T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ OSKÜLATÖR VE REKTİFYAN EĞRİ ÇİFTLERİ

Oğuzhan ÇELİK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

ARALIK 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ OSKÜLATÖR VE REKTİFYAN EĞRİ ÇİFTLERİ

Oğuzhan ÇELİK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

ARALIK 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ OSKÜLATÖR VE REKTİFYAN EĞRİ ÇİFTLERİ

Oğuzhan ÇELİK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 02/12/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK
Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU
Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YILMAZ CEYLAN

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ OSKÜLATÖR VE REKTİFYAN EĞRİ ÇİFTLERİ

Oğuzhan ÇELİK

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Aralık 2022, 61 sayfa

Bu tezin amacı, Öklid uzayında tanımlanan paralel eğri Bertrand, Mannheim ve Backlund gibi bazı ünlü eğri çiftlerini genelleştiren yeni bir eğri çifti tanımı vermektir. Bunun için eğrilerin karşılıklı noktalarında rektifyan ve oskülatör düzlemlerin bazı koşullar altında kesiştirilmesi yardımıyla yeni bir tanım verilmiştir.

Birinci bölümde paralel, involüt, evolüt, pedal, Bertrand, Mannheim ve Backlund eğri çiftlerinin her biriyle ilgili Öklid uzayında yapılmış çalışmalar incelenip bu eğriler hakkında bilgi verilmiş ve tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde kullanılacak tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde Öklid uzayında oskülatör eğri çifti tanımlanmış ve bu eğri çiftinin Frenet vektör alanları, eğriliği ve burulması verilmiştir. Oskülatör düzlemlerinin kesişimlerinin karşılıklı noktalarından geçen eğri çiftinin teğetlerinin yaptığı açı γ ve karşılıklı binormallerinin yaptığı açı θ olmak üzere γ ve θ açılarının spesifik değerleri sonucu ortaya çıkan eğrinin hangi çok bilinen eğri çiftine karşılık geldiği ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde rektifyan eğri çifti tanımlanmış ve benzer incelemeler yapılarak, çok bilinen eğri çiftlerine indirgenen durumlar ele alınmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Backlund dönüşümü, Bertrand eğri çifti, Mannheim eğri çifti, Oskülatör eğri çifti, Rektifyan eğri çifti.

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK
Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU
Doç. Dr. Melek ERDOĞDU
Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YILMAZ CEYLAN

ABSTRACT

GENERALIZED OSCULATOR AND RECTIFYING CURVE PAIRS

Oğuzhan ÇELİK

PhD Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
December 2022 61 pages

The aim of this thesis is to give a new pair of curves definition that generalizes some famous curve pairs such as Bertrand, Mannheim and Backlund, parallel curve defined in the Euclidean space. For this, a new definition is given with the help of the intersection of the osculating and rectifying planes at the reciprocal points of the curves.

In the first chapter, studies in Euclidean space related to each of the parallel, involute, evolute, pedal, Bertrand, Mannheim and Backlund curve pairs are investigated and information about these curves is given, and the definitions and theorems to be used in the following sections of the thesis are given.

In the second chapter, osculating curve pair is defined in the Euclidean space and Frenet vector fields, curvature and torsion of this curve pair are given. It has been expressed which well-known curve pair corresponds to the curve resulting from the specific values of the γ and θ, where γ is the angle between the tangents of the curves and the intersection line of the osculator planes and, θ is the angle between corresponding points of the binormals. In the third chapter, the rectifying curve pair is defined and the cases that are reduced to well-known curve pairs are discussed by making similar examinations.

KEYWORDS: Backlund transformation, Bertrand curves, Mannheim curves, Osculating pair of curves, Rectifying pair of curves.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Assoc. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK
Assoc. Prof. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU
Assoc. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU
Asst. Prof. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN

ÖNSÖZ

Bu tezde, paralel, involüt, evolüt, Mannheim, Bertrand ve Backlund gibi çok bilinen eğri çiftleriyle ilgili tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir. Daha sonra oskülatör ve rektifyan düzlemde bu çok bilinen eğri çiftlerinin genelleştirilmiş bir denkleminin, eğriliğinin ve burulması verilmiştir. Sonuç olarak oskülatör ve rektifyan düzlemde hangi özel durumda hangi çok bilinen eğrinin elde edildiği sunulmuştur.

Tez konumun belirlenmesinde ve hazırlanmasında, her türlü yardım ve fedakarlığı esirgemeyen, bilgisi, tecrübesi ve destekleri ile çalışmalarımda bana yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR'e en kalbi duygularımla teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışmamı, eğitim sürecim boyunca beni cesaretlendiren, manevi desteklerini esirgemeyen aileme ithaf ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum "Genelleştirilmiş Oskülatör Ve Rektifyan Eğri Çiftleri" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

02/12/2022

Oğuzhan ÇELİK

İmza

SİMGELER

Simgeler:

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
E^2	: 2-boyutlu Öklid uzayı
E^3	: 3-boyutlu Öklid uzayı
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbf{T}$	: Eğrinin teğet vektörü
$\mathbf{N}$	: Eğrinin asli normal vektörü
$\mathbf{B}$	: Eğrinin binormal vektörü
κ	: Eğrilik fonksiyonu
τ	: Burulma fonksiyonu
α	: Öklid uzayında bir eğri
$\langle\ ,\rangle$	: Öklid uzayında iç çarpım
$\times$	: Öklid uzayında vektörel çarpım
$\Vert\ .\Vert$	: Norm
$\mathcal{P}$	: Bir eğrinin paralel eğrisi
$\mathcal{I}$	: Bir eğrinin involüt eğrisi
$\mathcal{E}$	: Bir eğrinin evolüt eğrisi
$\{\beta, \beta^*\}$	: Bertrand eğri çifti
$\{\mathcal{M},\mathcal{M}^*\}$	: Mannheim eğri çifti

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında düzlemde yer alan paralel, involüt, evolüt, pedal ve kontrapedal eğri çiftleriyle $\mathbb{E}^3$ uzayında yer alan Bertrand, Mannheim Backlund eğri çiftlerinin literatürdeki tanımlamaları, eğriliği ve burulmaları verilecektir (Babaarslan ve Yaylı 2013, Burke 1960, Choi ve Kim 2012, Dede ve Ekici 2018, Deshmukh vd.2018, Ekmekci ve Ilarslan 2001, Honda ve Takahashi 2020, Izumiya ve Takeuchi 2002, Liu ve Wang 2008, Matsuda ve Yorozu 2003, Orbay ve Kasap 2009, Wang ve Liu 2007, Camcı vd. 2020, Camcı vd. 2021). Sonra bu çok bilinen eğri çiftlerinin oskülatör ve rektifyan düzlemlerinin kesişimleri üzerinde tanımlanıp genelleştirilmiş bir formülünün ortaya konmasını amaçlanmıştır.

Diferansiyel geometrinin temel konularından birisi eğriler teorisidir. İki eğrinin karşılıklı noktaları arasında bağıntılar kurularak eğri çiftleri elde edilmiştir. Bu elde edilen eğri çiftlerinin bir kısmını paralel, involüt, evolüt, pedal, kontrapedal, Bertrand, Mannheim eğri çiftleri oluşturur. Bu eğri çiftlerinden bir kısmı birçok araştırmacı tarafından daha büyük boyutlarda incelenmiştir. Bu araştırmalardan bazıları (Cheng ve Lini 2010, Görgülü ve Özdamar 1986, Hanif ve Hou 2018, Matsuda ve Yorozu 2009, Öztürk vd. 2018) gibi çalışmalardır. Ayrıca bu eğri çiftleri Lorentz uzayında da (Balgetir vd. 2004, Bukcü ve Karacan 2007, Bukcü ve Karacan 2008, Gök vd. 2014, Güner ve Ekmekçi 2012, Ilarslan ve Kılıç Aslan 2017, Özdemir ve Çöken 2009, Uçum ve Ilarslan 2014, Uçum vd. 2016, Zhang ve Pei 2020) gibi birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Paralel (Offset) eğriler bir eğrinin normali boyunca sabit bir uzaklıkta olan bir eğri şeklinde tanımlanır. Paralel eğriler tolerans analizi, geometrik optik ve robot yol planlaması gibi çeşitli pratik uygulamalarda yaygın olarak kullanılırlar ve oldukça geniş bir alanda uygulaması vardır (Chen ve Lin 2014).

İnvolüt ve evolüt kavramı Hollandalı bir matematikçi ve bilim adamı olan Christiaan Huygens (1629-1695) tarafından ortaya konmuştur. Huygens 1673 yılında yayınladığı "Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum (Zamanı Ölçme Biliminde Salınım veya Sarkaç Hareketleri)" kitabını yazarken involüt ve evolüt kavramını bulmuş ve ortaya koymuştur (Merzbach ve Boyer 2011).

1845 yılında Saint Venant bir eğrinin normalinin aynı yüzeydeki bir başka eğrinin normali ile aynı doğrultuda olup olmadığı sorusunu sormuştur. Bertrand'a göre ise bu şekilde bir ikinci eğrinin varlığı için gerek yeter koşul ilk eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri arasında sabit katsayılı bir lineer bağlılığın olması gerektiğini ispatlamıştır. Bir başka ifadeyle bu eğrinin eğrilikleri sırasıyla k_1 ve k_2 olsun, O halde $\lambda k_1 + \mu k_2 = 1$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olması gerekir. 1850'den itibaren bu eğri çiftine Bertrand eğri çifti denilmiştir (Uçum vd. 2016).

Mannheim eğrileri 1878 yılında A. Mannheim tarafından ifade edilmiştir. Eğrilerin karşılık gelen noktalarında bir eğrinin asal normali ile bir başka eğrinin binormali ile aynı doğrultuda ise bu iki eğriye Mannheim eğri çifti denir (Yılmaz Ceylan 2015).

Backlund dönüşümü İsveçli Matematikçi ve Fizikçi Albert Victor Backlund(1845-1922) tarafından ifade edilmiştir.Backlund dönüşümü sabit ikinci burulmaya sahip bir timelike eğriyi sabit ikinci burulmaya sahip başka bir timelike eğriye taşıyan dönüşüme denir (Erdoğdu ve Özdemir 2018).

Backlund eğrisinin karşılıklı noktalarının binormalleri arasındaki açı θ ve uzaklakları λ olmak üzere Backlund eğrisinin karşılıklı noktalarındaki burulmaları sabittir ve $\tau = \tau^* = \frac{\sin\theta}{\lambda}$ şeklinde ifade edilir (Nemeth 1998, Celik ve Özdemir 2022).

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, diferansiyel geometrinin bazı temel kavramları ve çok bilinen eğriler arasında yer alan bir eğrinin paralel eğrisi, involüt eğrisi, evolüt eğrisi, pedal eğrisi, Bertrand eğri çifti, Mannheim eğri çifti ve Backlund eğri çiftleri tanımlanıp bu eğri çiftlerinin eğriliklerini ve burulmaları ile ilgili bazı teoremler verilmiştir. Bu bölümde verilen tanımlar ve teoremler için Hacısalihoğlu (1998) ve Özdemir (2020) kitabından ve Calini ve Ivey (1998), Nemeth (1998) ve Erdoğdu ve Özdemir (2018) makalesinden yararlanılmıştır. Diğer özel kavramların tanımı ve sonuçları, tez boyunca konu içerisinde uygun yerlerde açıklanacaktır.

Tanım 2.1. $\mathbb{V}$ *bir vektör uzayı olmak üzere,*

$$f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, $\forall\ \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\ \in \mathbb{V}$ *ve* $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ *için aşağıdaki koşulları sağlarsa* $\mathbb{V}$ *vektör uzayına* $\mathbb{R}$ *reel sayılar cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı, g dönüşümüne de* $\mathbb{V}$ *üzerinde bir iç çarpım denir.* $\overrightarrow{x}$ *ve* $\overrightarrow{y}$ *vektörlerinin iç çarpımı* $f\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ *veya* $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle$ *ile ifade edilir.(Özdemir 2021).*

- ***İ1.*** $f\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) = f\left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}\right)$ *(Simetri)*
- ***İ2.*** $\begin{array}{c} f\left(a\overrightarrow{x}+b\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)=a.f\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}\right)+b.f\left(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right) \\ f\left(\overrightarrow{x}, a\overrightarrow{y}, b\overrightarrow{z}\right)=a.f\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)+b.f\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}\right) \end{array}$ *(Bilineerlik Özelliği)*
- ***İ3.*** $\forall\ \overrightarrow{x} \in \mathbb{V}$ *için* $f\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\right) \geq 0$ *(Pozitif Tanımlılık-1)*
- ***İ4.*** $f\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ *(Pozitif Tanımlılık-2)*

Tanım 2.2. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ *olmak üzere* $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *için*

$$f = \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu,

$$f(x, y) = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

şeklinde tanımlanırsa $\mathbb{R}^n$ *üzerinde bir iç çarpım olur. Bu şekilde tanımlanan iç çarpıma* $\mathbb{R}^n$ *uzayında Öklid İç çarpımı denir.*

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

şeklinde tanımlanan $\|\overrightarrow{x}\|$ *ifadesine* $\overrightarrow{x}$ *vektörünün uzunluğu veya normu denir.*

$$\left(\mathbb{R}^n, \textit{Öklid İç Çarpımı}\right) = \mathbb{E}^n\left(\textit{Öklid Uzayı}\right)$$

$\mathbb{R}^n$ *üzerinde tanımlanan Öklid iç çarpımı ile birlikte* $\mathbb{R}^n$ *uzayına Öklid Uzayı denir (Özdemir 2020).*

Tanım 2.3. $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ *uzayında bir açık aralık olmak üzere,* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ *dönüşümü* (a, b) *aralığının her noktasında parçalı sürekli ise,* α*'ya* $\mathbb{E}^n$ *uzayında bir eğri denir (Özdemir 2020).*

Tanım 2.4. $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ *uzayında bir açık aralık olmak üzere,* $\forall s \in I$ *için* $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ *eğrisinde,* $\alpha'(s) \neq 0$ *ise bu eğri regüler eğri şeklinde tanımlanır (Özdemir 2020).*

Tanım 2.5. U, $\mathbb{E}^n$ *uzayında bir açık alt cümle olmak üzere bir* $f : U \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun k mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler* f *fonksiyonuna* C^k *sınıfından (k-inci sınıftan) diferansiyellenebilir denir. Özel olarak* f *sadece sürekli ise* C^0 *sınıfındandır denir (Hacısalihoğlu 1998).*

- $C^k(U, \mathbb{R}) = \left\{ f \mid f : U \to \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ sınıfından} \right\}$,
- $C^\infty(U, \mathbb{R}) = \left\{ f \mid f \in C^k(U, \mathbb{R}),\ k \in \mathbb{N} \right\}$.

Tanım 2.6. (I, α) *koordinat komşuluğunda* $M \subset \mathbb{E}^n$ *eğrisi tanımlansın.*

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| &: I \to \mathbb{R} \\ &: t \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan

- $\|\alpha'\|$ *fonksiyonuna,* M *eğrisinin* (I, α) *koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu denir,*
- $\|\alpha'(t)\|$ *reel sayısına da* M*'in* (I, α) *koordinat komşuluğuna göre* $\alpha(t)$ *noktasındaki skaler hızı denir (Hacısalihoğlu 1998).*

Tanım 2.7. (I, α) *koordinat komşuluğunda* $M \subset \mathbb{E}^n$ *eğrisi tanımlansın. Eğer* $\forall t \in I$ *için,* $\|\alpha'(t)\| = 1$ *ise* M *eğrisine* (I, α)*'ya göre birim hızlı eğri denir. Bu bağlamda, eğrinin* $t \in I$ *parametresine yay parametresi denir (Özdemir 2020).*

Tanım 2.8. *$U, V \subset \mathbb{E}^n$ olmak üzere $\psi : U \to V$ dönüşümü ve ψ^{-1} ters dönüşümü diferansiyellenebilir ise ψ dönüşümüne difeomorfizm denir (Özdemir 2020).*

Tanım 2.9. *$\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ bir eğri ve $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,*

$$h : J \to I, \quad h(s) = t$$

difeomorfizmine α eğrisi için bir parametre dönüşümü şeklinde tanımlanır. $(\alpha \circ h)(s)$ eğrisine de, $\alpha(t)$ eğrisinin $h(s)$ ile yeniden parametrelendirilmesi denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.10. *α eğrisi birim hızlı ise, $\|\alpha'(t)\| = 1$ olduğundan, $\alpha'(t) = \mathbf{T}$ olarak alınır. O halde $\mathbf{T}$ vektörüne eğrinin birim teğet vektör alanı denir.*

Teğet vektör alanı

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1$$

olduğundan türev alınırsa

$$\langle \mathbf{T}', \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{T}, \mathbf{T}' \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{T}', \mathbf{T} \rangle = 0$$

elde edilir. O halde $\mathbf{T}'$ vektörü birim hızlı bir eğride eğri boyunca teğete dik bir vektör olur. $\mathbf{T}'$ vektörü birim olmayabilir. Bu vektörün normu alınarak birim hızlı hale getirilir ve bu vektöre de eğrinin normal vektörü denir ve $\mathbf{N}$ ile gösterilir. Buradan Normal vektör alanı

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|} = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan birbirine dik olan iki birim vektöre dik olacak şekilde üçüncü vektörü de vektörel çarpımla elde ederek eğri üzerinde birbirine dik üç birim vektör elde edilmiş olunur. Bu elde edilen vektöre eğrinin binormal vektörü denir ve $\mathbf{B}$ ile gösterilir. Buradan Binormal vektör alanı

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

tanımlanır (Özdemir 2020).

Tanım 2.11. *$\alpha(t)$ eğrisi birim hızlı ise,*

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \alpha'(t) \\ \mathbf{N} &= \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{T} \times \mathbf{N} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan vektörlere, eğrinin Frenet vektör alanları, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ *çatısına da Frenet çatısı denir (Özdemir 2020).*

Tanım 2.12. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ *birim hızlı bir eğri olsun.* $\alpha(t)$ *eğrisinin Frenet vektör alanları* $\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)$ *olmak üzere*

$$\kappa : I \to \mathbb{R}, \kappa(t) = \langle \mathbf{T}'(t), \mathbf{N}(t) \rangle$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona, α *eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir (Özdemir 2020).*

Tanım 2.13. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ *birim hızlı bir eğri olsun.* $\alpha(t)$ *eğrisinin Frenet vektör alanları* $\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)$ *olmak üzere*

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \tau(t) = \langle \mathbf{N}'(t), \mathbf{B}(t) \rangle$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona, α *eğrisinin burulma fonksiyonu denir (Özdemir 2020).*

Teorem 2.14. $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ *herhangi bir eğri olsun.* $\alpha(t)$ *eğrisinin Frenet vektörleri,* κ *eğriliği ve* τ *burulması*

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\
\mathbf{B}(t) &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \\
\mathbf{N}(\mathbf{t}) &= \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) \\
\kappa(t) &= \frac{\left\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\right\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \\
\tau(t) &= \frac{\left\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \right\rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}
\end{aligned}$$

formülleri ile elde edilir (Özdemir 2020).

Tanım 2.15. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ *birim hızlı bir eğri olsun.* $\alpha(t)$ *eğrisinin Frenet vektör alanları* $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ *olmak üzere*

- $\mathbf{T}$ *ve* $\mathbf{N}$ *nin gerdiği düzleme Oskülatör düzlem*
- $\mathbf{T}$ *ve* $\mathbf{B}$ *nin gerdiği düzleme Rektifyan düzlem*
- $\mathbf{N}$ *ve* $\mathbf{B}$ *nin gerdiği düzleme Normal düzlem*

denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.16. *α regüler bir düzlem eğrisi olmak üzere, $\mathbf{N}$ α eğrisinin normal vektör alanı olsun. O halde $r \in \mathbb{R}$ için,*

$$\mathcal{P}_{\alpha}(t,r) = \alpha(t) + r\mathbf{N}(t)$$

şeklinde tanımlanan eğriye, α eğrisinin paralel eğrisi denir. Bu paralel eğri, α eğrisinin r birim uzaklığındadır (Özdemir 2020).

