılabilir.

5. SONUÇLAR

Fark denklemleri zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin doğal bir ifadesidir. Zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların birçoğu ayrık (kesikli) olduğu için bu tür denklemlere önemli matematiksel modellemelerde yer verilir. Daha da önemli olan nokta ise fark denklemleri diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma yöntemlerinin incelenmesinde karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bu tür denklemlere karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık bir benzeri olarak ele alınır. Bu tez çalışmasında ise fark denklemleri incelenmiş ve bu denklemlerin çözümlerine ait salınımlılık koşullarına yer verilmiştir. İlk olarak fark denklemleri ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci kısımda fark denklemleri ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü kısımda ise sabit katsayılı-sabit gecikmeli ve değişken katsayılı-sabit gecikmeli fark denklemleri ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Bu denklemlerin çözümlerine ait salınımlılık koşulları elde edilmiştir. Gecikmeli diferensiyel denklemler ve fark denklemleri için elde edilen iyi bilinen salınımlılık koşulları karşılaştırılmıştır. Sabit katsayılı-sabit gecikmeli ve değişken katsayılı-sabit gecikmeli,
$p \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0$$

fark denklemini, $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (0, \infty)$ ve $k_i \in \{0, 1, 2, ...\}$ iken veya $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i \in (-\infty, 0)$ ve $k_i \in \{... - 3, -2, -1\}$ iken $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i} = 0$$

fark denklemini ve $p_n > 0$ ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} = 0$$

fark denkleminin çözümlerine ait salınım koşullarına yer verilmiştir.
Ayrıca, tez çalışmasında yer alan sonuçlar bu konular ile ilgili çalışan bilim insanlarına yol gösterici niteliktedir.

6. KAYNAKLAR

Agarwal, R.P. 2000. Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, New York, 777 s.

Arino, O., Györi, I. and Jawhari, A. 1984. Oscillation criteria in delay equations. *Journal of Differential Equations*, 53: 115-123.

Elaydi, S. 1999. An Introduction to Difference Equations. Springer-Verlag, New York, 429 s.

Erbe, L.H. and Zhang, B.G. 1989. Oscillation of discrete analogues of delay equations. *Differential and Integral Equations*, 2: 300-309.

Goldberg, S. 1958. Introduction to difference equations. John Wiley and Sons, New York, 260 s.

Györi, I. and Ladas, G. 1989. Linearized oscillations for equations with piecewise constant arguments. *Differential and Integral Equations*, 2: 123-131.

Györi, I. and Ladas, G. 1991. Oscillation theory of delay differential equations. Clarendon Press, Oxford, 380 s.

Jaros, J. and Stavroulakis, I.P. 1994. Necessary and sufficient conditions for oscillations of difference equations with several delays. *Utilitas Mathematica*, 45: 187-195.

Koplatadze, R. G. And Chanturia, T. A. 1982. On the oscillatory and monotone solutions of the first order differential equations with deviating arguments. *Journal of Differential Equations*, 18: 1463-1465.

Ladas, G., Philos, Ch. G. and Sficas, Y. G. 1989. Sharp condition for the oscillation of delay difference equations. *Journal of Applied Mathematics and Simulation*, 2: 101-112.

Ladas, G. 1979. Sharp conditions for oscillations caused by delays. *Applicable Analysis*, 9: 93-98.

Ladas, G. 1990. Explicit conditions for the oscillation of difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 153: 276-287.

Ladas, G. and Sficas, Y.G. 1984. Oscillations of delay differential equations with positive and negative coefficients. Proccedings of the International Conference on Qualitative Theory of Differential Equations, s. 232-40, 18-20 Haziran, University of Alberta, Alberta.

Ladas, G. Sficas, Y.G. and Stavroulakis, I.P. 1983. Necessary and sufficient conditions for oscillations. *American Mathematical Monthly*, 90: 247-53.

Lakshmikantham, V. and Trigiante, D. 1988. Theory of difference equations: Numerical methods and applications. Academic Press, San Diego, 320 s.

Sümürken, S. 2007. Diferensiyel ve Fark Denklemlerinin Salınımlılığı. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon, 63 s.

Tang, X.H. and Zhang, R.Y. 2001. New oscillation criteria for delay difference equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 42: 1319-1330.

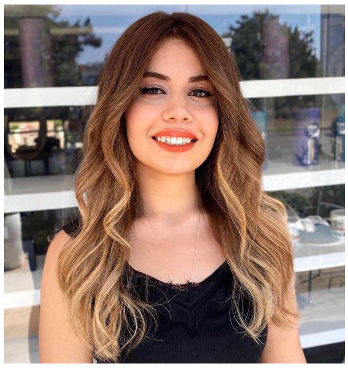
Tramov, M.I. 1975. Conditions for oscillatory solutions of first order differential equations with a delayed argument. *Izvestiya Vysshikh Uchebnyk Zavedenii, Seriya Matematika*, 19: 92-96.

Yu, J.S., Zhang, B.G. and Qian, X.Z. 1993. Oscillations of delay difference equations with oscillating coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 177: 432-444.

Yu, J.S. , Zhang, B.G. and Wang, Z.C. 1994. Oscillation of delay difference equations. *Applicable Analysis*, 53: 117-124.

Yu, J.S. and Tang, X.H. 2000. Sufficient conditions for the oscillation of linear delay difference equations with oscillating coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 250: 735-742.

ÖZGEÇMİŞ



Duygu Ecem KARABACAK

E-mail: *duygu_ecem94@hotmail.com*

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2019-2022	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D., Kampüs, Antalya
Lisans 2013-2017	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Matematik Eğitmeni 2021-Devam ediyor	Antalya Bilim Merkezi Fabrikalar Mh., Dokumapark, Kepez, Antalya