T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI SOYUT KONVEKSLİK SINIFLARI VE ONLARIN UYGULAMALARI ÜZERİNE

Gültekin TINAZTEPE

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2007

BAZI SOYUT KONVEKSLİK SINIFLARI VE ONLARIN UYGULAMALARI ÜZERİNE

Gültekin TINAZTEPE

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2007

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI SOYUT KONVEKSLİK SINIFLARI VE ONLARIN UYGULAMALARI ÜZERİNE

Gültekin TINAZTEPE

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../ .../ 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Gabil ADİLOV (Danışman)

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Efendi NASİBOĞLU

Yard. Doç. Dr. Mustafa ALKAN

Yard. Doç. Dr. Melike YÜCEL

ÖZET

BAZI SOYUT KONVEKSLİK SINIFLARI VE ONLARIN UYGULAMALARI ÜZERİNE

Gültekin TINAZTEPE

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gabil ADİLOV

Aralık - 2007, 63 Sayfa

Bu çalışmada, kuadratik fonksiyonlar sınıfına göre soyut konkav fonksiyonlar için verilen bir teorem kullanılarak, ortalar arasındaki iyi bilinen eşitsizlikler keskinleştirilerek, yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Artan pozitif homojen bir fonksiyonun birim simpleks üzerindeki minimumunun bulunması için Andramonov vd 1999 tarafından verilen Kesen Açı metodunun her adımında minimum tip fonksiyonların oluşturduğu bir fonksi-yonun birim simpleks üzerindeki minimumunun aranması problemi ile karşılaşılmaktadır. Bu problem için geometrik yorumlanabilen bir algoritma geliştirilmiş, algoritmanın teorik olarak yeterliliği gösterilmiş ve daha önce verilmiş algoritmalarla, örnekler üzerinde kıyaslanarak ana problemin çözümünü ciddi ölçüde hızlandırdığı belirlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Soyut Konveks Fonksiyon, Ağırlıklı Ortalar, Minimum Tip Fonksiyon, Artan Pozitif Homojen Fonksiyon

JÜRİ:

Doç. Dr. Gabil ADİLOV (Danışman)

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Efendi NASİBOĞLU

Yard. Doç. Dr. Mustafa ALKAN

Yard. Doç. Dr. Melike YÜCEL

ABSTRACT

ON THE CERTAIN ABSTRACT CONVEXITY CLASSES AND THEIR APPLICATIONS

Gültekin TINAZTEPE

Ph. D. in Mathematics
Adviser : Assoc. Prof. Dr. Gabil ADİLOV
December - 2007, 63 Pages

In this study, by using the theorem given for a function which is abstract concave with respect to set of quadratic functions, well-known mean inequalities are sharpened under proper conditions. Secondly, at the each step of the Cutting Angle Method given by Andramonov and others 1999 which is used to solve the minimum of the increasing positively homogeneous function over unit simplex, there exists a subproblem to find minimum of the function constructed by minimum type functions. For the solution of this subproblem, by considering problem in a geometric way, a new algorithm is suggested and its efficiency is proved teoretically and practically by comparing to old algorithm in some examples. It is seen that the suggested algorithm empowers and accelerates the method in solving of the problem.

KEY WORDS : Abstract Convex Function, The Weighted Means, Minimum Type Function, Increasing Positively Homogeneous Function.

COMMITTEE:

Assoc. Prof. Dr. Gabil ADİLOV (Adviser)

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Efendi NASİBOĞLU

Asst. Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Asst. Prof. Dr. Melike YÜCEL

ÖNSÖZ

Konvekslik kavramı ve konveks fonksiyonlar, optimizasyon teorisinde çok büyük ölçüde uygulama alanı bulur. Fonksiyonun konveksliğine, fonksiyonun optimizasyonunun üzerinde istendiği kümenin konveksliğine göre özel çözümler üretilmektedir. Bununla beraber konvekslik kavramı durmadan artan değişik özellikteki optimi-zasyon problemleri karşısında yetersiz kalır. Bu gibi durumlarda, konvekslik kavramı özel bir durum olarak içeren soyut konvekslik kavramı ortaya atılmış ve eşitsizlik teorisi gibi değişik uygulama alanları da dahil olmak üzere yine optimizasyon teorisinde geniş ölçüde uygulama alanı bulmuştur. Yine soyut konvekslik incelemeleri kapsamında soyut konkavlık kavramı da irdelenmektedir.

Çalışmamızda soyut konkav fonksiyonlar için ifade edilen bazı teoremler kullanılarak, $M_t(x, \alpha)$ üreteç fonksiyonu ile elde edilen ortalar arasında var olan ve herkesçe iyi bilinen eşitsizlikler keskinleştirilerek yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bir f artan pozitif homojen fonksiyonunun birim simpleks üzerindeki minimumunu bulma problemi için verilen Kesen Açı Metodunun her adımında bir optimizasyon problemi ortaya çıkmaktadır. Bu metodun belirleyici aşaması olan bu alt problem, f'nin kendisine göre soyut konveks olduğu minimum tip fonksiyonların oluşturduğu bir maksimum fonksiyonunun minimumunun bulunması problemidir. Bu alt problem değişik yazarlarca ele alınmış ve bazı çözüm algoritmaları verilmiştir. Çalışmamızda bu alt problem için yeni bir çözüm algoritması verilmekte ve bu algoritma öncekilerle kıyaslanmaktadır. Sonuç olarak, bu çalışmada verilen algoritma ana problemin çözümünü büyük ölçüde hızlandırmaktadır.

Bu tezin oluşmasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, beni çalışmaya özendiren ve yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Gabil ADİLOV'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{+\infty}$	$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$\mathbb{R}_{-\infty}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n_+$	$\mathbb{R}^n$'de tüm koordinatları negatif olmayan noktaların kümesi
$\mathbb{R}^n_{++}$	$\mathbb{R}^n$'de tüm koordinatları pozitif olan noktaların kümesi
$[\ ,\ ]$	İç çarpım
$\langle\ ,\ \rangle$	Minimum tip fonksiyon
$\|x\|$	$\sqrt{[x,x]}$
$\|\|_\infty$	Maksimum normu
$int\ \Omega$	Ω'nın içi
∇f	f'nin gradyeni
riS	Birim simpleksin göreceli içi
$domf$	f'nin tanım kümesi
$C^1(\Omega)$	Ω üzerinde kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar kümesi
$\limsup$	Üst limit
$\liminf$	Alt limit
$B_\circ(x_0, r)$	$\|\|_\circ$ normu ile belirlenen x_0 merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvar
$M_t(x, \alpha)$	Genelleştirilmiş orta

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Matematiğin, özellikle uygulamaları açısından en önemli dallarından biri şüphesiz optimizasyon teorisidir. Optimizasyon problemlerinin çözmek için özel araçlar kullanmaya ihtiyaç vardır. Bu bağlamda en güçlü araçlardan biri de konveks analizdir. Birçok optimizasyon problemi konvekslik açısından ele alınmış ve onlara has özel çözüm yöntemleri verilmiştir (Horst vd 2000, Minoux 1986, Pallaschke ve Rolewichz 1997, Pardalos ve Rosen 1987, Tuy 1998).

Konveks analizin temel bulgularından ikisi şunlardır: 1) Her alttan yarısürekli konveks f fonksiyonunun, f tarafından minöre edilen, yani tanımlı olduğu bir X kümesi üzerinde her $x \in X$ için $h(x) \leq f(x)$ olan afin h fonksiyonlarının noktaya göre supremumu, yani üst zarfı vardır. 2) Kapalı konveks kümeye ait olmayan her bir nokta, bu kümeden bir lineer fonksiyon yardımıyla ayrılabilir (Rockafellar 1970)". İlk bulgu f'nin tanımlı olduğu kümede, noktasal olarak f'den küçük fonksiyonlarla, yani destek kümesi ile yakından ilişkilidir. Afin fonksiyon, bir lineer fonksiyon ile bir sabitin toplamı olduğundan, konvekslik, lineerlik ve bu fonksiyonların supremumu olmanın kombinasyonu olarak sunulabilir. Bazı durumlarda afin olmayan fonksiyonların supremumlarını (zarfını) düşünmek yararlı olabilir. Böylece konveks olmayan çevrelerde konveksliğin temel kavramlarını inceleme fikri ortaya çıkar. Bu bağlamda, alınan herhangi bir elementer fonksiyonlar sınıfının supremumu olarak ifade edilebilen fonksiyonlar ve lineer olmayan bir fonksiyonla kendilerine ait olmayan noktaların ayrılabildiği kümeler ortaya çıkar. Bu iki olgu, soyut konveksliğin temelini oluşturur.

Farklı elementer fonksiyon sınıflarına göre çok çeşitli soyut konvekslik çeşitleri ortaya çıkmıştır (Adilov ve Rubinov 2006, Dutta vd 2004a, 2004b, Rubinov 2000a ve oradaki referanslar). Örneğin, L elementer fonksiyonlar sınıfı olmak üzere

$$L = \left\{ l : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+ \,\middle|\, l(x) = \min_{i \in I} l_i x_i, \ l \in \mathbb{R}^n_+ \right\}$$

seçilmesi durumunda L kümesine göre soyut konveks fonksiyonlar oluşur. Bu tip fonksiyonlar incelenmiş, L kümesine göre soyut konveks olan fonksiyonların (L-konveks fonksiyonlar) artan pozitif homojen fonksiyonlar olduğu, çeşitli yazarlar (Singer 1984, 1997, Rubinov 1998) tarafından ortaya konulmuştur. Bu fonksiyonlar, birçok yazar tarafından değişik yönlerden incelenmiştir (Dutta vd 2004a, 2004b, Rubinov ve Glover 1998, Rubinov 2000b).

Bunun gibi değişik fonksiyon kümelerine göre değişik konveks fonksiyonlar elde edilmiştir.Örneğin, ışınlar üzerinde artan fonksiyonlar (ICAR), artan koradyant fonksiyonlar (ICR) bunların en iyi bilinenleridir.

Soyut konveksliğin ilk uygulamaları 1980'li yıllara uzanmaktadır (Kutateladze ve Rubinov 1972, 1976). Soyut konvekslik kavramı, değişik yazarlar tarafından, optimizasyon teorisi başta olmak üzere, çok çeşitli yönlerden ele alınmıştır (Andramonov vd 1999, Rubinov 2000a, Rubinov ve Gasimov 2003, Rubinov ve Wu 2007).

Klasik konvekslikte olduğu gibi soyut konvekslik kavramı da birçok yazar tarafından optimizasyon problemleri açısından düşünülmüştür. Optimizasyonu yapılmak istenen fonksiyonun, bir fonksiyonlar kümesine göre soyut konveks olması durumunda fonksiyonun optimize edilmesi için gerek ve yeter koşullar araştırılmıştır (Rubinov ve Wu 2007 ve Rubinov 2000a ve oradaki referanslar). Bunlardan bazıları için soyut konveksliğe dayanan çözüm metodları da üretilmiştir. Örneğin, artan pozitif homojen fonksiyonların bir küme üzerindeki minimumunun belirlenebilmesi için, fonksiyonun $L = \left\{ l : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+ \;\middle|\; l(x) = \min_{i \in I} l_i x_i,\ l \in \mathbb{R}^n_+ \right\}$ sınıfına göre soyut konveks olmasına dayanılarak "Kesen Açı Metodu" geliştirilmiş (Andramonov vd 1999) ve bu metod farklı yazarlar tarafından ele alınmış ve özel durumlar için değişik versiyonları sunulmuştur(Andramonov vd 1999, Babayev 2000, Bagirov 2003, Nuriyev 2005, Bagirov ve Rubinov 2000). Bu metod, her artan pozitif homojen fonksiyonun, L sınıfından olan bir fonksiyonlar kümesinin supremumu olması gerçeği kullanılarak, her adımda, seçilen minimum tip fonksiyonların maksimumundan oluşan bir fonksiyonunun minimumunun bulunmasına dayalıdır.

Bu metodun en önemli aşaması her adımda, ortaya çıkan bir optimizasyon probleminin çözülüp, değerinin saptanmasıdır. Bu alt problem bazı yazarlar tarafından ele alınmış ve bir takım çözüm algoritmaları sunulmuştur (Babayev 2000, Nuriyev 2005, Bagirov ve Rubinov 2000). Bu tezde de bu problem ele alınmış ve çözümü için yeni bir algoritma geliştirilmiştir (Adilov vd 2005, Adilov vd 2007).

Soyut konveksliğin uygulandığı alanlardan birisi de eşitsizlikler teorisidir. Özellikle Hadamard tip eşitsizlikler olmak üzere, birçok eşitsizlik soyut konvekslik kapsamında incelenmiştir (Adilov ve Kemali 2007, Dragomir vd 2004, Sharikov 2003, Dragomir ve Pearce 1998, Pearce ve Rubinov 1999). Bu kapsamda bazı eşitsizliklerin keskinleştirilerek yeni eşitsizliklerin elde edilmesi, eşitsizliğin kullanıldığı yere göre ciddi önem taşımaktadır. Bu bağlamda, soyut konvekslik bazı yazarlarca kullanılmıştır (Rubinov ve Wu 2007). Bu tezde de ağırlıklı ortalamalar arasındaki eşitsizlikler bu açıdan incelenmiş yeni eşitsizlikler elde edilmiştir (Adilov vd 2006a).

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. (Minoux 1986) $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. $y \in S$ olmak üzere

$$f(y) = \lim_{r \to 0} \sup \{f(x) | \, \|x - y\| \leq r\}$$

koşulu sağlanıyorsa f'ye y noktasında üstten yarı süreklidir, denir. Eğer her $y \in S$ için bu koşul sağlanıyorsa f'ye S'de üstten yarı süreklidir denir.

Tanım 2.2. (Minoux 1986) $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. $y \in S$ olmak üzere

$$f(y) = \lim_{r \to 0} \inf \{f(x) | \, \|x - y\| \leq r\}$$

koşulu sağlanıyorsa f'ye y noktasında alttan yarı süreklidir denir. Eğer her $y \in S$ için bu koşul sağlanıyorsa f'ye S'de alttan yarı süreklidir denir.

Tanım 2.3. (Rockafellar 1970) $K \subset \mathrm{R}^n$ olsun. Eğer K bir pozitif skalerle çarpma işlemine göre kapalı ise, yani $x \in K$ ve $\lambda > 0$ için $\lambda x \in K$ oluyorsa K'ya koni denir.

Tanım 2.4. (Rockafellar 1970) C, $\mathbb{R}^n$' nin bir alt kümesi olsun. Eğer $x \in C$, $y \in C$ ve $0 < \lambda < 1$ için $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$ ise C kümesine klasik anlamda konveks küme denir.

Tanım 2.5. (Rockafellar 1970) $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ olmak üzere

$$\{(x, \mu) | x \in S, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \mu \geq f(x)\}$$

ile ifade edilen kümeye f fonksiyonunun epigrafı denir ve epi$f$ ile gösterilir. Özel olarak, $S \subset \mathbb{R}$ için, f'nin epigrafı f'nin grafiğinin üstünde kalan kümeyi belirtir.

Tanım 2.6. (Rockafellar 1970) $f : S \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için epi$f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ konveks bir küme ise f'ye klasik anlamda S kümesi üzerinde konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.7. (Rockafellar 1970) Bir fonksiyonun negatifi (-1 ile çarpımı ile oluşan yeni fonksiyon) konveks ise bu fonksiyona konkav fonksiyon denir.

Tanım 2.8. (Rockafellar 1970) Sonlu ve hem konveks hem konkav olan fonksiyona afin fonksiyon denir.
Örneğin, $l, x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = [l, x] + c$ bir afin fonksiyondur.

Tanım 2.9. (Rubinov 2000a) H, X kümesi üzerinde tanımlı sonlu fonksiyonların bir kümesi ve $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. Eğer H'nin

$$f(x) = \sup\{h(x)|h \in U\} \ (x \in X)$$

olacak biçimde bir U altkümesi varsa, f fonksiyonu H'ye göre soyut konvekstir (veya $H-$konvekstir) denir.

$H = \varnothing$ olması durumunda $f(x) = -\infty$ olarak kabul edilecektir. Yukarıdaki tanım aşağıdaki gibi de ifade edilebilir: f 'nin $H-$konveks olması için gerekli ve yeterli koşul bu fonksiyonun

$$f(x) = \sup\{h(x)|h \in H, \ h \leq f\}, \ \forall x \in X.$$

biçiminde gösterilebilmesidir.

Tanım 2.10. $x, y \in \mathrm{R}^n$ olmak üzere her $i \in 1, ..., n$ için $x_i \geq y_i$ ise x vektörü y vektöründen büyüktür denir ve $x \geq y$ ile gösterilir. Bu tür kısmi sıralamaya "koordinata göre sıralama" da denir.

Tanım 2.11. (Rubinov 2000b) Eğer $\mathbb{R}^n_+$ üzerinde tanımlı f fonksiyonu, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, ona birinci dereceden pozitif homojen fonksiyon denir:

a. $x \geq y$ ise $f(x) \geq f(y)$,

b. $x \in \mathbb{R}^n_+$ ve $\lambda > 0$ için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Bir minimum tip fonksiyonun artan homojen fonksiyon olduğu aşikardır.

Tanım 2.12. (Rubinov 2000b) H, $h : \Omega \to \mathbb{R}_{+\infty}$ fonksiyonlarının bir kümesi olsun ve $f : \Omega \to \mathbb{R}_{-\infty}$ olsun. Eğer H'nin her $x \in \Omega$ için

$$f(x) = \inf_{h \in U} h(x)$$

olacak biçimde bir U alt kümesi varsa f'ye H kümesine göre soyut konkav (veya H-konkav) fonksiyondur denir.