Teorem 2.17. *α regüler bir düzlem eğrisi olmak üzere, α eğrisinin eğriliği $\kappa \neq 0$ olsun. O halde $\mathcal{P}_{\alpha}(t,r) = \alpha(t) + r\mathbf{N}(t)$ paralel eğrisinin eğriliği,*

$$\kappa_{\mathcal{P}}(t,r) = \frac{\kappa(t)}{1 - r\kappa(t)}$$

eşitliği ile ifade edilir (Özdemir 2020).

İspat $\mathcal{P}_{\alpha}(t,r) = \alpha(t) + r\mathbf{N}(t)$ paralel eğrisinin eğriliği,

$$\kappa_{\mathcal{P}} = \frac{\det\left(\mathcal{P}_{\alpha}', \mathcal{P}_{\alpha}''\right)}{\left\|\mathcal{P}_{\alpha}'\right\|^{3}}$$

eşitliğinden elde edilebilir. Buradan, $\mathcal{P}_{\alpha}(t,r)$ eğrisinin t'ye göre türevinden, $v = \|\alpha'(t)\|$ ve $c \in R$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\alpha}'(t,r) &= \alpha'(t) + r\mathbf{N}'(t) \\
&= v\mathbf{T}(t) + r\left(-\kappa v\mathbf{T}(t)\right) \\
&= v(1 - r\kappa)\mathbf{T}(t) \\
\mathcal{P}_{\alpha}''(t,r) &= \left(v(1 - r\kappa)\right)'\mathbf{T}(t) + v(1 - r\kappa)\mathbf{T}'(t) \\
&= \left(v(1 - r\kappa)\right)'\mathbf{T}(t) + v(1 - r\kappa)\left(v\kappa\mathbf{N}(t)\right) \\
&= \left(v(1 - r\kappa)\right)'\mathbf{T}(t) + v^{2}\kappa(1 - \kappa r)\mathbf{N}(t)
\end{aligned}$$

eşitliklerinden,

$$\kappa_{\mathcal{P}} = \frac{\det\left(\mathcal{P}_{\alpha}', \mathcal{P}_{\alpha}''\right)}{\left\|\mathcal{P}_{\alpha}'\right\|^{3}} = \frac{v^{3}\kappa(1 - \kappa c)^{2}}{v^{3}(1 - c\kappa)^{3}} = \frac{\kappa}{1 - c\kappa}$$

elde edilir. □

Tanım 2.18. *α eğrisi eğriliği her noktada sıfırdan farklı olan regüler bir eğri olmak üzere, α eğrisinin her noktadaki teğeti, bir $\mathcal{I}$ eğrisinin normali ise, yani $\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{N}_\mathcal{I}$ ise, $\mathcal{I}$ eğrisine α* ***eğrisinin*** *involüt eğrisi denir (Fuchs 2013, Özdemir 2020).*

Tanım 2.19. *α eğrisi eğriliği her noktada sıfırdan farklı olan regüler bir eğri olmak üzere, α'nın yay parametre fonksiyonu $s\left(t\right)$ ve teğet vektör alanı da $\mathbf{T}$ olacak şekilde,*

$$\mathcal{I}\left(t\right) = \alpha\left(t\right) - s\left(t\right)\mathbf{T}\left(t\right)$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{I}$ eğrisi, α eğrisinin involüt eğrisi olarak ifade edilir. Eğer, α eğrisi birim hızlı ise, $\|\alpha'\left(t\right)\| = 1$, $\alpha' = T$ ve $s\left(t\right) = t - c$ olacağından,

$$\mathcal{I}\left(t\right) = \alpha\left(t\right) + \left(c - t\right)\mathbf{T}\left(t\right)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}'\left(t\right) &= \alpha'\left(t\right) - s'\left(t\right)\mathbf{T}\left(\mathbf{t}\right) - s\left(t\right)\mathbf{T}'^{(t)} \\
&= v\mathbf{T}\left(t\right) - v\mathbf{T}\left(t\right) - s\left(v\kappa\mathbf{N}\left(t\right)\right) \\
&= -sv\kappa\mathbf{N}\left(t\right)
\end{aligned}$$

olur (Hanif ve Hou 2018, Özdemir 2020).

Teorem 2.20. *$\alpha : (a, b) \to \mathbb{E}^2$ olmak üzere, α eğrisinin düzlemde eğriliği κ, Frenet vektörleri $\mathbf{T}_\alpha$ ve $\mathbf{N}_\alpha$ olacak şekilde verilsin. α eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu $s\left(t\right)$ olmak üzere, α eğrisinin involüt eğrisi de $\mathcal{I}\left(t\right) = \alpha\left(t\right) - s\left(t\right)\mathbf{T}\left(t\right)$ denklemiyle verilsin. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

i. α eğrisinin teğet vektör alanı, $\mathcal{I}$ evolüt eğrisinin birim normal vektör alanıdır.

ii. $\mathcal{I}$ evolüt eğrisinin eğriliği, ϵ_κ ile κ eğrisinin işareti gösterilmek üzere,

$$\kappa_{\mathcal{I}(t)} = \frac{\epsilon_\kappa}{s}$$

ile belirlidir (Özdemir 2020).

İspat **i.** İnvolüt eğrisinin teğet vektörünü bulalım. $s' = \|\alpha'\| = v$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}'\left(t\right) &= \alpha'\left(t\right) - v\mathbf{T}_\alpha\left(t\right) - s\mathbf{T}'_\alpha\left(t\right) \\
&= v\mathbf{T}_\alpha\left(t\right) - v\mathbf{T}_v\left(t\right) - s\kappa\mathbf{N}_\alpha\left(t\right) \\
&= -s\kappa\mathbf{N}_\alpha\left(t\right)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, $\mathcal{I}$ involüt eğrisinin teğet vektör alanı,

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{I}'}{\|\mathcal{I}'\|} = \mathbf{N}_{\alpha}$$

olur. Bu durumda, $\mathbf{T}'_{\mathcal{E}} = \kappa_{\mathcal{E}}\mathbf{N}_{\mathcal{E}} = \mathbf{N}'_{\alpha} = \kappa\mathbf{T}_{\alpha}$ eşitliğinden,

$$\mathbf{N}_{\mathcal{E}} = \frac{\kappa}{\kappa_{\mathcal{E}}}\mathbf{T}_{\alpha}$$

bulunur. Yani, $\mathcal{I}$ evolüt eğrisinin birim normal vektör alanı, α eğrisinin teğet vektör alanıdır.

ii. $\mathcal{I}' = -s\kappa\mathbf{N}_{\alpha}$ eşitliğinin türevini alırsak,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}'' &= -s'\kappa\mathbf{N}_{\alpha} - s\kappa'\mathbf{N}_{\alpha} - s\kappa\mathbf{N}'_{\alpha} \\ &= -v\kappa\mathbf{N}_{\alpha} - s\kappa'\mathbf{N}_{\alpha} + s\kappa^2\mathbf{T}_{\alpha}\end{aligned}$$

olduğundan, $\mathcal{I}$ involüt eğrisinin eğriliği,

$$\kappa_{\mathcal{I}} = \frac{\det\left(\mathcal{I}',\mathcal{I}''\right)}{\|\mathcal{I}'\|^3} = \frac{s^2\kappa^3}{|s\kappa|^3} = \frac{\epsilon_\kappa}{s}$$

elde edilir. □

Teorem 2.21. $\mathbb{E}^3$ *uzayında* $\alpha(s)$ *herhangi regüler bir eğri ve yay parametre fonksiyonu* $s(t)$ *olsun.* α *eğrisinin eğriliği* κ *ve burulması* τ *olmak üzere,* α *eğrisinin*

$$\mathcal{I}(t) = \alpha(t) - s(t)\,\mathbf{T}(t)$$

şeklinde tanımlanan involüt eğrisinin eğriliği

$$\kappa_{\mathcal{I}}(t) = \frac{\sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)}}{s(t)\,\kappa(t)}$$

ile ifade edilir (Özdemir 2020).

İspat $\alpha(s)$ herhangi regüler bir eğri ve yay parametre fonksiyonu $s(t)$ ise $s' = \|\alpha'(t)\| = v$ olacak şekilde alalım.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}' &= \alpha'(t) - s'(t)\,\mathbf{T} - s(t)\,\mathbf{T}' \\ &= v\mathbf{T} - v\mathbf{T} - s\left(v\kappa\mathbf{N}\right) \\ &= -sv\kappa\mathbf{N}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{I}'' &= -(sv\kappa)'\,\mathbf{N} - sv\kappa\mathbf{N}' \\ &= -(sv\kappa)'\,\mathbf{N} - sv\kappa\left(-v\kappa\mathbf{T} + v\tau\mathbf{B}\right) \\ &= -(sv\kappa)'\,\mathbf{N} + sv^2\kappa^2\mathbf{T} - s\kappa v^2\tau\mathbf{B}\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}' \times \mathcal{I}'') &= \begin{vmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{N} & \mathbf{B} \\ 0 & -sv\kappa & 0 \\ sv^2\kappa^2 & -(sv\kappa)' & -s\kappa v^2\tau \end{vmatrix} \\ &= s^2\kappa^2v^3\tau\mathbf{T} + s^2\kappa^3v^3\mathbf{B}\end{aligned}$$

ve

$$\|\mathcal{I}'\| = sv\kappa \text{ ve } \|\mathcal{I}' \times \mathcal{I}''\| = s^2\kappa^2v^3\sqrt{\tau^2+\kappa^2}$$

olur. Buradan,

$$\kappa_{\mathcal{I}} = \frac{s^2\kappa^2v^3\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}{(sv\kappa)^3} = \frac{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}{s\kappa}$$

elde edilir. □

Tanım 2.22. *$\alpha : (a,b) \to \mathbb{E}^2$eğrisi eğriliği her noktada sıfırdan farklı olan regüler bir eğri olmak üzere, α eğrisinin eğriliği κ ve α eğrisinin normal vektör alanı da $\mathbf{N}$ olmak üzere,*

$$\mathcal{E}_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{N}(t)$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{E}_\alpha$ eğrisine, α eğrisinin evolüt eğrisi denir (Fuchs 2013, Özdemir 2020).

Teorem 2.23. *$\alpha : (a,b) \to \mathbb{E}^2$ olmak üzere, düzlemde eğriliği κ, Frenet vektörleri $\mathbf{T}_\alpha$ ve $\mathbf{N}_\alpha$ olacak şekilde α eğrisinin verilsin. γ eğrisinin evolüt eğrisi de $\mathcal{E}_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{N}_\alpha(t)$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

i. α eğrisinin normal vektör alanı, $\mathcal{E}$ evolüt eğrisinin birim teğet vektör alanıdır.

ii. $\mathcal{E}$ evolüt eğrisinin eğriliği, ϵ_κ, κ eğrisinin işaretini göstermek üzere,

$$\kappa_{\mathcal{E}(t)} = -v\left(\epsilon_\kappa\right)\left(\kappa'\right)^2$$

şeklinde olur.

iii. $\mathcal{E}_\alpha$ *evolüt eğrisinin* $\mathcal{E}_\alpha(t_1)$ *ve* $\mathcal{E}_\alpha(t_2)$ *noktaları arasındaki uzunluğu,* $t_1 < t_2$ *için,*

$$\left|\frac{1}{\kappa(t_1)} - \frac{1}{\kappa(t_2)}\right|$$

şeklinde olur (Özdemir 2020).

İspat i. Evolüt eğrisinin teğet vektörünü bulalım. $v = \|\gamma'\|$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'_\alpha &= \alpha' + (\frac{1}{\kappa})'\mathbf{N}_\alpha + \frac{1}{\kappa}\mathbf{N}'_\alpha \\ &= v\mathbf{T}_\alpha + (\frac{1}{\kappa})'\mathbf{N}_\alpha + \frac{1}{\kappa}(-v\kappa)\mathbf{T}_\alpha \\ &= (\frac{1}{\kappa})'\mathbf{N}_\alpha\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, $\mathcal{E}$ evolüt eğrisinin teğet vektör alanı,

$$\mathbf{T}_\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}'_\alpha}{\|\mathcal{E}'_\alpha\|} = \mathbf{N}_\alpha$$

elde edilir.

ii. $\mathcal{E}''_\alpha = (\frac{1}{\kappa})''\mathbf{N}_\alpha + (\frac{1}{\kappa})'\mathbf{N}'_\alpha = (\frac{1}{\kappa})''\mathbf{N}_\alpha + (\frac{1}{\kappa})'(-v\kappa)\mathbf{T}_\alpha$ olduğundan, $\mathcal{E}$ evolüt eğrisinin eğriliği,

$$\kappa_\mathcal{E} = \frac{\det(\mathcal{E}'_\alpha, \mathcal{E}''_\alpha)}{\|\mathcal{E}'_\alpha\|^3} = \frac{-v\kappa\left[(1/\kappa)'\right]^2}{|1/\kappa|^3} = -v(\epsilon_\kappa)(\kappa')^2$$

elde edilir. Yani, α eğrisinin $\alpha(t_0)$ noktasındaki eğriliği ile evolüt eğrisininin $\mathcal{E}_\alpha(t_0)$ noktasındaki eğriliğinin işaretleri farklıdır.

iii. $\|\alpha'(t)\| = \left|(1/\kappa)'\right|$ olduğundan, yay uzunluğu $t_1 < t_2$ için,

$$\begin{aligned}\textbf{yay}(\alpha(t_1, t_2)) &= \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left|(1/\kappa)'\right| dt \\ &= \left|\frac{1}{\kappa(t_1)} - \frac{1}{\kappa(t_2)}\right|\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 2.24. *Regüler bir düzlem eğrisi* α *olsun.* α *eğrisinin paralel eğrilerinin singüler noktalarının geometrik yeri,* α *eğrisinin evolüt eğrisi olur (Özdemir 2020).*

İspat $\mathcal{P}_{\alpha}(t,r) = \alpha(t) + r\mathbf{N}(t)$ paralel eğrisinin türevini alalım.

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \alpha'(t) + r\mathbf{N}'(t) \\ &= v\mathbf{T} + r(-\kappa(t)v\mathbf{T}(t)) \\ &= (1 - r\kappa(t))v\mathbf{T}(t)\end{aligned}$$

olur. $v = \|\alpha'(t)\| \neq 0$ olduğundan,

$$\mathcal{P}'_{\alpha}(t,r) = 0 \Leftrightarrow 1 - r \cdot k(t) = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$r(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathcal{P}_{\alpha}(t,r) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}(t) = \mathcal{E}_{\alpha}(t)$$

elde edilir ki, bu eğri α eğrisinin evolüt eğrisi olur (Özdemir 2020). □

Teorem 2.25. *α eğrisi $\mathbb{E}^2$ uzayında verilen birim hızlı olsun. α eğrisi için*

$$\mathcal{I}(t) = \alpha(t) + (c-t)\mathbf{T}_{\alpha}$$

ile verilen involüt eğrisinin evolüt eğrisi, α eğrisi olur (Özdemir 2020).

İspat $\mathcal{I}(t)$ eğrisinin evolüt eğrisini bulalım. $\alpha'(t) = \mathbf{T}_{\alpha}(t)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}'(t) &= \mathbf{T}_{\alpha}(t) - \mathbf{T}_{\alpha}(t) + (c-t)\mathbf{T}'_{\alpha}(t) = (c-t)\kappa\mathbf{N}_{\alpha}(t) \\ \mathcal{I}''(t) &= -\kappa\mathbf{N}_{\alpha}(t) + (c-t)\kappa'(t)\mathbf{N}_{\alpha}(t) + (c-t)\kappa(t)(-\kappa(t)\mathbf{T}_{\alpha}(t))\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\mathbf{T}_{\mathcal{I}} = \frac{\mathcal{I}'}{\|\mathcal{I}\|} = \mathbf{N}_{\alpha} \text{ ve } \mathbf{N}_{\mathcal{I}} = -\mathbf{T}_{\alpha}$$

olur. $\mathcal{I}(t)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu

$$\kappa_{\mathcal{I}} = \frac{\det(\mathcal{I}', \mathcal{I}'')}{\|\mathcal{I}'\|^3} = \frac{\kappa^3(c-t)^2}{\kappa^3(c-t)^3} = \frac{1}{c-t}$$

olduğundan, $\mathcal{I}(t)$ eğrisinin evolütü

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \mathcal{I}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}_{\mathcal{I}}(t)\\ &= (\alpha(t) + (c-t)\mathbf{T}_\alpha(t)) - (c-t)\mathbf{T}_\alpha(t)\\ &= \alpha(t)\end{aligned}$$

elde edilir (Özdemir 2020). □

Sonuç 2.26. $\mathbb{E}^2$ *de bir* α *eğrisinin involütü* β *ise,* β *eğrisinin evolütü* α *eğrisidir (Özdemir 2020).*

Tanım 2.27. $\alpha : (a,b) \to \mathbb{E}^2$ *eğrisi düzlemde verilen bir eğri ve* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$ *olsun.* $\mathbf{P}$ *noktasının,* α *eğrisinin* $\alpha(t)$ *noktalarındaki teğet doğruları üzerindeki dik izdüşüm noktalarının çizdiği eğriye,* α *eğrisinin* $\mathbf{P}$ *noktasına göre pedal eğrisi denir (Özdemir 2020).*

Teorem 2.28. $\alpha(t)$, $\mathbb{E}^2$ *uzayında herhangi regüler bir eğri olsun.* α *eğrisinin birim teğet vektör alanı* $\mathbf{T}_\alpha$ *olsun.* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$ *noktası için,* α *eğrisinin* $\mathbf{P}$ *noktasına göre pedal eğrisinin parametrik denklemi*

$$\mathcal{P}_\alpha(\mathbf{P},t) = \alpha(t) + \langle \mathbf{P} - \alpha(t), \mathbf{T}_\alpha\rangle \mathbf{T}_\alpha$$

ile elde edilir (Özdemir 2020).

İspat $\overrightarrow{\alpha(t)\mathbf{P}}$ vektörünün, teğet vektör üzerine dik izdüşüm vektörü, $\overrightarrow{\alpha(t)\mathcal{P}}$ vektörüdür. Buna göre,

$$\overrightarrow{\alpha(t)\mathcal{P}} = \frac{\left\langle \overrightarrow{\alpha(t)\mathbf{P}}, \alpha'\right\rangle}{\langle \alpha', \alpha'\rangle}\alpha'$$

izdüşüm vektörü ve $\overrightarrow{\alpha(t)\mathbf{P}} = \overrightarrow{\alpha(t)\mathcal{P}} + \overrightarrow{\mathcal{P}\mathbf{P}}$ vektör denklemi göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\alpha(\mathbf{P},t) &= \alpha(t) + \frac{\langle \mathbf{P} - \alpha(t), \alpha'\rangle}{\|\alpha'\|^2}\alpha'\\ &= \alpha(t) + \langle \mathbf{P} - \alpha(t), \mathbf{T}_\alpha\rangle \mathbf{T}_\alpha\end{aligned}$$

elde edilir (Özdemir 2020). □

Teorem 2.29. $\alpha : (a,b) \to \mathbb{E}^2$ *eğrisi düzlemde verilen bir eğri ve* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$ *olsun.* α *eğrisinin evolütünün* $\mathbf{P}$ *noktasına göre pedal eğrisi,* α *eğrisinin* $\mathbf{P}$ *noktasına göre karşı pedal eğrisi olur (Özdemir 2020).*

İspat α eğrisinin evolüt eğrisinin $\mathcal{E}(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{N}_\alpha(t)$ şeklinde tanımlanır. Şimdi bu eğrinin pedal eğrisini bulalım.

$$\mathcal{E}' = v\mathbf{T}_\alpha + (\frac{1}{\kappa})'\mathbf{N}_\alpha + \frac{1}{\kappa}(-v\kappa\mathbf{T}) = \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\mathbf{N}_\alpha$$

olduğundan,

$$\mathbf{T}_\mathcal{E} = \mathbf{N}_\alpha$$

elde edilir. Buradan, $\mathcal{E}(t)$ eğrisinin $\mathbf{P}$ noktasına göre pedal eğrisi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\mathcal{E}(\mathbf{P},t) &= \mathcal{E}(t) + \langle \mathbf{P} - \mathcal{E}(t), \mathbf{T}_\mathcal{E}(t)\rangle \mathbf{T}_\mathcal{E}(t) \\
&= \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}_\alpha(t) + \left\langle \mathbf{P} - \alpha(t) - \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}_\alpha(t), \mathbf{N}_\alpha(t)\right\rangle \mathbf{N}_\alpha(t) \\
&= \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}_\alpha(t) + \langle \mathbf{P} - \alpha(t), \mathbf{N}_\alpha(t)\rangle \mathbf{N}_\alpha(t) - \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}_\alpha(t) \\
&= \alpha(t) + \langle \mathbf{P} - \alpha(t), \mathbf{N}_\alpha(t)\rangle \mathbf{N}_\alpha(t) \\
&= \mathcal{P}_\alpha^\perp(\mathbf{P},t)
\end{aligned}$$

elde edilir (Özdemir 2020). □

Tanım 2.30. $\mathbb{E}^3$ *uzayında verilen* β *ve* β^* *eğrilerinin karşılıklı noktaları birebir eşlenecek şekilde olsun. O halde* β *ve* β^* *eğrilerinin karşılıklı eşlenen noktalarında normalleri aynı doğrultuda ise,* β *eğrisine Bertrand eğrisi,* β^* *eğrisine de* β *eğrisinin Bertrand eş eğrisi denir.* $\{\beta, \beta^*\}$ *eğri çiftine de Bertrand eğri çifti şeklinde ifade edilir (Özdemir 2020, Honda ve Takahashi 2020).*

Teorem 2.31. $\{\beta, \beta^*\}$ *bir Bertrand eğri çifti olsun.* $\beta(t)$ *eğrisinin normal vektör alanı* $\mathbf{N}(t)$ *olmak üzere, bu iki eğri arasında,* $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$ *olmak üzere,*

$$\beta^*(t) = \beta(t) + \lambda\mathbf{N}(t)$$

denklemiyle ifade edilebilir. Bu durumda β *ve* β^* *eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Özdemir 2020, Honda ve Takahashi 2020).*

İspat $\beta(t)$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu iki eğri arasında, $\lambda(t) \neq 0$ olmak üzere,

$$\beta^*(t) = \beta(t) + \lambda(t)\mathbf{N}(t)$$

denklemini alalım. $\beta^*(t)$ eğrisi birim hızlı olmayabilir. O halde $v^* = \|(\beta^*)'(t)\|$ olsun. Buradan, yukarıdaki eşitliğin t parametresine göre türevi alalım, $\mathbf{T}^*(t)$, $\beta^*(t)$ eğrisinin teğet vektör alanı olmak üzere,

$$v^*\mathbf{T}^*(t) = \mathbf{T}(t) + \lambda'(t)\mathbf{N}(t) + \lambda(-\kappa\mathbf{T}(t) + \tau\mathbf{B}(t))$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin her iki tarafın $\mathbf{N}(t) = \pm\mathbf{N}^*(t)$ ile iç çarpımını alırsak, $\lambda'(t) = 0$ olur ki, bu da $\lambda \in \mathbb{R}$ olması demektir. Buradan, $\beta(t)$ ve $\beta^*(t)$ arasındaki uzaklık,

$$\text{d} = \|\beta^*(t) - \beta(t)\| = \|\lambda\mathbf{N}(t)\| = |\lambda| = \text{sabit}$$

elde edilir. □

Teorem 2.32. $\mathbb{E}^3$ *uzayında* $\{\beta, \beta^*\}$ *Bertrand eğri çifti olsun.* β *eğrisinin eğrilik fonksiyonu* κ *ve burulma fonksiyonu* τ *olmak üzere,* $\beta^*(t) = \beta(t) + \lambda\mathbf{N}(t)$ *eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları,* $\langle\mathbf{T}, \mathbf{T}^*\rangle = \cos\theta$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \kappa^* &= \frac{\sin^2\theta - \kappa\lambda}{\kappa\lambda^2 - \lambda} \\ \tau^* &= -\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau} \end{aligned}$$

olur (Özdemir 2020).

İspat $\beta^*(t) = \beta(t) + \lambda(t)\mathbf{N}(t)$ eşitliğinin t'ye göre türevi alalım,

$$\begin{aligned} v^*\mathbf{T}^* &= v\mathbf{T} + \lambda(-v\kappa\mathbf{T} + v\tau\mathbf{B}) \\ &= v(1 - \lambda\kappa)\mathbf{T} + v\lambda\tau\mathbf{B} \end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$\mathbf{T}^* = \frac{v}{v^*}(1 - \lambda\kappa)\mathbf{T} + \frac{v}{v^*}\lambda\tau\mathbf{B} \tag{2.1}$$

elde edilir. Bir başka taraftan,

$$\begin{aligned} \frac{\text{d}}{\text{d}t}\langle\mathbf{T}, \mathbf{T}^*\rangle &= \left\langle\frac{\text{d}\mathbf{T}}{\text{d}t}, \mathbf{T}^*\right\rangle + \left\langle\mathbf{T}, \frac{\text{d}\mathbf{T}^*}{\text{d}t}\right\rangle \\ &= \langle v\kappa\mathbf{N}, \mathbf{T}^*\rangle + \langle\mathbf{T}, v^*\boldsymbol{\kappa}^*\mathbf{N}^*\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $\mathbf{T}$ ile $\mathbf{T}^*$ arasındaki açı sabittir. $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T}^* \rangle = \cos\theta$ diyelim. Buradan, $\mathbf{T}, \mathbf{T}^*, \mathbf{B}$ ve $\mathbf{B}^*$ vektör alanları aynı düzlemde bulunacaklarından,

$$\begin{cases} \mathbf{T}^* = (\cos\theta)\,\mathbf{T} - (\sin\theta)\,\mathbf{B} \\ \mathbf{B}^* = (\sin\theta)\,\mathbf{T} + (\cos\theta)\,\mathbf{B} \end{cases} \tag{2.2}$$

ifade edilebilir. 2.1 ve 2.2 eşitliklerinden,

$$\cos\theta = \frac{v}{v^*}(1-\lambda\kappa) \text{ ve } \sin\theta = \frac{v}{v^*}\lambda\tau \tag{2.3}$$

olur. Bir başka taraftan, $\beta(t) = \beta^*(t) - \lambda(t)\,\mathbf{N}^*(t)$ eşitliğinin t parametresine göre türevini alalım,

$$\begin{aligned} v\mathbf{T} &= v^*\mathbf{T}^* - \lambda\left(-v^*\kappa^*\mathbf{T}^* + v^*\tau^*\mathbf{B}^*\right), \\ \mathbf{T} &= \frac{v^*}{v}(1+\lambda\kappa^*)\,\mathbf{T}^* + \frac{v^*}{v}(-\lambda\tau^*)\,\mathbf{B}^* \end{aligned} \tag{2.4a}$$

elde edilir. Ayrıca, 2.2 eşitliğine göre,

$$\begin{cases} \mathbf{T} = (\cos\theta)\,\mathbf{T}^* + (\sin\theta)\,\mathbf{B}^* \\ \mathbf{B} = -(\sin\theta)\,\mathbf{T}^* + (\cos\theta)\,\mathbf{B}^* \end{cases} \tag{2.5}$$

ifade edilebilir. Dolayısıyla, 2.4a ve 2.5 eşitliklerinden,

$$\cos\theta = \frac{v^*}{v}(1+\lambda\kappa^*) \text{ ve } \sin\theta = \frac{v^*}{v}(-\lambda\tau^*) \tag{2.6}$$

elde edilir. 2.3 ve 2.6 eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa,

$$\cos^2\theta = (1-\kappa\lambda)(1+\lambda\kappa^*) \text{ ve } \sin^2\theta = -\lambda^2\tau^*\tau$$

olur. Buradan,

$$-\lambda\kappa^* + \kappa\lambda^2\kappa^* = 1 - \cos^2\theta - \kappa\lambda \Rightarrow \kappa^* = \frac{\sin^2\theta - \kappa\lambda}{\kappa\lambda^2 - \lambda}$$

ve

$$\tau^* = -\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau}$$

elde edilir. □

Sonuç 2.33. $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}$ *eşitliği olması halinde,*

$$\tau^* = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau}$$

elde edilir. Bir başka ifadeyle, burulmanın yönü, $\mathbf{N}^*$ *ve* $\mathbf{N}$ *vektörlerinin yönüne göre değişir (Özdemir 2020).*

Sonuç 2.34. $\{\beta, \beta^*\}$ *bir Bertrand eğri çifti olması durumunda bu eğrilerin burulmalarının çarpımı sabittir ve* $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T}^* \rangle = \cos\theta$ *olmak üzere*

$$\tau\tau^* = \pm\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}$$

ile ifade edilir (Özdemir 2020).

Teorem 2.35. $\{\beta, \beta^*\}$ *bir Bertrand eğri çifti olsun.* $\beta : (a,b) \to \mathbb{E}^3$ *için* β *eğrisinin eğrilik fonksiyonu* $\kappa(t)$ *ve burulma fonksiyonu* $\tau(t)$ *olmak üzere,* β *eğrisinin bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter koşul* $t \in (a,b)$ *ve* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}/\{0\}$ *için,*

$$\lambda\kappa(t) + \mu\tau(t) = 1$$

olmasıdır (Özdemir 2020, Honda ve Takahashi 2020).

İspat $(\Rightarrow)$: 2.3 eşitliğinden,

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1-\lambda\kappa}{\lambda\tau}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\mu = \lambda\cot\theta$$

olursa,

$$\frac{1-\lambda\kappa}{\lambda\tau} = \frac{\mu}{\lambda}$$

eşitliğinden,

$$\lambda\kappa(t) + \mu\tau(t) = 1$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$: Bir β eğrisi için, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}/\{0\}$ için, $\lambda\kappa(t) + \mu\tau(t) = 1$ eşitliği sağlansın, $\beta^*(t) = \beta(t) + \lambda\mathbf{N}(t)$ olmak üzere, $\{\beta, \beta^*\}$ eğri çiftinin bir Bertand eğri çifti olduğu gösterelim. Bunun için, β^* eğrisinin $\mathbf{N}^*$ normalinin, $\mathbf{N}$ doğrultusunda olduğu gösterilmelidir. Verilen eşitliğe göre,

$$\mu\tau = 1 - \lambda\kappa$$

ifade edilebilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\frac{d\beta^*}{dt} &= \upsilon\mathbf{T} + \lambda\left(-\upsilon\kappa\mathbf{T} + \upsilon\tau\mathbf{B}\right)\\ &= \upsilon\left(1-\lambda\kappa\right)\mathbf{T} + \lambda\upsilon\tau\mathbf{B}\\ &= \upsilon\tau\left(\mu\mathbf{T} + \lambda\mathbf{B}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. β^* eğrisinin teğet vektör alanı da,

$$\mathbf{T}^* = \frac{(\beta^*)'}{\|(\beta^*)'\|} = \frac{\mu\mathbf{T} + \lambda\mathbf{B}}{\sqrt{\mu^2+\lambda^2}}$$

olur. Buradan da,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu\mathbf{T}' + \lambda\mathbf{B}'}{\sqrt{\mu^2+\lambda^2}} = \frac{\left(\upsilon\mu\kappa - \upsilon\tau\lambda\right)\mathbf{N}}{\sqrt{\mu^2+\lambda^2}}$$

elde edilir. Bir başka taraftan,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}^*}{\mathrm{d}t^*}\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} = \upsilon^*\kappa^*\mathbf{N}^*$$

olur, buradan

$$\mathbf{N}^* = \pm\mathbf{N}$$

elde edilir. Bu ifade ise β^* eğrisinin Bertrand eğrisi olduğu anlamına gelir. □

Teorem 2.36. *$\beta^* \neq \beta^{**}$ olmak üzere, $\{\beta, \beta^*\}$ ve $\{\beta, \beta^{**}\}$ çiftlerinin Bertrand eğri çifti olması için gerek ve yeter koşul, β Bertrand eğrisinin bir dairesel helis olmasıdır (Özdemir 2020).*

İspat $\beta\left(t\right)$ birim hızlı bir eğri olsun, $\lambda, \lambda^* \in \mathbb{R}/\left\{0\right\}$, $\lambda \neq \lambda^*$ olmak üzere,

$$\beta^*\left(t\right) = \beta\left(t\right) + \lambda\left(t\right)\mathbf{N}\left(t\right) \text{ ve } \beta^{**}\left(t\right) = \beta\left(t\right) + \lambda^*\left(t\right)\mathbf{N}\left(t\right)$$

şeklinde ifade edilsin. (Teorem 2.35) göz önüne alınırsa,

$$\mu\tau = 1 - \lambda\kappa \text{ ve } \mu\tau = 1 - \lambda^*\kappa$$

eşitlikleri yazılabilir. Her iki eşitliğinde, t parametresine göre türevleri alınırsa,

$$\mu\tau' = -\lambda\kappa' \text{ ve } \mu\tau' = -\lambda^{*}\kappa'$$

olur. Buradan da $\kappa'(\lambda - \lambda^{*}) = 0$ elde edilir. $\lambda \neq \lambda^{*}$ ise, $\kappa' = 0$ olur ve $\tau' = 0$ olmalıdır. Bu hem κ eğriliğinin, hem de τ burulmasının sabit olması anlamına gelir. Her $t \in I$ için, eğriliği ve burulması sabit eğriler sadece dairesel helislerdir. □

Tanım 2.37. $\mathbb{E}^3$ *uzayında verilen* $\mathcal{M}$ *ve* $\mathcal{M}^{*}$ *eğrilerinin karşılıklı noktaları birebir eşlensin.* $\mathcal{M}$ *eğrisinin* $\mathcal{M}(t)$ *noktasındaki normal vektörünün doğrultusu ile,* $\mathcal{M}^{*}$ *eğrisinin* $\mathcal{M}^{*}(t)$ *noktasındaki binormalinin doğrultusu aynı ise,* $\mathcal{M}$ *eğrisine Mannheim eğrisi,* $\mathcal{M}^{*}$ *eğrisine de* $\mathcal{M}$ *eğrisinin Mannheim eş eğrisi denir.* $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}^{*}\}$ *eğri çiftine de Mannheim eğri çifti şeklinde ifade edilir (Özdemir 2020, Honda ve Takahashi 2020).*

Teorem 2.38. $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}^{*}\}$ *bir Mannheim eğri çifti olsun.* $\mathcal{M}(t)$ *eğrisinin normal vektör alanı* $\mathbf{N}(t)$ *ve bu iki eğri arasında* $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$ *olmak üzere,*

$$\mathcal{M}^{*}(t) = \mathcal{M}(t) + \lambda(t)\mathbf{N}(t)$$

eşitliği ifade edilir. Bu durumda $\mathcal{M}$ *ve* $\mathcal{M}^{*}$ *eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Özdemir 2020, Honda ve Takahashi 2020).*

İspat $\mathcal{M}(t)$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu iki eğri arasında,$\lambda(t) \neq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{M}^{*}(t) = \mathcal{M}(t) + \lambda(t)\mathbf{N}(t)$$

eşitliği olsun. Verilen eşitliğe göre, $\mathcal{M}^{*}(t)$eğrisi birim hızlı olmayabilir. O halde $v^{*} = \|(\mathcal{M}^{*})'(t)\|$ olsun. $\mathcal{M}^{*}$ eğrisinin yay uzunluğu parametresi s^{*}olmak üzere,

$$s^{*}(t) = \int_0^t v^{*}dt \Rightarrow dt^{*} = v^{*}dt \Rightarrow \frac{dt^{*}}{dt} = v^{*}$$

elde edilir. $\mathcal{M}^{*}(t) = \mathcal{M}(t) + \lambda(t)\mathbf{N}(t)$ eşitliğinin, t parametresine göre türevi alınırsa,

$$v^{*}\mathbf{T}^{*}(t) = \mathbf{T}(t) + \lambda'(t)\mathbf{N}(t) + \lambda(-\kappa(t)\mathbf{T}(t) + \tau(t)\mathbf{B}(t))$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin her iki tarafının $\mathbf{N}(t) = \pm\mathbf{B}^{*}(t)$ ile iç çarpımı alınırsa, $\lambda'(t) = 0$ olur ki, bu $\lambda \in \mathbb{R}$ olması demektir. Buradan, $\mathcal{M}(t)$ ve $\mathcal{M}^{*}(t)$ arasındaki uzaklık,

$$d = \|\mathcal{M}^{*}(t) - \mathcal{M}(t)\| = \|\lambda\mathbf{N}(t)\| = |\lambda| = \text{sabit}$$

elde edilir. □

Teorem 2.39. *$\mathbb{E}^3$ uzayında $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}^*\}$ Mannheim eğri çifti olsun. $\mathcal{M}$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ ve burulma fonksiyonu τ olmak üzere, $\mathcal{M}^*(t) = \mathcal{M}(t) + \lambda(t)\mathbf{N}(t)$ eğrisinin burulma fonksiyonu, bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için*

$$\tau^* = -\frac{\kappa}{\tau\lambda}$$

olur (Özdemir 2020).