Tanım 2.13. (Rubinov 2000a) X bir Hilbert uzayı, $\Omega \subset \Omega' \subset X$, $f : \Omega \to \mathbb{R}_{+\infty}$, $x_0 \in dom f$ ve L, $l : \Omega' \to \mathbb{R}_{-\infty}$ fonksiyonlarının bir kümesi olsun. $x_0 \in dom l$ olmak üzere

$$f(x) \geq f(x_0) + l(x) - l(x_0)$$

koşulunu sağlayan $l \in L$ fonksiyonuna f'nin x_0'daki $L-$subgradyeni denir.

Tanım 2.14. (Rubinov 2000b) f'nin x_0'daki tüm $L-$subgradyenlerinin kümesi $\partial_L f(x_0)$'ne, f'nin x_0'daki $L-$subdiferensiyeli denir.

$f : \Omega \to \mathbb{R}_{+\infty}$ alttan yarısürekli konveks fonksiyon ve $x \in dom f$ iken, $\partial_L f(x) = \partial f(x)$ olup, burada $\partial f(x)$ klasik konvekslik anlamındaki subdiferansiyeli ifade etmektedir.

Tanım 2.15. (Rubinov ve Wu 2007) $a > 0$, $l \in X$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere H aşağıdaki şekilde verilen bütün kuadratik h fonksiyonlarının kümesi olsun:

$$h(x) = a \|x\|^2 + [l, x] + c, \quad x \in X$$

Eğer $h \geq f$ koşulunu sağlayan bir $h \in H$ varsa $f : \Omega \to \mathbb{R}_{-\infty}$ fonksiyonuna H tarafından majorize edilmiş denir.

Teorem 2.16. (Rubinov 2000a) $\Omega \subset X$ ve H tüm kuadratik fonksiyonların kümesi olsun. $f : \Omega \to \mathbb{R}_{-\infty}$ fonksiyonu H-konkav olması için gerek ve yeter koşul f'nin H tarafından majorize edilmiş ve üstten yarısürekli olmasıdır.

Tanım 2.17. $f : \Omega \subset \mathrm{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olsun. Her $x, y \in \Omega$ için

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|$$

olacak şekilde bir $K \in \mathbb{R}$ varsa f'ye Lipschitz fonksiyonu denir. Ayrıca bu koşulu sağlayan en küçük K sayısına Lipschitz sabiti denir ve

$$K := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} < \infty$$

ile belirlenir.

Tanım 2.18. $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathrm{R}$, $u : X \to \mathrm{R}$ ve her $x \in X$ için $f(x) \geq 0$ ve $u(x) \geq 0$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $f(x) \geq u(x)$ ve en az bir $x \in X$ için $f(x) > u(x)$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa $f(x) \geq u(x)$ eşitsizliği $f(x) \geq 0$ eşitsizliğinden keskindir denir.

3. SOYUT KONVEKSLİK YARDIMIYLA EŞİTSİZLİKLERİN KESKİNLEŞTİRİLMESİ

3.1. Ön Bilgiler

Önerme 3.1.1. (Rubinov ve Wu 2007) $\Omega \subset X$ ve f, Ω'yı içeren açık bir küme üzerinde tanımlı diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Varsayalım ki, $x \mapsto \nabla f(x)$ operatörü Ω üzerinde Lipschitz koşulunu sağlasın, yani:

$$K := \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|}{\|x - y\|} < +\infty.$$

$a \geq K$ olmak üzere her $t \in \Omega$ için aşağıdaki fonksiyonu ele alalım

$$f_t(x) = f(t) + [\nabla f, x - t] + a\|x - t\|^2, \quad x \in X.$$

Bu durumda $f(x) = \min_{t \in \Omega} f_t(x)$, $x \in \Omega$.

Rubinov ve Wu 2007'de, konveks fonksiyonların $(f_t)_{t \in T}$ ailesinin infimumu olarak ifade edilebilen bir f fonksiyonunun konveks bir küme üzerinde global minimumunun bulunması düşünülmüş ve global minimum için gerekli ve yeterli koşullar belirtilmiştir.

Her $x, y \in X$ için $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq a \|x - y\|$ koşulunu sağlayan bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun kısıtsız minimizasyonu problemi için aşağıdaki sonuç bulunmuştur: Eğer bir x^* noktası f'nin X üzerindeki minimum noktası ise her $x \in X$ için

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{1}{4a} \|\nabla f(x)\|^2 \qquad (1)$$

olur.

(1) eşitsizliğinin daha genel durumunu veren aşağıdaki teorem Rubinov ve Wu 2007'de ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.2. $\mathbb{R}^n$'de $\|.\|$ ve $\|.\|_\circ$ normları verilmiş olsun. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, içi boş olmayan bir küme ve $f \in C^1(\Omega)$ olsun. $x \longmapsto \nabla f(x)$ dönüşümü Ω kümesi üzerinde sürekli ve

$$K := \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|}{\|x - y\|} < \infty$$

olsun. $x^* \in \operatorname{int} \Omega$ noktası f'nin Ω üzerindeki global minimumu olmak üzere aşağıdaki kapalı yuvarı düşünelim

$$B_\circ(x^*, r) = \{x : \|x - x^*\|_\circ \leq r\} \subset int\Omega$$

ve

$$M := \max \{ \|\nabla f(x)\|_\circ : x \in B_\circ(x^*, r)\}$$

olsun. q'da $B_\circ(x^*, r+q) \subset \Omega$ koşulunu sağlayan bir reel pozitif sayı ve $a \geq \max\left(K, \dfrac{M}{2q}\right)$ olsun. Bu durumda $x \in B_\circ(x^*, r)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{1}{4a} \|\nabla f(x)\|^2 \leq f(x) - f(x^*).$$

3.2. $\mathbf{M}_t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ Ortası

Aritmetik orta, geometrik orta ve harmonik orta gibi iyi bilinen ortalar belirli bir orta zincirinin halkalarıdırlar ve onlar arasındaki ilişki o ortanın bu zincirdeki yeriyle belirlenir.

$(x) \equiv (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $(\alpha) \equiv (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan reel sayıların $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ koşulunu sağlayan n-lisi ve $t \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki ifade $(x_1, x_2, ..., x_n)$'nin t. mertebeden $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ağırlıklı ortalaması olarak adlandırılır:

$$M_t(x, \alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^t \right)^{\frac{1}{t}}.$$

Özel olarak t, sırasıyla -1, 1 ve 2'ye eşit seçilirse, $M_t(x, \alpha)$, sırasıyla, ağırlıklı harmonik, ağırlıklı aritmetik ve ağırlıklı kuadratik ortayı verir:

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i}}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$M_t(x, \alpha)$ ifadesine $t = 0$ durumu için L' Hospital kuralı uygulanırsa, 0. mertebeden ağırlıklı ortanın ağırlıklı geometrik ortayı verdiği görülür, yani

$$M_0(x, \alpha) \equiv \lim_{t \to 0} M_t(x, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},$$

olur.

$t = +\infty$ ve $t = -\infty$ olması durumunda da aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$M_{+\infty}(x, \alpha) \equiv \lim_{t \to +\infty} M_t(x, \alpha) = \max \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$
$$M_{-\infty}(x, \alpha) \equiv \lim_{t \to -\infty} M_t(x, \alpha) = \min \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

Not. Bazı $i \in \{1, 2, .., n\}$'ler için x_i sıfır olması durumunda, $t \leq 0$ için $M_t(x, \alpha)$ sıfıra eşit kabul edilir.

Verilen (x) pozitif sayıları ve (α) ağırlıkları için , $M_t(x,\alpha)$ ortası $\mathbb{R}$ de t'nin artan bir fonksiyonudur. Eğer bütün x_i'ler aynı değeri almıyorsa, $M_t(x,\alpha)$, t'nin artan bir fonksiyonudur (Beckenbach ve Bellman 1961). Böylece, negatif olmayan (x) ve (α) sayıları için, $t_1 \leq t_2$ iken $M_{t_1}(x,\alpha) \leq M_{t_2}(x,\alpha)$ eşitsizliği sağlanır. Farklı ortalar arasındaki ilişki bu özellik sayesinde belirlenir.

3.3. Ağırlıklı Aritmetik-geometrik Orta Eşitsizliğinin Keskinleştirilmesi

Daha önce belirtildiği gibi $M_t(x,\alpha)$ ortası t'ye bağlı artan bir fonksiyondur, hatta eğer x_i değerleri aynı değeri almazsa, kesin artan fonksiyondur, yani $t_1 < t_2$ için $M_{t_1}(x,\alpha) < M_{t_2}(x,\alpha)$ olur. Özel olarak, $t_1 = 0$ ve $t_2 = 1$ için $M_0(x,\alpha) < M_1(x,\alpha)$ olduğu açıktır ki, bu eşitsizlik ağırlıklı aritmetik orta ile ağırlıklı geometrik orta arasındaki meşhur eşitsizliği vermektedir:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n > x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

burada $x \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{1} = (1,1,...,1) \in \mathrm{R}_+^n$, $\lambda \geq 0$, $\forall i \in \overline{1,n}$ için $\alpha_i \geq 0$ olup $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ve $x \neq \lambda \mathbf{1}$'dir.

Teorem 3.1.2. kullanılarak, bu eşitsizlik keskinleştirilebilir.

Teorem 3.3.1. λ ve r, $\lambda > r$ koşulunu sağlayan pozitif sayılar olsun.

$$M_0 = \max_{1\leq i\leq n} \left\{ \alpha_i \left[\left(\frac{\lambda + r}{\lambda - r} \right)^{1-\alpha_i} - 1 \right] \right\}, \; m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2, \; p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^3.$$

olmak üzere

$$a_{\lambda,r} = \min_{r<d<\lambda} \max \left\{ \left(m^2 + m - 2p \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda + d}{(\lambda - d)^2}, \frac{M_0}{2(d-r)} \right\}$$

olsun. $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere $\|x - \lambda \mathbf{1}\|_\infty \leq r$ koşulunu sağlayan tüm $x \in \mathbb{R}_+^n$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} + \frac{1}{4a_{\lambda,r}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left(1 - \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_i} \right)^2.$$

İspat. $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}^n_+$ için $f(x) \geq 0$ olmakla beraber, $\lambda > 0$ ve $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)$ olmak üzere $f(x)$, sadece ve sadece $x = \lambda\mathbf{1}$ noktaları için sıfır değerini alır. Dolayısıyla $\lambda\mathbf{1}$ vektörleri f 'nin $\mathbb{R}^n_+$ üzerindeki global minimumlarıdır. Şimdi ağırlıklı geometrik aritmetik orta eşitsizliğini, Teorem 3.1.2.'yi $f(x) \geq 0$ eşitsizliğine uygulayarak keskinleştirelim. Gerekli hesaplamalardan sonra $f(x)$'in gradyanı aşağıdaki ifade olarak bulunur:

$$\nabla f(x) = \left[\alpha_1 \left(1 - \frac{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_1} \right), \alpha_2 \left(1 - \frac{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_2} \right), ..., \alpha_n \left(1 - \frac{\prod_{i=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_n} \right) \right],$$

buradan

$$\|\nabla f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left(1 - \frac{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_i} \right)^2$$

elde edilir. Bundan sonra $\|.\|_\infty$ normu da kullanılacaktır. $\lambda > d > 0$ için aşağıdaki yuvarı göz önüne alalım

$$\begin{aligned} V_{\lambda,d} &= B_\infty(\lambda\mathbf{1},d) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\lambda\mathbf{1}-x\|_\infty \leq d\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda - d \leq x_i \leq \lambda + d, i = 1, ..., n\}. \end{aligned}$$

$d < \lambda$ olduğundan $V_{\lambda,d} \subset \mathbb{R}^n_{++}$ olur. $\rho_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_i}$ tanımlansın. Bu durumda $x \in V_{\lambda,d}$ için $\|\nabla\rho_i(x)\|$ için bir üst sınır belirlenebilir. Aşağıdaki eşitsizlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial\rho_i}{\partial x_i}(x) \right| &= \left| (\alpha_i - 1) \frac{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_i^2} \right| \leq (1 - \alpha_i) \frac{\lambda + d}{(\lambda - d)^2} \\ \left| \frac{\partial\rho_i}{\partial x_j}(x) \right| &= \left| \alpha_j \frac{\prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}}{x_i x_j} \right| \leq \alpha_j \frac{\lambda + d}{(\lambda - d)^2} \end{aligned}$$

şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} \|\nabla\rho_i(x)\| &\leq \left((1 - \alpha_i)^2 \left(\frac{\lambda + d}{(\lambda - d)^2} \right)^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j^2 \left(\frac{\lambda + d}{(\lambda - d)^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(1 - 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda + d}{(\lambda - d)^2} \quad (x \in V_{\lambda,d}). \end{aligned} \tag{2}$$

$x, y \in V_{\lambda,d}$ olmak üzere, Ortalama değer teoremi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa, aşağıdaki koşulları sağlayan $\theta_i \in (0,1)$, $i = 1, ..., n$ sayılarının var olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| &= \|\alpha_1 [\rho_1(y) - \rho_1(x)], \alpha_2 [\rho_2(y) - \rho_2(x)], ..., \alpha_n [\rho_n(y) - \rho_n(x)]\| \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 [\rho_i(y) - \rho_i(x)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 [\nabla \rho_i(x + \theta_i(y-x))(x-y)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|\nabla \rho_i(x + \theta_i(y-x))\|^2 \|x-y\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|\nabla \rho_i(x + \theta_i(y-x)\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|x-y\|
\end{aligned}$$

$x, y \in V_{\lambda,d}$ olduğundan, her $i \in 1, .., n$ için $x + \theta_i(y-x) \in V_{\lambda,d}$ olur. Eşitsizlik (2)'den,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq a_1(\lambda, d) \|x-y\|, \quad x, y \in V_{\lambda,d}$$

olduğu görülür, ifadede

$$a_1(\lambda, d) = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left(1 - 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda + d}{(\lambda - d)^2} = \left(m^2 - 2p + m \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda + d}{(\lambda - d)^2}$$

olup, burada m ile p aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2, \qquad p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^3.$$

$x \to \nabla f(x)$ dönüşümü $V_{\lambda,d}$ üzerinde sürekli olup Lipschitz sabiti $K \leq a_1(\lambda, d)$ sayısıdır. $d < \lambda$ ve $x^* = \lambda\mathbf{1}$ noktası f fonksiyonunun minimum noktaları olmak üzere, $\Omega = V_{\lambda,d}$ kümesine Teorem 3.1.2. uygulanabilir. Teorem 3.1.2.'de kullanılan $\|.\|_\circ$ normunun $\|.\|_\infty$ ile çakıştığını varsayılsın. $r \in (0, d)$ ve $q = d - r$ olsun.
$M = \max \{\|\nabla f(x)\|_\infty : x \in V_{\lambda,r}\}$ sayısı aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir:

$$\begin{aligned}
M &= \max_{x \in V_{\lambda,r}} \{\|\nabla f(x)\|_\infty\} = \max_{x \in V_{\lambda,r}} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left| \alpha_i \left(1 - \frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}}{x_i} \right) \right| \right\} \\
&= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{x \in V_{\lambda,r}} \alpha_i \left| 1 - \frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}}{x_i} \right| \right\} \\
&= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{x \in V_{\lambda,r}} \alpha_i \left| 1 - \left(\frac{x_1}{x_i} \right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{x_{i-1}}{x_i} \right)^{\alpha_{i-1}} \left(\frac{x_{i+1}}{x_i} \right)^{\alpha_{i+1}} ... \left(\frac{x_n}{x_i} \right)^{\alpha_n} \right| \right\} \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \left\{ \max \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda - r}{\lambda + r} \right)^{1-\alpha_i}, \left(\frac{\lambda + r}{\lambda - r} \right)^{1-\alpha_i} - 1 \right\} \right\}
\end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizliğin verilen bir α_i $(i \in \{1, 2, ..., n\})$ sayısı için gerçeklendiği kolaylıkla görülebilir:

$$\left(\frac{\lambda + r}{\lambda - r}\right)^{1-\alpha_i} - 1 \geq 1 - \left(\frac{\lambda - r}{\lambda + r}\right)^{1-\alpha_i}$$

böylece

$$\max\left\{1 - \left(\frac{\lambda - r}{\lambda + r}\right)^{1-\alpha_i}, \left(\frac{\lambda + r}{\lambda - r}\right)^{1-\alpha_i} - 1\right\} = \left(\frac{\lambda + r}{\lambda - r}\right)^{1-\alpha_i} - 1$$

olup, buradan

$$M \leq \max_{1 \leq i \leq n}\left\{\alpha_i\left[\left(\frac{\lambda + r}{\lambda - r}\right)^{1-\alpha_i} - 1\right]\right\} \equiv M_0.$$

elde edilir.

$$M_0 = \max_{1 \leq i \leq n}\left\{\alpha_i\left[\left(\frac{\lambda + r}{\lambda - r}\right)^{1-\alpha_i} - 1\right]\right\}, \ m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2, \ p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^3.$$

olmak üzere

$$a_2(\lambda, d, r) = \frac{M_0}{2(d - r)}$$

ve

$$a(\lambda, d, r) = \max\{a_1(\lambda, d), a_2(\lambda, d, r)\} = \max\left\{\left(m^2 + m - 2p\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda + d}{(\lambda - d)^2}, \frac{M_0}{2(d - r)}\right\}$$

olsun. $\lim\limits_{d \to \lambda^-} a(\lambda, d, r) = \lim\limits_{d \to r^+} a(\lambda, d, r) = +\infty$ olduğu göz önüne alınırsa $d \longmapsto a(\lambda, d, r)$ fonksiyonunun (r, λ) üzerinde minimuma sahip olduğu görülür. $a_{\lambda,r} = \min\limits_{r<d<\lambda} a(\lambda, d, r)$ olarak kabul edilir ve Teorem 3.1.2. uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir: $x \in V_{\lambda,r}$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_n^{\alpha_j} + \frac{1}{4a_{\lambda,r}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left(1 - \frac{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_i}\right)^2$$

Not. Teorem 3.3.1.'deki $a_{\lambda,r}$ ifadesi karmaşık bir ifade olmasına rağmen, her λ, r için kolaylıkla hesaplanabilir. Gerçekten, $a_1(\lambda, d)$, $d = r$ noktası için sonlu değere sahiptir ve d, λ'ya yaklaşırken sonsuza gider. Aynı zamanda $a_1(\lambda, d)$'nin (r, λ) aralığında d'nin monoton artan bir fonksiyonu olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan, $a_2(\lambda, d, r)$, $d = \lambda$ noktası için sonlu değere sahiptir ve d, r'ye yaklaşırken sonsuza gider. Aynı zamanda, $a_2(\lambda, d, r)$'nin (r, λ) aralığında d'nin monoton azalan bir fonksiyonu olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $a(\lambda, d, r)$ minimum değerini $a_1(\lambda, d) = a_2(\lambda, d, r)$ eşitliğini sağlayan noktada alır.