İspat $\mathcal{M}^*(t) = \mathcal{M}(t) + \lambda(t)\mathbf{N}(t)$ eşitliğinin t'ye göre türevi alalım,

$$\begin{aligned} v^*\mathbf{T}^* &= v\mathbf{T} + \lambda(-v\kappa\mathbf{T} + v\tau\mathbf{B}) \\ &= v(1-\lambda\kappa)\mathbf{T} + v\lambda\tau\mathbf{B} \end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$\mathbf{T}^* = \frac{v}{v^*}(1-\lambda\kappa)\mathbf{T} + \frac{v}{v^*}\lambda\tau\mathbf{B} \tag{2.7}$$

elde edilir. Bir başka taraftan, Bertrand eğri çiftlerindeki gibi

$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{T}, \mathbf{T}^*\rangle = 0$$

olduğundan, bu $\mathbf{T}$ ile $\mathbf{T}^*$ arasındaki açının sabit olması demektir. $\langle\mathbf{T}, \mathbf{T}^*\rangle = \cos\theta$ diyelim. Buradan, $\mathbf{T}, \mathbf{T}^*, \mathbf{B}$ ve $\mathbf{N}^*$ vektör alanları aynı düzlemde bulunacaklarından,

$$\begin{cases} \mathbf{T}^* = (\cos\theta)\mathbf{T} - (\sin\theta)\mathbf{B} \\ \mathbf{N}^* = (\sin\theta)\mathbf{T} + (\cos\theta)\mathbf{B} \end{cases} \tag{2.8}$$

ifade edilebilir.(2.7) ve (2.8) eşitliğine göre,

$$\cos\theta = \frac{v}{v^*}(1-\lambda\kappa) \text{ ve } \sin\theta = \frac{v}{v^*}\lambda\tau \tag{2.9}$$

elde edilir. Bir başka taraftan, $\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}^*(t) + \lambda(t)\mathbf{B}^*(t)$ eşitliğinin s parametresine göre türevini alalım

$$\begin{aligned} v\mathbf{T} &= v^*\mathbf{T}^* + \lambda(-v^*\tau^*\mathbf{N}^*), \\ \mathbf{T} &= \frac{v^*}{v}\mathbf{T}^* - \frac{v^*}{v}\tau^*\lambda\mathbf{N}^* \end{aligned} \tag{2.10}$$

elde edilir. (2.8) eşitliğine göre,

$$\begin{cases} \mathbf{T} = (\cos\theta)\mathbf{T}^* + (\sin\theta)\mathbf{N}^* \\ \mathbf{N} = -(\sin\theta)\mathbf{T}^* + (\cos\theta)\mathbf{N}^* \end{cases} \tag{2.11}$$

ifade edilebilir. Dolayısıyla, (2.10) ve (2.11) eşitliklerinden,

$$\cos\theta = \frac{v^*}{v} \text{ ve } \sin\theta = -\frac{v^*}{v}\tau^*\lambda \tag{2.12}$$

elde edilir. (2.9) ve (2.12) eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa,

$$\cos^2\theta = (1-\kappa\lambda) \text{ ve } \sin^2\theta = -\lambda^2\tau^*\tau$$

olur. Buradan $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ özdeşliğini yerine koyarsak,

$$(1-\kappa\lambda) + \left(-\lambda^2\tau^*\tau\right) = 1 \Rightarrow \tau^* = -\frac{\kappa}{\lambda\tau}$$

elde edilir. □

Teorem 2.40. $\mathbb{E}^3$ *uzayında bir* $\mathcal{M}\,(t)$*eğrisinin bir Mannheim eğrisi* $\Leftrightarrow$ *bir* $c \in \mathbb{R}$ *için,* κ *eğrilik ve* τ *burulma fonksiyonlarının*

$$\kappa\,(t) = \lambda\left(\kappa^2\,(s) + \tau^2\,(t)\right)$$

eşitliğini sağlamasıdır (Özdemir 2020, Honda ve Takahashi 2020).

İspat (2.9) ve (2.12) eşitliklerinden,

$$\tan\theta = -\lambda\tau^* \text{ ve } \tan\theta = \frac{\lambda\tau}{(1-\kappa\lambda)}$$

olur. $\tau^* = -\dfrac{\kappa}{\lambda\tau}$ olduğundan

$$\tan\theta = \frac{\kappa}{\tau} = \frac{\lambda\tau}{(1-\kappa\lambda)}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\kappa = \lambda\left(\tau^2 + \kappa^2\right)$$

elde edilir. □

Teorem 2.41. $\mathbb{E}^3$ *uzayında* $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}^*\}$ *Mannheim eğri çifti olsun.* $\mathcal{M}$ *eğrisinin* κ *eğrilik ve* τ *burulma fonksiyonları arasında,* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}/\{0\}$ *olmak üzere,*

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1$$

eşitliği vardır (Özdemir 2020, Honda ve Takahashi 2020).

İspat (2.9) eşitliğine göre,

$$\cot\theta = \frac{1-\kappa\lambda}{\lambda\tau} \Rightarrow 1-\kappa\lambda = (\lambda\cot\theta)\,\tau$$

olur. $(\lambda\cot\theta) = \mu$ alınırsa, $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$ elde edilir. □

Tanım 2.42. *Backlund dönüşümü sabit ikinci burulmaya sahip bir timelike eğriyi sabit ikinci burulmaya sahip başka bir timelike eğriye taşıyan dönüşüme denir (Erdoğdu ve Özdemir 2018).*

Tanım 2.43. α *eğrisi* R^3 *de burulması* τ *sabit olan bir eğri olsun.* α *eğrisinin Frenet elemanları* $\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}$ *ve eğriliği* κ *şeklinde tanımlansın. O halde*

$$\alpha^*(t) = \alpha(t) + \frac{2C}{C^2+\tau^2}\left((\cos\beta)\,\mathbf{T}(t) + (\sin\beta)\,\mathbf{N}(t)\right)$$

olur $\{\alpha,\alpha^*\}$ *eğri çiftine Backlund eğri çifti denir(Calini ve Ivey.1998).*

Teorem 2.44. *Backlund eğrisinin karşılıklı noktalarının binormalleri arasındaki açı* θ *ve uzaklıkları* λ *olsun. Backlund eğrisinin karşılıklı noktalarındaki burulmaları sabittir ve şu şekilde*

$$\tau = \tau^* = \frac{\sin\theta}{\lambda}$$

olur (Nemeth 1998).

3. MATERYAL VE METOT

Bu çalışma oluşturulurken belli başlı konu ile alakalı Hacısalihoğlu (1998) ve Özdemir (2020) kitaplarından ve litaratür taramasından çalışmamızla ilgili elde ettiğimiz Arribas vd. (2006), Babaarslan ve Yaylı (2013), Calini ve Ivey (1998) Celik ve Özdemir (2022), Camcı vd. (2021), Choi ve Kim (2012), Dede ve Ekici (2018), Deshmukh vd.(2018), Ekmekci ve Ilarslan (2001), Honda ve Takahashi (2020), Ilarslan ve Nesovic (2008a), Ilarslan ve Nesovic (2008b), Izumiya ve Takeuchi (2002), Liu ve Wang (2008), Matsuda ve Yorozu (2003), Nemeth (1998), Orbay ve Kasap (2009), Liu ve Wang (2008) makalelerden istifade edilmiştir.

Öncelikler, bilinen eğri çiftlerinden evolüt, involüt, Bertrand, Mannheim ve Backlund eğri çiftleri ile ilgili şu ana kadar yapılan bazı çalışmalar incelenmiş ve bu tez çalışması için gerekli temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Daha sonra, bu eğri çiftlerinin genelleştirilmesi için, eğrilerin oskülatör ve rektifyan düzlemlerinin belirli koşullar altında karşılıklı noktalarda kesişimleri yardımıyla bir tanım yapılmıştır. Yapılan tanımın, bazı eğri çiftlerinin bir genelleştirilmesi olduğu konusundaki önermeler ve karşılaşılabilecek özel durumlardaki iddialar ortaya atılmıştır. Her bir önerme ve teorem, literatürdekine benzer şekilde matematiksel yöntem ve ifadelerle ifade edilmiş, daha sonra tüm bu teorem ve önermler literatürdeki kanıt yöntemlerine uygun olarak, bilimsel ve matematiksel kanıt yöntemleriyle yapılmıştır. Makalede, daha çok doğrudan ispat yöntemi kullanılmıştır.

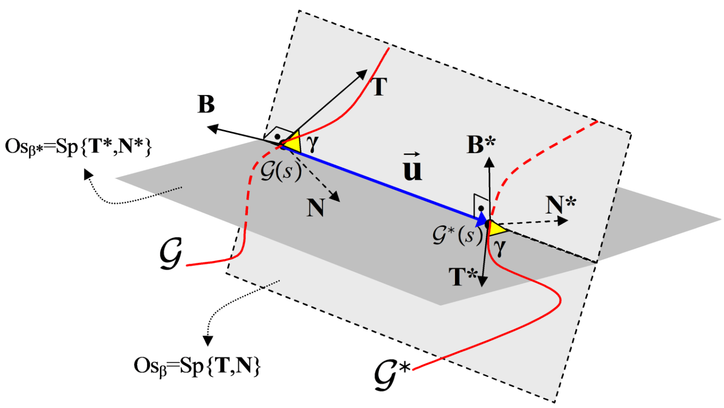
4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Genelleştirilmiş Oskülatör Eğri Çiftleri

Tanım 4.45. $\mathbb{E}^3$ *uzayında verilen* $\mathcal{G}$ *ve* $\mathcal{G}^*$ *eğrilerinin karşılıklı noktaları birebir eşlenenecek şekilde,*

$$\mathcal{G}^*(s) - \mathcal{G}(s) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}}(s)$$

olsun. Eğer, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *vektörü,* $\mathcal{G}$ *ve* $\mathcal{G}^*$ *eğrilerinin oskülatör düzlemlerinin kesişim doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eğrinin de karşılıklı noktalarındaki teğet vektör alanlarıyla* γ *açısı yapan bir vektör ise,* $\mathcal{G}$ *eğrisine oskülatör eğrisi,* $\mathcal{G}^*$ *eğrisine oskülatör eş eğrisi,* $\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$ *eğri çiftine de oskülatör eğri çifti denir.*



Şekil 4.1. Genelleştirilmiş Oskülatör Eğri Çifti

Bu bölümde, θ, eğrilerin karşılıklı binormalleri arasındaki açı olmak üzere, γ ve θ eğrilerinin spesifik durumlarına göre hangi bilinen eğrileri elde edileceği incelenecek. Bu bağlamda aşağıdaki soruların cevaplarını aranacaktır.

1. θ sabit olmama durumu
2. θ sabit γ sabit olmama durumu
3. θ sabit γ sabit olma durumu
4. θ sabit ve $\gamma = \pi/2$ olma durumu
5. $\theta = 0$ ve γ sabit olmama durumu

Tanım 4.46. $\mathcal{G}$ *ve* $\mathcal{G}^*$ *eğrilerinin karşılıklı* $\mathcal{G}(s)$ *ve* $\mathcal{G}^*(s)$ *noktalarındaki oskülatör düzlemleri* $\mathbb{OP}_{\mathcal{G}(s)}$ *ve* $\mathbb{OP}_{\mathcal{G}^*(s)}$ *olmak üzere,*

- $\mathcal{G}^*(s) - \mathcal{G}(s) \in \mathbb{OP}_{\mathcal{G}(s)} \cap \mathbb{OP}_{\mathcal{G}^*(s)}$
- $\lambda(s) = |\mathcal{G}^*(s)\,\mathcal{G}(s)|$
- $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{u}(s)\rangle = \langle \mathbf{T}^*(s), \mathbf{u}(s)\rangle = \cos\gamma(s)$

  eşitlikleri sağlanıyorsa, $\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$ eğri çiftine Oskülatör eğri çifti denir (Celik ve Ozdemir 2022).

Teorem 4.47. *$\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, (a,b) aralığında tanımlanmış bir oskülatör eğri çifti olsun. $\mathcal{G}(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathbf{T}(s)$ ve normal vektör alanı $\mathbf{N}(s)$ olmak üzere, bu iki eğri arasında uzaklık fonksiyonu, $\lambda(s) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ olmak üzere,*

$$\mathcal{G}^*(s) = \mathcal{G}(s) + \lambda(s)\left((\cos\gamma(s))\,\mathbf{T}(s) + (\sin\gamma(s))\,\mathbf{N}(s)\right)$$

denklemi yazılır. $v(s) = \|\mathcal{G}'(s)\|$ ve $v^*(s) = \|\mathcal{G}^{*\prime}(s)\|$ olmak üzere, $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasında

$$(\cos\gamma(s))\,(v^*(s) - v(s)) = \lambda'(s)$$

denklemi yazılır (Celik ve Ozdemir 2022).

İspat $\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$ bir oskülatör eğri çifti olsun. O halde $\mathbf{u}(s) = \mathcal{G}^*(s) - \mathcal{G}(s)$ vektörü, eğriler boyunca $\mathbf{T}(s)$ ve $\mathbf{T}^*(s)$ teğet vektör alanlarıyla $\gamma(s)$ açısı yapar. Diğer yandan, $\mathbf{u}(s)$ vektörünün oskülatör düzlemde bulunduğu göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{u} = (\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{N}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \lambda\left((\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{N}\right)$$

yazılır. Bu denklemin s'ye göre türevini alalım. Frenet formüllerinden,

$$\begin{aligned} v^*\mathbf{T}^*(s) &= v\mathbf{T}(s) + \lambda'(s)\left((\cos\gamma)\,\mathbf{T}(s) + (\sin\gamma)\,\mathbf{N}(s)\right) \\ &\quad + \gamma'\lambda(s)\left((-\sin\gamma)\,\mathbf{T}(s) + (\cos\gamma)\,\mathbf{N}(s)\right) \\ &\quad + \lambda(s)\,v\left(\cos\gamma\kappa(s)\,\mathbf{N}(s) + (\sin\gamma)\left(-\kappa(s)\,\mathbf{T}(s) + \tau(s)\,\mathbf{B}(s)\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^*\mathbf{T}^* &= (v + \lambda'\cos\gamma - \gamma'\lambda\sin\gamma - v\kappa\lambda\sin\gamma)\,\mathbf{T} \\ &\quad + (\lambda'\sin\gamma + \lambda v\kappa\cos\gamma + \gamma'\lambda\cos\gamma)\,\mathbf{N} \\ &\quad + (\lambda v\tau\sin\gamma)\,\mathbf{B} \end{aligned} \tag{4.1}$$

olur ki, denklemin her iki tarafının $\mathbf{u}$ vektörü ile iç çarpımı alınırsa,

$$\begin{aligned} v^* \cos\gamma &= (v + \lambda' \cos\gamma - \gamma'\lambda \sin\gamma - v\kappa\lambda \sin\gamma)\cos\gamma \\ &\quad + (\lambda' \sin\gamma + \lambda v\kappa \cos\gamma + \gamma'\lambda\cos\gamma)\sin\gamma \\ &= \lambda' + v\cos\gamma \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da,

$$(\cos\gamma)(v^* - v) = \lambda' \tag{4.2}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.48. *$\gamma \neq \pi/2$ olmak üzere, $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklığın sabit olması için gerek ve yeter şart $v^* = v$ olmasıdır (Celik ve Ozdemir 2022).*

Sonuç 4.49. *Eğri boyunca $\gamma = \pi/2$ ise (4.2) denkleminden $\lambda' = 0$ olur. O halde $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık,*

$$d = |\mathcal{G}^*(s) - \mathcal{G}(s)| = |\lambda|$$

eğriler boyunca sabit olur. Fakat bu $v^* = v$ olduğu anlamına gelmez (Celik ve Ozdemir 2022).

4.2. G, G^* Oskülatör Eğrilerinin Frenet Çatıları Arasındaki Bağıntı

Teorem 4.50. $\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, (a, b) *aralığında tanımlanmış bir oskülatör eğri çifti,*

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \lambda((\cos\gamma)\mathbf{T} + (\sin\gamma)\mathbf{N})$$

denklemi ile ifade edilsin. $\mathcal{G}$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$; $\mathcal{G}^*$ eğrisinin Frenet vektör alanları da $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ olsun. θ, eğrilerin karşılıklı binormalleri arasındaki açı olmak üzere, $\mu = 1 - \cos\theta$ ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mu\sin^2\gamma & \mu\sin\gamma\cos\gamma & -\sin\gamma\sin\theta \\ \mu(\sin\gamma\cos\gamma) & 1 - \mu\cos^2\gamma & \cos\gamma\sin\theta \\ \sin\theta\sin\gamma & -\sin\theta\cos\gamma & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

denklemi yazılır (Celik ve Ozdemir 2022).

İspat $\mathbf{u} = (\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{N}$ vektör alanı oskülatör düzlemde yer aldığından, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{B}^*$ binormal vektörlerine diktir. O halde,

$$\mathbf{v} = \mathbf{B} \times \mathbf{u} \text{ ve } \mathbf{v}^* = \mathbf{B}^* \times \mathbf{u}$$

vektörel çarpımları yardımıyla elde edilen $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}^*$ vektör alanları da, eğrilerin kendi oskülatör düzlemlerinde yer alır. Ayrıca, $\mathcal{G}^*(s)$ ve $\mathcal{G}(s)$ eğrileri için,

$$\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}^*, \mathbf{B}^*\right\} \text{ ve } \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \mathbf{B}\right\}$$

kümeleri birer ortonormal çatıdırlar. Buradan,

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathbf{u}} \\ \overrightarrow{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathbf{u}} \\ \overrightarrow{\mathbf{v}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

denklemleri yazılır. Bir başka taraftan, $\mathbf{B}^*$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}^*$, $\mathbf{B}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörlerinin tamamı $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörüne dik olduğundan, $\overrightarrow{\mathbf{v}}^*$ ile $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ arasındaki açı θ olmak üzere, (4.4) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{v}}^* &= (\cos\theta)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} + (\sin\theta)\,\mathbf{B} \\
&= (\cos\theta)\,(-\sin\gamma\mathbf{T} + \cos\gamma\mathbf{N}) + (\sin\theta)\,\mathbf{B} \\
&= (-\cos\theta\sin\gamma)\,\mathbf{T} + (\cos\theta\cos\gamma)\,\mathbf{N} + (\sin\theta)\,\mathbf{B} \\
\mathbf{B}^* &= -(\sin\theta)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} + (\cos\theta)\,\mathbf{B} \\
&= -(\sin\theta)\,(-\sin\gamma\mathbf{T} + \cos\gamma\mathbf{N}) + (\cos\theta)\,\mathbf{B} \\
&= (\sin\theta\sin\gamma)\,\mathbf{T} + (-\sin\theta\cos\gamma)\,\mathbf{N} + (\cos\theta)\,\mathbf{B}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, (4.4) ve (4.5) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathbf{u}} \\ \overrightarrow{\mathbf{v}}^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{N} \\ (\cos\theta)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} + (\sin\theta)\,\mathbf{B} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{N} \\ -(\cos\theta\sin\gamma)\,\mathbf{T} + (\cos\theta\cos\gamma)\,\mathbf{N} + (\sin\theta)\,\mathbf{B} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cos\theta\right)\mathbf{T} + \sin\gamma\cos\gamma\,(1-\cos\theta)\,\mathbf{N} - (\sin\gamma\sin\theta)\,\mathbf{B} \\ (\sin\gamma\cos\gamma)\,(1-\cos\theta)\,\mathbf{T} + \left(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma\cos\theta\right)\mathbf{N} + (\cos\gamma\sin\theta)\,\mathbf{B} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(1 + \sin^2\gamma\,(\cos\theta - 1)\right)\mathbf{T} + \sin\gamma\cos\gamma\,(1-\cos\theta)\,\mathbf{N} - (\sin\gamma\sin\theta)\,\mathbf{B} \\ (\sin\gamma\cos\gamma)\,(1-\cos\theta)\,\mathbf{T} + (1 + \cos^2\gamma\,(\cos\theta - 1))\,\mathbf{N} + (\cos\gamma\sin\theta)\,\mathbf{B} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak, $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*$ ve $\mathbf{B}^*$ vektörlerini $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ cinsinden

$$1 - \mu = \cos\theta$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mu\sin^2\gamma & \mu\sin\gamma\cos\gamma & -\sin\gamma\sin\theta \\ \mu\,(\sin\gamma\cos\gamma) & 1 - \mu\cos^2\gamma & \cos\gamma\sin\theta \\ \sin\theta\sin\gamma & -\sin\theta\cos\gamma & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{B}^*$ arasındaki açının da θ olduğu görülür. □

4.3. G Oskülatör Eğrisinin Eğrilik ve Burulması

Teorem 4.51. $\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, (a, b) *aralığında tanımlanmış bir oskülatör eğri çifti olsun.* $\gamma \neq 0$ *ve* $\gamma \neq \pi/2$ *olmak üzere,*

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \lambda\left((\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{N}\right)$$

denklemi ile verilsin. $G\,(s)$ *eğrisinin eğrilik ve burulması* κ *ve* τ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{-v^*\sin\theta}{v\lambda} \\ \kappa &= \frac{(v - v^*\cos\theta)\sin\gamma - \gamma'\lambda}{\lambda v} \end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitlikleri sağlanır (Celik ve Ozdemir 2022).