Eşit ağırlıklar için yani $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$, için aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.3.2. λ ve r, $\lambda > r$ koşulunu sağlayan iki pozitif reel sayı olsun ve

$$a_{\lambda,r} = \min_{r<d<\lambda} \max \left\{ \frac{(n-1)^{\frac{1}{2}}}{n} \frac{\lambda+d}{(\lambda-d)^2}, \frac{\left(\frac{\lambda+r}{\lambda-r}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1}{2(d-r)n} \right\}$$

verilsin. Bu durumda $\|x - \lambda\mathbf{1}\|_\infty \leq r$ koşulunu sağlayan her $x \in \mathbb{R}^n_+$ sayısı için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{4a_{\lambda,r}n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n}}}{x_i}\right)^2.$$

Bu özel durum Rubinov ve Wu 2007'de elde edilmiştir.

Not. Adilov ve Tınaztepe 2005'te, aritmetik orta ile geometrik orta değişik bir açıdan ele alınmıştır. Anılan çalışmada her iki orta arasında geçerliliği istatiksel olarak saptanan bir ilişki elde edilmiştir.

3.4. Ağırlıklı Harmonik-geometrik Orta Eşitsizliğinin Keskinleştirilmesi

Bölüm 3.2'de, $t = -1$ ve $t = 0$ için $M_t(x, \alpha)$ düşünülürse, ağırlıklı harmonik-geometrik orta eşitsizliği elde edilir:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} > \frac{1}{\frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + ... + \frac{\alpha_n}{x_n}}$$

burada $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\lambda \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\forall i \in \overline{1, n}$ olmak üzere, $x \in \mathbb{R}^n_{++}$, $x \neq \lambda\mathbf{1}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$'dir.

Teorem 3.3.1.'de kullanılan benzer yol izlenerek, yukarıdaki eşitsizliği keskinleştiren aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.4.1. λ, r, $\lambda > r$ olan iki pozitif sayı olsun.

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2, \quad M_0 = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\alpha_i\left[\left(\frac{\lambda+r}{\lambda-r}\right)^2 - \left(\frac{\lambda-r}{\lambda+r}\right)^{1-\alpha_i}\right]\right\}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_{\lambda,r} &= \min_{r<d<\lambda} \max\left\{\frac{(\lambda+d)}{(\lambda-d)^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1 - 3\alpha_i + 2\frac{\lambda+d}{\lambda-d}\right)^2\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left. + \left(m - \alpha_i^2\right)\left(1 + \frac{2(\lambda+d)^2}{(\lambda-d)^2}\right)^2\right]\alpha_i^2\right]^{\frac{1}{2}}, \frac{M_0}{2(d-r)}\right\} \end{aligned}$$

verilsin.

Bu durumda $\|x-\lambda\mathbf{1}\|_\infty \le r$ koşulunu sağlayan her $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \ge \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x_i}} + \frac{1}{4\alpha_{\lambda,r}} \sum_{i=1}^n \left[\alpha_i \frac{\prod\limits_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}}{x_i} - \frac{\alpha_i}{x_i^2} \frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2} \right]^2 .$$

İspat. $x=(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n_{++}$ olmak üzere

$$f(x)=\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} - \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{x_j}}$$

tanımlansın.

$\lambda > 0$ ve $\mathbf{1}=(1,1,...,1)$ olmak üzere $x=\lambda\mathbf{1}$ noktalarının $f(x)$ fonksiyonunun global minimum noktaları olduğu açıktır. Teorem 3.1.2. aracılığıyla, ağırlıklı geometrik-aritmetik orta eşitsizliğini keskinleştirmek için aşağıdaki hesaplamalar izlenir:

$$\nabla f(x) = \left[\alpha_1 \frac{\prod\limits_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}}{x_1} - \frac{\alpha_1}{x_1^2} \frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2} , \ . \ . \ . \ , \ \alpha_n \frac{\prod\limits_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}}{x_n} - \frac{\alpha_n}{x_n^2} \frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2} \right]$$

buradan

$$\|\nabla f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \left[\alpha_i \frac{\prod\limits_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}}{x_i} - \frac{\alpha_i}{x_i^2} \frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2} \right]^2 .$$

elde edilir.

$\|.\|_\circ = \|.\|_\infty$ alınsın. $\lambda > d > 0$ olmak üzere $V_{\lambda,d}$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} V_{\lambda,d} &= B_\infty(\lambda\mathbf{1},d) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\lambda\mathbf{1}-x\|_\infty \le d\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda - d \le x_i \le \lambda + d, i=1,...,n\} . \end{aligned}$$

$V_{\lambda,d} \subset \mathbb{R}^n_{++}$ olduğu açıktır.

$$\rho_i(x) = \frac{\prod\limits_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}}{x_i} - \frac{1}{x_i^2} \frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2}$$

tanımlansın. $\|\nabla\rho_i(x)\|$'nin $V_{\lambda,d}$ kümesi üzerinde bir üst sınırını belirlemek gerekmektedir,

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial x_i}(x) = (\alpha_i - 1)\frac{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_i^2} + \frac{2}{x_i^3}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2}\left[1 - \frac{\alpha_i}{x_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{x_j}}\right]$$

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial x_j}(x) = \alpha_j\frac{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_i x_j} - \frac{2\alpha_j}{x_i^2 x_j^2}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{x_j}\right)^3}.$$

olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\rho_i}{\partial x_i}(x)\right| &\leq \left|(\alpha_i - 1)\frac{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_i^2}\right| + \left|\frac{2}{x_i^3}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2}\left[1 - \frac{\alpha_i}{x_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{x_j}}\right]\right| \\ &\leq (1-\alpha_i)\frac{\lambda+d}{(\lambda-d)^2} + \frac{2(\lambda+d)^2}{(\lambda-d)^3}\left(1 - \alpha_i\frac{\lambda-d}{\lambda+d}\right) \\ &= \frac{\lambda+d}{(\lambda-d)^2}\left(1 - 3\alpha_i + 2\frac{\lambda+d}{\lambda-d}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\left|\frac{\partial\rho_i}{\partial x_j}(x)\right| \leq \left|\alpha_j\frac{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_i x_j}\right| + \left|\frac{2\alpha_j}{x_i^2 x_j^2}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{xj}\right)^3}\right| \leq \alpha_j\frac{\lambda+d}{(\lambda-d)^2}\left[1 + \frac{2(\lambda+d)^2}{(\lambda-d)^2}\right]$$

kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir, böylece $\|\nabla\rho_i(x)\|$ için $V_{\lambda,d}$ üzerinde bir üst sınır belirlenmiş olur:

$$\begin{aligned}\|\nabla\rho_i(x)\| &\leq \left(\left[\frac{\lambda+d}{(\lambda-d)^2}\left(1 - 3\alpha_i + 2\frac{\lambda+d}{\lambda-d}\right)\right]^2\right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\alpha_j\frac{\lambda+d}{(\lambda-d)^2}\left(1 + \frac{2(\lambda+d)^2}{(\lambda-d)^2}\right)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(\lambda+d)}{(\lambda-d)^2}\left[\left(1 - 3\alpha_i + 2\frac{\lambda+d}{\lambda-d}\right)^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j^2\left(1 + \frac{2(\lambda+d)^2}{(\lambda-d)^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)\end{aligned}$$

$x, y \in V_{\lambda,d}$ olsun.

$$\rho_i(x) - \rho_i(y) = \nabla\rho_i(x + \theta_i(y - x))(x - y)$$

ifadesini gerçekleyen $\theta_i \in (0,1)$, $i = 1, ..., n$ sayıları vardır dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left[\rho_i(x) - \rho_i(y)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left[\nabla\rho_i(x + \theta_i(y - x))(x - y)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left\|\nabla\rho_i(x + \theta_i(y - x)\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}} \|x - y\|
\end{aligned}$$

elde edilir. $x, y \in V_{\lambda,d}$ olduğundan, her $i \in 1, ..., n$ için $x + \theta_i(y - x) \in V_{\lambda,d}$ olur. (3) eşitsizliği kullanılırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq a_1(\lambda, d) \|x - y\|,$$

burada

$$a_1(\lambda, d) = \frac{(\lambda + d)}{(\lambda - d)^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left(\left[1 - 3\alpha_i + 2\frac{\lambda + d}{\lambda - d}\right]^2 + \left(m - \alpha_i^2\right) \left[1 + \frac{2(\lambda + d)^2}{(\lambda - d)^2}\right]^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$m = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2.$$

$x \to \nabla f(x)$ dönüşümü $V_{\lambda,d}$ üzerinde Lipschitz sürekli olup, K Lipschitz sabiti $K \leq a_1(\lambda, d)$ eşitsizliğini sağlar. Teorem 3.1.2. $\Omega = V_{\lambda,r}$ kümesine uygulansın, $r \in (0, d)$ ve $q = d - r$ olsun.

$M = \max\{\|\nabla f(x)\|_\infty : x \in V_{\lambda,r}\}$ aşağıdaki gibi tahmin edilebilir:

$$M = \max_{x \in V_{\lambda,r}} \{\|\nabla f(x)\|_\infty\} = \max_{x \in V_{\lambda,r}} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left| \alpha_i \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_i} - \frac{\alpha_i}{x_i^2} \frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2} \right| \right\}$$

$$= \max_{1\le i\le n}\left\{\max_{x\in V_{\lambda,r}}\left|\alpha_i\frac{\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_j}}{x_i}-\frac{\alpha_i}{x_i^2}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2}\right|\right\}$$

$$= \max_{1\le i\le n}\left\{\max_{x\in V_{\lambda,r}}\left|\alpha_i\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^{\alpha_1}..\left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right)^{\alpha_{i-1}}\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^{\alpha_{i+1}}..\left(\frac{x_n}{x_i}\right)^{\alpha_n}-\frac{\alpha_i}{x_i^2\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2}\right|\right\}$$

$$\le \max_{1\le i\le n}\left\{\max\left\{\alpha_i\left[\left(\tfrac{\lambda+r}{\lambda-r}\right)^2-\left(\tfrac{\lambda-r}{\lambda+r}\right)^{1-\alpha_i}\right],\alpha_i\left[\left(\tfrac{\lambda+r}{\lambda-r}\right)^{1-\alpha_i}-\left(\tfrac{\lambda-r}{\lambda+r}\right)^2\right]\right\}\right\}$$

$c>1$ için $g(t)=c^t+c^{-t}$'nin $[0,\infty)$ aralığında monoton artan olduğu göz önüne alınırsa, aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğu görülür:

$$\left(\frac{\lambda+r}{\lambda-r}\right)^2-\left(\frac{\lambda-r}{\lambda+r}\right)^{1-\alpha_i}\ge\left(\frac{\lambda+r}{\lambda-r}\right)^{1-\alpha_i}-\left(\frac{\lambda-r}{\lambda+r}\right)^2.$$

Dolayısıyla

$$\max\left\{\alpha_i\left[\left(\frac{\lambda+r}{\lambda-r}\right)^2-\left(\frac{\lambda-r}{\lambda+r}\right)^{1-\alpha_i}\right],\alpha_i\left[\left(\frac{\lambda+r}{\lambda-r}\right)^{1-\alpha_i}-\left(\frac{\lambda-r}{\lambda+r}\right)^2\right]\right\}$$
$$=\alpha_i\left[\left(\frac{\lambda+r}{\lambda-r}\right)^2-\left(\frac{\lambda-r}{\lambda+r}\right)^{1-\alpha_i}\right]$$

olup

$$M\le\max_{1\le i\le n}\left\{\alpha_i\left[\left(\frac{\lambda+r}{\lambda-r}\right)^2-\left(\frac{\lambda-r}{\lambda+r}\right)^{1-\alpha_i}\right]\right\}\equiv M_0.$$

elde edilir.

$$a_2(\lambda,d,r)=\frac{M_0}{2(d-r)}$$

ve

$$a(\lambda,d,r)=\max\left(a_1(\lambda,d),a_2(\lambda,d,r)\right)$$

olsun.

$\lim\limits_{d\to\lambda^-}a(\lambda,d,r)=\lim\limits_{d\to r^+}a(\lambda,d,r)=+\infty$ olduğundan $d\longmapsto a(\lambda,d,r)$ fonksiyonu minimum değerini (r,λ) üzerinde alır. $a_{\lambda,r}=\min\limits_{r<d<\lambda}a(\lambda,d,r)$ olsun. Böylece, $x\in V_{\lambda,r}$ için

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\ge\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i}}+\frac{1}{4a_{\lambda,r}}\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_i\frac{\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_j}}{x_i}-\frac{\alpha_i}{x_i^2}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2}\right]^2$$

elde edilir.

Özel bir durum olarak, $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.4.2. λ ve r pozitif sayıları için $\lambda > r$ ve

$$\begin{aligned} a_{\lambda,r} \quad = \quad \min_{r<d<\lambda} \max \Bigg\{ & \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(\lambda+d)}{(\lambda-d)^2} \left[\left(1 - \frac{3}{n} + 2\frac{\lambda+d}{(\lambda-d)} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{(n-1)}{n^2} \left(1 + \frac{2(\lambda+d)^2}{(\lambda-d)^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ & \frac{r}{2(d-r)n} \left[\left(\frac{\lambda+r}{\lambda-r} \right)^2 - \left(\frac{\lambda-r}{\lambda+r} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \Bigg\} \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $\|x - \lambda \mathbf{1}\|_\infty \leq r$ ile belirlenen kümeye ait $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ için:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} + \frac{1}{4\alpha_{\lambda,r}} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{n} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\frac{1}{n}}}{x_i} - \frac{n}{x_i^2} \frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} \right)^2} \right]^2$$

olur.

3.5. Aritmetik Orta ve Kuadratik Orta Arasındaki Eşitsizliğin İncelenmesi

Eşitsizlikleri keskinleştirmek için kullanılan, Teorem 3.3.1. ve Teorem 3.4.1.'in ispatlarında verilen şema, her zaman kayda değer sonuçlar vermeyebilir. Örneğin, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 2$ için $M_t(x, \alpha)$ (ve sadelik açısından, $\alpha_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$) düşünülürse aşağıdaki iyi bilinen eşitsizlik elde edilir:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Yukarıdaki teoremlerde kullanılan şemanın benzerini bu eşitsizliği keskinleştirmek için kullanalım. $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere

$$f(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} - \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

tanımlansın.

Bu durumda ilgili hesaplamalardan sonra,

$$\nabla f(x)=\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}-1\right),\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n}x_2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}-1\right),...,\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}-1\right)\right]$$

elde edilir ve buradan

$$\|\nabla f(x)\|^2=\frac{2}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{n}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

olur.

Daha önce verildiği gibi, $\lambda>d>0$ olmak üzere $V_{\lambda,d}$ aşağıdaki gibi verilsin:

$$V_{\lambda,d}=\{x\in\mathbb{R}^n:\|\lambda\mathbf{1}-x\|_\infty\leq d\}$$

$\rho_i(x)=\frac{x_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ olsun ve $x\in V_{\lambda,d}$ olmak üzere $\|\nabla\rho_i(x)\|$ bir tahmin aşağıdaki hesaplamalar yardımıyla yapılabilir:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\rho_i}{\partial x_i}(x)\right| &= \left|1-\frac{x_i^2}{(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)^{\frac{3}{2}}}\right|\\ &\leq \max\left\{\left|1-\frac{(\lambda-d)^2}{n^{\frac{3}{2}}(\lambda+d)^3}\right|,\left|1-\frac{(\lambda+d)^2}{n^{\frac{3}{2}}(\lambda-d)^3}\right|\right\}\\ \left|\frac{\partial\rho_i}{\partial x_j}(x)\right| &= \left|-\frac{x_ix_j}{(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)^{\frac{3}{2}}}\right|\leq\frac{(\lambda+d)^2}{n^{\frac{3}{2}}(\lambda-d)^3}\end{aligned}$$

olup

$$\|\nabla\rho_i(x)\|\leq\left[(n-1)s_2^2+s_1^2\right]^{\frac{1}{2}}\quad(x\in V_{\lambda,d})\tag{4}$$

bulunur, burada

$$s_1=\max\left\{\left|1-\frac{(\lambda-d)^2}{n^{\frac{3}{2}}(\lambda+d)^3}\right|,\left|1-\frac{(\lambda+d)^2}{n^{\frac{3}{2}}(\lambda-d)^3}\right|\right\}\quad\text{ve}\quad s_2=\frac{(\lambda+d)^2}{n^{\frac{3}{2}}(\lambda-d)^3}$$

olarak belirlenir.

$x, y \in V_{\lambda,d}$ için ortalama değer teoremi uygulanırsa, aşağıdaki ifadeleri gerçekleyen $\theta_i \in (0,1)$, $i = 1, ..., n$ sayılarının varlığı görülür:

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} [\rho_i(y) - \rho_i(x)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} [\nabla \rho_i(x + \theta_i(y-x))(x-y)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\nabla \rho_i(x + \theta_i(y-x))\|^2 \|x-y\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq [(n-1)s_2^2 + s_1^2]^{\frac{1}{2}} \|x-y\|
\end{aligned}$$

Her $i \in 1, ..., n$ ve $x, y \in V_{\lambda,d}$ için $x + \theta_i(y-x) \in V_{\lambda,d}$ olduğu açıktır. (4) eşitsizliği kullanılarak,

$$a_1(\lambda, d) = [(n-1)s_2^2 + s_1^2]^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq a_1(\lambda, d) \|x-y\|, \quad x, y \in V_{\lambda,d}$$

sonucuna ulaşılır.

$K \leq a_1(\lambda, d)$ koşulunu sağlayan K Lipschitz sabitiyle birlikte $\nabla f(x)$'in $V_{\lambda,d}$ üzerinde Lipschitz sürekli oluğu görülmektedir.

$\|.\|_\circ = \|.\|_\infty$, $r \in (0,d)$ ve $q = d-r$ olmak üzere $M = \max\{\|\nabla f(x)\|_\infty : x \in V_{\lambda,r}\}$ aşağıdaki gibi tahmin edilebilir:

$$\begin{aligned}
M &= \max_{x \in V_{\lambda,r}} \{\|\nabla f(x)\|_\infty\} = \max_{x \in V_{\lambda,r}} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{n} x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}} - 1 \right) \right| \right\} \\
&= \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{x \in V_{\lambda,r}} \left| \frac{\sqrt{n} x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}} - 1 \right| \right\} \\
&\leq \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max\left\{ \frac{\lambda + r}{\lambda - r} - 1, 1 - \frac{\lambda - r}{\lambda + r} \right\} \right\} = \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\lambda + r}{\lambda - r} - 1 \right\} = \frac{2r}{n(\lambda - r)}
\end{aligned}$$

$$a_2(\lambda, d, r) = \frac{r}{n(\lambda - r)(d-r)}$$

ve

$$a(\lambda, d, r) = \max\{a_1(\lambda, d), a_2(\lambda, d, r)\} = \max\left\{ [(n-1)s_2^2 + s_1^2], \frac{r}{n(\lambda - r)(d-r)} \right\}$$

olsun.

$d \longmapsto a(\lambda, d, r)$ fonksiyonu minimum değerini (r, λ) aralığı üzerinde alır, çünkü $\lim\limits_{d \to \lambda^-} a(\lambda, d, r) = \lim\limits_{d \to r^+} a(\lambda, d, r) = +\infty$'dir. $a_{\lambda,r} = \min\limits_{r<d<\lambda} a(\lambda, d, r)$ yazılırsa, Teorem 3.1.2. kullanılarak,

$$f(x) \geq \frac{1}{4a_{\lambda,r}} \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} f(x) \geq \frac{1}{2na_{\lambda,r}(\lambda + r)} f(x) \quad \text{for } x \in V_{\lambda,r},$$

olduğu sonucuna varılır bu da $f(x) \geq 0$ demektir. Bu ise yeni bir eşitsizlik ya da keskinleştirilmiş bir eşitsizlik değildir.

Not. Sunulan şema kullanılarak herhangi t_1 ve t_2 mertebeden iki orta arasındaki eşitsizlik çalışılabilir.

3.6. Cauchy-Schwarz ve Minkowski Eşitsizliklerinin İncelenmesi

Teorem 3.1.2.'de verilen koşullara uyan eşitsizliklerin keskinleştirilmesi problemi önceki bölümlerde verildiği gibi çalışılabilir. Bu eşitsizliklerden en meşhur iki tanesi Cauchy-Schwarz ve Minkowski eşitsizlikleridir. Verilen şemanın bu eşitsizlikler içinde kayda değer sonuçlar vermediği gösterilebilir.

$y \in \mathbb{R}^n_+$ sabit bir vektör, $x \in \mathbb{R}^n_+$ ve $[x, y]$ ise x ve y'nin iç çarpımı olmak üzere

$$f_y(x) = f(x, y) = \|x\| \, \|y\| - [x, y]$$

olsun.

Cauchy-Schwarz eşitsizliği $f_y(x) \geq 0$ olmasını gerektirir. Sadece $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $f_y(x) = 0$ olur. Keskinleştirme şeması f_y'ye uygulansın. Öncelikle, ∇f_y'nin sabit bir y değeri için Lipschitz fonksiyon olduğu gösterilmelidir. Gerekli hesaplamalardan sonra

$$\nabla f_y(x) = \left[\frac{\|y\|}{\|x\|} x_1 - y_1, \frac{\|y\|}{\|x\|} x_2 - y_2, \cdots, \frac{\|y\|}{\|x\|} x_n - y_n \right]$$

elde edilir.

$\rho_i(x) = \dfrac{x_i}{\|x\|}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \rho_i}{\partial x_i} \right| &= \frac{\|x\|^2 - x_i^2}{\|x\|^3} \\ \left| \frac{\partial \rho_i}{\partial x_j} \right| &= \left| \frac{x_i x_j}{\|x\|^3} \right|, \ i \neq j \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\theta_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$ sayılarının varlığı, ortalama değer teoreminden dolayı bilinmektedir:

$$\begin{aligned}
\|\nabla f_y(x) - \nabla f_y(z)\| &= \|y\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\|x\|} - \frac{z_i}{\|z\|} \right)^2} = \|y\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [\rho_i(x) - \rho_i(z)]^2} \\
&= \|y\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [\nabla\rho_i(x + \theta_i(z-x))^2 (x-z)]^2} \\
&\leq \|y\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|\nabla\rho_i(x + \theta_i(z-x))\|^2} \, \|x - z\|
\end{aligned}$$

$f_y(x)$'nin minimum değerine λy, $(\lambda > 0)$ ışını üzerinde ulaştığı açıktır. Verilen bir $\lambda > 0$ için λy'nin orijini içermeyen öyle bir $V_{\lambda,d}$ kapalı komşuluğu vardır ki ∇f_y orada Lipschitz fonksiyondur yani bir M_1 sayısı vardır öyle ki

$$\|\nabla f_y(x) - \nabla f_y(z)\| \leq M_1 \|x - z\|$$

eşitsizliği geçerlidir.

Bu yüzden Teorem 3.1.2. bu duruma uygulanabilir. Gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra

$$\|\nabla f_y(x)\|^2 = 2\frac{\|y\|}{\|x\|} (\|x\| \|y\| - [x,y]) = 2\frac{\|y\|}{\|x\|} f_y(x)$$

elde edilir ve λy'nin bir kapalı $V_{\lambda,d}$ komşuluğu orijini içermediğinden, bir M_2 sayısı vardır öyle ki bütün $x, y \in V_{\lambda,d}$ için $2\frac{\|y\|}{\|x\|} \leq M_2$ olur.

Böylece kolaylıkla görülebilir ki, M_1 ve M_2'ye bağlı olan bir $M_3 < 1$ sayısı vardır öyle ki

$$f_y(x) \geq M_3 f_y(x)$$

olur yani $f_y(x) \geq 0$ olur. Bu ise yeni bir eşitsizlik değildir.

Minkowski eşitsizliğinin de keskinleştirilemediği benzer şekilde gösterilebilir.

3.7. Sayısal Deneyler

Elde edilen sonuçları sayısal olarak değerlendirmek için bazı hesaplamalar yapılmıştır. Ağırlıklı geometrik-aritmetik orta eşitsizliği ele alınmış ve bazı ağırlıklar ve bazı değerler için yeni elde edilmişiyle karşılaştırılmıştır.

Teorem 3.3.1.'in sonundaki Not'ta açıklandığı gibi, $a_{\lambda,r}$ kolaylıkla hesaplanabilir. Bu yüzden

$$a_1(\lambda, d) = a_2(\lambda, d, r)$$

eşitliği d'ye göre çözülebilir. Çözüm noktası olan d^* noktası, $a_1(\lambda, d)$'de veya $a_2(\lambda, d)$'de konursa $a(\lambda, d)$ elde edilir yani

$$a_{\lambda,r} = a_1(\lambda, d^*) = a_2(\lambda, d^*, r)$$

olur.

$\lambda = 1$, $r = 0.5$, $n = 5$ olsun. Farklı ağırlıklarla birlikte $(x)_1 = (0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4)$, $(x)_2 = (0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$, $(x)_3 = (1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4)$, $(x)_4 = (0.9, 0.95, 1, 1.05, 1.1)$ değerleri için, ağırlıklı geometrik-aritmetik orta eşitsizliği yeni eşitsizlikle karşılaştırılacaktır.

Çizelgelerde verilen $f(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \qquad u(x) = \frac{1}{4a_{\lambda,r}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \left(1 - \frac{\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}}{x_i} \right)^2$$

Çizelge 3.1. Eşit ağırlıklar için elde edilen sonuçlar $(\alpha) = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$

	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$	$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$	$f(x)$	$u(x)$	$\frac{u(x)}{f(x)}$
$(x)_1$	1.000000	0.957878	0.042122	0.009820	0.233137
$(x)_2$	0.800000	0.787257	0.012743	0.003185	0.249942
$(x)_3$	1.200000	1.191596	0.008404	0.001332	0.158446
$(x)_4$	1.000000	0.997492	0.002508	0.000035	0.013864

Çizelge 3.2. Rastgele seçilmiş ağırlıklar için elde edilen sonuçlar $(\alpha) = (0.05, 0.05, 0.2, 0.3, 0.4)$

	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$	$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$	$f(x)$	$u(x)$	$\frac{u(x)}{f(x)}$
$(x)_1$	1.190000	1.164844	0.025156	0.003788	0.150559
$(x)_2$	0.895000	0.887265	0.007735	0.001476	0.190843
$(x)_3$	1.295000	1.289853	0.005147	0.000677	0.131586
$(x)_4$	1.047500	1.045953	0.001547	0.000019	0.012391

Çizelge 3.3. Ağırlıklardan birinin değerlerine baskın olduğu bir durum için elde edilen sonuçlar $(\alpha) = (0.8, 0.1, 0.06, 0.03, 0.01)$

	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$	$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$	$f(x)$	$u(x)$	$\frac{u(x)}{f(x)}$
$(x)_1$	0.670000	0.655642	0.014358	0.002924	0.203672
$(x)_2$	0.635000	0.630730	0.004270	0.000918	0.215099
$(x)_3$	1.035000	1.032214	0.002786	0.000370	0.132640
$(x)_4$	0.917500	0.916676	0.000824	0.000009	0.011363

Çizelgelerdeki son kolon farklı ağırlıklara sahip farklı değerler için eşitsizlikleri keskinleştirme oranıdır.

4. SOYUT KONVEKS FONKSİYONLAR YARDIMIYLA İFADE EDİLEN BİR OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ BİR METOD

4.1. Ön Bilgiler

Soyut konvekslik sınıflarının en önemlilerinden biri de Minimum tipli fonksiyonlarla elde edilen fonksiyonlar sınıfıdır.

$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}_+ | x \geq 0\}$ negatif olmayan vektörlerin konisi olsun. L, $\mathbb{R}^n_+$ üzerinde tanımlı bütün minimum fonksiyonların, yani

$$l(x) = \langle l, x \rangle = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{l_i}, x \in \mathbb{R}^n_+,\ l \in \mathbb{R}^n_+$$

ile verilen fonksiyonlar ve $l(x) \equiv 0$ fonksiyonundan oluşan küme olsun burada l'nin bir i. koordinatının sıfır olması durumunda $\frac{x_i}{l_i} = \infty$ kabul edilir. Bu tip fonksiyonlar kümesine göre elde edilecek soyut konveks fonksiyonlar sınıfı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ olsun. Eğer L kümesinin,

$$f(x) = \sup_{l \in U} l(x) \quad (x \in \mathbb{R}^+_n)$$

koşulunu sağlayan bir U alt kümesi varsa f'ye L kümesine göre soyut konvekstir denir.

Diğer taraftan, verilen bir f için böyle bir altküme arayışı kolay olmayabilir. Bu yüzden f fonksiyonlarını karakterize eden bir teoremi ifade edelim.

Teorem 4.1.1. (Rubinov 2000a) L, $\mathbb{R}^n_+$ üzerinde tanımlı minimum tip fonksiyonlar sınıfı olsun. Bir $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonunun L ye göre soyut konveks olması için gerek ve yeter koşul f nin artan pozitif homojen fonksiyon olmasıdır.

Günümüzde optimizasyon teorisinde en önemli problemlerden biri, belli bir bölge üzerinde verilen bir fonksiyonun minimumunu bulmaktır.Bu problem, birtakım belli özelliklere sahip fonksiyonlar ve bölgeler için çözülmüşse de birçok durum için çözülememiştir veya ortaya kesin bir yöntem konulamamıştır. Yukarıda ifade edilen artan pozitif homojen fonksiyonun birim simpleks üzerinde minimumunun bulunması problemi de böyle problemlerden bir tanesidir. Bu problemin çözümü için 1999 yılında Andramonov, Rubinov ve Glover, Kesen Açı metodunu geliştirmiştir (Andramonov vd 1999). Önce problemi ifade edelim ve daha sonra kesen açı algoritmasını verelim.

Problem, f bir IPH fonksiyon olmak üzere

$$\min_{x \in S} f(x)$$

bulunması problemidir; burada $S = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i \in I \right\}$.

Bu problem için f'nin L fonksiyonlar kümesine göre soyut konveks olması koşulu kullanılarak Kesen Açı metodu geliştirilmiştir. Kesen Açı metodu (bu metod, klasik konvekslik hali için bilinen Kesen düzlem metodunun, ele alınan fonksiyonlar sınıfı için genelleşmesidir) bölge üzerinde bulunan birkaç noktada fonksiyonun değerlerinden yola çıkarak, her adımda ana fonksiyona daha yakın bir minimum tip fonksiyon bulunması esasına dayanmaktadır. Bu metodun algoritması aşağıdaki gibidir:

Algoritma 1.

e_m, m. koordinatı 1 olan birim vektör olsun.

Adım 0: $x^m = e_m$, $m = 1, ..., n$ noktalarını alalım. Daha sonra $x^{n+i} \in S$, $x_r^{n+i} > 0$, $i = 1, .., q$, $r = 1, .., n$ koşulunu sağlayan q tane keyfi nokta seçelim. $l_i^k = x_i^k / f(x^k)$, $k = 1, ..., n+q$ olsun. h_{n+q} fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$h_{n+q}(x) = \max_{k=1,...,n+q} \min_i \frac{x_i}{l_i^k}$$

Adım 1: x^j noktasını alalım. $l_i^{(j)} = x_i^{(j)} / f(x^{(j)})$ ve

$$h_j(x) = \max(h_{j-1}(x), \min_i \frac{x_i}{l_i^{(j)}}) \equiv \max_{k=1,...,j} \min_i \frac{x_i}{l_i^{(j)}}$$

fonksiyonunu kuralım.

Adım 2: $\min_{x \in S} h_j(x)$ problemi çözülür.

Adım 3: Adım 2'deki problemin çözümü y^* olsun. $j = j+1$, $x^j = y^*$ yazılıp, Adım 1'e geçilir.

Bu algoritma $|h_j(x^j) - f(x^j)|$ farkı istenildiği kadar küçük olduğunda durdurulur. Andramonov 1999'da algoritmanın her adımında elde edilen x^j noktasının birim simpleksin içinde elde edileceği gösterilmiştir. Bu aranan çözüm noktası, S'nin içinde olacağından S'nin içini riS ile göstereceğiz.

Bu algoritmanın en önemli kısmı, Adım 2'de ifade edilen problemin çözülmesidir. Bu problem farklı bilim adamları tarafından ele alınmış ve belli sonuçlara ulaşılmış olmakla birlikte bu sahayla ilgili bilim adamları çözüm için daha iyi metodların ve algoritmaların elde edilmesine halen çalışmaktadır. Bu tez çalışması da bu problemin çözülmesiyle ilgilidir. Bu problemin çözümü için yeni bir algoritma geliştirilmiş ve elde edilen algoritma diğerlerinden daha basit, geometrik açıklanabilir ve daha hızlıdır (Bkz. Adilov vd 2005, Adilov vd 2007).

4.2. Problemin İfade Edilmesi ve Çözüm Algoritması

Aşağıdaki optimizasyon problemi üzerinde çalışacağız:

$$\begin{array}{l} f(x) \to \min \\ x \in S \end{array}$$

burada f, $\mathbb{R}^n_+$ üzerinde tanımlı artan pozitif homojen fonksiyon ve S birim simplekstir, yani

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \,\middle|\, \sum_{i \in I} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i \in I \right\}.$$

Artan pozitif homojen fonksiyonlar L konveks olduklarından, probleme Kesen Açı metodu uygulanabilir. Bu metodun uygulanmasında kullanılan algoritmanın her adımında aşağıda ifade edilen alt problemin çözülmesi gerekmektedir (Bkz. Algoritma 1.):

$$\begin{array}{l} P(x) \to \min \\ x \in S \end{array} \tag{5}$$

burada $P(x) = \max\limits_{1 \leq j \leq k} \{l^{(j)}(x)\}$ ve $l^{(j)}(x) = \min\limits_{i \in I} \{\frac{x_i}{l_i^{(j)}}\} \in L$, $j = 1, 2, ..., k$.

Tanım 4.2.1. Eğer $P(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq k} \left\{ l^{(i)}(x) \right\}$ fonksiyonu içindeki $l^{(i)}$'lerden oluşturulmuş tüm çiftler karşılaştırılamazsa $P(x)$ fonksiyonuna düzgün kurulmuş fonksiyon denir.