İspat (4.1)denkleminden

$$\begin{aligned} v^*\mathbf{T}^* &= (v+\lambda'\cos\gamma-\gamma'\lambda\sin\gamma-v\kappa\lambda\sin\gamma)\,\mathbf{T} \\ &+(\lambda'\sin\gamma+\lambda v\kappa\cos\gamma+\gamma'\lambda\cos\gamma)\,\mathbf{N} \\ &+(\lambda v\tau\sin\gamma)\,\mathbf{B} \end{aligned}$$

eştliği ile,

$$\mathbf{T}^*=\left(1+\mu\sin^2\gamma\right)\mathbf{T}+\mu\sin\gamma\cos\gamma\mathbf{N}-(\sin\gamma\sin\theta)\,\mathbf{B}$$

eşitliği karşılaştırılırsa,

$$\begin{cases} v^*-v^*\mu\sin^2\gamma=v+\lambda'\cos\gamma-\gamma'\lambda\sin\gamma-v\kappa\lambda\sin\gamma \\ v^*\mu\sin\gamma\cos\gamma=\lambda'\sin\gamma+\lambda v\kappa\cos\gamma+\gamma'\lambda\cos\gamma \\ -v^*\sin\gamma\sin\theta=\lambda v\tau\sin\gamma \end{cases} \tag{4.7}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $\gamma\neq 0,\pi/2$ ise

$$\tau=\frac{-v^*\sin\theta}{v\lambda}$$

ve

$$\kappa=\frac{v^*\mu\sin\gamma\cos\gamma-\lambda'\sin\gamma-\gamma'\lambda\cos\gamma}{\lambda v\cos\gamma}$$

elde edilir. Buradan da $(v^*-v)\cos\gamma=\lambda'$ ve $\mu=1-\cos\theta$ eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\kappa=\frac{(v-v^*\cos\theta)\sin\gamma-\gamma'\lambda}{\lambda v}$$

elde edilir □

Önteorem 4.52. *Herhangi bir oskülatör eğri çifti için,*

$$\begin{bmatrix}\mathbf{T}^*\\ \mathbf{N}^*\\ \mathbf{B}^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\mu\sin^2\gamma & \mu\sin\gamma\cos\gamma & -\sin\gamma\sin\theta\\ \mu(\sin\gamma\cos\gamma) & 1-\mu\cos^2\gamma & \cos\gamma\sin\theta\\ \sin\theta\sin\gamma & -\sin\theta\cos\gamma & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix},$$

matris eşiliğinden,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta+\mu\cos^2\gamma & \mu\cos\gamma\sin\gamma & \sin\theta\sin\gamma\\ \mu\cos\gamma\sin\gamma & 1-\mu\cos^2\gamma & -\cos\gamma\sin\theta\\ -\sin\theta\sin\gamma & \cos\gamma\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{T}^*\\ \mathbf{N}^*\\ \mathbf{B}^*\end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1-\mu\sin^2\gamma & \mu\sin\gamma\cos\gamma & -\sin\gamma\sin\theta \\ \mu\left(\sin\gamma\cos\gamma\right) & 1-\mu\cos^2\gamma & \cos\gamma\sin\theta \\ \sin\theta\sin\gamma & -\sin\theta\cos\gamma & \cos\theta \end{bmatrix}$$

matrisi, $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (\cos\gamma, \sin\gamma, 0)$ *vektörü etrafında,* θ *açısı kadar döndüren dönme matrisidir. Dönme matrisine karşılık gelen birim kuaterniyon ise*

$$q = \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\cos\gamma - j\sin\frac{\theta}{2}\sin\gamma$$

şeklinde elde edilir (Celik ve Ozdemir 2022).

İspat *Dönme matrisine karşılık gelen birim kuaterniyon* $q = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$

$$R = \begin{bmatrix} q_1^2+q_2^2-q_3^2-q_4^2 & -2q_1q_4+2q_2q_3 & 2q_1q_3+2q_2q_4 \\ 2q_1q_4+2q_2q_3 & q_1^2-q_2^2+q_3^2-q_4^2 & -2q_1q_2+2q_3q_4 \\ -2q_1q_3+2q_2q_4 & 2q_1q_2+2q_3q_4 & q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2 \end{bmatrix}$$

$q_1 \neq 0$ *ise,*

$$\begin{aligned} q_1^2 &= \frac{1}{4}\left(1+R_{11}+R_{22}+R_{33}\right), \\ q_2 &= \frac{1}{4q_1}\left(\widehat{R}_{32}-\widehat{R}_{23}\right), \\ q_3 &= -\frac{1}{4q_1}\left(\widehat{R}_{13}-\widehat{R}_{31}\right) \\ q_4 &= \frac{1}{4q_1}\left(\widehat{R}_{21}-\widehat{R}_{12}\right) \end{aligned}$$

buradan yukarıdaki eşitlikler kullanılarak (Arribas vd. 2006)

$$q_1 = \pm\cos\frac{\theta}{2},\ q_2 = -\sin\frac{\theta}{2}\cos\gamma,\ q_3 = -j\sin\frac{\theta}{2}\sin\gamma,\ q_4 = 0$$

elde edilir. □

Sonuç 4.53. 3 *boyutlu Öklid uzayında verilen bir* R *dönme matrisi için, dönme ekseni* 1 *özdeğerine karşılık gelen özvektör,* t *dönme açısı da*

$$\cos t = \frac{\operatorname{tr} R - 1}{2}$$

eşitliği ile belirlidir. Buradan,

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{1-\mu\sin^2\gamma+1-\mu\cos^2\gamma+\cos\theta-1}{2} \\ &= \frac{1-\mu+\cos\theta}{2} \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

bulunur (Özdemir 2020, Celik ve Ozdemir 2022).

Teorem 4.54. $\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, (a,b) *aralığında tanımlanmış bir oskülatör eğri çifti olsun.* $\gamma \neq 0, \pi/2$ *olmak üzere,*

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \lambda\left((\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{N}\right)$$

denklemi ile verilsin. $\mathcal{G}^*(s)$ *eğrisinin eğrilik ve burulması* κ^* *ve* τ^* *olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \tau^* &= \frac{-\theta'}{\upsilon^*\cos\gamma} - \frac{\sin\theta}{\lambda} \\ \kappa^* &= -\frac{\gamma'}{\upsilon^*} - \frac{\theta'}{\upsilon^*}\tan\gamma\cot\theta - \frac{(1-\cos\theta)\sin\gamma}{\lambda} \end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $c \in \mathbb{R}$, θ *ve* λ *uzaklık fonksiyonu olmak üzere*

$$\lambda = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + c.$$

eşitliği yazılır (Celik ve Ozdemir 2022).

İspat $\mathbf{T}^* = \left(1+\mu\sin^2\gamma\right)\mathbf{T} + \frac{\mu}{2}\sin 2\gamma\mathbf{N} - (\sin\gamma\sin\theta)\,\mathbf{B}$ denkleminin türevini alınırsa,

$$\begin{aligned} \upsilon^*\kappa^*\mathbf{N}^* &= \left(\mu'\sin^2\gamma\right)\mathbf{T} + \left(\gamma'\mu\sin 2\gamma\right)\mathbf{T} + \left(1+\mu\sin^2\gamma\right)\upsilon\kappa\mathbf{N} \\ &\quad + \frac{\mu'}{2}\sin 2\gamma\mathbf{N} + \mu\gamma'\cos 2\gamma\mathbf{N} + \frac{\mu}{2}\sin 2\gamma\left(-\upsilon\kappa\mathbf{T} + \upsilon\tau\mathbf{B}\right) \\ &\quad - \left(\gamma'\cos\gamma\sin\theta\right)\mathbf{B} - \left(\theta'\sin\gamma\cos\theta\right)\mathbf{B} + (\sin\gamma\sin\theta)\,\upsilon\tau\mathbf{N} \end{aligned}$$

ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \upsilon^*\kappa^*\mathbf{N}^* &= \left(\left(\mu'\sin^2\gamma\right) + \left(\gamma'\mu\sin 2\gamma\right) - \frac{\mu\upsilon\kappa}{2}\sin 2\gamma\right)\mathbf{T} \\ &\quad + \left(\frac{\mu'}{2}\sin 2\gamma + \mu\gamma'\cos 2\gamma + \left(1+\mu\sin^2\gamma\right)\upsilon\kappa + (\sin\gamma\sin\theta)\,\upsilon\tau\right)\mathbf{N} \\ &\quad + \left(-\left(\gamma'\cos\gamma\sin\theta\right) - \left(\theta'\sin\gamma\cos\theta\right) + \frac{\mu\upsilon\tau}{2}\sin 2\gamma\right)\mathbf{B} \end{aligned} \tag{4.9}$$

olur. Bu (4.9) denkleminin her iki tarafını $\mathbf{T}$ ile iç çarpımı alınırsa,

$$\langle \mathbf{N}^*, \mathbf{T}\rangle = \mu\sin\gamma\cos\gamma$$

eşitliği alınırsa

$$\upsilon^*\kappa^*\mu\sin\gamma\cos\gamma = \left(\mu'\sin^2\gamma\right) + \left(\gamma'\mu\sin 2\gamma\right) - \frac{\mu\upsilon\kappa}{2}\sin 2\gamma$$

elde edilir. O halde

$$
\begin{aligned}
v^*\kappa^* &= \frac{2\mu' \sin^2\gamma + 2\gamma'\mu\sin 2\gamma - \mu v\kappa \sin 2\gamma}{\mu \sin 2\gamma} \\
&= \frac{\mu' \tan\gamma}{\mu} + 2\gamma' - v\kappa
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

olur. $\mu = 1 - \cos\theta$, $\mu' = \theta' \sin\theta$ eşitliklerinden

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\theta' \sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{\theta'\left(1+\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

olur ve (4.10)'da yerine yazılırsa,

$$v^*\kappa^* + v\kappa = \frac{-\theta'\left(1+\cos\theta\right)\tan\gamma}{\sin\theta} - 2\gamma' - v\kappa$$

olur. Buradan Eğer (4.9) denkleminin her iki tarafını $\mathbf{B}$ ile iç çarpımı alınırsa,

$$\langle \mathbf{N}^*, \mathbf{B} \rangle = \cos\gamma \sin\theta$$

eşitliği alınırsa,

$$v^*\kappa^* = -\left(\gamma'\right) - \theta' \tan\gamma \cot\theta + \frac{\mu v \tau \sin\gamma}{\sin\theta}$$

elde edilir. Bu denklemde, $\tau = \dfrac{-v^* \sin\theta}{v\lambda}$ yerine yazılırsa,

$$v^*\kappa^* = -\gamma' - \theta' \tan\gamma \cot\theta - \frac{\mu v^* \sin\gamma}{\lambda}$$

elde edilir. O halde

$$v^*\kappa^* + v\kappa = \frac{-\theta'\left(1+\cos\theta\right)\tan\gamma}{\sin\theta} - 2\gamma' - v\kappa \; ve \; v^*\kappa^* = -\gamma' - \theta' \tan\gamma \cot\theta - \frac{\mu v^* \sin\gamma}{\lambda}$$

denklemi dikkate alınırsa

$$\frac{-\theta' \tan\gamma}{\sin\theta} - \gamma' - v\kappa = -\frac{\left(1-\cos\theta\right) v^* \sin\gamma}{\lambda}$$

burada κ yerine yazılırsa

$$\frac{\lambda\theta'}{\sin\theta} = \left(v^* - v\right)\cos\gamma$$

$\left(v^* - v\right)\cos\gamma = \lambda'$ eşitliğinden

$$\frac{\lambda\theta'}{\sin\theta} = \lambda'$$

$$\lambda = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + c$$

elde edilir. $\mathbf{B}^* = (\sin\theta\sin\gamma)\,\mathbf{T} + (-\sin\theta\cos\gamma)\,\mathbf{N} + (\cos\theta)\,\mathbf{B}$ denkleminin türevini alınırsa.

$$\begin{aligned} v^*\tau^*\mathbf{N}^* &= (\theta'\cos\theta\sin\gamma)\,\mathbf{T} + (\gamma'\sin\theta\cos\gamma)\,\mathbf{T} + \sin\theta\cos\gamma v\kappa\mathbf{T} \\ &\quad -\theta'\cos\theta\cos\gamma\mathbf{N} + \gamma'\sin\theta\sin\gamma\mathbf{N} - (\cos\theta)\,v\tau\mathbf{N} + (\sin\theta\sin\gamma)\,v\kappa\mathbf{N} \\ &\quad -\theta'\sin\theta\mathbf{B} - v\tau\sin\theta\cos\gamma\mathbf{B} \end{aligned} \tag{4.11}$$

olur. (4.11) denkleminin her iki tarafını tarafı $\mathbf{B}$ ile iç çarpımı alınırsa,

$$\langle\mathbf{N}^*, \mathbf{B}\rangle = \cos\gamma\sin\theta$$

eşitliği alınırsa,

$$v^*\tau^*\cos\gamma\sin\theta = -\theta'\sin\theta - v\tau\sin\theta\cos\gamma$$

olur, buradan da

$$\tau^* = \frac{\theta' + v\tau\cos\gamma}{v^*\cos\gamma}$$

elde edilir. $\tau = \dfrac{-v^*\sin\theta}{v\lambda}$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tau^* &= \frac{\lambda\theta' - v^*\sin\theta\cos\gamma}{\lambda v^*\cos\gamma} \\ \tau^* &= \frac{\theta'}{v^*\cos\gamma} - \frac{\sin\theta}{\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir. □

4.4. Oskülatör Düzlemde θ ve γ Açılarının Özel Durumlarının İncelenmesi

4.4.1. θ ve γ sabit olmama durumu:

$\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, (a, b) aralığında tanımlanmış bir oskülatör eğri çifti olsun. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin karşılıklı binormalleri arasındaki açı $\theta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ ve $\gamma \neq \pi/2$ ise

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + c\right)((\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{N})$$

elde edilir. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin (4.6) ve (4.8) denklemlerinden eğrilikleri ve burulmaları aşağıdaki şekilde yazılır (Celik ve Ozdemir 2022).

$$\begin{array}{cc} \tau = \frac{-v^*\sin\theta}{v\lambda} & \tau^* = \frac{\theta'}{v^*\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\lambda} \\ \kappa = \frac{(v - v^*\cos\theta)\sin\gamma - \gamma'\lambda}{v\lambda} & \kappa^* = -\frac{\gamma'}{v^*} - \frac{\theta'}{v^*}\tan\gamma\cot\theta - \frac{1-\cos\theta}{\lambda}\sin\gamma \end{array}$$

4.4.2. θ sabit ve γ sabit olmama durumu:

θ sabit $\gamma \neq 0$ ve $\gamma \neq \pi/2$ olsun. Ayrıca $\lambda = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + c$ olduğundan $\lambda' = 0$ olur ve buradan $\lambda' = (\cos\gamma)(v^* - v)$ olduğundan $v^* = v$ elde edilir. O halde (4.6) ve (4.8)denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\begin{array}{cc} \tau = \frac{-\sin\theta}{\lambda} & \tau^* = -\frac{\sin\theta}{\lambda} \\ \kappa = \frac{-\gamma^{'}}{v} + \frac{\mu\sin\gamma}{\lambda} & \kappa^* = -\frac{\gamma^{'}}{v} - \frac{\mu\sin\gamma}{\lambda} \end{array}$$

elde edilir. O halde

$$\tau = \tau^* \text{ ve } \kappa = \kappa^* + (1 - c\sin\theta)\sin\gamma$$

buradan $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrileri oskülatör düzlem üzerinde Backlund eğri çifti olur (Celik ve Ozdemir 2022).

$\theta = 0$ ve γ sabit olmama durumu:

$\theta = 0$ ise $\mu = 1 - \cos\theta$ eşitliğinden $\mu = 0$, $\lambda = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + c$ olduğundan $\lambda' = 0$ ve $v = v^*$ elde edilir. O halde (4.6)ve (4.8)denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{array}{cc} \tau = 0 & \tau^* = 0 \\ \kappa = \frac{(v-v^*)\sin\gamma - \gamma^{'}\lambda}{v\lambda} & \kappa^* = -\frac{\gamma^{'}}{v^*} \end{array}$$

elde edilir. Buradan $\tau = \tau^* = 0$ ise $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrileri oskülatör düzlem üzerinde birer düzlemsel eğri olur.

Ayrıca $\mu = 0$, $\lambda^{'} = 0$ ve $v = v$ (4.7)'dan olur ki

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda\left(\gamma^{'} + v\kappa\right)\sin\gamma \\ 0 &= \lambda\left(\gamma^{'} + v\kappa\right)\cos\gamma \end{aligned}$$

yukarıdaki denklemlerden $0 = \lambda$ veya $\gamma^{'} = -v\kappa$ elde edilir. Buradan $0 = \lambda$ demek $\mathcal{G} = \mathcal{G}^*$ anlamına gelir. $0 \neq \lambda$ olursa $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri

$$\kappa = \kappa^* = -\frac{\gamma^{'}}{v}$$

şeklinde elde edilir (Celik ve Ozdemir 2022).

4.4.3. θ ve γ sabit olma durumu:

(4.6)ve (4.8)denklemlerinde hem θ ve hemde γ sabit ve $\gamma \neq \pi/2$ ise

$$\begin{array}{cc} \tau = \frac{-\sin\theta}{\lambda} & \tau^* = -\frac{\sin\theta}{\lambda} \\ \kappa = \frac{\mu\sin\gamma}{\lambda} & \kappa^* = -\frac{\mu\sin\gamma}{\lambda} \end{array}$$

elde edilir. Buradan

$$\tau = \tau^* = \frac{-\sin\theta}{\lambda} \text{ ve } \kappa = -\kappa^* = \frac{\mu\sin\gamma}{\lambda}$$

elde edilir. Eğer özel olarak $\gamma = 0$ ise $\kappa = -\kappa^* = 0$ elde edilir. Bu da $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin oskülatör düzlem üzerinde doğru çifti olduğu anlamına gelir (Celik ve Ozdemir 2022).

θ sabit ve $\gamma = \pi/2$ olma durumu:

Eğer $\theta \neq 0$ sabit ve $\gamma = \pi/2$ ise $\lambda' = (\cos\gamma)(v^* - v) = 0$ olur. Bu ise λ nın sabit olması demektir ve aşağıdaki denklemi yazabiliriz

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \lambda\mathbf{N}$$

(4.1) ve (4.3) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$v^*\mathbf{T}^* = (v - v\kappa\lambda)\,\mathbf{T} + v\lambda\tau\mathbf{B}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$\begin{array}{cc} \tau = \frac{-v^*\sin\theta}{v\lambda} & \tau^* = -\frac{v\sin\theta}{v^*\lambda} \\ \kappa = \frac{v - v^*\cos\theta}{v\lambda} & \kappa^* = \frac{v\cos\theta - v^*}{v^*\lambda} \end{array}$$

i. Bertrand eğrilerinin burulmalarının iç çarpımları sabittir

$$\tau\tau^* = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}$$

ii. Bir eğri Bertrand eğrisi ise $a, b \in R/\{0\}$ için $a\kappa + b\tau = 1$ olmalıdır.

$$\cot\theta = \frac{\kappa\lambda - 1}{\tau\lambda} \Leftrightarrow \kappa\lambda - (\lambda\cot\theta)\,\tau = 1$$

buradan $a = \lambda$ ve $b = -\lambda\cot\theta$ elde edilir.

O halde $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrileri oskülatör düzlem üzerinde Bertrand eğri çifti olur (Celik ve Ozdemir 2022).

$\theta = 0$ **ve** γ **sabit olma durumu:**

$\theta = 0$ ise $\mu = 1 - \cos\theta$ eşitliğinden $\mu = 0$, $\lambda = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + c$ olduğundan $\lambda' = 0$ ve $v = v^*$ elde edilir. O halde (4.6)ve (4.8)denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\tau = 0 \quad \tau^* = 0$$
$$\kappa = 0 \quad \kappa^* = 0$$

elde edilir. Buradan $\tau = \tau^* = 0$ ise $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrileri oskülatör düzlem üzerinde birer doğru olur (Celik ve Ozdemir 2022).

4.5. Genelleştirilmiş Rektifyan Eğri Çiftleri

Tanım 4.55. $\mathbb{E}^3$ *uzayında verilen* $\mathcal{G}$ *ve* $\mathcal{G}^*$ *eğrilerinin karşılıklı noktaları birebir eşlenecek şekilde,*

$$\mathcal{G}^*(s) - \mathcal{G}(s) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}}(s)$$

olsun. Eğer, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *vektörü,* $\mathcal{G}$ *ve* $\mathcal{G}^*$ *eğrilerinin rektifyan düzlemlerinin kesişim doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eğrinin de karşılıklı noktalarındaki teğet vektör alanlarıyla* γ *açısı yapan bir vektör ise,* $\mathcal{G}$ *eğrisine rektifyan eğrisi,* $\mathcal{G}^*$ *eğrisine rektifyan eş eğrisi,* $\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$ *eğri çiftine de rektifyan eğri çifti denir.*

Bu bölümde aşağıdaki hususlar ele alınacaktır.

1. θ ve γ sabit olmama durumu

2. θ sabit değil ve γ sabit olma durumu

    2.1. $\gamma = 0$ olma durumu

    2.2. $\gamma = \pi/2$ olma durumu

3. θ sabit γ sabit olmama durumu

    3.1. $\theta = 0$ olma durumu

    3.2. $\theta = \pi/2$ olma durumu

4. θ ve γ sabit olma durumu

    4.1. $\theta = 0$ ve γ sabit olma durumu $(\gamma \neq 0, \pi/2)$

    4.2. $\theta = 0$ ve $\gamma = 0$ olma durumu

    4.3. $\theta = 0$ ve $\gamma = \pi/2$ olma durumu

    4.4. $\theta = \pi/2$ ve γ sabit olma durumu

    4.5. $\theta = \pi/2$ ve $\gamma = 0$ olma durumu

    4.6. $\theta = \pi/2$ ve $\gamma = \pi/2$ olma durumu

Teorem 4.56. $\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, (a, b) *aralığında tanımlanmış bir rektifyan eğri çifti olsun.* $\mathcal{G}(s)$ *eğrisinin teğet vektör alanı* $\mathbf{T}(s)$ *ve binormal vektör alanı* $\mathbf{B}(s)$ *olmak üzere, bu iki eğri arasında uzaklık fonksiyonu,* $\lambda(s) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ *olmak üzere,*

$$\mathcal{G}^*(s) = \mathcal{G}(s) + \lambda(s)\left((\cos\gamma(s))\,\mathbf{T}(s) + (\sin\gamma(s))\,\mathbf{B}(s)\right)$$

denklemi yazılır. $v(s) = \|\mathcal{G}'(s)\|$ *ve* $v^*(s) = \|\mathcal{G}^{*\prime}(s)\|$ *olmak üzere,* $\mathcal{G}$ *ve* $\mathcal{G}^*$ *eğrilerinin* *karşılıklı noktaları arasında*

$$(\cos\gamma(s))(v^*(s)-v(s))=\lambda'(s)$$

denklemi yazılır.

İspat $\{\mathcal{G},\mathcal{G}^*\}$ bir rektifyan eğri çifti olsun. O halde $\mathbf{u}(s)=\mathcal{G}^*(s)-\mathcal{G}(s)$ vektörü, eğriler boyunca $\mathbf{T}(s)$ ve $\mathbf{T}^*(s)$ teğet vektör alanlarıyla $\gamma(s)$ açısı yapar. Diğer yandan, $\mathbf{u}(s)$ vektörünün rektifyan düzlemde bulunduğu göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{u}=(\cos\gamma)\,\mathbf{T}+(\sin\gamma)\,\mathbf{B}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{G}^*=\mathcal{G}+\lambda\left((\cos\gamma)\,\mathbf{T}+(\sin\gamma)\,\mathbf{B}\right)$$

yazılır. Bu denklemin s'ye göre türevini alalım. Frenet formüllerinden,

$$\begin{aligned}
v^*\mathbf{T}^* &= v\mathbf{T}+\lambda^{'}(\cos\gamma\mathbf{T}+\sin\gamma\mathbf{B})+\lambda(-\gamma^{'}\sin\gamma\mathbf{T} && (4.12)\\
&\quad +\cos\gamma(v\kappa\mathbf{N})+\gamma^{'}\cos\gamma\mathbf{B}+\sin\gamma(-v\tau\mathbf{N})) && (4.13)\\
v^*\mathbf{T}^* &= (v+\lambda^{'}\cos\gamma-\lambda\gamma^{'}\sin\gamma)\mathbf{T}\\
&\quad (\lambda v\kappa\cos\gamma-\lambda v\tau\sin\gamma)\mathbf{N}\\
&\quad (\lambda^{'}\sin\gamma+\lambda\gamma^{'}\cos\gamma)\mathbf{B}
\end{aligned}$$

olur ki, denklemin her iki tarafın $\mathbf{u}$ vektörü ile iç çarpımı alınırsa,

$$\begin{aligned}
v^*\cos\gamma &= (v+\lambda^{'}\cos\gamma-\lambda\gamma^{'}\sin\gamma)\cos\gamma\\
&\quad (\lambda^{'}\sin\gamma+\lambda\gamma^{'}\cos\gamma)\sin\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^*\cos\gamma &= v\cos\gamma+\lambda^{'} && (4.14)\\
(v^*-v)\cos\gamma &= \lambda^{'}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.57. $\gamma\neq\pi/2$ *olmak üzere,* $\mathcal{G}$ *ve* $\mathcal{G}^*$ *eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklığın sabit olması için gerek ve yeter şart* $v^*=v$ *olmasıdır.*

Sonuç 4.58. *Eğri boyunca* $\gamma = \pi/2$ *ise,*(4.14) *denkleminden* $\lambda' = 0$ *olur. O halde,* $\mathcal{G}$ *ve* $\mathcal{G}^*$ *eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık,*

$$d = |\mathcal{G}^*(s) - \mathcal{G}(s)| = |\lambda|$$

eğriler boyunca sabit olur. Fakat bu $v^* = v$ *olduğu anlamına gelmez.*

4.6. G, G^* Rektifyan Eğrilerinin Frenet Çatıları Arasındaki Bağıntı

Teorem 4.59. $\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, (a, b) *aralığında tanımlanmış bir rektifyan eğri çifti,*

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \lambda\left((\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{B}\right)$$

denklemi ile ifade edilsin. $\mathcal{G}(s)$ *eğrisinin Frenet vektör alanları* $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ *;* $\mathcal{G}^*$ *eğrisinin Frenet vektör alanları da* $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ *olsun.* θ, *eğrilerin karşılıklı normalleri arasındaki açı olmak üzere,* $\mu = 1 - \cos\theta$ *ise*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mu\sin^2\gamma & -\sin\gamma\sin\theta & \mu\sin\gamma\cos\gamma \\ \sin\theta\sin\gamma & \cos\theta & -\sin\theta\cos\gamma \\ \mu\sin\gamma\cos\gamma & \cos\gamma\sin\theta & 1 - \mu\cos^2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

denklemi yazılır.

İspat $\mathbf{u} = (\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{B}$ vektör alanı rektifyan düzlemde yer aldığından, $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{N}^*$ normal vektörlerine diktir. O halde,

$$\mathbf{v} = \mathbf{N} \times \mathbf{u} \text{ ve } \mathbf{v}^* = \mathbf{N}^* \times \mathbf{u}$$

vektörel çarpımları yardımıyla elde edilen $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}^*$ vektör alanları da, eğrilerin kendi rektifyan düzlemlerinde yer alır. Ayrıca, $\mathcal{G}^*(s)$ ve $\mathcal{G}(s)$ eğrileri için,

$$\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}^*, \mathbf{N}^*\right\} \text{ ve } \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \mathbf{N}\right\}$$

kümeleri birer ortonormal çatıdırlar. Buradan,

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathbf{u}} \\ \overrightarrow{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathbf{u}} \\ \overrightarrow{\mathbf{v}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

denklemleri yazılır. Bir başka taraftan, $\mathbf{N}^*$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}^*$, $\mathbf{N}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörlerinin tamamı $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörüne dik olduğu için, $\overrightarrow{\mathbf{v}}^*$ ile $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ arasındaki açı θ olmak üzere, (4.16) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{v}}^* &= (\cos\theta)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} + (\sin\theta)\,\mathbf{N} \\
&= (\cos\theta)\,(-\sin\gamma\mathbf{T} + \cos\gamma\mathbf{B}) + (\sin\theta)\,\mathbf{N} \\
&= (-\cos\theta\sin\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\theta)\,\mathbf{N} + (\cos\theta\cos\gamma)\,\mathbf{B} \\
\mathbf{N}^* &= -(\sin\theta)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} + (\cos\theta)\,\mathbf{N} \\
&= -(\sin\theta)\,(-\sin\gamma\mathbf{T} + \cos\gamma\mathbf{B}) + (\cos\theta)\,\mathbf{N} \\
&= (\sin\theta\sin\gamma)\,\mathbf{T} + (\cos\theta)\,\mathbf{N} + (-\sin\theta\cos\gamma)\,\mathbf{B}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, yine (4.16) ve (4.17) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathbf{u}} \\ \overrightarrow{\mathbf{v}}^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{B} \\ (\cos\theta)\,\overrightarrow{\mathbf{v}} + (\sin\theta)\,\mathbf{N} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{B} \\ (-\cos\theta\sin\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\theta)\,\mathbf{N} + (\cos\theta\cos\gamma)\,\mathbf{B} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(\cos^2\gamma + \cos\theta\sin^2\gamma\right)\mathbf{T} - \sin\gamma\sin\theta\mathbf{N} + (\cos\gamma\sin\gamma - \sin\gamma\cos\theta\cos\gamma)\,\mathbf{B} \\ (\sin\gamma\cos\gamma - \cos\gamma\cos\theta\sin\gamma)\,\mathbf{T} + (\cos\gamma\sin\theta)\,\mathbf{N} + \left(\sin^2\gamma + \cos\theta\cos^2\gamma\right)\mathbf{B} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak, $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*$ ve $\mathbf{B}^*$ vektörlerini $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ cinsinden

$$1 - \mu = \cos\theta$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mu\sin^2\gamma & -\sin\gamma\sin\theta & \mu\sin\gamma\cos\gamma \\ \sin\theta\sin\gamma & \cos\theta & -\sin\theta\cos\gamma \\ \mu\sin\gamma\cos\gamma & \cos\gamma\sin\theta & 1 - \mu\cos^2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{N}^*$ arasındaki açının da θ olduğu görülür. $\square$

4.7. G Rektifyan Eğrisinin Eğriliği ve Burulması

Teorem 4.60. $\{\mathcal{G},\mathcal{G}^*\}$, (a,b) *aralığında tanımlanmış bir rektifyan eğri çifti olsun.* $\gamma \neq 0, \pi/2$ *olmak üzere,*

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \lambda\left(\left(\cos\gamma\right)\mathbf{T} + \left(\sin\gamma\right)\mathbf{B}\right)$$

denklemi ile verilsin. $\mathcal{G}(s)$ *eğrisinin eğrilik ve burulması* κ *ve* τ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned}\kappa &= \tau\tan\gamma - \tfrac{v^*\sin\theta\tan\gamma}{\lambda v}\\ \tau &= \kappa\cot\gamma + \tfrac{v^*\sin\theta}{\lambda v}\end{aligned} \tag{4.18}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \lambda\left(\left(\cos\gamma\right)\mathbf{T} + \left(\sin\gamma\right)\mathbf{B}\right)$$

denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} v^*\mathbf{T}^* &= v\mathbf{T} + \lambda'\left(\left(\cos\gamma\right)\mathbf{T} + \left(\sin\gamma\right)\mathbf{B}\right)\\ &\quad +\lambda\left(\gamma'\left(\sin\gamma\right)\mathbf{T} + \left(\cos\gamma\right)\left(v\kappa\mathbf{N}\right) + \gamma'\left(\cos\gamma\right)\mathbf{B} + \left(\sin\gamma\right)\left(-v\tau\mathbf{N}\right)\right)\\ v^*\mathbf{T}^* &= \left(v + \lambda'\cos\gamma + \lambda\gamma'\sin\gamma\right)\mathbf{T}\\ &\quad \left(\lambda v\kappa\cos\gamma - \lambda v\tau\sin\gamma\right)\mathbf{N}\\ &\quad \left(\lambda'\sin\gamma + \lambda\gamma'\cos\gamma\right)\mathbf{B}\end{aligned}$$

eşitliği ile,

$$\mathbf{T}^* = \left(1-\mu\sin^2\gamma\right)\mathbf{T} - \left(\sin\gamma\sin\theta\right)\mathbf{N} + \left(\mu\sin\gamma\cos\gamma\right)\mathbf{B}$$

eşitliği karşılaştırılırsa,

$$\begin{aligned} v^*\left(1-\mu\sin^2\gamma\right) &= \left(v + \lambda'\cos\gamma + \lambda\gamma'\sin\gamma\right)\\ -v^*\left(\sin\gamma\sin\theta\right) &= \left(\lambda v\kappa\cos\gamma - \lambda v\tau\sin\gamma\right)\\ -v^*\left(\mu\sin\gamma\cos\gamma\right) &= \left(\lambda'\sin\gamma + \lambda\gamma'\cos\gamma\right)\end{aligned} \tag{4.19}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} -v^*\left(\sin\gamma\sin\theta\right) &= \left(\lambda v\kappa\cos\gamma - \lambda v\tau\sin\gamma\right)\\ \tau &= \kappa\cot\gamma + \frac{v^*\sin\theta}{\lambda v}\end{aligned}$$

elde edilir. □

Önteorem 4.61. *Herhangi bir rektifyan eğri çifti için,*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\mu\sin^2\gamma & -\sin\gamma\sin\theta & \mu\sin\gamma\cos\gamma \\ \sin\theta\sin\gamma & \cos\theta & -\sin\theta\cos\gamma \\ \mu\sin\gamma\cos\gamma & \cos\gamma\sin\theta & 1-\mu\cos^2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

matris eşiliğinden,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\mu\sin^2\gamma & \sin\theta\sin\gamma & \mu\sin\gamma\cos\gamma \\ -\sin\gamma\sin\theta & \cos\theta & \cos\gamma\sin\theta \\ \mu\sin\gamma\cos\gamma & -\sin\theta\cos\gamma & 1-\mu\cos^2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix}$$

elde edilebilir.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1-\mu\sin^2\gamma & -\sin\gamma\sin\theta & \mu\sin\gamma\cos\gamma \\ \sin\theta\sin\gamma & \cos\theta & -\sin\theta\cos\gamma \\ \mu\sin\gamma\cos\gamma & \cos\gamma\sin\theta & 1-\mu\cos^2\gamma \end{bmatrix}$$

matrisi, $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (\cos\gamma, 0, \sin\gamma)$ *vektörü etrafında,* θ *açısı kadar döndürren dönme matrisidir. Dönme matrisine karşılık gelen birim kuaterniyon ise*

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\gamma + \mathbf{k}\sin\frac{\theta}{2}\sin\gamma$$

şeklinde elde edilir.

İspat *Dönme matrisine karşılık gelen birim kuaterniyon* $q = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$

$$R = \begin{bmatrix} q_1^2+q_2^2-q_3^2-q_4^2 & -2q_1q_4+2q_2q_3 & 2q_1q_3+2q_2q_4 \\ 2q_1q_4+2q_2q_3 & q_1^2-q_2^2+q_3^2-q_4^2 & -2q_1q_2+2q_3q_4 \\ -2q_1q_3+2q_2q_4 & 2q_1q_2+2q_3q_4 & q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2 \end{bmatrix}$$

$q_1 \neq 0$ *ise,*

$$\begin{aligned} q_1^2 &= \frac{1}{4}\left(1+R_{11}+R_{22}+R_{33}\right), \\ q_2 &= \frac{1}{4q_1}\left(R_{32}-R_{23}\right), \\ q_3 &= -\frac{1}{4q_1}\left(R_{13}-R_{31}\right) \\ q_4 &= \frac{1}{4q_1}\left(R_{21}-R_{12}\right) \end{aligned}$$

buradan yukarıdaki eşitlikleri kullanarak (Arribas vd. 2006)

$$q_1 = \pm\cos\frac{\theta}{2},\ q_2 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\gamma,\ q_3 = 0,\ q_4 = \sin\gamma\sin\frac{\theta}{2}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.62. *3 boyutlu Öklid uzayında verilen bir R dönme matrisi için, dönme ekseni 1 özdeğerine karşılık gelen özvektör, t dönme açısı da*

$$\cos t = \frac{\operatorname{tr} R - 1}{2}$$

eşitliği ile belirlidir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\cos t &= \frac{1-\mu\sin^2\gamma - 1 - \mu\cos^2\gamma + \cos\theta + 1}{2} \\ &= \frac{1-\mu+\cos\theta}{2} \\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

bulunur (Özdemir 2020).

Teorem 4.63. $\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, (a, b) *aralığında tanımlanmış bir rektifyan eğri çifti olsun.* $\gamma \neq 0, \pi/2$ *olmak üzere,*

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \lambda\left((\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{B}\right)$$

denklemi ile verilsin. $\mathcal{G}^*(s)$ *eğrisinin eğrilik ve burulması* κ^* *ve* τ^* *olmak üzere,*

$$\begin{aligned}\kappa^* &= \tfrac{1}{v^*}\left(v\kappa - \theta'\sin\gamma - \tfrac{\gamma'\mu\cos\gamma}{\sin\theta}\right)\\ \tau^* &= \tfrac{1}{v^*}\left(v\tau - \theta'\cos\gamma + \tfrac{2\gamma'\mu\sin\gamma}{\sin\theta}\right)\end{aligned} \tag{4.20}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $c \in \mathbb{R}$, θ *ve* λ *uzaklık fonksiyonu olmak üzere*

$$\lambda = -\frac{v^*(1+\cos\theta)\sin\gamma}{\gamma'\mu}$$

eşitliği yazılır.