Not. (5) ile verilen her $P(x)$ fonksiyonu düzgün kurulmuş fonksiyon haline getirilebilir.

Yukarıda verilen (5) probleminin çözümü için bir algoritma vereceğiz. Bundan önce $P(x)$ in özellikleriyle ilgili birkaç önteorem verelim.

Anlatım açısından kolay olması ve geometrik olarak anlaşılması için önce algoritma $\mathbb{R}^2_+$'de verilecektir ve daha sonra $\mathbb{R}^n_+$ için genelleştirilecektir.

Önteorem 4.2.2. $\mathbb{R}^2_+$ üzerinde tanımlı her minimum tip fonksiyon $l = \min\left\{ \frac{x_1}{l_1}, \frac{x_2}{l_2} \right\}$, bir parçalı lineer fonksiyon olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$l(x) = \begin{cases} \frac{x_1}{l_1}, & \text{eğer } x \in \mathbb{R}^2_+ \text{ ve } x_2 \geq \frac{l_2}{l_1}x_1, \\ \frac{x_2}{l_2}, & \text{eğer } x \in \mathbb{R}^2_+ \text{ ve } x_2 < \frac{l_2}{l_1}x_1, \end{cases}$$

İspat. Gerçekten, eğer $x_2 \geq \frac{l_2}{l_1}x_1 \Rightarrow \frac{x_2}{l_2} \geq \frac{x_1}{l_1} \Rightarrow l(x) = \min\left\{\frac{x_2}{l_2}, \frac{x_1}{l_1}\right\} = \frac{x_1}{l_1}$. Eğer $x_2 < \frac{l_2}{l_1}x_1 \Rightarrow \frac{x_2}{l_2} < \frac{x_1}{l_1} \Rightarrow l(x) = \frac{x_2}{l_2}$ olur.

Önteorem 4.2.3. $l^{(1)}(x) = \min\{\frac{x_1}{l_1^{(1)}}, \frac{x_2}{l_2^{(1)}}\}$ ve $l^{(2)}(x) = \min\{\frac{x_1}{l_1^{(2)}}, \frac{x_2}{l_2^{(2)}}\}$ olmak üzere, $P(x) = \max\left\{l^{(1)}(x), l^{(2)}(x)\right\}$ olsun.

a) Eğer $l^{(1)} = (l_1^{(1)}, l_2^{(1)})$ ve $l^{(2)} = (l_1^{(2)}, l_2^{(2)})$ kıyaslanabilirse, $l^{(1)} \leq l^{(2)}$ olduğunda $P(x) = l^{(1)}(x)$, $l^{(1)} > l^{(2)}$ olduğunda ise $P(x) = l^{(2)}(x)$ olur, yani

$$P(x) = \begin{cases} l^{(2)}(x) & \text{eğer } \ l^{(1)} > l^{(2)} \\ l^{(1)}(x) & \text{eğer } \ l^{(1)} \leq l^{(2)} \end{cases}$$

b) Eğer $l^{(1)} = (l_1^{(1)}, l_2^{(1)})$ ve $l^{(2)} = (l_1^{(2)}, l_2^{(2)})$ kıyaslanamazsa, $l_1 = \max\left\{l_1^{(1)}, l_1^{(2)}\right\}$ ve
$l_2 = \max\left\{l_2^{(1)}, l_2^{(2)}\right\}$ olmak üzere $l_1 = l_1^{(1)}$ olduğunda $P(x)$ fonksiyonu

$$P(x) = \begin{cases} l^{(1)}(x), & \text{eğer } x_2 \leq \frac{l_2}{l_1}x_1, \\ l^{(2)}(x), & \text{eğer } x_2 > \frac{l_2}{l_1}x_1, \end{cases} \tag{6}$$

şeklinde, $l_1 = l_1^{(2)}$ olduğunda ise

$$P(x) = \begin{cases} l^{(1)}(x), & \text{eğer } x_2 \geq \frac{l_2}{l_1}x_1, \\ l^{(2)}(x), & \text{eğer } x_2 < \frac{l_2}{l_1}x_1, \end{cases} \tag{7}$$

şeklinde bir parçalı lineer fonksiyon olarak ifade edilebilir.

İspat. a) Eğer $l^{(1)} \leq l^{(2)} \Rightarrow l_1^{(1)} \leq l_1^{(2)}$ ve $l_2^{(1)} \leq l_2^{(2)} \Rightarrow \frac{x_1}{l_1^{(1)}} \geq \frac{x_1}{l_1^{(2)}}$ ve $\frac{x_2}{l_2^{(1)}} \geq \frac{x_2}{l_2^{(2)}} \Rightarrow$
$\min\left\{\frac{x_1}{l_1^{(1)}}, \frac{x_2}{l_2^{(1)}}\right\} \geq \min\left\{\frac{x_1}{l_1^{(2)}}, \frac{x_2}{l_2^{(2)}}\right\} \Rightarrow P(x) = \min\left\{\frac{x_1}{l_1^{(1)}}, \frac{x_2}{l_2^{(1)}}\right\} = l^{(1)}(x)$.

Benzer şekilde gösterilebilir ki, eğer $l^{(1)} \geq l^{(2)}$ ise, o halde $P(x) = l^{(2)}(x)$.

b) $l^{(1)}$ ve $l^{(2)}$ kıyaslanamasınlar. O halde $l_1 = \max\left\{l_1^{(1)}, l_1^{(2)}\right\}$ ve
$l_2 = \max\left\{l_2^{(1)}, l_2^{(2)}\right\}$ olmak üzere $l = (l_1, l_2)$ vektörü, $l^{(1)}$ ve $l^{(2)}$ vektörleri ile çakışmaz, yani l vektörünün koordinatlarından biri $l^{(1)}$'den diğeri $l^{(2)}$'den olmak zorundadır (aksi halde kıyaslanabilirlerdi). Böylece, iki durum söz konusudur:

i. $l_1 = l_1^{(1)}$ (Bu durumda $l_2 = l_2^{(2)}$ olacaktır.)

ii. $l_1 = l_1^{(2)}$ (Bu durumda $l_2 = l_2^{(1)}$ olacaktır.)

Önce (i.) durumunu inceleyelim. $l_1 = l_1^{(1)} = \max\left\{l_1^{(1)}, l_1^{(2)}\right\}$ ve $l_2 = l_2^{(2)} = \max\left\{l_2^{(1)}, l_2^{(2)}\right\}$ olduğundan

$$\frac{x_1}{l_1^{(1)}} \leq \frac{x_1}{l_1^{(2)}} \quad \text{ve} \quad \frac{x_2}{l_2^{(1)}} \geq \frac{x_2}{l_2^{(2)}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $\mathbb{R}_+^2$ bölgesini $x_2 = \frac{l_2^{(2)}}{l_1^{(1)}} x_1$ ışını ile (l cinsinden ifade edilirse $x_2 = \frac{l_2}{l_1} x_1$ ışını ile) iki bölgeye ayıralım. $\left\{x \in \mathbb{R}_+^2 | x_2 \geq \frac{l_2^{(2)}}{l_1^{(1)}} x_1\right\}$ bölgesinde

$$\frac{x_1}{l_1^{(2)}} \geq \frac{x_1}{l_1^{(1)}} \quad \text{ve} \quad \frac{x_2}{l_2^{(2)}} \geq \frac{x_1}{l_1^{(1)}}$$

eşitsizlikleri doğru olduğundan

$$l^{(2)}(x) \geq \frac{x_1}{l_1^{(1)}} \geq \min\left\{\frac{x_1}{l_1^{(1)}}, \frac{x_2}{l_2^{(1)}}\right\} = l^{(1)}(x)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan, $P(x) = l^{(2)}(x)$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde

$$\left\{x \in \mathbb{R}_+^2 | x_2 < \frac{l_2^{(1)}}{l_1^{(2)}} x_1\right\}$$

bölgesinde de $P(x) = l^{(1)}(x)$ olduğu gösterilir. Böylece bölgelerini de l_1, l_2 cinsinden ifade edersek $P(x)$ fonksiyonu için (6) formülünün doğru olduğunu ispatlamış oluruz.

Şimdi de (ii.) durumunu ele alalım. Bu durum için

$$\frac{x_1}{l_1^{(1)}} \geq \frac{x_1}{l_1^{(2)}} \quad \text{ve} \quad \frac{x_2}{l_2^{(1)}} \leq \frac{x_2}{l_2^{(2)}}$$

eşitsizlikleri doğrudur. Yine, $\mathbb{R}_+^2$ bölgesini $x_2 = \frac{l_2^{(1)}}{l_1^{(2)}} x_1$ ışını ile (l cinsinden ifade edilirse $x_2 = \frac{l_2}{l_1} x_1$ ışını ile) iki bölgeye ayıralım. $P(x)$ fonksiyonunu $\left\{x \in \mathbb{R}_+^2 | x_2 \geq \frac{l_2^{(1)}}{l_1^{(2)}} x_1\right\}$ bölgesinde inceleyelim. Bu bölgede

$$\frac{x_2}{l_2^{(1)}} \geq \frac{x_1}{l_1^{(2)}} \quad \text{ve} \quad \frac{x_1}{l_1^{(1)}} \geq \frac{x_1}{l_1^{(2)}}$$

eşitsizlikleri doğru olduğundan $l^{(1)}(x) \geq \frac{x_1}{l_1^{(2)}}$ oluyor. Buradan

$$l^{(1)}(x) \geq \min\left\{\frac{x_1}{l_1^{(2)}}, \frac{x_2}{l_2^{(2)}}\right\} = l^{(2)}(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\left\{x \in \mathbb{R}_+^2 | x_2 \geq \frac{l_2^{(1)}}{l_1^{(2)}} x_1\right\}$ bölgesinde $P(x) = l^{(1)}(x)$ olur.

Benzer şekilde $\left\{x \in \mathbb{R}_+^2 | x_2 < \frac{l_2}{l_1} x_1\right\}$ bölgesinde $P(x) = l^{(2)}(x)$ olduğu gösterilir. Böylece $P(x)$ fonksiyonu için (7) formülünün de doğru olduğu ispatlanmış olur.

Önteorem 4.2.2. ve Önteorem 4.2.3.'den kolayca görülebilen bir sonuca ulaşıyoruz:

Sonuç 4.2.4. Eğer $\mathbb{R}_+^2$'de tanımlı düzgün kurulmuş $P(x)$ fonksiyonu yalnız iki tane minimum tip fonksiyondan olmuşsa $x^* \in riS$ noktasının bu fonksiyonun lokal minimumu olması için gerek ve yeter koşul $\frac{x_1^*}{l_1} = \frac{x_2^*}{l_2}$ olmasıdır.

Daha genel durumları, yani ikiden fazla minimum tip fonksiyonla belirlenen $P(x)$ fonksiyonunun simpleks üzerindeki lokal minimumlarını incelemek için önce aşağıdaki gibi M kümesini tanımlayalım:

$k \geq 2$ olmak üzere $P(x) = \max\left\{l^{(1)}(x), l^{(2)}(x), ..., l^{(k)}(x)\right\}$ düzgün kurulmuş fonksiyon olsun. $L = \left\{l^{(1)}, l^{(2)}, ..., l^{(k)}\right\}$ vektörler kümesinin tüm ikişer kombinasyonları ele alınır. Ele alınan $l^{(i)}, l^{(j)}$ vektörlerinden

$$l_1 = \max\left\{l_1^{(i)}, l_1^{(j)}\right\} \quad \text{ve} \quad l_2 = \max\left\{l_2^{(i)}, l_2^{(j)}\right\}$$

olmak üzere $l = (l_1, l_2)$ vektörü oluşturuluyor (Önteorem 4.2.2.'deki gibi). Bu vektör L kümesinin $l^{(i)}$ ve $l^{(j)}$ hariç, diğer vektörleri ile karşılaştırılır. Bundan küçük vektör bulunamıyorsa M kümesine dahil edilir.

Önteorem 4.2.2. ve Önteorem 4.2.3. yardımıyla kolayca ispatlanabilecek ve Sonuç 4.2.4'ün genelleşmiş halini ifade eden bir teorem verelim.

Teorem 4.2.5. S birim simpleks ve

$$P(x) = \max_{1 \leq j \leq k} \left\{l^{(j)}(x)\right\}$$

düzgün kurulmuş bir fonksiyon olsun. Bir $x^* \in riS$ noktasının bir lokal minimum olması için gerek ve yeter koşul $\frac{x_1^*}{l_1} = \frac{x_2^*}{l_2}$ eşitliğini sağlayan bir $l \in M$ vektörünün var olmasıdır.

İspat. P fonksiyonu düzgün kurulmuş olduğundan dolayı, P'yi oluşturan $L = \left\{l^{(1)}, ..., l^{(k)}\right\}$ vektör kümesinden alınan her $l^{(i)}, l^{(j)}$ vektör çiftleri kıyaslanamazlar. Önteorem 4.2.3. ve Sonuç 4.2.4. gereğince $\tilde{P}(x) = \max\left\{l^{(i)}(x), l^{(j)}(x)\right\}$ fonksiyonunun riS'de lokal minimumu

$$l_1 = \max\left\{l_1^{(i)}(x), l_1^{(j)}(x)\right\} \quad \text{ve } l_2 = \max\left\{l_2^{(i)}(x), l_2^{(j)}(x)\right\}$$

olmak üzere $x_2 = \frac{l_2}{l_1}x_1$ doğrusu ile S simpleksinin kesişim noktasıdır. Bu noktanın, aynı zamanda $P(x)$'in lokal minimumu olması için L'den olan vektörlerin ($l^{(i)}, l^{(j)}$ dışında) $l = (l_1, l_2)$ vektöründen küçük olmaması gerekmektedir, yani $l \in M$ olmalıdır. Dolayısıyla M kümesinden olan her l vektörüne karşıt gelen $x_2 = \frac{l_2}{l_1}x_1$ doğrusu ile S simpleksinin ortak noktası $P(x)$'in riS deki lokal minimumlarını oluşturacaktır. Böylece, $x^* \in riS$ noktasının $P(x)$'in lokal minimumu olması için gerek ve yeter koşul $\frac{x_1^*}{l_1} = \frac{x_2^*}{l_2}$ olacak şekilde bir $l \in M$ vektörünün olmasıdır.

Teorem 4.2.5.'i kullanarak, $\mathbb{R}^2_+$ de verilen (5) probleminin çözümü için algoritmayı kısaca aşağıdaki şekilde verebiliriz:

Algoritma 2.

Adım 1: $P(x)$ fonksiyonunu düzgün kurulmuş fonksiyona çevir.

Adım 2: L den herhangi iki $l^{(i)}, l^{(j)}$ vektörünü al.

Adım 3: $l_1 = \max\left\{l_1^{(i)}, l_1^{(j)}\right\}$, $l_2 = \max\left\{l_2^{(i)}, l_2^{(j)}\right\}$ olacak şekilde $l = (l_1, l_2)$ vektörünü kur. Bulunan bu vektörü L'nin diğer vektörleri ile ($l^{(i)}, l^{(j)}$ hariç) karşılaştır. Eğer bundan küçük olan bir vektör var ise Adım 2'ye dön değilse Adım 4'e geç.

Adım 4: $\dfrac{x_1}{l_1} = \dfrac{x_2}{l_2}$ doğrusunun simpleks üzerindeki (x_1, x_2) noktasını bul ve bu noktayı yerel minimum olarak yaz. Adım 2'ye dön.

Adım 5: Eğer L'nin tüm vektör çiftleri Adım 2'de tarandıysa dur.

Şimdi de sonuçları n boyutlu durum için genelleştirelim. $n = 2$ durumu için verilen önteorem ve önermeler küçük değişikliklerle n boyutlu durum için de ifade ve ispat edilebilir. Örneğin, Önteorem 4.2.2. n boyutlu durum için şöyle ifade edilecektir.

Önteorem 4.2.6. $\mathbb{R}^n_+$ üzerinde tanımlı her minimum tip fonksiyon, yani $l(x) = \min\limits_{i \in l}\{\frac{x_i}{l_i}\}$, bir parçalı lineer fonksiyon olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$l(x) = \left\{ \frac{x_i}{l_i} \text{ eğer } x_i \in D_i \right.$$

burada $D_i = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ | \frac{x_i}{l_i} \leq \frac{x_k}{l_k}, k \in I\right\}$'dır.

İspatı Önteorem 4.2.2.'nin ispatından farklı değildir.

Önteorem 4.2.3.'de, n boyutlu durum için aynı şekilde ifade edilebilir. Fakat, algoritma oluşturmak için temel teşkil eden Teorem 4.2.5.'i genel olarak verebilmek için M kümesinin n boyutlu duruma uygun şekilde ifade edilmesi gerekmektedir:

$k \geq n$ olmak üzere $P(x) = \max\limits_{1 \leq j \leq k} \left\{ l^{(j)}(x) \right\}$ düzgün kurulmuş bir fonksiyon olsun. $L = \left\{ l^{(1)}, l^{(2)}, ..., l^{(k)} \right\}$ vektör kümesinin tüm n'li kombinasyonları incelenir. İncelenen $l^{(j_1)}, l^{(j_2)}, ... \quad , l^{(j_n)}$ vektörlerinden $l_1 = \max \left\{ l_1^{(j_1)}, l_2^{(j_2)}, ..., l_n^{(j_n)} \right\}, ...,$ $l_n = \max \left\{ l_n^{(j_1)}, l_n^{(j_2)}, ..., l_n^{(j_n)} \right\}$ olmak üzere $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$ vektörü oluşturulur. Bu vektörün her koordinatı farklı vektörlere ve yalnız birine (ele alınanlar söz konusu) ait ise (bu şart iki boyutlu durumda düzgün kurulmuş fonksiyonlar için her zaman sağlanır), L'den olan diğer vektörlerle (ele alınanlar dışında) karşılaştırılır. Bundan küçük vektör bulunamıyorsa, bu vektör M kümesine dahil edilir.

Şimdi Teorem 4.2.5.'i genel durum için ifade edebiliriz.

Teorem 4.2.7. $S \subset \mathbb{R}_+^n$ birim simpleks olsun ve

$$P(x) = \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ l^{(j)}(x) \right\}$$

$\mathbb{R}_+^n$ üzerinde tanımlı düzgün kurulmuş fonksiyon olsun. Bir $x^* \in riS$ noktasının lokal minimum olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{x_1^*}{l_1} = \frac{x_2^*}{l_2} = ... = \frac{x_n^*}{l_n}$$

eşitliğini sağlayan bir $l \in M$ vektörünün var olmasıdır.

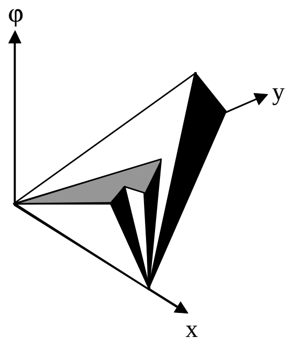
Not. Yukarıda tanımlanan ve Teorem 4.2.7.'de adı geçen M kümesinin elemanları olan $l = (l_1, l_2, ..., l_n) = (\max\limits_{1 \leq i \leq n} l_1^{j_i}, \max\limits_{1 \leq i \leq n} l_2^{j_i}, ..., \max\limits_{1 \leq i \leq n} l_n^{j_i})$ vektörleri aşağıdaki koşulları sağlar:

a) $l^{j_1}, l^{j_2}, ..., l^{j_n}$ vektörlerinin i. koordinatları kesin maksimuma sahiptir, yani her i için i. koordinatların maksimumuna tek bir vektörde ulaşılabilir;

b) $l^{j_1}, l^{j_2}, ..., l^{j_n}$ vektörlerinin hiçbiri l vektörünün birden fazla vektörünü içermez, yani l'nin koordinatları farklı vektörlere aittir.

Bu koşullar sağlanıldığında, ele alınan n'li kombinasyonun oluşturduğu fonksiyonun riS'de bir lokal minimumu olur ve algoritmanın sonraki aşamalarında bu minimumun, temel fonksiyon olan $P(x)$'in de lokal minimumu olup olmadığı kontrol edilir.

Bu koşullardan herhangi biri sağlanmadığında, ele alınan n'li kombinasyonu oluşturduğu fonksiyonun riS'de lokal minimumu olamaz. Bu durumları $\mathbb{R}^3$'de birkaç örnekte grafik olarak da görebiliriz. Birim simpleks üzerinde minimum arandığından istenen fonksiyon grafikleri, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için $z = 1 - x - y$ yazılarak, birim simpleksin xy düzlemi üzerindeki izdüşümü üzerinde gözlemlenebilir.

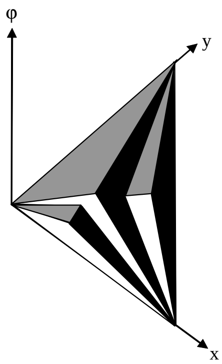


Şekil 4.1. Verilen üç vektörün birinci bileşenlerinin en büyüğünün birden fazla vektörde bulunması durumu

Örnek 1. $l^{j_1} = (10, \frac{10}{3}, \frac{5}{2})$, $l^{j_2} = (10, \frac{5}{3}, 5)$ ve $l^{j_3} = (2, 10, \frac{10}{7})$ olmak üzere $l = (10, 10, 5)$ elde edilir. $l_1 = 10$ değeri hem l^{j_1} hem de l^{j_2} vektöründe ulaşıldığından, yani $l_1 = 10$ değeri birinci koordinatlara göre kesin maksimum olmadığından a) şartı sağlanmaz. Dolayısıyla, Şekil 4.1.'den de görülebildiği gibi

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \max\{\min\{0.1x, 0.3y, 0.4(1-x-y)\}, \min\{0.1x, 0.6y, 0.2(1-x-y)\},\\ &\quad \min\{0.5x, 0.1y, 0.7(1-x-y)\}\}\end{aligned}$$

fonksiyonu riS'de lokal minimuma sahip değildir.

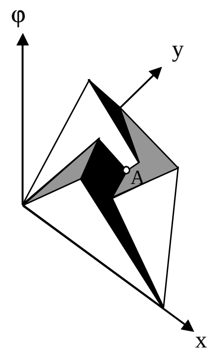


Şekil 4.2. Verilen üç vektörün birinci ve ikinci bileşenlerinin en büyüğünün tek vektöre ait olması durumu

Örnek 2. $l^{j_1} = (4, 10, 1)$, $l^{j_2} = (2, \frac{10}{3}, 5)$ ve $l^{j_3} = (\frac{10}{3}, \frac{1}{8}, 10)$ olmak üzere $l = (4, 10, 10)$ elde edilir. $l_1 = 4, l_2 = 10$ değerleri her ikisi l^{j_1} vektörüne ait olduğundan dolayı b) şartını sağlamaz. Böylece, Şekil 4.2.'den de görülebildiği gibi

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \max\{\min\{0.25x, 0.1y, 1-x-y\}, \min\{0.5x, 0.3y, 0.2(1-x-y)\},\\ &\quad \min\{0.3x, 8y, 0.1(1-x-y)\}\}\end{aligned}$$

fonksiyonu riS'de lokal minimuma sahip olamaz.



Şekil 4.3. Verilen üç vektörün aynı koordinatlarının en büyük değerlerinin her birinin farklı vektöre ait olması durumu

Örnek 3. $l^{j_1} = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9})$, $l^{j_2} = (\frac{1}{9}, 1, \frac{1}{3})$ ve $l^{j_3} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, 1)$ olmak üzere $l = (1, 1, 1)$ elde edilir ve a), b) şartları sağlandığından, Şekil 4.3.'den de görülebildiği gibi

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \max\{\min\{x, 3y, 9(1-x-y)\}, \min\{9x, y, 3(1-x-y)\}, \\ &\quad \min\{3x, 9y, 1-x-y\}\end{aligned}$$

fonksiyonu riS'de lokal minimuma (A noktası) sahip olur.

Yukarıda oluşturulan M kümesini dikkate alarak ve Teorem 4.2.7. kullanarak R^n_+'de verilen (5) probleminin çözümü için aşağıdaki gibi bir algoritma oluşturulur. (Kesen Açı metodunda, göz önüne alınan nokta sayısı $k > n$'dir.)

Algoritma 3.

Adım 1: $P(x)$ fonksiyonunu düzgün kurulmuş hale getir.

Adım 2: L'den olan vektörlerin n'li kombinasyonlarından birini $l^{(j_1)}, l^{(j_2)}, ..., l^{(j_n)}$ al. (Bu her zaman mümkündür çünkü $k > n$ dir.)

Adım 3: $l_1 = \max\left\{l_1^{(j_1)}, l_1^{(j_2)}, ...l_1^{(j_n)}\right\}$, $l_2 = \max\left\{l_2^{(j_1)}, l_2^{(j_2)}, ...l_2^{(j_n)}\right\}$,..., $l_n = \max\left\{l_n^{(j_1)}, l_n^{(j_2)}, ...l_n^{(j_n)}\right\}$ olacak şekilde $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$ vektörünü kur. Eğer $l_1, l_2, ..., l_n$ koordinatları farklı vektörlere ve yalnız bir vektöre ($l^{(j_1)}, l^{(j_2)}, ..., l^{(j_n)}$ dan birine) ait ise Adım 4'e geç. Aksi takdirde Adım 2'ye dön.

Adım 4: Yeni vektörü ($l = (l_1, l_2, ..., l_n)$'i) L'nin diğer vektörleriyle ($l^{(j_1)}, l^{(j_2)}, ..., l^{(j_n)}$ hariç) karşılaştır. Eğer bundan küçük vektör var ise Adım 2'ye dön. Aksi takdirde Adım 5'e geç.

Adım 5: $\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2} = ... = \frac{x_n}{l_n}$ ve $\sum x_i = 1$ eşitliklerini sağlayan $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ noktasını bul. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ noktasını lokal minimum olarak yaz ve Adım 2'ye geç.

Adım 6: Eğer L nin bütün n'li kombinasyonları Adım 2'de denendiyse, dur.

Algoritma 3'ün oluşturulmasında temel alınan Teorem 4.2.7. geometrik anlatım açısından iyi olsa da ispatı uzun ve karmaşıktır. Bu nedenle, yine Algoritma 3 için temel olacak, yalnız daha kolay ispatlanabilecek bir teorem verilebilir.

Teorem 4.2.8. $l^{(1)}, l^{(2)}, ..., l^{(n)}$ vektörleri için

$$l_i^{(i)} > \max_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} l_i^{(j)} \quad i = 1, 2, ..., n \tag{8}$$

şartı sağlansın. Bu durumda, bir $x^* \in \mathrm{R}_+^n$ noktasının

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = \max_{1 \le k \le n} \left\{ \min_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{x_i}{l_i^{(k)}} \right\} \right\}$$

fonksiyonunun birim simpleks içinde bir lokal minimum olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{x_1^*}{l_1^{(1)}} = \frac{x_2^*}{l_2^{(2)}} = ... = \frac{x_n^*}{l_n^{(n)}}$$

olmasıdır.

İspat. ($\Leftarrow$) Önce yeterliliği ispatlayalım. $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ noktası $\frac{x_1^*}{l_1^{(1)}} = \frac{x_2^*}{l_2^{(2)}} = ... = \frac{x_n^*}{l_n^{(n)}}$ koşulunu sağlasın. Şimdi öyle bir $\epsilon > 0$ bulalım ki, $\|h\| < \epsilon$ ve $x^* + h \in riS$ şartını sağlayan her $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ vektörü için

$$P(x_1^* + h_1, x_2^* + h_2, ..., x_n^* + h_n) - P(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \ge 0$$

eşitsizliği sağlansın. Yani x^* noktasının simpleks içinde bir lokal minimum nokta olduğunu gösterelim. İspata geçmeden önce aşağıdaki iki uyarıyı verelim:

Uyarı 1. (Uygun olan yön, (feasible direction) üzerine):

$x^* \in riS$ ve optimizasyon riS kümesinde yapıldığından dolayı $x^* + h$ noktaları da riS üzerinde olmak zorundadır. Dolayısıyla

$$x_1^* + h_1 + x_2^* + h_2 + ... + x_n^* + h_n = 1$$

olur, yani uygun yön (feasible direction) denildiğinde

$$h_1 + h_2 + ... + h_n = 0$$

şartını sağlayan h vektörleri anlaşılacaktır.

Uyarı 2.

$$P(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \frac{x_1^*}{l_1^{(1)}} = \frac{x_2^*}{l_2^{(2)}} = ... = \frac{x_n^*}{l_n^{(n)}}$$

olduğu teoremin varsayımlarından kolayca görülebilir.

$$P(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \frac{x_1^*}{l_1^{(1)}} = \frac{x_2^*}{l_2^{(2)}} = ... = \frac{x_n^*}{l_n^{(n)}}$$

olduğu teoremin varsayımlarından kolayca görülebilir.

Şimdi yeterliliğin ispatına geçebiliriz.

$$P(x_1^* + h_1, x_2^* + h_2, ..., x_n^* + h_n) - P(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$$

$$= P(x_1^* + h_1, x_2^* + h_2, ..., x_n^* + h_n) - \frac{x_1^*}{l_1^{(1)}}$$

$$= \max_{1\le k\le n}\left\{\min_{1\le i\le n}\left\{\frac{x_i^* + h_i}{l_i^{(k)}}\right\}\right\} - \frac{x_1^*}{l_1^{(1)}}$$

($\frac{x_1^*}{l_1^{(1)}}$, bir sabit sayı olduğundan $\max\min$ 'in içine alınabilir.)

$$= \max_{1\le k\le n}\left\{\min_{1\le i\le n}\left\{\frac{x_i^* + h_i}{l_i^{(k)}} - \frac{x_1^*}{l_1^{(1)}}\right\}\right\}$$

$\left(\frac{x_1^*}{l_1^{(1)}} = \frac{x_2^*}{l_2^{(2)}} = ... = \frac{x_n^*}{l_n^{(n)}} \text{ olduğu dikkate alınırsa}\right)$

$$= \max_{1\le k\le n}\left\{\min_{1\le i\le n}\left\{\frac{x_i^* + h_i}{l_i^{(k)}} - \frac{x_i^*}{l_i^{(i)}}\right\}\right\}$$

(ve sonuç daha açık yazılırsa)

$$= \max\left\{\min\left\{\frac{h_1}{l_1^{(1)}}, x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}} - \frac{1}{l_2^{(2)}}\right) + \frac{h_2}{l_2^{(1)}}, ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}} - \frac{1}{l_n^{(n)}}\right) + \frac{h_n}{l_n^{(1)}}\right\},\right.$$
$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(2)}} - \frac{1}{l_1^{(1)}}\right) + \frac{h_1}{l_1^{(2)}}, \frac{h_2}{l_2^{(2)}}, ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(2)}} - \frac{1}{l_n^{(n)}}\right) + \frac{h_n}{l_n^{(2)}}\right\} ...,$$
$$\left.\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(n)}} - \frac{1}{l_1^{(1)}}\right) + \frac{h_1}{l_1^{(n)}}, x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(n)}} - \frac{1}{l_2^{(2)}}\right) + \frac{h_2}{l_2^{(n)}}, ..., \frac{h_n}{l_n^{(n)}}\right\}\right\} \tag{9}$$

$h_1 + h_2 + ... + h_n = 0$ olduğundan h_i'lerin ($i = 1, 2, .., n$) en az biri pozitif olmalıdır. Genelliği bozmadan $h_1 > 0$ olduğunu kabul edelim ve

$$\min\left\{\frac{h_1}{l_1^{(1)}}, x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}} - \frac{1}{l_2^{(2)}}\right) + \frac{h_2}{l_2^{(1)}}, ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}} - \frac{1}{l_n^{(n)}}\right) + \frac{h_n}{l_n^{(1)}}\right\}$$

ifadesine bakalım. Burada teoremin şartından kolay görülebildiği gibi

$$x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}}-\frac{1}{l_2^{(2)}}\right),x_3^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}}-\frac{1}{l_2^{(2)}}\right),...,x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}}-\frac{1}{l_n^{(n)}}\right)$$

sayıları pozitiftir. $\|h\|<\epsilon$ şartında ϵ'u yeterince küçük seçerek,

$$x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}}-\frac{1}{l_2^{(2)}}\right)+\frac{h_2}{l_2^{(1)}},x_3^*\left(\frac{1}{l_3^{(1)}}-\frac{1}{l_3^{(3)}}\right)+\frac{h_3}{l_3^{(1)}},...,x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}}-\frac{1}{l_n^{(n)}}\right)+\frac{h_n}{l_n^{(1)}}$$

sayılarını da pozitif yapabiliriz. Buradan

$$\min\left\{\frac{h_1}{l_1^{(1)}},x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}}-\frac{1}{l_2^{(2)}}\right)+\frac{h_2}{l_2^{(1)}},...,x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}}-\frac{1}{l_n^{(n)}}\right)+\frac{h_n}{l_n^{(1)}}\right\}>0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla bir $\epsilon>0$ vardır öyle ki, $\|h\|<\epsilon$ ve $h_1+h_2+...+h_n=0$ koşulunu sağlayan her h için

$$P(x_1^*+h_1,x_2^*+h_2,...,x_n^*+h_n)-P(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)\geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Yani x^* noktası P fonksiyonunun riS üzerindeki bir lokal minimumudur.

($\Rightarrow$) Şimdi de gerekliliği ispatlayalım. x^* noktası P'nin riS üzerinde bir lokal minimumu olsun. Burada

$$P(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)=\frac{x_1^*}{d_1}=\frac{x_2^*}{d_2}=...=\frac{x_n^*}{d_n}$$

olacak şekilde $d_1,d_2,...,d_n$ reel pozitif sayılarının varolduğu açıktır.

x^* bir lokal minimum noktası olduğundan $\exists\epsilon>0$ vardır öyle ki $\|h\|<\epsilon$ ve $h_1+h_2+...+h_n=0$ koşulunu sağlayan her $h\in\mathbb{R}^n$ için

$$P(x_1^*+h_1,x_2^*+h_2,...,x_n^*+h_n)-P(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)\geq 0$$

sağlanır. Bu ifadeyi açıkça yazdığımızda ve (9) ifadesini elde ederken yaptıklarımızı aynen tekrar edersek

$$\begin{aligned}&\triangle P(x^*)=P(x_1^*+h_1,x_2^*+h_2,...,x_n^*+h_n)-P(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)=\\&=\max\left\{\min\left\{x_1^*\left(\tfrac{1}{l_1^{(1)}}-\tfrac{1}{d_1}\right)+\tfrac{h_1}{l_1^{(1)}},x_2^*\left(\tfrac{1}{l_2^{(1)}}-\tfrac{1}{d_2}\right)+\tfrac{h_2}{l_2^{(1)}},...,x_n^*\left(\tfrac{1}{l_n^{(1)}}-\tfrac{1}{d_n}\right)+\tfrac{h_n}{l_n^{(1)}}\right\},\right.\\&\quad\min\left\{x_1^*\left(\tfrac{1}{l_1^{(2)}}-\tfrac{1}{d_1}\right)+\tfrac{h_1}{l_1^{(2)}},x_2^*\left(\tfrac{1}{l_2^{(2)}}-\tfrac{1}{d_2}\right)+\tfrac{h_2}{l_2^{(2)}},...,x_n^*\left(\tfrac{1}{l_n^{(2)}}-\tfrac{1}{d_n}\right)+\tfrac{h_n}{l_n^{(2)}}\right\},...,\\&\quad\left.\min\left\{x_1^*\left(\tfrac{1}{l_1^{(n)}}-\tfrac{1}{d_1}\right)+\tfrac{h_1}{l_1^{(n)}},x_2^*\left(\tfrac{1}{l_2^{(n)}}-\tfrac{1}{d_2}\right)+\tfrac{h_2}{l_2^{(n)}},...,x_n^*\left(\tfrac{1}{l_n^{(n)}}-\tfrac{1}{d_n}\right)+\tfrac{h_n}{l_n^{(n)}}\right\}\right\}\geq 0\end{aligned}\tag{10}$$

elde ederiz.