İspat

$$\mathbf{T}^* = \left(1-\mu\sin^2\gamma\right)\mathbf{T} - (\sin\gamma\sin\theta)\,\mathbf{N} + (\mu\sin\gamma\cos\gamma)\,\mathbf{B}$$

denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
v^*\kappa^*\mathbf{N}^* &= -\left(\mu^{'}\sin^2\gamma + 2\gamma^{'}\mu\sin\gamma\cos\gamma\right)\mathbf{T} + \left(1-\mu\sin^2\gamma\right)v\kappa\mathbf{N} \\
&\quad -\left(\gamma^{'}\cos\gamma\sin\theta + \theta^{'}\sin\gamma\cos\theta\right)\mathbf{N} - (\sin\gamma\sin\theta)\left(-v\kappa\mathbf{T}+v\tau\mathbf{B}\right) \\
&\quad +\left(\mu^{'}\sin\gamma\cos\gamma + \gamma^{'}\mu\cos^2\gamma - \gamma^{'}\mu\sin^2\gamma\right)\mathbf{B} + (\mu\sin\gamma\cos\gamma)\left(-v\tau\mathbf{N}\right)
\end{aligned}$$

ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
v^*\kappa^*\mathbf{N}^* &= -\left(\mu^{'}\sin^2\gamma + \gamma^{'}\mu\sin 2\gamma - v\kappa\sin\gamma\sin\theta\right)\mathbf{T} \quad (4.21)\\
&\quad +\left(v\kappa - \mu v\kappa\sin^2\gamma - \gamma^{'}\cos\gamma\sin\theta - \theta^{'}\sin\gamma\cos\theta - \mu v\tau\sin\gamma\cos\gamma\right)\mathbf{N} \\
&\quad +\left(-v\tau\sin\gamma\sin\theta + \mu^{'}\sin\gamma\cos\gamma + \gamma^{'}\mu\cos^2\gamma - \gamma^{'}\mu\sin^2\gamma\right)\mathbf{B}
\end{aligned}$$

olur. Bu (4.21) denkleminin her iki tarafını $\mathbf{T}$ ile iç çarpımı alınırsa,

$$\langle \mathbf{N}^*, \mathbf{T}\rangle = \sin\gamma\sin\theta$$

eşitliği alınırsa,

$$\begin{aligned}
v^*\kappa^*\sin\gamma\sin\theta &= -\mu^{'}\sin^2\gamma - \gamma^{'}\mu\sin 2\gamma + v\kappa\sin\gamma\sin\theta \quad (4.22)\\
v^*\kappa^* &= v\kappa - \theta^{'}\sin\gamma - \frac{2\gamma^{'}\mu\cos\gamma}{\sin\theta}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer, (4.21) denkleminin her iki tarafını $\mathbf{B}$ ile iç çarpımı alınırsa,

$$\langle \mathbf{N}^*, \mathbf{B}\rangle = -\sin\theta\cos\gamma$$

eşitliği alınırsa,

$$\begin{aligned}
-v^*\kappa^*\sin\theta\cos\gamma &= -v\tau\sin\gamma\sin\theta + \mu^{'}\sin\gamma\cos\gamma \quad (4.23)\\
&\quad +\gamma^{'}\mu\cos^2\gamma - \gamma^{'}\mu\sin^2\gamma \quad (4.24)\\
v^*\kappa^* &= v\tau\tan\gamma - \theta^{'}\sin\gamma - \frac{\gamma^{'}\mu\cos\gamma}{\sin\theta} + \frac{\gamma^{'}\mu\sin\gamma\tan\gamma}{\sin\theta}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer, (4.21) denkleminin her iki tarafını $\mathbf{N}$ ile iç çarpımı alınırsa,

$$\langle \mathbf{N}^*, \mathbf{N}\rangle = \cos\theta$$

eşitliği alınırsa,

$$\begin{aligned} v^{*}\kappa^{*}\cos\theta &= v\kappa-\mu v\kappa\sin^{2}\gamma-\gamma^{'}\cos\gamma\sin\theta && (4.25)\\ &\quad -\theta^{'}\sin\gamma\cos\theta-\mu v\tau\sin\gamma\cos\gamma && (4.26)\\ v^{*}\kappa^{*} &= \frac{v\kappa-\mu v\kappa\sin^{2}\gamma-\mu v\tau\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\theta}-\gamma^{'}\cos\gamma\tan\theta-\theta^{'}\sin\gamma \end{aligned}$$

(4.22)ve (4.23) eşitliğinden

$$\begin{aligned} v\kappa-\frac{2\gamma^{'}\mu\cos\gamma}{\sin\theta} &= v\tau\tan\gamma-\frac{\gamma^{'}\mu\cos\gamma}{\sin\theta}+\frac{\gamma^{'}\mu\sin\gamma\tan\gamma}{\sin\theta}\\ v\kappa\sin\theta-\gamma^{'}\mu\cos\gamma &= v\tau\tan\gamma\sin\theta+\gamma^{'}\mu\sin\gamma\tan\gamma \end{aligned}$$

$\tau=\kappa\cot\gamma+\frac{v^{*}\sin\theta}{\lambda v}$ eşitliği denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} v\kappa\sin\theta &= v\left(\kappa\cot\gamma+\frac{v^{*}\sin\theta}{\lambda v}\right)\tan\gamma\sin\theta\\ &\quad +\gamma^{'}\mu\sin\gamma\tan\gamma+\gamma^{'}\mu\cos\gamma\\ v\kappa\sin\theta &= v\kappa\sin\theta+\frac{v^{*}\sin^{2}\theta\tan\gamma}{\lambda}+\gamma^{'}\mu\sin\gamma\tan\gamma+\gamma^{'}\mu\cos\gamma\\ -\gamma^{'}\mu\tan\gamma-\gamma^{'}\mu\cot\gamma &= \frac{v^{*}\sin^{2}\theta}{\lambda\cos\gamma}\Rightarrow-\gamma^{'}\mu\left(\frac{\sin^{2}\gamma+\cos^{2}\gamma}{\sin\gamma\cos\gamma}\right)=\frac{v^{*}\sin^{2}\theta}{\lambda\cos\gamma}\\ -\gamma^{'}\mu\left(\frac{1}{\sin\gamma}\right) &= \frac{v^{*}\sin^{2}\theta}{\lambda}\\ \lambda &= -\frac{v^{*}\left(1+\cos\theta\right)\sin\gamma}{\gamma^{'}\mu} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.22) eşitliği incelenirse

$$\begin{aligned} v^{*}\kappa^{*} &= v\kappa-\theta^{'}\sin\gamma-\frac{2\gamma^{'}\mu\cos\gamma}{\sin\theta}\\ \kappa^{*} &= \frac{v\kappa-\theta^{'}\sin\gamma}{v^{*}}-\frac{2\gamma^{'}\mu\cos\gamma}{v^{*}\sin\theta}\\ \kappa^{*} &= \frac{1}{v^{*}}\left(v\kappa-\theta^{'}\sin\gamma-\frac{2\gamma^{'}\mu\cos\gamma}{\sin\theta}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{B}^{*}$ın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} -v^{*}\tau^{*}\mathbf{N}^{*} &= \left(\mu^{'}\sin\gamma\cos\gamma+\gamma^{'}\mu\cos^{2}\gamma-\gamma^{'}\mu\sin^{2}\gamma\right)\mathbf{T}+\left(\mu\sin\gamma\cos\gamma\right)v\kappa\mathbf{N}\\ &\quad +\left(-\gamma^{'}\sin\gamma\sin\theta+\theta^{'}\cos\gamma\cos\theta\right)\mathbf{N}+\left(\cos\gamma\sin\theta\right)\left(-v\kappa\mathbf{T}+v\tau\mathbf{B}\right)\\ &\quad +\left(-\mu^{'}\cos^{2}\gamma+2\gamma^{'}\mu\sin\gamma\cos\gamma\right)\mathbf{B}+\left(1-\mu\cos^{2}\gamma\right)\left(-v\tau\mathbf{N}\right)\\ -v^{*}\tau^{*}\mathbf{N}^{*} &= \left(\mu^{'}\sin\gamma\cos\gamma+\gamma^{'}\mu\cos 2\gamma-v\kappa\cos\gamma\sin\theta\right)\mathbf{T}\\ &\quad +\left(v\kappa\mu\sin\gamma\cos\gamma-\gamma^{'}\sin\gamma\sin\theta+\theta^{'}\cos\gamma\cos\theta-v\tau+v\tau\mu\cos^{2}\gamma\right)\mathbf{N}\\ &\quad +\left(v\tau\cos\gamma\sin\theta-\mu^{'}\cos^{2}\gamma+\gamma^{'}\mu\sin 2\gamma\right)\mathbf{B} \end{aligned}$$

denkleminin her iki tarafı $\mathbf{B}$ ile iç çarpımı alınırsa $\langle \mathbf{N}^*, \mathbf{B} \rangle = -\sin\theta\cos\gamma$ olduğundan

$$\begin{aligned} v^*\tau^*\sin\theta\cos\gamma &= v\tau\cos\gamma\sin\theta - \mu^{'}\cos^2\gamma + \gamma^{'}\mu\sin 2\gamma \\ \tau^* &= \frac{v\tau\sin\theta - \mu^{'}\cos\gamma + 2\gamma^{'}\mu\sin\gamma}{v^*\sin\theta} \\ \tau^* &= \frac{1}{v^*}\left(v\tau - \theta^{'}\cos\gamma + \frac{2\gamma^{'}\mu\sin\gamma}{\sin\theta}\right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. □

4.8. Rektifyan Düzlemde θ ve γ Açılarının Özel Durumlarının İncelenmesi

4.8.1. θ ve γ sabit olmama durumu:

$\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, bir rektifyan eğri çifti olsun. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin karşılıklı normalleri arasındaki açı $\theta \neq 0$ ve $\gamma \neq 0, \gamma \neq \pi/2$ ise

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \left(-\frac{v^*(1+\cos\theta)\sin\gamma}{\gamma^{'}\mu}\right)((\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{B})$$

elde edilir. (4.18) ve (4.20) denklemlerinden $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{array}{ll} \kappa = \tau\tan\gamma - \frac{v^*\sin\theta\tan\gamma}{\lambda v} & \kappa^* = \frac{1}{v^*}\left(v\kappa - \theta^{'}\sin\gamma - \frac{2\gamma^{'}\mu\cos\gamma}{\sin\theta}\right) \\ \tau = \kappa\cot\gamma + \frac{v^*\sin\theta}{\lambda v} & \tau^* = \frac{1}{v^*}\left(v\tau - \theta^{'}\cos\gamma + \frac{2\gamma^{'}\mu\sin\gamma}{\sin\theta}\right) \end{array}$$

4.8.2. θ sabit değil ve γ sabit olma durumu:

$\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, bir rektifyan eğri çifti, $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin karşılıklı normalleri arasındaki açı $\theta \neq 0$ ve $\gamma \neq 0, \gamma \neq \pi/2$ ise

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \lambda((\cos\gamma)\,\mathbf{T} + (\sin\gamma)\,\mathbf{B}) \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.19) denkleminden

$$\lambda^{'} = \frac{v(1-\cos\theta)\cos\lambda}{\cos\theta} \tag{4.28}$$

ve $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları

$$\begin{array}{ll} \kappa = \tau\tan\gamma - \frac{v^*\sin\theta\tan\gamma}{\lambda v} & \tau = \kappa\cot\gamma + \frac{v^*\sin\theta}{\lambda v} \\ \kappa^* = \frac{1}{v^*}\left(v\kappa - \theta^{'}\sin\gamma\right) & \tau^* = \frac{1}{v^*}\left(v\tau - \theta^{'}\cos\gamma\right) \end{array} \tag{4.29}$$

elde edilir.

$\gamma = 0$ **olma durumu:**

Eğer $\gamma = 0$ ve θ sabit değil ise (4.15) $\mathcal{G}(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$; $\mathcal{G}^*$ eğrisinin Frenet vektör alanları da $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ olsun. θ, eğrilerin karşılıklı normalleri arasındaki açı olmak üzere, $\mu = 1 - \cos\theta$ ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

elde edilir.

(4.28) denkleminde $\gamma = 0$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\lambda' = \frac{v\left(1 - \cos\theta\right)}{\cos\theta} \tag{4.31}$$

elde edilir.

(4.29) denkleminde $\gamma = 0$ eşitliğini yerine yazarsak $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları

$$\begin{aligned} &\kappa = 0 \\ &\kappa^* = \tfrac{v\kappa}{v^*} \quad \tau^* = \tfrac{1}{v^*}\left(v\tau - \theta' \cos\gamma\right) \end{aligned} \tag{4.32}$$

elde edilir.

$\gamma = \pi/2$ **olma durumu:**

Eğer $\gamma = \pi/2$ ve θ sabit değil ise (4.15) $\mathcal{G}(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$; $\mathcal{G}^*$ eğrisinin Frenet vektör alanları da $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ olsun. θ, eğrilerin karşılıklı normalleri arasındaki açı olmak üzere**,** $\mu = 1 - \cos\theta$ ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

elde edilir. Eğer $\gamma = \pi/2$ ve θ sabit değil ise (4.27)denkleminden

$$G^* = G + \lambda\mathbf{B}$$

elde edilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$v^*\mathbf{T}^* = v\mathbf{T} + \boldsymbol{\lambda}\left(-v\tau\mathbf{N}\right)$$

olur ve bu eşitliğin $\mathbf{N}$ ile iç çarpımı alınırsa $\langle \mathbf{T}^*, \mathbf{N} \rangle = -\sin\theta$ olduğundan

$$\begin{aligned} -v^* \sin\theta &= -\boldsymbol{\lambda} v\tau \\ \tau &= \frac{v^* \sin\theta}{\boldsymbol{\lambda} v} \end{aligned}$$

elde edilir.

(4.28) denkleminde $\gamma = \pi/2$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\lambda^{'} = 0 \tag{4.34}$$

elde edilir.

(4.29) denkleminde $\gamma = \pi/2$ eşitliği yerine yazılırsa $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları

$$\begin{array}{ll} \kappa = \frac{\kappa^* v^* + \theta^{'}}{v} & \tau = \frac{v^* \sin\theta}{\lambda v} \\ \kappa^* = \frac{v\kappa - \theta^{'}}{v^*} & \tau^* = \frac{\sin\theta}{\lambda} \end{array} \tag{4.35}$$

elde edilir.

4.8.3. θ sabit ve γ sabit olmama durumu:

$\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, bir rektifyan eğri çifti, $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin karşılıklı normalleri arasındaki açı $\theta \neq 0$ ve $\gamma \neq 0, \gamma \neq \pi/2$ ise

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \left(-\frac{v^* (1 + \cos\theta) \sin\gamma}{\gamma^{'} \mu} \right) ((\cos\gamma)\, \mathbf{T} + (\sin\gamma)\, \mathbf{B})$$

elde edilir. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları

$$\begin{array}{ll} \kappa = \tau \tan\gamma - \frac{v^* \sin\theta \tan\gamma}{\lambda v} & \kappa^* = \frac{1}{v^*} \left(v\kappa - \frac{2\gamma^{'} \mu \cos\gamma}{\sin\theta} \right) \\ \tau = \kappa \cot\gamma + \frac{v^* \sin\theta}{\lambda v} & \tau^* = \frac{1}{v^*} \left(v\tau + \frac{2\gamma^{'} \mu \sin\gamma}{\sin\theta} \right) \end{array} \tag{4.36}$$

elde edilir.

$\theta = 0$ olma durumu:

Eğer $\theta = 0$ ve γ sabit değil ise (4.15) $\mathcal{G}(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$; $\mathcal{G}^*$ eğrisinin Frenet vektör alanları da $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ olsun. θ, eğrilerin karşılıklı normalleri arasındaki açı olmak üzere, $\mu = 0$ ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

elde edilir.

Eğer $\theta = 0$ ve γ sabit değil ise (4.19) denkleminden

$$\lambda = \frac{(v - v^*) \sin \gamma}{\gamma'}$$

elde edilir

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \lambda \left((\cos \gamma) \mathbf{T}^* + (\sin \gamma) \mathbf{B}^* \right)$$

denklemin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} v^* \mathbf{T}^* &= v\mathbf{T} + \boldsymbol{\lambda}' \left((\cos \gamma) \mathbf{T}^* + (\sin \gamma) \mathbf{B}^* \right) \\ &\quad + \lambda \left(-\gamma' \sin \gamma \mathbf{T}^* + \cos \gamma v^* \kappa^* \mathbf{N}^* + \gamma' \cos \gamma \mathbf{B}^* - \sin \gamma v^* \tau^* \mathbf{N}^* \right) \end{aligned}$$

olur. Bu denklemin $\mathbf{N}^*$ ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \left(\cos \gamma v^* \kappa^* - \sin \gamma v^* \tau^* \right) \\ \cos \gamma \kappa^* &= \sin \gamma \tau^* \\ \kappa^* &= \tau^* \tan \gamma \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\theta = 0$ ve γ sabit değil iken $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları

$$\begin{aligned} \kappa = \tau \tan \gamma \quad & \kappa^* = \tau^* \tan \gamma \\ \tau = \kappa \cot \gamma \quad & \tau^* = \kappa^* \cot \gamma \end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilir.

$\theta = \pi/2$ **olma durumu:**

Eğer $\theta = \pi/2$ ve γ sabit değil ise (4.15) $\mathcal{G}(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$; $\mathcal{G}^*$ eğrisinin Frenet vektör alanları da $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ olsun. θ, eğrilerin karşılıklı normalleri arasındaki açı olmak üzere, $\mu = 1$ ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\gamma & -\sin\gamma & \sin\gamma\cos\gamma \\ \sin\gamma & 0 & -\cos\gamma \\ \sin\gamma\cos\gamma & \cos\gamma\sin\theta & \sin^2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

elde edilir.

Eğer (4.36) denkleminde $\theta = \pi/2$ yerine yazarsak ve γ sabit değil ise $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları

$$\begin{array}{ll} \kappa = \tau\tan\gamma - \frac{v^*\tan\gamma}{\lambda v} & \kappa^* = \frac{1}{v^*}\left(v\kappa - 2\gamma'\cos\gamma\right) \\ \tau = \kappa\cot\gamma + \frac{v^*}{\lambda v} & \tau^* = \frac{1}{v^*}\left(v\tau + 2\gamma'\sin\gamma\right) \end{array} \tag{4.40}$$

elde edilir.

4.8.4. θ ve γ sabit olma durumu:

$\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^*\}$, bir rektifyan eğri çifti, $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin karşılıklı normalleri arasındaki açı θ sabit $\theta \neq 0$ ve γ sabit $\gamma \neq 0, \gamma \neq \pi/2$ ise

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \left(-\frac{v^*\left(1+\cos\theta\right)\sin\gamma}{\gamma'\mu}\right)\left(\left(\cos\gamma\right)\mathbf{T} + \left(\sin\gamma\right)\mathbf{B}\right)$$

elde edilir. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları

$$\begin{array}{ll} \kappa = \tau\tan\gamma - \frac{v^*\sin\theta\tan\gamma}{\lambda v} & \kappa^* = \frac{v\kappa}{v^*} \\ \tau = \kappa\cot\gamma + \frac{v^*\sin\theta}{\lambda v} & \tau^* = \frac{v\tau}{v^*} \end{array} \tag{4.41}$$

elde edilir.

$\theta = 0$ ve γ sabit olma durumu ($\gamma \neq 0, \pi/2$):

Eğer $\theta = 0$ ve γ sabit ise (4.15) $\mathcal{G}(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$; $\mathcal{G}^*$ eğrisinin Frenet vektör alanları da $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ olsun. θ, eğrilerin karşılıklı normalleri arasındaki açı olmak üzere, $\mu = 0$ ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

elde edilir.

Eğer $\theta = 0$ ve $\gamma \neq 0, \pi/2$ sabit ise (4.19) denkleminden $\lambda^{'} = 0$elde edilir. O halde λ sabittir.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^* &= \mathcal{G}+\lambda\left(\left(\cos\gamma\right)\mathbf{T}^*+\left(\sin\gamma\right)\mathbf{B}^*\right) \\ v^*\mathbf{T}^* &= v\mathbf{T}++\lambda\left(\cos\gamma v^*\kappa^* - \sin\gamma v^*\tau^*\right)\mathbf{N}^* \end{aligned}$$

olur. Burada denklemi $\mathbf{T}$ ile iç çarpımını alırsak $\langle \mathbf{T}^*, \mathbf{T}\rangle = 1$ olduğundan

$$v^* = v$$

elde edilir. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları

$$\begin{array}{ll} \kappa = \tau\tan\gamma & \kappa^* = \kappa \\ \tau = \kappa\cot\gamma & \tau^* = \tau \end{array} \tag{4.43}$$

elde edilir.

$\theta = 0$ **ve** $\gamma = 0$ **sabit olma durumu:**

Eğer $\theta = 0$ ve $\gamma = 0$ ise (4.15) $\mathcal{G}(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$; $\mathcal{G}^*$ eğrisinin Frenet vektör alanları da $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ olsun. θ, eğrilerin karşılıklı normalleri arasındaki açı olmak üzere**,** $\mu = 0$ ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

elde edilir. O halde $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}$ olur.

Eğer $\theta = 0$ ve $\gamma = 0$ ise (4.19) denkleminden

$$\begin{aligned} \lambda v\kappa &= 0 \\ \lambda^{'} &= v^* - v \end{aligned}$$

elde edilir.O halde $\lambda \neq 0, v \neq 0$ olduğundan $\kappa = 0$ elde edilir.

Eğer $\theta = 0$ ve $\gamma = 0$ ise (4.27) denklemi

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^* &= \mathcal{G}+\lambda\mathbf{T} \\ v^*\mathbf{T}^* &= v\mathbf{T} + \boldsymbol{\lambda}^{'}\mathbf{T}+\lambda v\kappa\mathbf{N} \\ \mathbf{T}^* &= \mathbf{T} \end{aligned}$$

olur. yukarıdaki eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} v^*\kappa^*\mathbf{N}^* &= v\kappa\mathbf{N} \\ v^*\kappa^*\mathbf{N}^* &= 0 \end{aligned}$$

olur ve bu denkleminin $\mathbf{N}$ ile iç çarpımı alınırsa

$$\kappa^* = 0$$

elde edilir. O halde $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları

$$\begin{aligned} \kappa = 0 \quad \kappa^* &= 0 \\ \tau^* &= \tau \end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir. O halde $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrileri rektifyan düzlemde birer doğruyu ifade eder.

$\theta = 0$ **ve** $\gamma = \pi/2$ **sabit olma durumu:**

Eğer $\theta = 0$ ve $\gamma = \pi/2$ ise (4.15) $\mathcal{G}(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$; $\mathcal{G}^*$ eğrisinin Frenet vektör alanları da $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ olsun. θ, eğrilerin karşılıklı normalleri arasındaki açı olmak üzere, $\mu = 0$ ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

elde edilir.

Eğer $\theta = 0$ ve $\gamma = \pi/2$ sabit ise (4.19) denkleminden

$$\begin{aligned} \lambda' &= 0 \\ \lambda' &= v^* - v \\ v^* &= v \end{aligned}$$

ve

$$\lambda v \tau = 0$$

elde edilir.O halde $\lambda \neq 0, v \neq 0$ olduğundan $\tau = 0$ elde edilir.

Eğer $\theta = 0$ ve $\gamma = \pi/2$ sabit ise $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları

$$\begin{aligned} \kappa^* &= \kappa \\ \tau = 0 \quad \tau^* &= 0 \end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir. O halde $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrileri rektifyan düzlemde paralel eğrileri ifade eder.

$\theta = \pi/2$ **ve** γ **sabit olma durumu(**$\gamma \neq 0, \gamma \neq /2$**):**

Eğer $\theta = \pi/2$ ve γ ise (4.15) $\mathcal{G}(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$; $\mathcal{G}^*$ eğrisinin Frenet vektör alanları da $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ olsun. θ, eğrilerin karşılıklı normalleri arasındaki açı olmak üzere, $\mu = 1$ ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\gamma & \sin\gamma\cos\gamma \\ \sin\gamma & 0 & -\cos\gamma \\ \sin\gamma\cos\gamma & \cos\gamma & \sin^2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

elde edilir.

Eğer $\theta = \pi/2$ ve $\gamma \neq 0, \pi/2$ sabit ise (4.41) denkleminden $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları

$$\begin{aligned} \kappa &= \tau\tan\gamma - \tfrac{v^*\tan\gamma}{\lambda v} & \kappa^* &= \tfrac{v\kappa}{v^*} \\ \tau &= \kappa\cot\gamma + \tfrac{v^*}{\lambda v} & \tau^* &= \tfrac{v\tau}{v^*} \end{aligned} \tag{4.49}$$

elde edilir.

$\theta = \pi/2$ **ve** $\gamma = 0$ **sabit olma durumu:**

Eğer $\theta = \pi/2$ ve $\gamma = 0$ ise (4.15) $\mathcal{G}(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$; $\mathcal{G}^*$ eğrisinin Frenet vektör alanları da $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ olsun. θ, eğrilerin karşılıklı normalleri arasındaki açı olmak üzere, $\mu = 1$ ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

elde edilir. O halde $-\mathbf{B} = \mathbf{N}^*$ ve $\mathbf{B}^* = \mathbf{N}$ olur. $\mathcal{M}$ eğrisinin $\mathcal{M}(s)$ noktasındaki normal vektörünün doğrultusu ile, $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{M}^*(s)$ noktasındaki binormalinin doğrultusu aynı ise, $\mathcal{M}$ eğrisine Mannheim eğrisi, $\mathcal{M}^*$ eğrisine de $\mathcal{M}$ eğrisinin Mannheim eş eğrisi denir. $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}^*\}$ eğri çiftine de Mannheim eğri çifti denir. O halde bu özel hal Mannheim eğri çiftlerine benzemektedir.

Eğer $\theta = \pi/2$ ve $\gamma = 0$ sabit ise (4.19) denkleminden

$$\lambda' = v^* - v$$

olur. Eğer $\theta = \pi/2$ ve $\gamma = 0$ ise

$$\kappa = 0 \quad \begin{array}{l} \kappa^* = 0 \\ \tau^* = \frac{v\tau}{v^*} \end{array} \tag{4.51}$$

denklemleri elde edilir.

$\theta = \pi/2$ **ve** $\gamma = \pi/2$ **sabit olma durumu:**

Eğer $\theta = \pi/2$ ve $\gamma = \pi/2$ ise (4.15) $\mathcal{G}(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$; $\mathcal{G}^*$ eğrisinin Frenet vektör alanları da $\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*$ olsun. θ, eğrilerin karşılıklı normalleri arasındaki açı olmak üzere, $\mu = 1$ ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{N}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

elde edilir. Buradan $\mathbf{N}^* = \mathbf{T}$ elde edilir.

Eğer $\theta = \pi/2$ ve $\gamma = \pi/2$ sabit ise (4.19) denkleminden

$$\begin{aligned} -v^*(\mu \sin\gamma \cos\gamma) &= \left(\lambda' \sin\gamma + \lambda\gamma' \cos\gamma\right) \\ \lambda' &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde λ sabittir.

Eğer $\theta = \pi/2$ ve $\gamma = \pi/2$ sabit ise

$$\tau = 0 \quad \begin{array}{l} \kappa^* = \frac{v\kappa}{v^*} \\ \tau^* = \frac{v\tau}{v^*} = 0 \end{array} \tag{4.53}$$

elde edilir. O halde $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ eğrileri rektifyan düzlemde birer düzlemsel eğri olur.

5. SONUÇLAR

Bu tezin amacı, düzlemde daha önce tanımlanmış olan paralel, involüt, evolüt, pedal, eğrileriyle Öklid uzayında tanımlanan Bertrand, Mannheim ve Backlund eğri çiftlerinin oskülatör ve rektifyan düzlemlerinin kesişimleri üzerinde tanımlanıp genelleştirilmiş bir formülünü elde edilmiştir.

Oskülator düzlemlerinin kesişimlerinin karşılıklı noktalarından geçen $\{G, G^*\}$ eğri çiftinin teğetlerinin yaptığı açı γ ve karşılıklı binormallerinin yaptığı açı θ olmak üzere;

θ sabit ve γ sabit değil	$\Rightarrow$	$\{G, G^*\}$ Backlund eğri çifti
θ sabit ve $\gamma = 0$	$\Rightarrow$	$\{G, G^*\}$ Doğru
θ sabit $(\theta \neq 0)$ ve $\gamma = \frac{\pi}{2}$	$\Rightarrow$	$\{G, G^*\}$ Bertrand eğri çifti
$\theta = 0$ ve γ sabit değil	$\Rightarrow$	$\{G, G^*\}$ Düzlemsel eğri
$\theta = 0$ ve γ sabit	$\Rightarrow$	$\{G, G^*\}$ Doğru

θ ve γ açılarının özel durumlarında yukarıdaki eğriler elde edilmiştir.

Rektifyan düzlemlerinin kesişimlerinin karşılıklı noktalarından geçen $\{G, G^*\}$ eğri çiftinin teğetlerinin yaptığı açı γ ve karşılıklı binormallerinin yaptığı açı θ olmak üzere;

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\gamma = 0$	$\Rightarrow$	$\{G, G^*\}$ Mannheim eğri çifti
$\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\gamma = \frac{\pi}{2}$	$\Rightarrow$	$\{G, G^*\}$ Düzlemsel eğri
$\theta = 0$ ve $\gamma = \frac{\pi}{2}$	$\Rightarrow$	$\{G, G^*\}$ Paralel Eğri
$\theta = 0$ ve $\gamma = 0$	$\Rightarrow$	$\{G, G^*\}$ Doğru
$\theta = 0$ ve γ sabit	$\Rightarrow$	$\{G, G^*\}$ Helis eğri çifti

θ ve γ açılarının özel durumlarında yukarıdaki eğriler elde edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Arribas, M. and Elipe, A.and Palacios, M. 2006. Quaternions and the rotation of a rigid body. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 96 (3): 239-251.

Babaarslan, M. and Yaylı, Y. 2013. On Helices and Bertrand Curves In Euclidean 3-Space. *Mathematical and Computational Applications*, 18 (1): 1-11.

Balgetir, H. and Bektas, M. and Inoguchi, J.I. 2004. Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations. *Note di matematica*, 23 (1): 7-13.

Bükcü, B. and Karacan, M.K. 2008. Parallel (Offset) Curves In Lorentzian Plane. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 24 (1-2): 334-345.

Bükcü, B. and Karacan, M.K. 2007. On the Involute and Evolute Curves of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 2 (5): 221–232.

Burke, J.F. 1960. Bertrand curves associated with a pair of curves. *Mathematics Magazine*, 34 (1): 60-62

Calini, A. and Ivey, T. 1998. Bäcklund transformations and knots of constant torsion. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 7 (06): 719-746

Camcı, Ç. and Uçum, A. and Ilarslan, K. 2020. A new approach to Bertrand curves in Euclidean 3-space. *Journal of Geometry*, 111 (3): 1-15

Camcı, Ç. and Chen, B. and Ilarslan, K. and Uçum, A. 2021. Sequential natural mates of Frenet curves in Euclidean 3-spaces. *Journal of Geometry*, 112 (3): 1-15

Celik, O. and Ozdemir, M. 2022. A New Generalization of Some Curve Pairs. *International Electronic Journal of Geometry*, 15 (2): 215-225.

Chen, X. Lin, Q. 2014. Properties of Generalized Offset Curves and Surfaces. *Journal of Applied Mathematics*, 2014 (124240): 1-13.

Chen, B.Y. and Dillen, F. 2005. Rectifying Curves As Centrodes And Extremal Curves. *Bull. Inst. Math. Academia Sinica*, 33 (2): 77-90.

Cheng, Y.M. and Lini, C.C. 2010. On the Generalized Bertrand Curves in Euclidean-spaces. *Note di Matematica*, 29 (2): 33-39

Choi, J.H. and Kim, Y.H. 2012. Associated curves of a Frenet curve and their applications. *Applied Mathematics and Computation*, 218 (18): 9116-9124.

Dede, M.and Ekici, C. 2018. Directional Bertrand Curves. *Gazi University Journal of Science*. 31 (1): 202-211

Deshmukh, S. and Chen, B.Y. and Alghanemi, A. 2018. Natural mates of Frenet curves in Euclidean 3-space. *Turkish Journal of Mathematics*, 42 (5): 2826-2840

Ekmekci, N. and Ilarslan, K. 2001. On Bertrand curves and their characterization. *Differ. Geom. Dyn. Syst*, 3 (2): 17-24.

Erdoğdu, M. and Özdemir, M. 2018. On Bäcklund Transformation Between Timelike Curves in Minkowski Space-Time. *Süleyman Demirel University Journal of Natural and Applied Sciences*, 22 (3): 1143-1150.

Erdoğdu, M. and Yavuz, A. 2019. Some Characterizations for Involute-Evolute Curve Couples with Constant Curvatures in Minkowski Space. *Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering*, 19 (2019): 605-614.

Da Fonseca, A.F. and Malta. C.P. Lancret Helices. https://arxiv.org/abs/physics/0507105v1 [Son erişim tarihi: 09.09.2020].

Fuchs, D. 2013. Evolutes and Involutes of Spatial Curves. *The American Mathematical Monthly*, 120 (3): 217-231.

Gök, I. and Nurkan, S.K.and Ilarslan, K.2014. On pseudo null Bertrand curves in Minkowski space-time. *Kyungpook Mathematical Journal*, 54 (4): 685-697.

Görgülü, A. and Özdamar, E. 1986. A generalization of the Bertrand curves as general inclined curves in En. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank., Series A1*, 35: 53-60

Güner, G. and Ekmekci, N. 2012. On the spherical curves and Bertrand curves in Minkowski-3 space. *J. Math. Comput. Sci.*, 2 (4): 898-906

Hacısalihoğlu, H.H. 1998. Diferensiyel Geometri. Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara, 269.

Hanif M. and Hou, Z.H. 2018. Generalized involute and evolute curve-couple In Euclidean space. *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, 11 (2): 28-39.

Honda, S. I. and Takahashi, M. 2020. Bertrand and Mannheim curves of framed curves in the 3-dimensional Euclidean space. *Turkish Journal of Mathematics* , 44 (3): 883-899.

İlarslan, K. and Kılıç Aslan, N. 2017. On Spacelike Bertrand Curves In Minkowski 3-Space. *Konuralp Journal of Mathematics*, 5 (1): 214-222.

İlarslan, K. and Nesovic, E. 2008. Some Characterizations of Osculating Curves in the Euclidean Space. *Demonstratio Mathematica*, 41 (4): 931–939.

İlarslan, K. and Nesovic, E. 2008. Some Characterizations of Rectifying Curves in the Euclidean Space E4. *Turkish Journal of Mathematics*, 32 (2008): 21–30.

İlarslan, K. and Nesovic, E. 2014. Some Relatıons Between Normal and Rectifying Curves In Minkowski Space-Tıme. *International Electronic Journal of Geometry*, 7 (1): 26-35.

İlarslan, K..and Nesoviç, E. and Petroviç-Torgasev, M. 2003. Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 33 (2): 23-32.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2004. New Special Curves and Developable Surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28 (2): 153-163.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. 2002. Generic Properties Of Helices And Bertrand Curves. *Journal of Geometry*, 74: 97-109.

Kahraman, T. and Önder, M. and Kazaz Uğurlu, H.H. 2011. Some Characterizations Of Mannheim Partner Curves İn The Minkowski 3-Space. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 60 (4): 210–220.

Kaymaz, F.and Kahraman Aksoyak, F. 2017. Some Special Curves and Mannheim Curves in Three Dimensional Euclidean Space. *Mathematıcal Scıences and Applıcatıons E-Notes*, 5 (1): 34-39.

Kuhnel, W. 2015. Diferential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds. American Mathematical Society, Rhode Island, 397.

Liu, H. and Wang, F. 2008. Mannheim Partner Curves İn 3-Space. *Journal of Geometry*, 88: 120-126.

Lockwood E. H. 1963. A Book of Curves. Cambridge at the University Press, Cambridge, 198.

Matsuda, H. and Yorozu, S.2003. Notes on Bertrand Curves. *Yokohama Mathematical Journal*, 50 (1): 41-58

Matsuda, H. and Yorozu, S. 2009. On generalized Mannheim curves in Euclidean 4-space. *Nihonkai Mathematical Journal*, 20 (1): 33-56

Merzbach, U. C. and Boyer, C. R. 2011. A History of Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., Third Edition, New Jersey, 690.

Nemeth, S.Z. 2000. Bäcklund transformations of constant torsion curves in 3 dimensional constant curvature spaces. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 7: 125-138

Nemeth, S.Z. 1998. Bäcklund transformations of n-dimensional constant torsion curves. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 53 (3-4): 271-279.

Lopez, R. 2014. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. *International Electronic Journal of Geometry*, 7 (1): 44-107.

Orbay, K. and Kasap, E. and Aydemir, I. 2009. Mannheim Offsets of Ruled Surfaces. *MathematicalProblemsinEngineering*, 2009 (160917): 1-9.

Özdemir, M. and Erdoğdu, M. and Şimşek, H. and Ergin, A.A. 2014. Bäcklund Transformation For Spacelike Curves İn The Minkowski Space-Time. *Kuwait Journal of Scıence and Engineering*, 41 (3): 63-80.

Özdemir, M. and Çöken A.C. 2009. Bäcklund Transformation For Non-Lightlike Curves İn Minkowski 3-Space. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42 (2): 2540-2545.

Özkaldı Karakuş, S. and İlarslan, K. and Yaylı, Y. 2014. A New Approach For Characterİzation Of Curve Couples İn Euclidean 3-Space. *Honam Mathematical Journal*. 36 (1): 113-129.

Özturk, G. and Arslan, K. and Bulca, B. 2018. A Characterization of Involutes and Evolutes of a given curve in E^n. *Kyungpook Mathematical Journal*, 58 (1): 117-135.

Öztürk, S. and Erdoğdu, M. 2018. Constant Ratio Involute-Evolute Curve Couples. *Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering*, 18 (2018): 861-867.

Öztürk, S. and Erdoğdu, M. 2018. Constant – Ratio Bertrand Curves in Euclidean Space. *Süleyman Demirel University Journal of Natural and Applied Sciences*, 22 (3): 1276-1282.

Özdemir, M. 2020. Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler. Altın Nokta Yayınları, İzmir, 304.

Özdemir, M. 2020. Diferansiyel Geometri. Altın Nokta Yayınları, İzmir, 448.

Özdemir, M. 2021. Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler. Altın Nokta Yayınları, İzmir, 432.

Sabuncuoğlu, A. 2004. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 556.

Uçum, A. and İlarslan, K. and Özkaldı Karakuş, S. 2014. Curve Couples and Spacelike Frenet Planes In Minkowski 3-Space. *Honam Mathematical Journal*, 36 (3): 475-492.

Uçum, A. and Nesovic, E. and İlarslan, K. 2016. On generalized spacelike Mannheim curves in Minkowski space-time. *Proceedings of the National Academy of Sciences India Section A: Physical Sciences*, 86 (2): 249-258.

Uribe-Vargas, R. 2005. On Vertices, Focal Curvatures and Differential Geometry Of Space Curves. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 36 (3): 285-307.

Wang, Y. and Pei, D. and Gao, R. 2019. Generic Properties of Framed Rectifying Curves. *Mathematics*, 7 (37): 1-12.

Wang, F. Liu, H.2007. Mannheim Partner Curve in Euclidean 3- Space. *Mathematics in Practice and Theory,* 37: 141-143.

Walrave, J. 1995. Curves and surfaces in Minkowski space. Doktora Tezi, Katholieke Universiteit, Leuven, 113.

Yılmaz Ceylan, A. 2015. Genelleştirilmiş Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki bazı eğrilerin geometrisi.Doktora tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 66 s.

Yılmaz, B. and Has, A. 2020. Alternative Partner Curves In The Euclidean 3-Space. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat*., 69 (1): 1-10.

Zhang, C. Pei, D. 2020. Generalized Bertrand Curves in Minkowski 3-Space. *Mathematics*, 8 (12): 2199.

ÖZGEÇMİŞ

Oğuzhan ÇELİK

oguzhan_celik@pau.edu.tr

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora 2018 - 2022	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D, Antalya
Yüksek Lisans 2011 - 2014	Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D, Çanakkale

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretim Görevlisi	Pamukkale Üniversitesi
2019 - Devam Ediyor	Bekilli Meslek Yüksekokulu, Denizli

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Celik, O. and Ozdemir, M. (2022). A New Generalization of Some Curve Pairs. *International Electronic Journal of Geometry*, 15 (2): 215-225. Doi: 10.36890/IEJG.1110327