Şimdi $\|h\| < \epsilon$ ve $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i = 0$ şartlarını sağlayan bir h vektörü alalım. Bu durumda min fonksiyonlardan en az biri sıfırdan büyük ya da eşittir. Varsayalım ki birincisidir, yani

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(1)}}-\frac{1}{d_1}\right)+\frac{h_1}{l_1^{(1)}}, x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}}-\frac{1}{d_2}\right)+\frac{h_2}{l_2^{(1)}}, ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}}-\frac{1}{d_n}\right)+\frac{h_n}{l_n^{(1)}}\right\} \geq 0$$

olsun.

Yeterince küçük ϵ için $\frac{h_1}{l_1^{(1)}}, \frac{h_2}{l_2^{(1)}}, ..., \frac{h_n}{l_n^{(1)}}$ sayıları çok küçük olur ve

$$x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(1)}}-\frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}}-\frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}}-\frac{1}{d_n}\right)$$

sayılarının sıfırdan farklı olanlarının işaretlerini etkilemez. Bu durumda

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(1)}}-\frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}}-\frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}}-\frac{1}{d_n}\right)\right\} \geq 0$$

elde edilir.

Şimdi h vektörünü öyle alalım ki, (10)'daki ikinci min fonksiyonunu sıfırdan büyük ya da eşit yapsın (tabi ki, $\|h\| < \epsilon$ ve $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i = 0$ koşulunu sağlayarak). Bunun her zaman mümkün olduğu daha sonra kanıtlanacaktır. Bu durumda, az öncekine benzer şekilde, yeterince küçük ϵ'lar için

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(2)}}-\frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(2)}}-\frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(2)}}-\frac{1}{d_n}\right)\right\} \geq 0$$

olduğu gösterilebilir.

Aynı şekilde devam edilirse, her $k = 1, 2, ..., n$ için

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(k)}}-\frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(k)}}-\frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(k)}}-\frac{1}{d_n}\right)\right\} \geq 0 \tag{11}$$

olduğu elde edilebilir.

P fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\max\left\{\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(1)}}-\frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}}-\frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}}-\frac{1}{d_n}\right)\right\},\right.$$
$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(2)}}-\frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(2)}}-\frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(2)}}-\frac{1}{d_n}\right)\right\}, ...,$$
$$\left.\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(n)}}-\frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(n)}}-\frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(n)}}-\frac{1}{d_n}\right)\right\}\right\} = 0$$

ve her $k = 1, 2, ..., n$ için doğru olan (11) eşitsizliklerinden

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(1)}}-\frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}}-\frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}}-\frac{1}{d_n}\right)\right\}=0$$

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(2)}}-\frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(2)}}-\frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(2)}}-\frac{1}{d_n}\right)\right\}=0$$

....

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(n)}}-\frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(n)}}-\frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(n)}}-\frac{1}{d_n}\right)\right\}=0$$

eşitlikleri bulunur. Teoremdeki (8) koşullarını da göz önüne alırsak

$$\frac{1}{l_1^{(1)}}-\frac{1}{d_1}=\frac{1}{l_2^{(2)}}-\frac{1}{d_2}=...=\frac{1}{l_n^{(n)}}-\frac{1}{d_n}$$

dolayısıyla $d_1 = l_1^{(1)}, d_2 = l_2^{(2)}, ..., d_n = l_n^{(n)}$ olduğu elde edilir.

Şimdi de, her minimum fonksiyonu sıfırdan büyük veya eşit yapan bir h uygun yönünün (feasible direction) olduğunu gösterelim.

Aksini varsayalım. Herhangi bir minimum fonksiyonu, sözgelimi n. minimum fonksiyonu sıfırdan büyük ya da eşit yapacak bir h uygun yönünün olmadığını varsayalım. Dolayısıyla $\|h\| < \epsilon$, $\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$ şartını sağlayan her h vektörü için n. minimum fonksiyonu hep sıfırdan küçük kalıyor. Bu durumda, $\triangle P(x^*)$ ifadesine sonuncu minimum fonksiyonun bir etkisi olmaz ve her h uygun yönü için

$$\begin{aligned}
&\triangle P(x^*) = \\
&\max\left\{\min\left\{x_1^*\left(\tfrac{1}{l_1^{(1)}}-\tfrac{1}{d_1}\right)+\tfrac{h_1}{l_1^{(1)}}, x_2^*\left(\tfrac{1}{l_2^{(1)}}-\tfrac{1}{d_2}\right)+\tfrac{h_2}{l_2^{(1)}}, ..., x_n^*\left(\tfrac{1}{l_n^{(1)}}-\tfrac{1}{d_n}\right)+\tfrac{h_n}{l_n^{(1)}}\right\},\right. \\
&\qquad \min\left\{x_1^*\left(\tfrac{1}{l_1^{(2)}}-\tfrac{1}{d_1}\right)+\tfrac{h_1}{l_1^{(2)}}, x_2^*\left(\tfrac{1}{l_2^{(2)}}-\tfrac{1}{d_2}\right)+\tfrac{h_2}{l_2^{(2)}}, ..., x_n^*\left(\tfrac{1}{l_n^{(2)}}-\tfrac{1}{d_n}\right)+\tfrac{h_n}{l_n^{(2)}}\right\} \\
&\qquad .... \\
&\qquad \min\left\{x_1^*\left(\tfrac{1}{l_1^{(n-1)}}-\tfrac{1}{d_1}\right)+\tfrac{h_1}{l_1^{(n-1)}}, x_2^*\left(\tfrac{1}{l_2^{(n-1)}}-\tfrac{1}{d_2}\right)+\tfrac{h_2}{l_2^{(n-1)}}, ...,\right. \\
&\qquad\quad \left.\left. x_n^*\left(\tfrac{1}{l_n^{(n-1)}}-\tfrac{1}{d_n}\right)+\tfrac{h_n}{l_n^{(n-1)}}\right\}\right\} \geq 0
\end{aligned} \tag{12}$$

eşitsizliği sağlanır. Yani x^* noktası

$$\max_{1\leq k\leq n-1}\left\{\min_{1\leq k\leq n-1}\left\{\frac{x_i}{l_i^{(k)}}\right\}\right\}$$

fonksiyonunun da lokal minimumudur. Yukarıdaki işlemleri bu fonksiyon için yapalım. Bunun için $\|h\| < \epsilon$, $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i = 0$ şartını sağlayan bir h vektörü alalım. (12) eşitsizliğinden gözükebildiği gibi, minimum fonksiyonlardan en az biri sıfırdan büyük eşittir. Onu birinci minimum fonksiyon kabul edelim. ϵ'u yeteri kadar küçük olarak $\frac{h_1}{l_1^{(1)}}, \frac{h_2}{l_2^{(1)}}, ..., \frac{h_n}{l_n^{(1)}}$ sayılarını,

$$\left(\frac{1}{l_1^{(1)}} - \frac{1}{d_1}\right), \left(\frac{1}{l_2^{(1)}} - \frac{1}{d_2}\right), ..., \left(\frac{1}{l_n^{(1)}} - \frac{1}{d_n}\right)$$

sayılarının sıfırdan farklılarının işaretlerini etkilemeyecek kadar küçük yapabiliriz. Bu durumda,

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(1)}} - \frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}} - \frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}} - \frac{1}{d_n}\right)\right\} \geq 0$$

elde edilir.

Şimdi h uygun yön vektörünü öyle alalım ki, ikinci minimum fonksiyonunu sıfırdan büyük eşit yapsın. (Böyle bir h'nin varlığı gösterilecektir.) Az öncekine benzer biçimde, yeterince küçük ϵ'lar için

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(2)}} - \frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(2)}} - \frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(2)}} - \frac{1}{d_n}\right)\right\} \geq 0$$

olduğu gösterilebilir. Aynı şekilde devam edersek, her $k = 1, 2, ..., n-1$ için

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(k)}} - \frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(k)}} - \frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(k)}} - \frac{1}{d_n}\right)\right\} \geq 0$$

olduğu elde edilebilir.

P fonksiyonunun sürekliliğini de göz önüne alırsak:

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(1)}} - \frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}} - \frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}} - \frac{1}{d_n}\right)\right\} = 0$$

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(2)}} - \frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(2)}} - \frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(2)}} - \frac{1}{d_n}\right)\right\} = 0$$

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(n-1)}} - \frac{1}{d_1}\right), x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(n-1)}} - \frac{1}{d_2}\right), ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(n-1)}} - \frac{1}{d_n}\right)\right\} = 0$$

eşitlikleri bulunur. Minimum işareti altındakileri bir matris olarak düşünürsek, her satırda en az bir sıfır olduğunu görebiliriz. Bu sıfırların sütunlarda yerleşimine bağlı olarak, $\|h\| \leq \epsilon$ ve $\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$ şartını sağlayan h vektörlerinin bazı koordinatlarını (en fazla (n-1) tane) negatif seçmekle (bu her zaman mümkündür)

$$\triangle P(x^*) < 0$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Bu ise (12) ile çelişir. Yani, (10)'te verilen n tane minimum fonksiyonun her birini sıfırdan büyük ya da eşit yapan h uygun yön vektörü (feasible direction) vardır.

Yalnız, bunu ispatlarken için (12)'teki $(n-1)$ tane minimum fonksiyonun her birini sıfırdan büyük ya da sıfıra eşit yapacak h'lerin varlığını farzetmiştik. Aynı şemayı uygulayarak, bunun ispatını $(n-2)$ taneli minimum fonksiyondan oluşmuş duruma, daha sonra $(n-3)$ taneli ve en sonda, iki minimum fonksiyondan oluşan duruma indirgenebilir. Yani en sonda, genelliği bozmadan $\|h\| \leq \epsilon$ ve $\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$ şartını sağlayan her h için

$$\triangle P(x^*) =$$

$$\max\left\{\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(1)}} - \frac{1}{d_1}\right) + \frac{h_1}{l_1^{(1)}}, x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{h_2}{l_2^{(1)}}, ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}} - \frac{1}{d_n}\right) + \frac{h_n}{l_n^{(1)}}\right\},\right.$$

$$\left.\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(2)}} - \frac{1}{d_1}\right) + \frac{h_1}{l_1^{(2)}}, x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(2)}} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{h_2}{l_2^{(2)}}, ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(2)}} - \frac{1}{d_n}\right) + \frac{h_n}{l_n^{(2)}}\right\}\right\} \geq 0 \tag{13}$$

eşitsizliğinin doğru olması halinde, minimum fonksiyonların her birini minimum yapacak h olduğunun gösterilmesi gerekmektedir.

Aksini varsayalım. Genelliği bozmadan, ikinci minimum fonksiyonunun her h uygun vektörü için negatif olduğunu varsayalım. Bu durumda (13) ifadesi şöyle olur. Her uygun yön için

$$\triangle P(x^*) =$$

$$\min\left\{x_1^*\left(\frac{1}{l_1^{(1)}} - \frac{1}{d_1}\right) + \frac{h_1}{l_1^{(1)}}, x_2^*\left(\frac{1}{l_2^{(1)}} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{h_2}{l_2^{(1)}}, ..., x_n^*\left(\frac{1}{l_n^{(1)}} - \frac{1}{d_n}\right) + \frac{h_n}{l_n^{(1)}}\right\} \geq 0$$

eşitsizliği doğrudur. Yani x^* noktası tek bir minimum tip fonksiyonun riS'de lokal minimumudur. Bu ise olamaz. Minimum tip fonksiyon parçalı doğrusal fonksiyondur (Bkz. Önteorem 4.2.6.), minimum değerlerine simpleksin sınırlarında ulaşabilir ve riS'de lokal minimum noktası yoktur.

Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.3. Sayısal Deneyler ve Sonuçları

Verilen algoritmanın pratik anlamda yeterliliğini göstermek için bazı sayısal deneyler yürütülmüştür. Burada üç farklı artan pozitif homojen fonksiyon için problem ele alınmış ve algoritma uygulanmıştır. Problemin çözümü için Bagirov ve Rubinov 2000 tarafından sunulan algoritma ile kıyaslanabilmesi için her iki algoritma aynı örneklere uygulanmış ve elde edilen sonuçlar yan yana çizelgelerde verilmiştir.

Algoritma için gerekli yazılım Turbo Pascal 7.0 programı ile hazırlanmıştır. İlginenler için, Örnek 4'te verilen fonksiyon için yazılan programın kodları Ek-1'de verilmiştir. Yazılan kodlarda Sayısal deneyler Genuine Intel Pentium III, 667 Mhz bilgisayar üzerinde yürütülmüştür.

Aşağıdaki tüm örneklerde şu notasyonlar kullanılacaktır:

- $f = f(x)$ amaç fonksiyonu
- n değişken sayısı
- k iterasyon sayısı
- t hesap için geçen zaman.

Burada t bağıl olarak ifade edilecektir. Eğer n değişken sayısı ise ona karşılık gelen hesaplama zamanı $t = \frac{t_n}{t_5}$ ile hesaplanacaktır, burada t_n, n değişkenli durum için geçen hesaplama zamanıdır. Dolayısıyla bütün örneklerde $n = 5$ boyutu için yapılacak hesaplamalar için harcanan süre t_5 birim zaman olarak kabul edilecektir. Algoritmanın durması için kriter Algoritma 1'in sonunda belirtildiği belirlenmiştir. Bagirov ve Rubinov 2000'de istenilen küçüklük ölçüsü 10^{-2} olduğu için kıyaslama açısından örneklerde bu yakınlık derecesi esas alınacaktır. Tüm örneklerde solda verilen çizelge Bagirov ve Rubinov 2000'de elde edilen sonuçları, sağda verilen çizelge ise yeni algoritmanın sonuçlarını belirtmektedir.

Örnek 4.

$$a_k^i = \frac{20i}{k(1+|i-k|)}, k = 1, 2, ..., n; i = 1, 2, ..., 40$$

ve

$$b_k^j = 5\left|\sin(j)\sin(k)\right|, k = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., 20$$

olmak üzere

$$f_1(x) = \max\left\{[a^i, x] : i = 1, 2, ..., 40\right\} + \min\left\{[b^j, x] : i = 1, 2, ..., 20\right\}$$

için deney sonuçları aşağıdaki gibidir:

Çizelge 4.1. $f_1(x)$ fonksiyonu için elde edilen sonuçlar

n	k	t
5	18	1.0
10	35	88.0
20	35	1055.1

n	k	t
5	5	1
10	2	0.7
20	3	34.8

Örnek 5.

$$a_k^{ij} = \frac{10j}{k(1+|k-j|)}\left|\cos(i-1)\right|, \ i = 1, 2, ..., 20; \ j = 1, 2, ..., n; \ k = 1, ..., n$$

olmak üzere

$$f_2(x) = \max_{1\leq i\leq 20}\min_{1\leq j\leq n}[a^{ij}, x]$$

için deney sonuçları aşağıdaki gibidir:

Çizelge 4.2. $f_2(x)$ fonksiyonu için elde edilen sonuçlar

n	k	t
5	108	1.0
10	107	122.0
15	167	510.8

n	k	t
5	4	1
10	3	1.2
15	2	5.6

Örnek 6.

$$a_{ij} = \begin{cases} 12 + \frac{n}{i}, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i = j+1 \text{ ise} \\ 0, & j = i+2 \text{ ise} \\ \frac{15}{i+0.1j}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \text{olmak üzere}$$

$$f_3(x) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

için deney sonuçları aşağıdaki gibidir:

Çizelge 4.3. $f_1(x)$ fonksiyonu için elde edilen sonuçlar

n	k	t
5	20	1.0
10	44	47.2
20	49	980.3

n	k	t
5	3	1
10	3	8.6
20	2	28.2

Deney sonuçları üzerine yorumlar

Yapılan deneylerde Bagirov ve Rubinov 2000 çalışması esas alınmış ve elde edilen sonuçlar onunla kıyaslanmıştır. Örneklerin her biri birer artan pozitif homojen fonksiyondur. Sunulan algoritmanın eskisine kıyasla iterasyon ve zaman bakımından daha hızlı olduğu görülmüştür. Özellikle istenen yakınlıkta sonuçlar elde etmek için algoritmaya uygulanması gerekli iterasyon sayısının ciddi olarak düştüğü gözlemlenmiştir. Bunun nedeni, algoritmada bir adım olarak ortaya çıkan alt problemin kesin çözümünün bulunmuş olmasıdır. Bagirov ve Rubinov 2000 tarafından verilen algoritmada ise bu alt problemin belli bir doğruluktaki çözümünde kullanılmıştır.

Burada dikkat çeken meselelerden biri de sunulan algoritmada iterasyon sayısının değişken sayısının artmasına rağmen genel olarak düşmesidir. Bu da değişken sayısı arttıkça yani problemin boyutu büyüdükçe alt problemin çözümü için verilen algoritmada ortaya çıkan kombinasyonların sayısının artmasından kaynaklanmaktadır. Daha fazla kombinasyon alt problemin çözümü için daha fazla aday vereceğinden alt problemin çözümü daha kolaylaşacaktır.

SONUÇ

Bu çalışmada son yıllarda daha çok optimizasyon teorisinde olmak üzere matematiğin farklı dallarında geniş biçimde uygulama alanı bulan soyut konvekslik kavramı, eşitsizlik teorisinde ve bir optimizasyon probleminin çözümünde kullanılmıştır. Bir f fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgede, onu majorize eden fonksi-yonların bir altkümesinin infimumu olarak gösterilebileceği gerçeğine (f'nin o fonksi-yonlar kümesine göre soyut konkav olmasına) dayanarak ispatlanan bir teorem ifade edilmiştir. Ağırlıklı aritmetik, ağırlıklı geometrik ve ağırlıklı harmonik orta gibi iyi bilinen ortaların üreteç fonksiyonu olan $M_t(x, \alpha)$ fonksiyonunun bu teoremin koşulları sağladığı saptanmış ve teorem yardımıyla ağırlıklı geometrik-aritmetik orta eşitsizliği ve ağırlıklı harmonik-geometrik orta eşitsizliği keskinleştirilerek yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Dolayısıyla $M_t(x, \alpha)$ ile üretilen ortalar arasındaki eşitsizliklerin iyileştirilmesi için bir şema da verilmiştir, fakat bu şemanın her zaman yeni bir eşitsizlik vermeyebileceği aritmetik-kuadratik orta eşitsizliği üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca iyi bilinen Cauchy-Schwarz eşitsizliği ele alınmış ve teorem koşulları sağlanmasına rağmen bu şemanın bu durum için çalışmadığı gösterilmiştir. Keskinleştirilen eşitsizliklerin ne derece keskinleştirildiğinin görülmesi için sayısal örnekler verilmiş ve ağırlıkların üç farklı durumlarına göre keskinleştirilme miktarları gösterilmiştir.

İkinci olarak, artan pozitif homojen bir fonksiyonun birim simpleks üzerindeki minimum değerini bulma problemi için 1999 yılında M. Andramonov, A. Rubinov ve B.M. Glover (Andramonov vd 1999))tarafından geliştirilen kesen açı yönteminde önemli bir aşama olarak ortaya çıkan bir diğer optimizasyon problemi ele alınmıştır. Verilen algoritma artan pozitif homojen fonksiyonların, minimum tip fonksiyonlar kümesine göre soyut konveks olması gerçeğine dayanmaktadır. Bu çalışmada, bu problemin çözümü için geometrik yorumlanabilen bir algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritmanın çözümü verdiği teorik olarak ispatlanmış ve daha sonra Bagirov ve Rubinov 2000'de verilen örnekler üzerinde algoritma uygulanmıştır. Sonuç olarak ana problemin çözümünde, hem iterasyon sayısını hem de hesap için geçen (bağıl) süreyi önemli derecede azalttığı gözlemlenmiştir.

Bu çalışmamızın, bu problemi uygulamalarında kullanan bilim adamlarına büyük katkı sağlayacağı beklenmektedir.

KAYNAKLAR

ADİLOV, G.R., TINAZTEPE, G. and KEMALİ, S. 2005. On the Solution of an Optimization Problem Expressed via Increasing Positively Homogeneous Functions. *Proceedings of The 16th Jangjeon Mathematical Society*, 4-6 July, 1-6.

ADİLOV, G.R. and TINAZTEPE, G. 2005. The asymptotic aggregation problem and the macrodescription of high dimensional systems. *Mathematical Modelling and Analysis*, 10 (2), 101-112.

ADİLOV, G.R. and RUBINOV, A.M. 2006. B-convex sets and functions. *Numerical Functional Analysis and Optimization,* 27, (3-4), 237–257.

ADİLOV, G.R. and TINAZTEPE, G. 2006a. The Sharpening Some Inequalities via Abstract Convexity. *Mathematical Inequalities and Applications.* (submitted).

ADİLOV, G.R. and TINAZTEPE, G. 2006b. On the Asymptotic Aggregation Problem of High Dimensional Systems. *System and Control Letters*, 55 (5), 414-417.

ADİLOV, G.R., TINAZTEPE, G. and TINAZTEPE, R. 2007 On the solution of global minimization of increasing positively homogeneous functions over the unit simplex. *International Journal of Computer Mathematics.* (submitted)

ADİLOV, G.R. and KEMALİ, S. 2007. Hermite-Hadamard-Type Inequalities for Increasing Positively Homogeneous Functions. *Journal of Inequalities and Applications*, Vol. 2007, 1-10.

ANDROMONOV, M.Y., RUBINOV, A.M. and GLOVER, B.M. 1999. Cutting Angle methods in Global Optimization. *Applied Mathematics Letters*, 12, 95-100.

BABAYEV, DJ.A. 2000. An exact method for solving the subproblem of the cutting angle method of global optimization. Optimization and Related Topics, in Kluwer Academic Publishers, ser. *Applied Optimization*, 47, 15-26, Dordrecht.

BAGIROV, A.M. and RUBINOV, A.M. 2000. Global minimization of increasing positively homogeneous function over the unit simplex. *Ann. Oper. Res,* 98, 171-187.

BAGIROV, A.M. and RUBINOV, A.M. 2003. Cutting angle method and a local search. *Journal of Global Optimization*, 27, 193-213.

BECKENBACH, E. and BELLMAN, R. 1961. Inequalities. Springer-Verlag, pp. 198.

DRAGOMIR, S.S. and PEARCE, C.E.M. 1998. Quasi-convex Functions and Hadamard's Inequality. *Bulletin of Australian Mathematical Society*, 57, 377-385.

DRAGOMIR, S.S., DUTTA, J. and RUBINOV, A.M. 2004. Hermite-Hadamard Type Inequalities for Increasing Convex Along Rays Functions. *Analysis,* 24 (2), 171–181, Munich.

DUTTA, J., MARTINEZ-LEGAZ, J.E. and RUBINOV, A.M. 2004a. Monotonic Analysis over Cones: I. *Optimization,* 53 (2), 129-146.

DUTTA, J., MARTINEZ-LEGAZ, J.E. and RUBINOV, A.M. 2004b. Monotonic Analysis over Cones: II. *Optimization,* 53 (5-6), 529-547.

HORST, R., PARDALOS, P.M. and THAOI, N.V. 2000. Introduction to Global Optimization. Kluwer Academic Publishers, pp. 138, Dordrecht.

KUTATELADZE, S.S. and RUBINOV, A.M. 1972. Minkowski duality and its applications, *Russian Math. Surveys*, 27, 137-191.

KUTATELADZE, S.S. and RUBINOV, A.M. 1976. Minkowski duality and its applications, Nauka, Novosibirsk (In Russian).

MINOUX, M. 1986. Mathematical programming: theory and algorithms. Wiley, pp. 489, Chichester.

NURİYEV, U.G. 2005. An Approach to the Subproblem of the Cutting Angle Method of Global Optimization. *Journal of global optimization*, 31 (3), 353-370.

PALLASCHKE, D. and ROLEWICZ, S. 1997. Foundations of Mathematical Optimization (Convex Analysis Without Linearity). Kluwer Academic Publishers, pp. 582, Dordrecht.

PARDALOS, P.M. and ROSEN, J.B. 1987. Constrained Global optimization: Algorithms and Applications. Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, pp. 268, Berlin.

PEARCE, C.E.M. and RUBINOV, A.M. 1999. P-functions, Quasiconvex Functions and Hadamard-type Inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 240, 92-104.

ROCKAFELLAR, R.T. 1970. Convex Analysis. Princeton University Press, pp. 451, New Jersey.

RUBINOV, A.M. and GLOVER, B.M. 1998. Duality for increasing positively homogeneous functions and normal sets. *RAIRO-Operations Research*, 32, 105-123.

RUBINOV, A.M. 2000a. Abstract Convexity and Global Optimization. Kluwer Academic publishers, pp. 490, Dordrecht.

RUBINOV, A.M. 2000b. Abstract Convexity:Example and Applications. *Optimization*, 47, 1-33.

RUBINOV, A.M. and GASIMOV, R.N. 2003. Strictly increasing positively homogeneous functions with application to exact penalization. *Optimization,* 52 (1), 1–28.

RUBINOV, A.M. and WU, Z.Y. 2007. Optimality Conditions in Global Optimization and Their applications. *Mathematical Programming (Series B)*, Accepted.

SHARIKOV, E.V. 2003. Hermite-Hadamard Type Inequalities for Increasing Radiant Functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 4 (2), Article 47.

SINGER, I. 1984. Generalized Convexity, functional hulls and applications to conjugate duality in optimization. In: Selected topics in operation research and mathematical economics, Lecture notes in Econ. and Math. Syst., 226, 80-87.

SINGER, I. 1997. Abstract Convex Analysis. John Wiley and Sons Inc., pp. 491, New York.

TUY, H. 1998. Convex Analysis and Global Optimization. Kluwer Academic Publishers, pp. 339, Dordrecht.

EK-1: **Örnek 4'te verilen fonksiyon için yazılan program kodu**

```
PROGRAM optalgn;
uses crt,dos;
label cikis1;
type matris=array [1..90,1..20] of real;
var
a,x,c:matris;
u:char;akum,bkum,sett: set of 1..20;
isenk:array [1..20] of real;
ps,cs,kl,tl,cl,n,i,cr,cp,j,k,s,m,p,y,zh,zk,pd:integer;z,zv,epsilon,mz:real;
bl,gs,fb,hj,blm,gsm,fbm,hjm:word;sz,dr:byte;
{Asagidaki fonksiyon cr tane l vektoruyle yapilan h(x) fonksiyonu }
FUNCTION ha(p:integer;x:matris):real;
var s,zt:real;i:byte;
Function fa(i:byte):real;
var s,zs:real;j:integer;
begin
s:=a[i,1]*x[p,1];
j:=2;
repeat
zs:=a[i,j]*x[p,j];
if s<zs then s:=s else s:=zs;
j:=j+1;
until j=k+1;
```

```
fa:=s;
end;
begin
for i:=1 to cr do
for j:=1 to k do
s:=fa(1);
for i:=2 to cr do
begin
zt:=fa(i);
if zt>s then s:=zt else s:=s;
end;
ha:=s;
end;
{Asagidaki fonksiyon f(x) amaç fonksiyonudur}
FUNCTION fonk(p:byte;x:matris):real;
var
i,j:byte;
s,mlp,zc,bn,mf:real;
begin
s:=0;
mlp:=0;
for j:=1 to k do
mlp:=mlp+((20*x[p,j])/(j*(1+abs(1-j))));
bn:=0;
```

```
for i:=2 to 40 do
begin
s:=0;
for j:=1 to k do
begin
mf:=((20*i*x[p,j])/(j*(1+abs(i-j))));
s:=s+mf;
end;
if mlp<s then mlp:=s;
end;
zc:=0;
for j:=1 to k do
begin
zc:=zc+5*abs(sin(1)*sin(j))*x[p,j];
end;
bn:=0;
for i:=2 to 20 do
begin
bn:=0;
for j:=1 to k do
begin
bn:=bn+5*abs(sin(i)*sin(j))*x[p,j];
end;
if bn<zc then zc:=bn;
```

```
end;
fonk:=zc+mlp;
end;
PROCEDURE k_li_secme(var zk:integer; var vs:real);
label m0,m1,m2;
var
a1:array [0..100] of integer;
i,j,m,n,mp,nk:integer;t,si,sp,tp:real;
Procedure minbul(i:integer; var t:real);
var
j:integer;

begin
t:=a[a1[1],i];
for j:=1 to k do
begin
if t < a[a1[j],i] then begin t:=t end else t:=a[a1[j],i];
end;
end;
begin
tp:=200000000000000000.0;
mp:=0;
a1[0]:=0;i:=0;
m0:
begin
```

```
i:=i+1; a1[i]:=a1[i-1];
end;
m1:
begin
a1[i]:=a1[i]+1;
if a1[i] > cr-k+i then goto m2;
if i<k then goto m0;
{burada secilmis k tane vektorun bir kombinasyonunu yaziyor
bu bize k x k lik matris verir}
sett:=[];
for j:=1 to k do
begin
sett:=sett+[a1[j]];
end;
if cr in sett then
begin
for j:=1 to k do
begin
begin
for i:=1 to k do
write(a[a1[j],i],'+++ ');
end;
end;
end else goto m1;
```

{Asagida her sutunun en kucuk elemanini bulup indisliyoruz

i. sutunun en kucugu isenk[i] dir.}

for i:=1 to k do

begin

minbul(i,t);

isenk[i]:=t;

writeln(i,’. sutunun en kucugu: ’,isenk[i]);

{Asagida her sutunun en kucuk elemaninin sutunda sadece bir defa oldugu kontrol ediliyor}

begin

for i:=1 to k do

begin

m:=0;

for j:=1 to k do

begin

if isenk[i]=a[a1[j],i] then

begin

m:=m+1;

end;

end;

if m<>1 then goto m1;

{her sutunda birden fazla ise

minimum asagidaki 2. elemeye hic girmesin dedik}

end;

{Asagida her sutunun en kucuk elemaninin farkli surunda oldugu kontrol ediliyor}

```
begin
bkum:=[];
for i:=1 to k do
for j:=1 to k do
if isenk[i]=a[a1[j],i] then bkum:=bkum+[j];
end;
if akum=bkum then
{Asagida yeni bulunan ve minimum olan vektor belirleniyor}
begin
mp:=mp+1;
si:=0;
for i:=1 to k do
begin
si:=si+(1/isenk[i]);
end;
writeln('yeni bulunan noktanin koordinatlari:');
for i:=1 to k do
begin
x[mp,i]:=1/(si*isenk[i]);
end;
{simdi bulunan bu vektorun kendisinden once bulunan vektorlerle
H(x) yardimiyla kiyas edilerek global minimum olanin belirlenmesi lazim}
sp:=ha(mp,x);
```

```
if tp<sp then tp:=tp else
begin
tp:=sp;
zk:=mp;
end;
end else begin nk:=nk+1; end;
end;
writeln;
goto m1;
end;
m2:
begin
i:=i-1;
if i>0 then goto m1;
end;
vs:=fonk(zk,x);
writeln('burada kli secme bitti');
end;
{Asagidaki prosedur vektorleri alip duzgunlestiriyor}
PROCEDURE eleme(n:byte);

var
s,tl,i,p,y,m,cl,kl,cr:byte;
begin
s:=0;
```

```
tl:=0;
i:=1;
begin
repeat
begin
repeat
begin
p:=0;
tl:=0;
for y:=i+1 to n-s do
begin
begin
kl:=0;
cl:=0;
for m:=1 to k do
begin
if (a[i,m]>=a[y,m]) then begin kl:=kl+1; end;
if (a[y,m]>=a[i,m]) then begin cl:=cl+1; end;
end;
if kl=k then
begin s:=s+1;tl:=tl+1; ps:=4; end
else if cl=k then
begin s:=s+1;tl:=tl+1;
for m:=1 to k do
```

```
begin a[i,m]:=a[y,m]; end;
end
else if (cl<>k) and (kl<>k) then
begin p:=p+1;
for m:=1 to k do
begin a[i+p,m]:=a[y,m] end;
end;
end;
end;
end;
until tl=0;
end;
cr:=i;
if s=n-1 then i:=n-s else
i:=i+1;
until cr=n-s;
for i:=1 to cr do
begin
for j:=1 to k do
begin
write(a[i,j]);
write('*** ');
end;
writeln;
```

```
end;

if cr<k then write('bulunan vektor sayisi boyuttan kucuk cikti.') else writeln('v. sayisi boyuttan buyuk iyi haber');

end;

cp:=cr;

end;

BEGIN

clrscr;

textcolor(white);

write(' kac bilesenli eleman gireceksin? ');

readln(k);

write('hassasiyet nedir?');

read(epsilon);

gettime(blm,gsm,fbm,hjm);

writeln(blm,' ',gsm,' ',fbm,' ',hjm);

n:=k;

for i:=1 to n do

begin

for j:=1 to k do

begin

if i=j then c[i,j]:=1 else

c[i,j]:=0;

end;

end;

for i:=1 to k do
```

```
begin
c[k+1,i]:=1/k;
end;
for i:=1 to n do
begin
for j:=1 to k do
begin
if i=j then a[i,j]:=fonk(i,c) else
a[i,j]:=200000;
writeln('a[',i,j,']= ',a[i,j]);
end;
end;
for j:=1 to k do
begin
a[k+1,j]:=fonk(k+1,c)/c[k+1,j];
writeln('a[',k+1,j,']= ',a[k+1,j]);
end;
n:=n+1;
eleme(n);
cr:=cp;
write(cr);
{Asagida akum=1,2,3,...,k kuruluyor}
akum:=[];
for i:=1 to k do
```

```
begin
akum:=akum+[i];
end;
begin
dr:=2;
zk:=k+1;
for i:=1 to k do
x[zk,i]:=1/k;
repeat
mz:=fonk(zk,x);
k_li_secme(zk,zv);
for i:=1 to k do
begin
a[cr+1,i]:=zv/x[zk,i];
end;
eleme(cr+1);
cr:=cp;
dr:=dr+1;
writeln(dr,'. iterasyon yapildi.');
until abs(zv-mz)<epsilon;
writeln('bu is ',dr-2, 'adim surdu');
end;
writeln(blm,' ',gsm,' ',fbm,' ',hjm);
gettime(bl,gs,fb,hj);
```

```
write(bl,' ',gs,' ',fb,' ',hj);

readln;

readln;

END.
```

ÖZGEÇMİŞ

Gültekin Tınaztepe, 1978 yılında Antalya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Antalya'da tamamladı. 1994 yılında girdiği Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 1999 yılında mezun oldu. 2000 - 2003 yılları arasında, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansını tamamladıktan sonra, 2003 yılında yine aynı Anabilim dalında doktora öğrenimine başladı. Halen, Matematik Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.